

Григорій Бевз, Валентина Бевз,
Дарина Васильєва, Наталія Владімірова

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авт. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.)

Київ
Видавничий дім «Освіта»
2026

Умовні позначення



— попрацюйте в парах



— попрацюйте в групах



— склади розповідь чи задачу



— завдання для обговорення в парі



— завдання дослідницького характеру



— завдання з використанням ІКТ



— завдання, рекомендоване для домашньої роботи

До підручника розроблено інтерактивний електронний додаток.

Щоб ознайомитись із матеріалами додатка,

перейдіть за посиланням

<https://profile.gioschool.com/ua/auth>

Логін: test150033@gioschool.com Логін: test152296@gioschool.com

Пароль: Qwerty1234

Пароль: Qwerty1234

ДОРОГІ ДЕВ'ЯТИКЛАСНИКИ ТА ДЕВ'ЯТИКЛАСНИЦІ

Настав новий навчальний рік і ви з новими силами продовжуєте підкоряти алгебру — цікаву і важливу складову математики. Опанування цією наукою є запорукою для подальшого успішного вивчення інших навчальних предметів, для повноцінного життя в сучасному суспільстві.

Значення алгебри для людини розкривали відомі математики:
Алгебра розширює та удосконалює людський розум.

(Л. Пуансо).

Люди, які не знайомі з алгеброю, не можуть уявити тих дивовижних речей, яких можна досягти за допомогою вказаної науки.
(Г. Лейбніц).

Алгебра сьогодні пронизує майже всі галузі знань і є мовою, якою «говорять, пишуть і думають» інші науки. Важко уявити сферу діяльності, де не використовують математику. За допомогою математичних моделей описують реальні процеси, математичними методами користуються соціологи й інженери, юристи й біологи, архітектори й музиканти.

Проте, аби ця мова стала вашою рідною, необхідно пам'ятати: головним архітектором ваших знань є ви самі. Успіх у сучасному світі неможливий без самостійності та відповідальності за власне навчання.

Аби стати фахівцем у майбутньому, здобути гідну освіту та бути успішними у дорослому житті, необхідно докласти багато зусиль. А вивчення алгебри — одна зі сходинок до успіху на вашому шляху. Черпайте алгебраїчні знання, розширюючи і доповнюючи досвід, отриманий у попередні роки.

Сподіваємося, що цей підручник стане вам добрим помічником в опануванні алгебри, у набутті нових знань, умінь і досвіду, у гармонійному розвитку вашої особистості.

Бажаємо вам натхнення, щирої допитливості та великих успіхів у підкоренні вершин математичної науки

Авторський колектив

Перш ніж працювати з підручником, перейди за посиланням <https://vse.ee/czrz> та повтори відомості за 8 клас



Розділ 1. НЕРІВНОСТІ

МИТРОПОЛЬСЬКИЙ Юрій Олексійович

(1916–2008) український математик і механік, академік НАН України (1961), іноземний академік-кореспондент Академії наук у Болоньї (Італія, 1971), Герой України, Заслужений діяч науки України, доктор технічних наук, дійсний член Наукового товариства ім. Т. Г. Шевченка у Львові.



«Математика — мов поезія. Ця схожість — не тільки в красі форм, у витонченій строгості математичних теорій, а й у могутності впливу математики на інші науки».

Ю. О. Митропольський

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

§ 1	Загальні відомості про нерівності	§ 5	Об'єднання і переріз множин. Числові проміжки
	General information about inequalities		Union and intersection of sets. Number intervals
§ 2	Властивості числових нерівностей	§ 6	Системи нерівностей з однією змінною
	Properties of number inequalities		Systems of inequalities with one variable
§ 3	Подвійні нерівності	§ 7	Доведення нерівностей
	Double inequalities		Proving inequalities
§ 4	Розв'язування нерівностей з однією змінною		Навчальний проект №1 «Цікаві нерівності»
	Solving inequalities with one variable		

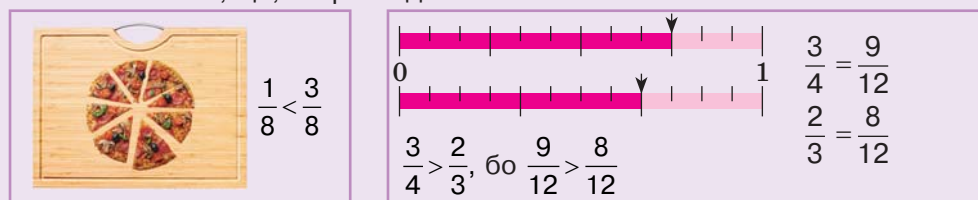
Нерівності використовують так само часто, як і рівності. Як і рівності, нерівності бувають числові та зі змінними. Деякі з них доводять, інші — розв'язують.

За допомогою нерівностей зручно моделювати реальні ситуації та процеси довкілля, зокрема відношення більше — менше, коротше — довше та ін. Визначну роль нерівності відіграють у дослідженні функцій: встановлення найбільших і найменших значень функції на деякому проміжку, визначення проміжків зростання і спадання функції тощо.

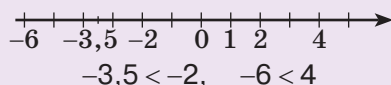
ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо, як порівнюють числа.

Ти вже знаєш, що, наприклад:



Із двох чисел на координатній прямій більше те, яке розташоване правіше, а менше те, яке розташоване лівіше.



§ 1. Загальні відомості про нерівності

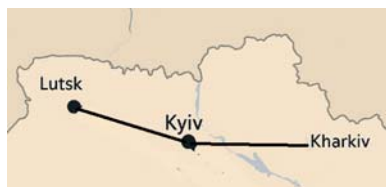
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- строга нерівність — *strict inequality*
- нестрога нерівність — *non-strict inequality*
- порівняти — *compare*

Повсякчас ми щось порівнюємо: швидкості інтернету, вартості проїзду, діагоналі моніторів, висоти споруд, результати змагань, кількості балів ЗНО тощо. Математичною моделлю відношень «більше» і «менше» є нерівність. Наприклад, відстань від Києва до Харкова ($d_1 = 407$ км) більша, ніж відстань від Києва до Луцька ($d_2 = 368$ км). Це записують так:

$$407 > 368 \quad \text{або} \quad d_1 > d_2.$$

Якщо число a менше або більше від числа b , то записують відповідно $a < b$ або $a > b$. Наприклад, $3 < 5$, $-7 > -13$.



Число a більше від b , якщо різниця $a - b$ — число додатне; число a менше від b , якщо різниця $a - b$ — число від'ємне.

Оскільки різниця $a - b$ може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю, то для довільних дійсних чисел a і b виконується одне і тільки одне з трьох співвідношень:

$$a > b, \quad a < b \quad \text{або} \quad a = b.$$

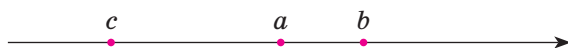
Щоб порівняти дробби $\frac{4}{9}$ і $\frac{11}{25}$, знайдемо їх різницю:

$$\frac{4}{9} - \frac{11}{25} = \frac{100}{225} - \frac{99}{225} = \frac{1}{225}.$$

Різниця даних дробів — число додатне, тому $\frac{4}{9} > \frac{11}{25}$.

На координатній прямій меншому числу відповідає точка, що лежить ліворуч від точки, яка відповідає більшому числу. Наприклад, малюнок 1.1 відповідає таким співвідношенням:

$$c < a, \quad a < b, \quad c < b.$$



Мал. 1.1

Нерівність — абстрактна математична модель відношень менше — більше, нижче — вище, коротше — довше, вужче — ширше, тонше — товстіше, дешевше — дорожче, молодше — старше та багатьох інших.

Крім знаків $<$ (менше) і $>$ (більше) часто використовують також знаки: $\leq$ — менше або дорівнює (не більше), $\geq$ — більше або дорівнює (не менше).

Запис $a \leq b$ означає, що $a < b$ або $a = b$.

Запис $a \geq b$ означає, що $a > b$ або $a = b$.

Наприклад, можна стверджувати, що $2 \leq 5$, $4 \geq 4$, $-\frac{1}{2} \leq -0,5$.

Знаки $<$ і $>$ називають **знаками строгої нерівності**. Вони протилежні один одному: якщо $a < b$, то $b > a$, і навпаки. Знаки $\leq$ і $\geq$ також протилежні один одному, їх називають **знаками нестрокої нерівності**. Будь-який із знаків $<$, $>$, $\leq$ і $\geq$ називають **знаком нерівності**.

Два вирази, сполучені знаком нерівності, утворюють **нерівність**.

Приклади нерівностей: $3 < \sqrt{10}$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $3x - 5 > 0$.

права частина нерівності

ліва частина нерівності

НЕРІВНОСТІ

Числові

обидві частини нерівності —
числові вирази

$$\underbrace{2 < 3, \sqrt{2} \geq 1}_{\text{правильні}}, \underbrace{-3 < -5}_{\text{неправильна}}$$

Зі змінними

хоча б одна з частин
містить змінну

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad 2x + 3 > 5$$

Нерівність зі змінними при одних значеннях змінних може бути правильною, а при інших — неправильною.

Наприклад, нерівність $2x + 3 > 5$ правильна, якщо x дорівнює 2, 3, 4, 5, а якщо x дорівнює 1, 0, -1, -2, — неправильно. Говорять, що значення 2, 3, 4, 5 дану нерівність задовольняють, а 1, 0, -1, -2 — не задовольняють.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Крім наведених вище знаків нерівності ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) часто використовується ще знак $\neq$ (не дорівнює). Якщо, наприклад, співвідношення «не більше» ($a \leq b$) означає $a < b$ або $a = b$, то співвідношення «не дорівнює» ($a \neq b$) означає $a < b$ або $a > b$.

Відношення «не дорівнює» принципово відрізняється від «не більше». Для всіх відношень рівності і нерівності, які позначають знаками $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, справджується властивість транзитивності, тобто із $a \leq b$ і $b \leq c$ випливає, що $a \leq c$. А для відношення «не дорівнює» така властивість може не справджуватись: із $a \neq b$ і $b \neq c$ не завжди випливає $a \neq c$. Наприклад, $2 \neq 3$ і $3 \neq 2$, але відношення $2 \neq 2$ хибне, неправильно.

Тому далі, говорячи про нерівності, матимемо на увазі два числа або вирази, сполучені будь-яким із знаків $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, але не знаком $\neq$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. За якої умови число a більше за c ?
2. Що таке нерівність?
3. Які бувають нерівності?
4. Які нерівності називають строгими, які — нестрогими?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Яке з чисел a і b менше, якщо:

а) $a - b = (-1)^2$; б) $a = b - 3$; в) $a - 5 = b$?

Розв'язання. а) $a - b = (-1)^2 = 1$ (число додатне), отже, $a > b$;
 б) знайдемо різницю чисел a і b : $a - b = -3$ (число від'ємне), отже, $a < b$;
 в) $a - b = 5$ (число додатне), отже, $a > b$.

Відповідь. а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$.
2. За якої умови вираз $4 - (2x + 3)^2$ має найбільше значення?

Розв'язання. Даний вираз має найбільше значення, якщо від'ємник $(2x + 3)^2$ найменший. А вираз $(2x + 3)^2$ має найменше значення, якщо $2x + 3 = 0$, тобто при $x = -1,5$.

Відповідь. Якщо $x = -1,5$.



3. Яка з різниць більша і у скільки разів:

$$2009^{2010} - 2009^{2009} \text{ чи } 2009^{2009} - 2009^{2008}?$$

Розв'язання. $2009^{2010} - 2009^{2009} = 2009^{2009} (2009 - 1) = 2008 \cdot 2009^{2009}$;

$$2009^{2009} - 2009^{2008} = 2009^{2008} (2009 - 1) = 2008 \cdot 2009^{2008};$$

$$(2008 \cdot 2009^{2009}) : (2008 \cdot 2009^{2008}) = 2009.$$

Відповідь. Перша різниця більша за другу в 2009 разів.

ВИКОНАЙ УСНО

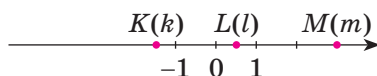


1. Що означають записи $a \leq b$, $a \geq b$? Прочитай їх.

2. Яке з чисел x і y менше, якщо:

а) $x - y = 1$; б) $x - y = -1$; в) $y - x = 2$; г) $y - 5 = x$?

3. Точки K , L , M з координатами k , l , m розміщено на координатній прямій, як показано на малюнку 1.2. Порівняй числа:



Мал. 1.2

а) k і m ;

б) k і 1;

в) m і l ;

г) 0 і l ;

г) k і l ;

д) m і -1 .

4. Яка з нерівностей хибна?

А $2 \geq 2$

Б $-3 < -5$

В $-3 \leq 2$

Г $-5 \leq -2$

5. Порівняй числа:

а) $1,28$ і $\frac{5}{4}$;

б) $0,02$ і $1\frac{1}{50}$;

в) $-\frac{1}{3}$ і $-0,33$;

г) $1,6$ і $\frac{5}{3}$.

6. Порівняй дроби:

а) $\frac{5}{7}$ і $\frac{3}{7}$;

б) $-\frac{4}{3}$ і $-\frac{4}{5}$;

в) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$;

г) $-\frac{7}{13}$ і $-\frac{13}{27}$.

7. Чи завжди значення $\frac{1}{x}$ менше за відповідне значення x ?

8. Як думаєш, що означає такий дорожній знак?



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО



- 9.**  **Гра.** Один з учнів / одна з учениць записує два дробових числа, а другий / друга має порівняти їх, потім учні / учениці міняються ролями.

10. Яке з чисел a чи b більше, якщо:

а) $a - b = 0,01$; б) $a - b = -3,7$; в) $a = 2,3 + b$;
 г) $b - a = (-3)^2$; д) $a - b = 0$; е) $b = a + 1$?

11. Порівняй числа m і n , якщо:

а) $m - n = 0,5$; б) $n - m = 5$;
в) $m - 4 = n$; г) $m + 3 = n$.

12. Які з нерівностей правильні:

а) $-7 > -5$; б) $4,3 \geq -3,4$; в) $\sqrt{5} \leq \pi$;
г) $\frac{1}{0,5} > 0,5$; р) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \geq 1,5$; д) $\pi \leq 3,14$?

13. Порівняй числа:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{10}{11} \text{ i } \frac{19}{20}; & \text{б)} \frac{28}{29} \text{ i } \frac{29}{30}; & \text{в)} \frac{48}{49} \text{ i } 0,98; \\ \text{г)} -\frac{7}{9} \text{ i } -\frac{9}{7}; & \text{г)} \frac{2}{15} \text{ i } \frac{9}{17}; & \text{д)} -\frac{5}{7} \text{ i } -\frac{1}{3}. \end{array}$$

14. **НМТ** Укажи правильну нерівність

A $\frac{3}{8} > \frac{5}{8}$ **Б** $\frac{7}{2} < \frac{7}{3}$ **В** $\frac{8}{9} > \frac{9}{8}$ **Г** $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$ **Д** $\frac{19}{21} < \frac{6}{7}$

15. Перший автобус має 38 місць, а другий — на 4 місця більше. Чи вистачить місць в цих двох автобусах для 79 учнів, що хочуть поїхати на екскурсію? Запиши відповідні числові нерівності та зроби висновок.

- 16.** У бібліотеці є 45 підручників з математики, а в кабінеті математики — на 7 менше. Чи вистачить цих підручників, щоб роздати 80 учням? Запиши відповідні числові нерівності та зроби висновок.

17. Точки з координатами a, b, c розміщені на координатній прямій, як показано на малюнку 1.3. Яке з чисел a, b, c найбільше, яке — найменше? Чи правильні нерівності:

а) $a < b$; б) $b < c$; в) $c < a$; г) $b \geq c$?



Мал. 1.3

18. Точки з координатами m, n, p, k розміщені на координатній прямій, як показано на малюнку 1.4. Який знак потрібно поставити замість $*$ у виразі:

а) $m * p$; б) $n * k$; в) $k * m$; г) $p * n$?

Мал. 1.4

19. Розмісти у порядку спадання числа: $3,1$; π ; $\sqrt{10}$; $2 + \sqrt{2}$; $5 - \sqrt{3}$.

20. Гра. Троє учнів та учениць по черзі записують числа, а четвертий / четверта розміщує їх у порядку зростання.

21. Розмісти у порядку зростання числа: 2 ; $\sqrt{5}$; -12 ; $2\frac{1}{2}$; 0 ; -3π .22. Яке з чисел $1,5$; $1\frac{29}{50}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{10}:2$; $\sqrt{7} \cdot 0,5$ найбільше?23. **НМТ** Визнач кількість усіх дробів зі знаменником 28, які більші за $\frac{4}{7}$, але менші від $\frac{3}{4}$.

А шість Б чотири В три Г два Д один

24. Порівняй значення виразів $A = 2x + 3$ і $B = 3x - 2$, якщо:а) $x = -1$; б) $x = 0$; в) $x = 5$; г) $x = 7$.25. Порівняй значення функції $y = 2x - 1$, якщо:а) $x = 1$ і $x = 2$; б) $x = -1$ і $x = -2$; в) $x = 0,1$ і $x = 0,2$.26. Compare the values of the function $y = x^2$, if:а) $x = -20$ і $x = 20$; б) $x = -2$ і $x = -1$; в) $x = -8$ і $x = 0$.27. Чи правильна нерівність $3x - 2 < 7$, якщо:а) $x = 4$; б) $x = 3$; в) $x = 2$; г) $x = 0$?28. Яка з нерівностей правильна за умови, що $x = 10$?А $0,5x + 1 > 3$ Б $-7x + 3 < x$ В $3 - x \geq x - 17$ 29. Доберіть кілька значень змінної x , які задовольняють нерівність:а) $2x + 3 < 0$; б) $3 - x^2 > 0$; в) $x + \frac{1}{x} < 1$.30. Добери кілька значень змінної n , які задовольняють нерівність:а) $3n - 2 > 2n - 3$; б) $5n + 8 \leq 8n - 1$.**ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б**

31. Запиши у порядку зростання числа:

 $(-n)^2$; $\sqrt{2}$; -1^2 ; $1\frac{2}{3}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $(-2)^3$; $\sqrt{81}$; -5 ; $(-3)^0$.

32. Запиши у порядку спадання числа:

 -2π ; $\sqrt{10}$; 297^0 ; $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$; $\frac{1}{0,3}$; $\frac{\pi}{10}$; 0^{297} ; $(-2)^5$; π ; $-\frac{25}{4}$.

33. **НМТ** Розташуй у порядку зростання числа $\frac{1}{9}$; 0,1; 0,11.

А $\frac{1}{9}$; 0,1; 0,11

Б 0,1; 0,11; $\frac{1}{9}$

В 0,11 $\frac{1}{9}$; 0,1

Г 0,1; $\frac{1}{9}$; 0,11

Д $\frac{1}{9}$; 0,11; 0,1

34. Температура повітря вночі була не нижче -5°C , а вдень — не вище 12°C . Визнач, чи могла різниця між максимальною і мінімальною температурою за добу бути більшою за 18°C . Запиши відповідні числові нерівності та зроби висновок.

35. Температура повітря вранці була не нижче -3°C , а вдень — не вище 10°C . Чи могла різниця температур за добу бути більшою за 14°C ? Запиши відповідні числові нерівності і зроби висновок.

36. Порівняйте значення виразів $A = 5m + 1$ і $B = 19 - 3m$, якщо:



а) $m = 2$; б) $m = \sqrt{7}$; в) $m = 1 - \sqrt{2}$; г) $m = 1 + \sqrt{3}$.

37. Порівняй значення функцій $y = 12 + 45x$ і $y = \frac{12}{x}$, якщо:

а) $x = \frac{3}{5}$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{2}{3}$; г) $x = \frac{2}{5}$.

38. Доведіть, що $10^{11} - 10^{10} > 10^{10} + 10^9$.

39. Яка з різниць більша і в скільки разів:
 $2025^{2026} - 2025^{2025}$ чи $2025^{2025} - 2025^{2024}$?

40. Чи при всіх дійсних значеннях c правильна нерівність:

а) $c^2 + 3 > 0$; б) $(c + 2)^2 > 0$; в) $(c - 1)^2 \geq 0$?

41. Доведи, що при кожному значенні n правильна нерівність:

а) $n^4 + 1 > 0$; б) $(n - 5)^2 \geq 0$; в) $n^2 - 2n + 1 \geq 0$.

42. Доведи, що при кожному a правильна нерівність:

а) $(a - 3)^2 + 2 > 0$; б) $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$; в) $9a^2 + 2 > 6a$.

43. Що більше: квадрат суми двох додатних чисел чи сума їх квадратів?

44. За якої умови вираз $1 + (2x - 3)^2$ має найменше значення?

45. За якої умови вираз $1 - (2x - 3)^2$ має найбільше значення?

Як розміщені на координатній прямій точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ і $D(d)$, якщо (46, 47):

46. $a > b$, $a + b = 2d$ і $b + d = 2c$?

47. $a < b$, $2a = b + c$ і $2d = a + b$?

48. Яке з чисел a чи b більше, якщо:

а) $a + 7,8 = b + 3,5$;

б) $a - 4,5 = b - 2,3$;

в) $8,5 - a = 7,3 - b$;

г) $2a + 3,5 = b - 3,5$?

49. Яке з додатних чисел x чи y більше, якщо:
 а) $2,5x = 3,2y$; б) $5,3 : x = 7,1 : y$;
 в) $x : 3,8 = y : 2,6$; г) $2x - 3y = 5,4$?
50. Порівняй значення виразів:
 а) $a^2 + 36$ і $12a$; б) $4(x + 1)$ і $(x + 2)^2$;
 в) $b^2 + 2$ і $2b + 1$; г) $(y - 3)^2$ і $(y - 2)(y - 4)$.
51. Порівняй невід'ємні числа a і b , якщо:
 а) $a^2 \geq b^2$; б) $b - a = a - b$; в) $a - b = a + b$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

52. Сім зошитів коштують дорожче, ніж 9 олівців. Що дорожче: 12 зошитів чи 15 олівців?
53. Чотири подружки — Даринка Головка, Єва Кучер, Жанна Черкаська і Зоя Коваленко разом зі своїми братами прийшли на ковзанку. Кожний брат був вищий зростом за сестру. Вони розділилися на пари та й почали кататися. З'ясувалося, що в кожній парі «кавалер» вищий за «даму», і ніхто не катається зі своєю сестрою. Найвищим серед друзів виявився Андрій Головка, а найнижчою — Даринка. Відомо, що Жанна і Віктор Черкаські вищі за Юру Коваленка, але нижчі за Єву. З ким катався Борис Кучер?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

54. Розв'яжи рівняння:
 а) $x^2 + 8x + 15 = 0$; б) $x^2 + 10x + 21 = 0$;
 в) $y^2 - 7y - 18 = 0$; г) $z^2 - 9z + 14 = 0$;
 г) $\frac{3x-1}{3x+1} = 2 - \frac{x-3}{x+3}$; д) $\frac{3c}{3c-2} + \frac{2c-9}{2c-5} = 2$.
- Спрости вираз (55, 56).
55. а) $(c - 5)(c + 2) + 3c + 10$; б) $(c^3 - 2c)(2c + c^3) + 4c^2$;
 в) $(a^2 - a + 1)(a + 1) - a^3$; г) $(x^2 - y)(x - y^2) - y^3 + xy$.
56. а) $\sqrt{a} + \sqrt{4a} + \sqrt{9a}$; б) $7\sqrt{x} - \sqrt{9x} + \sqrt{25x}$;
 в) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 + \sqrt{60}$; г) $(\sqrt{15} + 2)^2 - \sqrt{240}$.



СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що:
 $a > b$, якщо $a - b$ — число додатне.
 $a < b$, якщо $a - b$ — число від'ємне.
 Знаю, що:
 запис $a \leq b$ означає, що $a < b$ або $a = b$;
 запис $a \geq b$ означає, що $a > b$ або $a = b$.
- ✓ Умію розрізняти і наводити приклади таких нерівностей:

Строгих	Нестрогих
$12 > 7, x < y$	$-3 \leq 5, a \geq a$

Числових	Зі змінними
$3 > 0, 1,5 < 5,1$	$2x - 5 < 1, a \geq 7a$

- ✓ Хочу навчитися застосовувати поняття, що стосуються нерівностей, для доведення нерівностей.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке числова нерівність
- за якої умови число a більше за b :

$a > b$, якщо $a - b$ — число додатне.

- за якої умови число a менше за b :

$a < b$, якщо $a - b$ — число від'ємне.

§ 2. Властивості числових нерівностей

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- числова нерівність — *numerical inequality*
- знак нерівності — *inequality sign*

Розглянемо таку життєву ситуацію. Молода родина вирішила щомісяця відкладати певну суму грошей у банк під відсотки. Дружина дізналася, що відсоткова ставка за депозитом у банку А менша, ніж у банку В, а чоловік знав, що відсоткова ставка за депозитом у банку С менша, ніж у банку А. Який банк, на твою думку, вибере ця родина



для зберігання коштів, якщо всі інші умови депозитів у банках A , B і C — однакові.

Відповідь на це запитання можна обґрунтувати, використовуючи теорему 1.

Розглянемо властивості числових нерівностей і доведемо їх для нерівностей, що містять знак $<$.

Теорема 1. Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Доведення. Якщо $a < b$ і $b < c$, то числа $a - b$ і $b - c$ — від'ємні. Їх сума $(a - b) + (b - c) = a - c$ — також число від'ємне. А якщо $a - c$ — число від'ємне, то $a < c$. Це й треба було довести.

Теорема 1 виражає *властивість транзитивності* нерівностей з однаковими знаками.

Приклад. Оскільки $\sqrt{1,9} < \sqrt{2}$ і $\sqrt{2} < 1,42$, то $\sqrt{1,9} < 1,42$.

Теорема 2. Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.

Наприклад, якщо $a < b$ і c — довільне дійсне число, то $a + c < b + c$.

Доведення. Якщо $a < b$, то $a - b$ — число від'ємне. Оскільки $(a + c) - (b + c) = a - b$, то різниця $(a + c) - (b + c)$ — число також від'ємне. А це означає, що $a + c < b + c$.

Теорема 3. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай $a < b$ і c — будь-яке додатне число. У цьому випадку числа $a - b$, $(a - b)c$, отже, і різниця $ac - bc$ — числа від'ємні, тобто $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і c — довільне від'ємне число, то добуток $(a - b)c$, а отже, і різниця $ac - bc$ — числа додатні. Тому $ac > bc$.

Приклади. а) $3 < 4$ і $5 > 0$, тому $3 \cdot 5 < 4 \cdot 5$ або $15 < 20$;

б) $3 < 4$ і $-2 < 0$, тому $3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$ або $-6 > -8$.

Оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене до дільника, то в теоремі 3 слово «помножити» можна замінити словом «поділити».

Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; якщо $a < b$ і $c < 0$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Наслідок. Якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Доведення. Поділимо обидві частини нерівності на додатне число ab . Отримаємо правильну нерівність $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$. Звідси $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ або $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Приклад. а) $3 < 5$, тому $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$; б) $4 > 2$, тому $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Теорема 4. Нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати.

Наприклад, якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення. Якщо $a < b$ і $c < d$, то за теоремою 2 $a + c < b + c$ і $b + c < b + d$, звідси за теоремою 1 $a + c < b + d$.

Приклад. $2 < 3$ і $5 < 7$, тому $2 + 5 < 3 + 7$ або $7 < 10$.

Теорема 5. Нерівності з однаковими знаками можна почленно перемножати, якщо їх ліві й праві частини — додатні числа.

Наприклад, якщо $a < b$, $c < d$ і числа a, b, c, d — додатні, то $ac < bd$.

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$, а числа c і b — додатні. Згідно з теоремою 3 $ac < bc$ і $bc < bd$, звідси за теоремою 1 $ac < bd$.

Зауваження. Теореми 4 і 5 правильні також для трьох і довільної кількості нерівностей. Наприклад, якщо $a < b$, $c < d$ і $n < m$, то

$$a + c + n < b + d + m.$$

Доведення теорем 1 – 5 для нерівностей зі знаком « $<$ » майже дослівно можна повторити для аналогічних нерівностей зі знаком « $>$ », « $\geq$ » або « $\leq$ ».

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Чи можна обидві частини нерівності підносити до квадрата або до куба? Нехай a і b — числа додатні; перемножимо почленно нерівності $a < b$ і $a < b$, одержимо $a^2 < b^2$. Перемножимо почленно частини останньої нерівності та $a < b$, одержимо $a^3 < b^3$ і т. д. Отже, якщо числа a і b — додатні, а n — натуральне, то з нерівності $a < b$ випливає $a^n < b^n$.

Якщо хоч одне з чисел a і b від'ємне, то з нерівності $a < b$ не завжди випливає $a^n < b^n$. Наприклад, $-3 < 2$, але нерівності $(-3)^2 < 2^2$, $(-3)^4 < 2^4$ неправильні.

Вираз «якщо числа a і b додатні та $a < b$ » можна записати коротше: «якщо $0 < a < b$ ». Дослідіть, чи завжди правильне твердження: «якщо $0 < a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ».

ПЕРЕВІР СЕБЕ



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфу (Тема. Лінійні нерівності. Урок 1).

1. Сформулюй і доведи теорему:
 - а) про транзитивність нерівностей;
 - б) про додавання до обох частин нерівності одного й того самого числа.
2. Сформулюй теорему про:
 - а) множення обох частин нерівності на одне й те саме число;
 - б) почленне додавання нерівностей з однаковими знаками;
 - в) почленне множення нерівностей з однаковими знаками.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Відомо, що числа a і b додатні, а також $a < 3$, $b < 6$.

Доведи, що $ab < 20$.

Розв'язання. Оскільки числа a і b додатні, то нерівності $a < 3$ і $b < 6$ можна перемножити: $a \cdot b < 3 \cdot 6$, або $ab < 18$. Якщо $ab < 18$, а $18 < 20$, то $ab < 20$.

2. Чи впливає з нерівностей $a < 3$ і $b < 6$ нерівність $ab < 20$, якщо принаймні одне з чисел a і b — від'ємне?

Розв'язання. Якщо одне з чисел a і b від'ємне, а друге — додатне, то добуток ab від'ємний. У цьому випадку нерівність $ab < 20$ правильна.

Якщо числа a і b обидва від'ємні, то нерівність $ab < 20$ може бути як правильною, так і неправильною. Наприклад, якщо $a = -1$, $b = -2$, то $(-1) \cdot (-2) < 20$, отже, нерівність правильна.

Якщо $a = -7$, $b = -10$, то нерівність $(-7) \cdot (-10) < 20$ неправильна.

Відповідь. Ні.

3. Відомо, що $t \geq -5$. Додатне чи від'ємне значення виразу $-3t - 20$?

Розв'язання. Помножимо обидві частини нерівності $t \geq -5$ на -3 , одержимо $-3t \leq 15$ (властивість 4). Додамо до обох частин цієї нерівності число -20 : $-3t - 20 \leq 15 - 20$ (властивість 2), звідси $-3t - 20 \leq -5$. Отже, $-3t - 20 < 0$.

Відповідь. Від'ємне.

ВИКОНАЙ УСНО



57. Оля нижча Ані, а Аня нижча Іри. Порівняй зріст Олі і Іри.

58. Порівняй числа x і z , якщо:

а) $x < y$ і $y < z$; б) $x > y$ і $y > z$; в) $x \leq a$ і $a \leq z$.

59. На одній шальці терезів стоїть гиря 5 кг, а на другій пачка борошна, маса якої менше. Як зміниться розташування шальок терезів, якщо на обидві шальки покласти по гирьці 1 кг?

60. Відомо, що пачка гречки легша за пачку борошна. Порівняй масу 3 таких пачок гречки і 3 таких пачок борошна.

61. Відомо, що $a < b$. Яке з тверджень хибне?

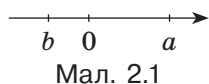
А $a + 5 < b + 5$ Б $2a < 2b$ В $a - 3 > b - 3$ Г $-5a > -5b$

62. Маса однієї дині не більша 5,5 кг, а другої не більша 8,5 кг. Чи може пан Микола донести їх додому у пакеті, що витримує 15 кг?

63. Дивлячись на малюнок 2.1, скажи, значення якого виразу більше:

а) a чи $a + 2b$;

б) b чи $b - 2a$?



64. Додатне чи від'ємне число n , якщо:
 а) $3n < 3,5n$; б) $-1,5n > -n$; в) $0,2n < -n$?
65. Який з дробів $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$ більший, якщо $b < a < 0$?
66. Який з двох від'ємних дробів $\frac{x}{y}$ і $\frac{y}{x}$ менший, якщо $|x| < |y|$?
67. Число a більше за 1. Яким є число: $3a$, $-a$, $1 - a$, $1 + 2a$?
68. Число x менше від -1 . Яким є число: $5x$, $5 - x$, $2 + x$, x^2 ?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



69. Запишіть правильну нерівність, утворену в результаті:
 а) додавання до обох частин нерівності $12 < 18$ числа 5;
 б) віднімання від обох частин нерівності $12 < 18$ числа 77;
 в) множення обох частин нерівності $12 < 18$ на 3; на -5 ;
 г) ділення обох частин нерівності $12 < 18$ на 3; на -6 .
70. Запиши правильну нерівність, утворену в результаті:
 а) додавання до обох частин нерівності $16 > 8$ числа 7;
 б) віднімання від обох частин нерівності $16 > 8$ числа 13;
 в) множення обох частин нерівності $16 > 8$ на -3 ;
 г) ділення обох частин нерівності $16 > 8$ на 4.
71. Порівняй числа a і b , якщо різниці:
 а) $a - c$ і $c - b$ — додатні числа;
 б) $b - c$ і $c - a$ — від'ємні числа;
 в) $a - n$ і $n - b$ — невід'ємні числа.
72. Порівняй числа a і b , якщо:
 а) $a - x \leq 0$ і $x - b \leq 0$; б) $a - m > 0$ і $m - b > 0$;
 в) $a - c > 0$ і $b - c < 0$;
73. Покажи, як розміщені на координатній прямій точки з координатами a , b , c і d , якщо $a < c$, $b > c$, $d > b$.
74. Покажи, як розміщені на координатній прямій точки з координатами a , b , c і d , якщо $a > b$, $a < c$, $d < a$, $d > b$.
75. **НМТ** Укажи правильну нерівність, якщо $a = 5\sqrt{2}$, $b = 7$, $c = \sqrt{51}$.
 А $b < a < c$ Б $a < b < c$ В $c < a < b$ Г $a < c < b$ Д $b < c < a$
76. Відомо, що $a > b$. Постав замість * знак нерівності:
 а) $2a * 2b$; б) $-a * -b$; в) $a - 7 * b - 7$; г) $-\frac{1}{2}a * -\frac{1}{2}b$;
77. It is known that $a < b$. Replace * with an inequality sign:
 а) $1,5a * 1,5b$; б) $-3a * -3b$; в) $-a + 7 * -b + 7$; д) $2a^3 * 2b^3$.

78. Додатне чи від'ємне число a , якщо:

- а) $2a < 3a$; б) $0,5a > a$; в) $-5a < -4a$?

79. **НМТ** Відомо, що $a < b$. Серед наведених нерівностей укажи правильну нерівність.

- А $-2a < -2b$ Б $\sqrt{2}a > \sqrt{2}b$ В $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$ Г $a-4 > b-4$ Д $0,5-a > 0,5-b$

Додай почленно нерівності (80, 81):

80. а) $5 < 12$ і $7 < 8$; б) $6 > 2$ і $-5 > -7$; в) $5 < 6$ і $x < z$.

81. а) $15 > 7$ і $6 > 4$; б) $3 < 6$ і $-3 < -2$; в) $52 > 36$ і $x > y$.

Перемнож почленно нерівності (82, 83):

82. а) $2 < 3$ і $5 < 8$; б) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ і $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$; в) $-6 > -8$ і $-3 > -5$.

83. а) $7 > 5$ і $6 > 3$; б) $5 < 7$ і $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$; в) $-4 < -1$ і $-5 < -4$.

84. **Гра.** Один з учнів/одна з учениць записує строгу нерівність, другий/друга — ще одну. А третій/третя має почленно їх перемножити. Потім учні міняються ролями.

85. Порівняй додатні числа $\frac{c}{a}$ і $\frac{c}{b}$, якщо $a < b$ і $c > 0$.

86. **Відкрита задача.** Склади кілька прикладних задач, що ілюструють властивості числових нерівностей.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

87. Відомо, що $m < n$. Порівняй числа:

- а) $m + 7$ і $n + 7$; б) $-0,1m$ і $-0,1n$; в) $\sqrt{(-1)^2}m$ і $\sqrt{(-1)^2}n$;
г) $1 - m$ і $1 - n$; д) $5m - 1$ і $5n - 1$; е) $-2n - 1$ і $-1 - 2m$.

88. Відомо, що $x > y > 0$. Постав замість * знак нерівності:

- а) $\sqrt{x} * \sqrt{y}$; б) $x^2 * xy$; в) $(1-\sqrt{2})x * (1-\sqrt{2})y$;
г) $\frac{y}{x} * 1$; д) $\frac{1}{x} * \frac{1}{y}$; е) $\frac{x^2y}{y-x} * \frac{xy^2}{y-x}$.

89. Відомо, що $x < y < 0$. Поставте замість * знак нерівності:

- а) $x^3 * y^2$; б) $-x * 10y$; в) $\sqrt{-x} * \sqrt{-y}$;
г) $\frac{1}{x^2} * \frac{1}{y}$; д) $\frac{x}{x-y} * \frac{y}{x-y}$; е) $\frac{x+1}{xy} * \frac{y+1}{xy}$.



90. Доведи, якщо $x > y$ і $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, то $x > 0$ і $y < 0$;

91. Доведи, якщо $a < b$ і $ab < 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

92. Розмісти у порядку зростання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, якщо всі вони додатні та $a < c$, $d < b$ і $d > c$.

93. Розмісти у порядку зростання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, якщо всі вони від'ємні та $a > c$, $d > b$ і $d < c$.

94. Задано правильну нерівність $-18 < 15$. Установи відповідність між умовами (1–3) та результатом виконання цих умов (А–Д).

1 додати до заданої нерівності нерівність $-12 < -9$	А $-12 < 10$
2 поділити обидві частини заданої нерівності на -3	Б $-23 < 7$
3 помножити обидві частини нерівності на $\frac{2}{3}$	В $-30 < 6$
	Г $-26 < 10$
	Д $6 > -5$

95. Доведи, якщо: а) $a \leq b$ і $b \leq c$, то $a \leq c$;

б) $a \leq b$ і $c > 0$, то $ac \leq bc$;

в) $a \leq b$ і $c < 0$, то $ac \geq bc$.

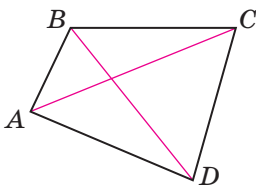
96. Чи правильно, що при додатних значеннях a і b :

а) з $a < b$ випливає $a^2 < b^2$; б) з $a^2 < b^2$ випливає $a < b$;

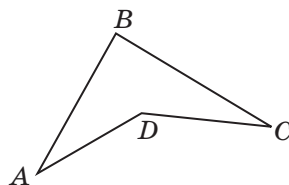
в) з $a < b$ випливає $\sqrt{a} < \sqrt{b}$; г) з $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ випливає $a < b$?

97. Користуючись тотожністю $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, $x \geq 0$ і $y \geq 0$, доведи: якщо $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, то $x > y$.

98. **Практичне завдання.** 1) Намалюй трапецію і паралелограм. Вимірй сторони і діагоналі кожного із цих чотирикутників. З'ясуй, чи правильним є твердження: «Периметр чотирикутника більший від суми його діагоналей». 2) Доведи, що: а) діагональ чотирикутника менша від його півпериметра; б) сума діагоналей чотирикутника менша від його периметра. Розглянь два випадки (мал. 2.2 і 2.3).



Мал. 2.2



Мал. 2.3

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

99. Доведи, що функція:

а) $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $y_1 < y_2$.б) $y = x^2$ зростає, якщо $x > 0$.100. Чи правильно, що для довільних значень a і b :а) з $a > b$ випливає $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; б) з $a < b$ випливає $|a| > |b|$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

101. При якому значенні n графік функції $y = x^2 - 3x + n$ проходить через точку $M(3; 7)$? Через точку $K(-2; 3)$?

102. Розклади на множники тричлен:

а) $x^2 + 2x - 35$; б) $6x^2 - x - 1$;в) $6a^2 + a - 2$; г) $c^2 + \sqrt{2}c - 4$.103. Гра sudoku. Перенеси таблицю в зошит (мал. 2.4). Заповни порожні клітинки цифрами від 1 до 9 так, щоб до кожного рядка, кожного стовпця і кожного виділеного квадрата 3×3 кожна цифра входила тільки 1 раз.

2	4		3		7		
				5	4	3	2
7		3				5	8
9				6			3
8	3	6		1	5		4
			9	3		7	
6	1			9			
				7	1	4	6
3	7		8	4			5

Мал. 2.4

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що таке раціональний дріб.
- ✓ Знаю властивості числових нерівностей і умію їх обґрунтовувати.

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$ Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$ Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$ Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$

- ✓ Умію використовувати властивості числових нерівностей.

$$\begin{array}{l} 12 > 7, 3 > 0 \\ 36 > 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12 > 7, -2 < 0 \\ -24 < -14 \end{array}$$

- ✓ Хочу навчитися застосовувати властивості числових нерівностей для доведення нерівностей.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо властивості числових нерівностей.

Якщо:

$a < b$ і $b < c$, то $a < c$;

$a < b$ і c — довільне число, то $a + c < b + c$;

$a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$;

$a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$;

$a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$;

$a < b$, $c < d$ і a, b, c, d — числа додатні, то $ac < bd$.

§ 3. Подвійні нерівності

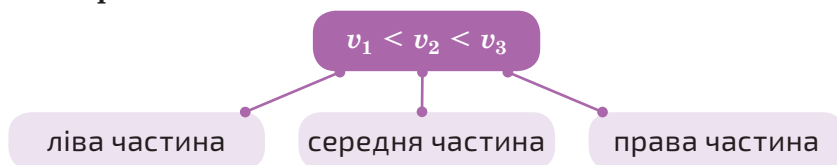
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- подвійні нерівності — *double inequalities*
- оцінити — *evaluate*

Україна — космічна держава. Космічні швидкості — мінімальні швидкості космічного апарата, за яких він може:

- стати супутником Землі (перша космічна швидкість: $v_1 = 7,9$ км/с);
- подолати гравітаційне тяжіння Землі (друга космічна швидкість: $v_2 = 11,2$ км/с);
- покинути Сонячну систему (третя космічна швидкість: $v_3 > 16,67$ км/с).

Співвідношення між цими швидкостями можна записати у вигляді подвійної нерівності:



Приклади:

$3 < x < 4$. Читають: x більше за 3 і менше від 4;

$2a + 3 < x + 3 \leq 5c$. Читають: $x + 3$ більше за $2a + 3$, але не більше за $5c$.

Теорема 6. Якщо до кожної частини правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну подвійну нерівність.

Доведення. Якщо $a < x < b$, то правильні нерівності $a < x$ і $x < b$. Тоді згідно з теоремою 2 для будь-якого дійсного числа c правильні нерівності $a + c < x + c$ і $x + c < b + c$. Отже, $a + c < x + c < b + c$.

Число c може бути як додатним, так і від'ємним. Наприклад:

якщо $2,5 < x - 3 < 2,6$ і $c = 3$, то $5,5 < x < 5,6$;

якщо $0,7 < x + 1 < 1,2$ і $c = -1$, то $-0,3 < x < 0,2$.

Подібним способом можна довести такі твердження:

• якщо $a < x < b$ і $k > 0$, то $ka < kx < kb$;

• якщо $a < x < b$ і $k < 0$, то $kb < kx < ka$;

• якщо $a < x < b$ і $c < y < d$, то:

$$a + c < x + y < b + d;$$

$$a - d < x - y < b - c;$$

$$ac < xy < bd \text{ (при } a > 0 \text{ і } c > 0);$$

$$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \text{ (при } a > 0 \text{ і } c > 0).$$

Зверни увагу на віднімання і ділення подвійних нерівностей!

Від меншого члена першої нерівності віднімають більший член другої, а від більшого — менший. Менший член першої нерівності ділять на більший член другої, а більший — на менший.

Наприклад, якщо $4 < x < 6$ і $2 < y < 3$,

то $4 - 3 < x - y < 6 - 2$, або $1 < x - y < 4$;

то $\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < \frac{6}{2}$, або $\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < 3$.

Розглянуті властивості дають можливість спрощувати подвійні нерівності. Наприклад, замість подвійної нерівності $16 < 3x - 2 < 19$ можна розглядати нерівність $18 < 3x < 21$, або ще простішу: $6 < x < 7$.

Особливо зручно використовувати подвійні нерівності для **оцінювання значень** величин чи виразів. Значення величин, таких як маса, відстань, час тощо, завжди наближені. Важко, зокрема, визначити висоту дерева з точністю до дециметра. Тому вказують, наприклад, що вона більша за 9,2 м, але менша за 9,4 м. Записують це так: $9,2 < h < 9,4$.

Зверни увагу на фрагмент наклейки, що міститься на пляшці з олією (мал. 3.1).

маса нетто 800 ± 10 г.

Мал. 3.1

Цей напис означає, що маса олії, яка міститься у пляшці, не може бути меншою від 790 г і більшою за 810 г. За допомогою подвійної нерівності масу олії (m) без пляшки можна записати так: $790 \text{ г} \leq m \leq 810 \text{ г}$.



Користуючись властивостями подвійних нерівностей, можна оцінити і значення виразів $x + y$, $x - y$, xy , $\frac{x}{y}$.

Нехай, наприклад, $3,5 < x < 3,6$ і $2,1 < y < 2,2$. Тоді

$$\begin{array}{r} 3,5 < x < 3,6 \\ + \\ 2,1 < y < 2,2 \\ \hline 3,5 + 2,1 < x + y < 3,6 + 2,2 \\ 5,6 < x + y < 5,8 \end{array}$$

Щоб знайти $x - y$, скористаємося формулою $x - y = x + (-y)$. Тому спочатку знайдемо $-y$: $-2,1 > -y > -2,2$ або $2,2 < -y < 2,1$. Тоді

$$\begin{array}{r} 3,5 < x < 3,6 \\ + \\ -2,2 < -y < -2,1 \\ \hline 3,5 - 2,2 < x - y < 3,6 - 2,1 \\ 1,3 < x - y < 1,5 \end{array}$$

Оскільки $x > 3,5$ і $y > 2,1$, тобто x і y — додатні, то

$$\begin{array}{r} 3,5 < x < 3,6 \\ \times \\ 2,1 < y < 2,2 \\ \hline 3,5 \cdot 2,1 < xy < 3,6 \cdot 2,2 \\ 7,35 < xy < 7,92 \end{array}$$

Оскільки $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ і $\frac{1}{2,1} > \frac{1}{y} > \frac{1}{2,2}$, тобто $\frac{1}{2,2} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2,1}$, то

$$\begin{array}{r} 3,5 < x < 3,6 \\ \times \\ \frac{1}{2,2} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2,1} \\ \hline \frac{3,5}{2,2} < \frac{x}{y} < \frac{3,6}{2,1} \\ 1\frac{13}{22} < \frac{x}{y} < 1\frac{5}{7} \end{array}$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

За допомогою подвійних нерівностей можна звільнитися від модуля в нерівностях виду $|x| < a$ і $|x| \leq a$, де $a > 0$.

Наприклад, нерівність $|x| < 3$ задовольняють усі значення x , модулі яких менші від 3. Такими є додатні числа, менші від 3, від'ємні числа, більші за -3 , і число 0. Цю множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності так: $-3 < x < 3$.

Аналогічно можна записати нерівність $|x| \leq 3$: $-3 \leq x \leq 3$.

Зверни увагу! Будь-яку нерівність виду $|M| < a$, де $a > 0$ і M — деякий вираз, можна записати у вигляді подвійної нерівності: $-a < M < a$.

А, наприклад, нерівність $|x| > 3$ у вигляді подвійної нерівності записати не можна. Чому?

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклади подвійних нерівностей.
2. Що означає «оцінити значення величини»?
3. Як за допомогою подвійних нерівностей оцінити наближене значення:
а) суми чи добутку двох значень величини; б) різниці (частки) двох значень величини?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Відомо, що $10 < x < 12$. Яких значень може набувати вираз: а) $3x - 5$; б) x^2 ?

Розв'язання. а) Домножимо усі частини нерівності на 3:

$$3 \cdot 10 < 3 \cdot x < 3 \cdot 12, \text{ або } 30 < 3x < 36.$$

Віднімемо від усіх частин нерівності 5:

$$30 - 5 < 3x - 5 < 36 - 5, \text{ або } 25 < 3x - 5 < 31.$$

б) Оскільки всі частини даної нерівності додатні, то їх можна піднести до квадрата: $100 < x^2 < 144$.

Відповідь. а) $25 < 3x - 5 < 31$; б) $100 < x^2 < 144$.

2. Оціни значення виразу $0,2a - b$, якщо $5 < a < 15$ і $2 < b < 7$.

Розв'язання. Якщо $5 < a < 15$, то $1 < 0,2a < 3$.

Якщо $2 < b < 7$, то $-2 > -b > -7$, або $-7 < -b < -2$.

Додамо почленно утворені нерівності:

$$\begin{array}{r} 1 < 0,2a < 3 \\ + \\ -7 < -b < -2 \\ \hline -6 < 0,2a - b < 1. \end{array}$$

Відповідь. $-6 < 0,2a - b < 1$.

ВИКОНАЙ УСНО

104. Прочитай подвійну нерівність:
а) $4 < a < 7$; б) $0 < 0,5 < 1$; в) $-3 < x < 3$.
105. Яка з нерівностей хибна?

А $-7 < 0 < 7$ Б $-1 < -2 < -3$ В $0 < 5 < 10$ Г $-4,4 < -4 < -3,9$

106. Чи задовольняють значення $x = 3$ і $x = -3$ умову:

а) $0 < x < 2x$; б) $-x < x^2 < 3x$; в) $-x < x^2 < -x^3$?

107. Які цілі значення a задовольняють подвійну нерівність:

а) $-1 < a < 1$; б) $-2 < a < 2$; в) $0,1 < a < 1$?

108. Чи існують значення x , які більші за $\frac{8}{9}$, але менші від $\frac{6}{7}$?

109. Наймолодшою лауреаткою Нобелівської премії є Малала Юсафзай з Пакистану, яка отримала Нобелівську премію миру у 2014 році. Її вік є двоцифровим числом, кількість одиниць якого на 6 більша за кількості в ньому десятків. Знайди її вік на момент отримання премії, якщо він більший за 10, але менший від 20.

110. Щоб скласти іспит у школі водіння автомобіля, необхідно здати теоретичну частину не менше, ніж на 80 балів зі 100 та практичну частину не менше 40 балів із 60. Оціни, скільки балів може отримати людина, що склала іспит.

111. Оціни периметр квадратної ділянки, якщо її сторона більша за 1,8 м і менша від 2,1 м. Чи може площа такого квадрата дорівнювати 4 м^2 ?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



112. Запиши у вигляді подвійної нерівності співвідношення:

а) $x < 12$ і $x > 3$; б) $x > -2$ і $x < 2$; в) $x < 30$ і $x > -0,3$.

113. Для моніторів 19–24 дюйми оптимальна відстань від очей до монітора 50–70 см. Запиши цю інформацію за допомогою двох подвійних нерівностей

114. В парку біля деяких атракціонів є інформаційні таблички. Людині якої маси можна кататися: а) на кожному; б) на обох атракціонах?

Атракціон «Веселий дракон»

МАСА $\leq 40 \text{ кг}$  ✓	МАСА $> 40 \text{ кг}$  ✗
---	---

Атракціон «Коловорот»

✗ Не дозволено

Маса $\leq 35 \text{ кг}$

Маса $> 120 \text{ кг}$

115. Чи існують значення s , які: а) менші від -3 і більші за $-\sqrt{10}$; б) більші за 10^{-2} і менші від 10^2 ? Якщо так, то запиши відповідну подвійну нерівність.

116. Відомо, що $4 < n < 5$. Оціни значення виразу:
 а) $n + 3$; б) $n - 5$; в) $2n$; г) $-3n$; ґ) n^2 .
117. It is known that $-3 \leq x \leq 5$. Evaluate the value of the expression:
 а) $2x + 3$; б) $0,1x - 2$; в) $2 - x$; г) $10 - 0,1x$?

118. Знаючи, що $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, оціни значення виразу:
 а) $2 + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3} - 1$; в) $-\sqrt{3}$; г) $2\sqrt{3}$.

119. **Відкрита задача.** Розглянь наклейку на банці з томатним соусом (мал. 3.2). Спробуй покращити подання числових характеристик на ній, використавши різні види нерівностей.



Мал. 3.2

Оціни значення суми $x + y$ та різниці $x - y$, якщо (120, 121):

120. а) $12 < x < 13$ і $5 < y < 6$; б) $0,32 < x < 0,33$ і $0,25 < y < 0,27$.
121. а) $7,2 < x < 7,4$ і $3 < y < 4$; б) $6,42 < x < 6,45$ і $3,15 < y < 3,22$.

Оціни значення добутку xy , якщо (122, 123):

122. а) $3 < x < 4$ і $5 < y < 7$; б) $1 < x < 2$ і $3 < y < 4$.
123. а) $2 < x < 4$ і $3 < y < 3,5$; б) $3 < x < 4$ і $2 < y < 3$.

Оціни значення частки $x : y$, якщо (124, 125):

124. а) $12 < x < 15$ і $5 < y < 6$; б) $6 < x < 8$ і $2 < y < 3$.
125. а) $24 < x < 28$ і $7 < y < 8$; б) $16 < x < 18$ і $3 < y < 4$.

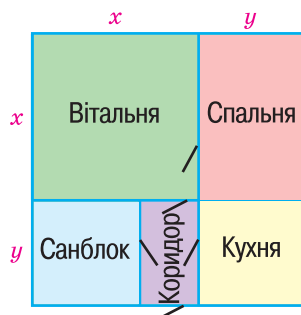
126. **Гра.** Один з учнів/учениць записує подвійну строгу нерівність, другий — ще одну, третій задає, що необхідно оцінити (суму, різницю, добуток, частку) а четвертий має оцінити результат. Потім учні міняються ролями.

127. Вимірявши довжину a і ширину b прямокутної скатертини (у метрах), знайшли, що $1,3 < a < 1,4$, $0,6 < b < 0,8$. Оціни периметр і площу цієї скатертини.
128. Сторона квадратної плитки дорівнює a см, де $4,2 < a < 4,3$. Оціни її периметр і площу.
129. Оціни периметр рівностороннього трикутника, якщо його сторона більша за 1,8 м і менша від 2,1 м. Чи може площа такого трикутника дорівнювати $\sqrt{3} \text{ м}^2$?

130. Довжина ребра куба — c мм, де
 $1,3 \cdot 10^2 < c < 1,4 \cdot 10^2$.

Оціни: а) суму довжин усіх ребер куба;
 б) площу поверхні куба; в) об'єм куба.

131. На малюнку 3.3 зображено план квартири. Відомо, що вся квартира, а також вітальня мають форму квадрата. Оціни площу вітальні, спальні та всієї квартири, якщо $4,9 \text{ м} < x < 5,1 \text{ м}$, $2,9 \text{ м} < y < 3,1 \text{ м}$.



Мал. 3.3



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

132. Відомо, що $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ і $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$, оціни:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; в) $2 - \sqrt{2}$; г) $\sqrt{5} : \sqrt{2}$.

133. Максимальна допустима маса вантажу, який можна завантажити на вантажівку, становить 1,8 тони. Необхідно перевезти за один раз техніку та піддони. Відомо, що маса техніки не перевищує 1690 кг, а маса піддонів не перевищує 95 кг. Чи може загальна маса вантажу перевищити допустиму межу?

134. Нехай α і β — кути трикутника, $62^\circ < \alpha < 63^\circ$; $95^\circ < \beta < 96^\circ$. Оціни міру третього кута.

135. Відомо, що $3,14 < \pi < 3,15$. Оціни площу круглої клумби, якщо її радіус більший за 2,5 дм і менший від 2,6 дм. Оціни, скільки паркану треба для її огорожі.

136. Катети a і b прямокутного трикутника такі, що $8,4 < a < 8,5$, $6,5 < b < 6,6$. Оціни площу цього трикутника і його периметр.

137. Блогер хоче розмістити на Youtube онлайн-курс з 10 відео і розуміти, який бюджет йому для цього знадобиться. Ось яку інформацію йому вдалося зібрати. Для створення онлайн-курсу з 30 відео потрібно 3 місяці. Зарплата проджект-менеджера 50 000–70 000 грн/місяць. Оплата сценаристу становитиме 5 000–10 000 грн за 1 сценарій, продакшн за зйомку та постпродакшн 10 відео коштуватиме орієнтовно 200 000–400 000 грн. Запиши всі дані у вигляді нерівностей. Оціни бюджет, який знадобиться блогеру для створення онлайн-курсу.

138. WBA затвердила створення категорії суперкрузервейту з ваговими межами 201–224 фунтів. Запиши відповідну подвійну нерівність в кілограмах. Дізнайся масу Олександра Усика. Чи належить він до цієї категорії?

139. **Гра.** Один з гравців / одна з гравчинь задає масу людини, а другий / друга на основі наданої таблиці має оцінити зріст людини для кожного з можливих розмірів колгот та записати відповідні нерівності. Потім гравці міняються ролями.

		Маса									
	см/кг	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Зріст	145/150	1/2									
	150/155										
	155/160					3					
	160/165										
	165/170							4			
	170/175										
	175/180										

140. За течією річки човен пливе зі швидкістю a км/год, а проти течії — зі швидкістю b км/год. Оціни швидкість потоку, якщо $40 \leq a \leq 45$ та $34 \leq b \leq 37$.

141. Відомо, що $10 < x \leq 12$. Яких цілих значень може набувати вираз:

а) $2x$; б) $\frac{x^2}{5}$; в) $3x - 5$; г) $\frac{12}{x}$?

142. Відомо, що $-\frac{3}{4} < m < \frac{5}{6}$ і $3 < n < 10$.



Яких значень може набувати вираз:

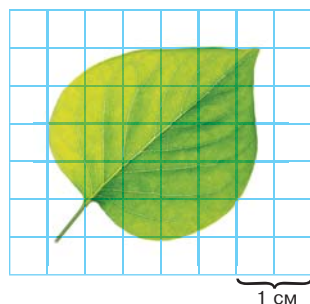
а) $2m + 3n$; б) $4m - n$;
в) $m + n^2$; г) $n^2 - m$?

Запиши нерівність з модулем у вигляді подвійної нерівності (143, 144):

143. а) $|x| < 3$; б) $|x| \leq 5$.

144. а) $2|x| < \pi$; б) $|x| - 7 \leq -6$.

145. **Практичне завдання.** Запиши у вигляді подвійної нерівності значення площі фігури, зображеної на малюнку 3.4.



Мал. 3.4

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

146. Запиши нерівність з модулем у вигляді подвійної нерівності та спрости її:

а) $|2x - 1| < 3$; б) $|2 - 0,5x| \leq 2,5$; в) $|\sqrt{x} - 5| < 1$.

147. Доведи твердження:

а) якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$; б) якщо $0 < a < b$, то $a < \sqrt{ab} < b$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

148. О 10 год з міста А до міста В виїхав мотоцикліст, а об 11 год так само з А до В — автомобіль. О котрій годині

автомобіль наздогнав мотоцикліста, якщо він приїхав до B о 13 год, а мотоцикліст — о 14 год?

149. Запиши у стандартному вигляді масу:

а) Місяця 73 500 000 000 000 000 т;

б) Сонця 1 990 000 000 000 000 000 000 000 т.

150. Побудуй графік рівняння:

а) $2x + 3y = 6$; б) $xy = 12$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклади подвійних нерівностей.
- ✓ Розумію, як записувати і читати подвійні нерівності.
- ✓ Умію:
 - виконувати дії з нерівностями;
 - спрощувати подвійні нерівності;
 - оцінювати значення величин.

$$\begin{array}{r} 3 \leq x < 7 \\ + \quad -1 \leq y < 1 \\ \hline 3-1 \leq x+y < 7+1 \\ 2 \leq x+y < 8 \end{array}$$

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- зміст відношень «більше», «менше», «не більше», «не менше»;
- види нерівностей (строгі, нестрогі, числові, зі змінними);
- властивості числових нерівностей;
- як розв'язують лінійні рівняння;
- які рівняння називають рівносильними.

§ 4. Розв'язування нерівностей з однією змінною

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- нерівності з однією змінною — *inequalities with one variable*
- рівносильні нерівності — *equivalent inequalities*
- лінійна нерівність — *linear inequality*

Рівності зі змінними бувають двох видів: тотожності й рівняння. Тотожності доводять, рівняння — розв'язують. Аналогічно розрізняють два види нерівностей зі змінними: **тотожні нерівності** й **нерівності з невідомими**. Тотожні нерівності доводять (див. § 7), а нерівності з невідомими — розв'язують.

Розглянемо нерівність $5x - 2 > 8$ зі змінною x .

• Якщо замість x підставимо число 1, то дістанемо неправильну числову нерівність $5 - 2 > 8$. Говорять, що значення $x = 1$ дану нерівність не задовольняє.

• Якщо замість x підставимо число 3, то дістанемо правильну числову нерівність $5 \cdot 3 - 2 > 8$. Значення $x = 3$ дану нерівність задовольняє, число 3 — розв'язок нерівності $5x - 2 > 8$.

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення цієї змінної, яке задовольняє дану нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Розв'язують нерівність, замінюючи її іншими нерівностями, простішими і рівносильними даній.

Дві нерівності називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки, тобто якщо кожний розв'язок першої нерівності задовольняє другу, а кожний розв'язок другої нерівності задовольняє першу. Нерівності, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Наприклад, нерівність $5x - 2 > 8$ рівносильна кожній з нерівностей:

$$5x > 2 + 8, \quad 5x > 10, \quad x > 2.$$

Властивості нерівностей

1. Якщо з однієї частини нерівності перенесемо в іншу доданок з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

2. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

3. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Ці властивості нерівностей зі змінними впливають з теорем, доведених у § 2. Користуючись цими властивостями, нерівності зі змінними можна розв'язувати подібно до рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжи нерівність $5x < 2x + 15$.

Розв'язання. Перенесемо доданок $2x$ у ліву частину нерівності:

$$5x - 2x < 15.$$

Зведемо подібні члени: $3x < 15$.

Поділимо обидві частини нерівності на 3:

$$x < 5.$$

Відповідь. Нерівність задовольняє кожне дійсне число, менше від 5.

Приклад 2. Розв'яжи нерівність $7(2 - x) \leq 3x + 44$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання.} \quad & 14 - 7x \leq 3x + 44, \\ & -7x - 3x \leq -14 + 44, \\ & -10x \leq 30, \\ & x \geq -3. \end{aligned}$$

Відповідь. Нерівність задовольняє кожне число, не менше від -3 .

Зауваження. Множини розв'язків нерівностей зручно записувати у вигляді *проміжків*. Множину всіх дійсних чисел, менших від 5, називають проміжком від мінус нескінченності до 5 і позначають $(-\infty; 5)$. На малюнку 4.1 цей проміжок позначено штриховкою, значення 5, що не входить до множини розв'язків, — порожнім кружком.



Мал. 4.1

Множину всіх дійсних чисел, не менших від -3 , називають проміжком від -3 до нескінченності, включаючи -3 . Позначають його $[-3; +\infty)$, наочно зображають, як показано на малюнку 4.2. Значення -3 , що входить до множини розв'язків, позначено зафарбованим кружком.



Мал. 4.2

Отже, відповіді до розв'язаних нерівностей можна записати і за допомогою проміжків: $(-\infty; 5)$, $[-3; +\infty)$.

З усіх рівнянь найпростішими є лінійні рівняння виду $ax = b$. Найпростішими нерівностями з однією змінною також є лінійні.

Якщо a і b — дані числа, а x — невідома змінна, то кожен з нерівностей $ax < b$, $ax > b$, $ax \leq b$, $ax \geq b$ (*) називають *лінійною нерівністю з однією змінною x* .

Приклади лінійних нерівностей:

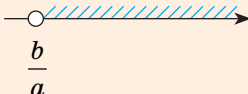
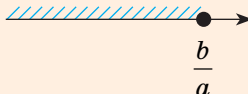
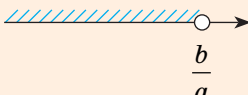
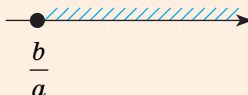
$$2x < 3, \quad -7x > 14, \quad 0,5x \leq 1, \quad 9x \geq 0.$$

Лінійні нерівності часто записують і так:

$$ax - b < 0, \quad ax - b > 0, \quad ax - b \leq 0, \quad ax - b \geq 0.$$

Якщо число a відмінне від нуля, то кожна з нерівностей (*) має множину розв'язків, якій відповідає нескінченний числовий промінь (або промінь, у якого «виколото» початок).

Залежність розв'язків лінійної нерівності від значення коефіцієнтів при змінній і знака нерівності наведено в таблиці.

$ax > b$	$ax \leq b$
Якщо $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$ 	Якщо $a > 0$, то $x \leq \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$ 
Якщо $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$ 	Якщо $a < 0$, то $x \geq \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; \infty\right)$ 

Якщо $a = 0$, то кожна з нерівностей (*) або не має розв'язків (наприклад, $0x > 5$), або множиною її розв'язків є множина всіх дійсних чисел (наприклад, $0x < 5$).

Зверни увагу! Зображати числові проміжки можна й іншим способом — дугами — як зображено на малюнках 4.3–4.4.

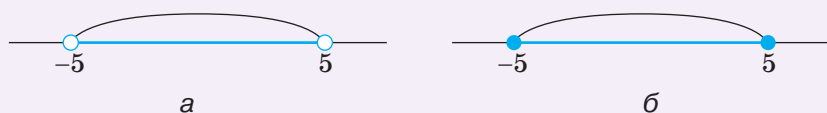
ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

До розв'язування лінійних нерівностей зводиться розв'язування найпростіших нерівностей з модулями.

Розв'яжемо нерівності:

- а) $|x| < 5$; б) $|x| > 3$; в) $|x| \leq -2$; г) $|x| > -0,5$.

а) Нерівність задовольняють усі значення x , модулі яких менші від 5. Такими є всі додатні числа, менші від 5, всі від'ємні числа, більші за -5 , і число 0. Таку множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності $-5 < x < 5$. На числовій прямій цій множині чисел відповідає проміжок, показаний на малюнку 4.3 (а). Числа -5 і 5 не належать цьому проміжку, вони не задовольняють дану нерівність, а нерівність $|x| \leq 5$ — задовольняють (мал. 4.3 (б)).



Мал. 4.3

Тому розв'язками нерівності $|x| < 5$ є всі числа, які належать проміжку $(-5; 5)$, а нерівності $|x| \leq 5$ — всі числа, які належать проміжку $[-5; 5]$.

б) Нерівність $|x| > 3$ задовольняють усі числа, більші за 3, і всі числа, менші за -3 (мал. 4.4).



Мал. 4.4

Тому розв'язками нерівності є всі числа, які належать проміжку $(-\infty; -3)$ або проміжку $(3; +\infty)$.

в) Модуль кожного числа — число невід'ємне, воно не може бути менше, ніж від'ємне число -2 , або дорівнювати -2 . Тому дана нерівність розв'язків не має.

г) Кожне невід'ємне число більше за $-0,5$. Тому дану нерівність задовольняє кожне дійсне число.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклади нерівностей з однією змінною.
2. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною?
3. Скільки розв'язків може мати нерівність з однією змінною?
4. Як записують множини розв'язків нерівності з однією змінною?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Розв'яжи нерівність $2x + 3 < 2(x + 3)$.

Розв'язання. $2x + 3 < 2x + 6,$
 $2x - 2x < 6 - 3,$
 $0x < 3.$

Нерівність $0x < 3$ правильна при кожному значенні x .

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$.

2. Розв'яжи нерівність $6z + 7 \geq 2(3z + 4)$.

Розв'язання. $6z + 7 \geq 6z + 8,$
 $6z - 6z \geq 8 - 7,$
 $0z \geq 1.$

Нерівність $0z \geq 1$ не задовольняє жодне значення z .

Відповідь. Розв'язків немає.

3. Розв'яжи нерівність $\frac{x-5}{6} + \frac{x-8}{3} > \frac{5x}{2} - 1$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини нерівності на 6 (найменше спільне кратне чисел 6, 3 і 2):

$$\begin{aligned} x - 5 + 2(x - 8) &> 3 \cdot 5x - 6; \\ x - 5 + 2x - 16 &> 15x - 6; \\ x + 2x - 15x &> -6 + 5 + 16; \\ -12x &> 15; \end{aligned}$$

$$x < -\frac{15}{12};$$

$$x < -1,25.$$



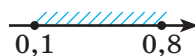
Відповідь. $(-\infty; -1,25)$.

4. Розв'яжи подвійну нерівність $-2 \leq 10x - 3 \leq 5$.

Розв'язання. $-2 + 3 \leq 10x - 3 + 3 \leq 5 + 3$,

$$1 \leq 10x \leq 8,$$

$$0,1 \leq x \leq 0,8.$$



Відповідь. $[0,1; 0,8]$.

5. Для кожного значення параметра a розв'яжи нерівність $(a - 1)x \geq a^2 - 1$.

Розв'язання. 1) Якщо $a - 1 = 0$, тобто $a = 1$, то отримаємо нерівність $0x \geq 0$, яка виконується для будь-якого значення x .

Отже, якщо $a = 1$, то x — будь-яке число.

2) Якщо $a - 1 > 0$, тобто $a > 1$, то $x \geq \frac{a^2 - 1}{a - 1}$. Тоді $x \geq \frac{(a - 1)(a + 1)}{a - 1}$,

або $x \geq a + 1$.

3) Якщо $a - 1 < 0$, тобто $a < 1$, то $x \leq \frac{a^2 - 1}{a - 1}$. Тоді $x \leq a + 1$.

Відповідь. Якщо $a < 1$, то $x \leq a + 1$.

Якщо $a = 1$, то x — будь-яке число.

Якщо $a > 1$, то $x \geq a + 1$.

ВИКОНАЙ УСНО



151. Які з чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 задовольняють нерівність:

а) $2x - 5 > 0$;

б) $4x + 1 \leq 13$;

в) $3x + 4 \geq 5$?

152. Розв'яжи нерівності:

а) $2x < 6$;

б) $-3x > 9$;

в) $-10x < 20$;

г) $0,5z > 2$;

153. Укажи найбільше ціле число, яке належить проміжку $(-\infty; -2,3)$

А $-2,3$

Б -2

В -3

Г такого числа не існує

154. Розв'язком нерівності $2x + 3 \geq 1$ є проміжок:

А $(-\infty; -1]$

Б $(-\infty; -1)$

В $(-1; +\infty)$

Г $[-1; +\infty)$

155. Скільки розв'язків має нерівність:

а) $x^2 + 1 < 0$;

б) $|x| < 0$;

в) $|x| \leq 0$?

156. **НМТ** Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності $|-2x - 3| > 5$?

А -2

Б -1

В 0

Г 1

Д 2

157. Розв'яжи нерівність:

а) $x + 3 < x$;

б) $x - 3 \leq x$;

в) $3 + x > 3$.

158. Довжини сторін трикутної хустинки — круглі цілі числа і дві з них становлять 30 см та 40 см. Якої найбільшої довжини за таких умов може бути третя сторона?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Зобрази у вигляді проміжків на координатній прямій множини чисел, що задовольняють нерівність (159, 160):

159. а) $x < 4$; б) $x > -1$; в) $x \geq 5$; г) $x \leq 0,5$.

160. а) $x < -2$; б) $x > 3$; в) $x \leq 6$; г) $x \geq -4$.

Розв'яжи нерівність (161–164).

161. а) $x + 2 > 5$; б) $x - 4 > 0$; в) $2 + x \geq 3$;

г) $3x > 15$; г) $4y < 36$; д) $5z \geq 35$.

162. а) $13 + x > 15$; б) $x + 7 > 0$; в) $2x - 5 \geq 0$;

г) $4x \geq 20$; г) $3x - 1,5 \leq 0$; д) $10 + 5x < 0$.

163. а) $-x < 5$; б) $-2z \geq -4$; в) $-x < 0$;

г) $5x - 4 < 3x$; г) $6z + 1 > 9 + 2z$; д) $y + 5 \leq 2y - 7$.

164. а) $-5x \leq 15$; б) $-3x > -3$; в) $-5z \leq -1$;

г) $3x + 2 < 5$; г) $7x - 4 \geq 8 + x$; д) $9x + 5 > 17 - 3x$;

165. Чи рівносильні нерівності:



а) $2x + 3 > x + 8$ і $x > 5$;

б) $2x - 3 \geq 2$ і $2x - 4 \geq 1$;

в) $3 - 5x < x$ і $6x > 3$;

г) $3x - 1 < 6 - 2x$ і $1 - 3x < 2x - 6$?

Розв'яжи нерівність (166–169).

166. а) $8x - 3 > 5x + 6$;

б) $7y - 13 < 5y - 9$;

в) $2x - 3 \leq 3x - 8$;

г) $x - 15 \geq 4x + 3$;

г) $3 + x > 2x - 3$;

д) $5 - 2y < y + 8$;

е) $3 - 5x > 4 - 5x$;

е) $8 + 6z \leq 13 + 6z$.

167. а) $6x + 21 \leq 5x + 8$;

б) $3x + 7 < 7x + 3$;

в) $7x - 5 > 3x + 7$;

г) $2x - 9 \geq 9x + 5$;

г) $18 + 7x \geq 7x + 30$;

д) $17 - x > 10 - x$.

168. а) $3(x + 1) > x + 5$;

б) $2(x - 1) + 4 < x + 7$;

в) $4(x - 2) < x + 1$;

г) $3(x + 2) - 4 > x + 2$;

г) $2(x + 3) \geq 5(x - 1) + 8$;

д) $4(x + 3) - 3x \leq 2(x - 5) + 12$.

169. а) $-5(x - 1) < 3 - 7x$;

б) $2(3 - x) - x < 24 + 3x$;

в) $4(2 - x) > x - 2$;

г) $-3(1 - x) + 5x \leq 2x + 9$;

г) $8 - 3(x - 2) > 4(x + 7)$;

д) $5(y - 2) - 7y < 12 - 4(y + 5)$.

170. За якої умови набуває від'ємних значень вираз:

а) $7 + 5x$;

б) $10 - 0,5x$;

в) $7 - 2x$?

171. За якої умови набуває невід'ємних значень вираз:

а) $25 + 5x$;

б) $3 + 1,5x$;

в) $1,2 - 3x$?

172. За якої умови значення даного виразу більше за 10?

а) $3 + 7x$;

б) $5,4 - 2,3x$;

в) $12 - 5x$?

173. За якої умови значення виразу $3x - 7$ більше за відповідне значення виразу: а) $2x + 1$; б) $5x - 2$; в) $3x - 5$?

174. Гра. Два учні / дві учениці записують по двочлену зі змінною a в першому степені, а третій / третя визначає умови, за яких перший вираз менший другого. Потім учні / учениці міняються ролями.

Розв'яжи нерівність (175, 176).

175. а) $\frac{5x}{7} \leq 3$;

б) $\frac{-3x}{4} < 3$;

в) $0 > \frac{5x}{11}$;

г) $\frac{3x-1}{4} \leq 2$;

г) $\frac{2x+5}{7} > 3$;

д) $\frac{7x-3}{5} \geq x$.

176. а) $\frac{3x}{5} > 2$;

б) $\frac{2x}{3} < -4$;

в) $0 \geq \frac{17x}{5}$;

г) $\frac{5x+1}{2} > 3$;

г) $\frac{12-4x}{5} \leq 0$;

д) $\frac{3(x-4)}{5} > 12$.

177. НМТ Розв'яжи нерівність $\frac{2x+10}{5} > -4$.

А $(-\infty; -15)$ Б $(-5; +\infty)$ В $(-\infty; 15)$ Г $(-\infty; -5)$ Д $(-15; +\infty)$

178. Розв'яжи нерівність:

а) $(x+2)^2 > 5x + x^2$;

б) $(x+3)^2 - 2x \geq 5x + x^2$;

в) $4 - (x-2)^2 > x - x^2$;

г) $(7-x)^2 - x^2 \leq x - 11$.

179. Solve the inequality:

а) $(x-3)^2 \leq x^2 - x$;

б) $(x-2)^2 + 7x < x^2 - 3x$;

с) $1 - (x+2)^2 < 5 - x^2$;

д) $(x-5)^2 - 7 > x^2 + 8$.

180. Яке найбільше натуральне значення n задовольняє нерівність:

а) $18 - 3(n-15) > 11n$;

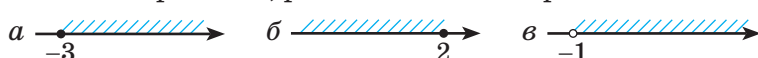
б) $0,3(n-2) < 2 - 0,5(n+2)$?

181. Яке найменше ціле значення m задовольняє нерівність:

а) $3m + 8(2m-1) > 5m + 34$;

б) $m^2 + 4m \leq (m+3)^2$?

182. Запишіть по 2 нерівності, розв'язок яких зображено на малюнку 4.5.



Мал. 4.5

183. Напиши три різні нерівності, множини розв'язків яких відповідали б проміжку, зображеному на малюнку 4.6.



Мал. 4.6

184. Контент-мейкер каналу створює відеоконтент, де відношення навчальних відео до гумористичних відповідно до плану становить 5 : 1. Яка найбільша кількість навчальних відео могла бути створена контент-мейкером для цього каналу, якщо загальна кількість відео не перевищує 130? Склади нерівність до задачі та розв'яжи її.

185. Оля — фотограф, у неї є замовлення на зйомку в студії, оренда якої коштує 2800 грн/день. Для зйомки їй ще треба орендувати спеціальне освітлення за ціною 600 грн/год. У Олі є 1500 грн, і вона сьогодні отримала предоплату за зйомку 4200 грн. Оціни, на яку найбільшу кількість годин вона може орендувати освітлення. Склади нерівність до задачі та розв'яжи її.

186. Музична школа отримала 360 000 грн спонсорської допомоги на придбання інструментів. Вона вирішила закупити електропіаніно за ціною 86 000 грн та гітари за ціною 7300 грн. Якщо школа купить 3 електропіаніно, скільки ще гітар вона зможе придбати на залишок коштів? Склади нерівність до задачі та розв'яжи її.



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

187. Для яких значень x значення функції $y = \frac{2}{3}x - 7$:



- а) додатні; б) більші за 5; в) не менші від $-\frac{1}{3}$?

188. Для яких x значення функції $y = 5,2 - 2,5x$:

- а) від'ємні; б) менші від $-4,8$; в) не більші за $7,7$?

При яких значеннях змінної x має зміст вираз **(189, 190)**:

189. а) $\sqrt{3x-6}$; б) $\sqrt{4-x}$; в) $\sqrt{-(2-x)}$; г) $\sqrt{0,6-0,3x}$;

г) $\sqrt{1-5(x+3)}$; д) $x + \sqrt{2-x}$; е) $\frac{2x}{\sqrt{2x-9}}$; є) $\frac{7}{\sqrt{14-2x}}$.

190. а) $\sqrt{2x-8}$; б) $\sqrt{16-8x}$; в) $\sqrt{2-3(2x+5)}$; г) $\frac{x-5}{\sqrt{3x+18}}$.

191. **НМТ** Знайди область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{56-4x}}$. У відповіді запиши найбільше ціле двоцифрове число, що належить області визначення цієї функції.

Розв'яжи нерівність **(192–195)**.

192. а) $3(x+4) + 2(3x-2) > 5x - 3(2x+4)$;

б) $2x - 6 - 5(2-x) \leq 12 - 5(1-x)$;

в) $2,5(2-z) - 3,5(z-1) \leq 2,5(z+2) - 1,5(2-z)$.

193. а) $y + 7 > 4(2-y) - 12(4-2y) - 17(y-1)$;

б) $x + 7 < 5(2x+8) + 13(4-x) - 3(x-2)$;

в) $0,2(x-2) - 0,3(3-x) \geq 0,4(2x-1) - 0,5(x-1)$.

194. а) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} > 6$; б) $\frac{2+x}{3} - \frac{3-x}{2} > 0$; в) $\frac{3(2+c)}{2} - 6 < \frac{7c-2}{3} - \frac{12+4c}{5}$.

195. а) $\frac{3x}{2} - \frac{4x}{3} > 2$; б) $\frac{3-y}{4} - \frac{y+2}{5} \geq 2$. в) $\frac{5z-18}{10} - \frac{27-10z}{14} > \frac{3z-12}{5} - \frac{9-4z}{7}$.

196. **НМТ** Розв'яжи нерівність $\frac{x}{3} < \frac{x}{2} + 3$.

А $(-3; +\infty)$ Б $(-\infty; 18)$ В $(-6; +\infty)$ Г $(-18; +\infty)$ Д $(-\infty; 6)$

Розв'яжи нерівності (197–200):

197. а) $(x-2)(x-3) > x^2$; б) $(2x-1)(3x+5) \leq 6x^2 - 19$;
в) $(3x-1)^2 \leq 9x(x-2)$; г) $(3x-2)^2 \geq (3x+2)^2 - 48$.

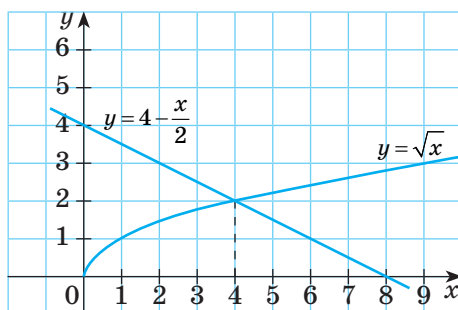
198. а) $(x+5)(x-7) < x^2$; б) $(3x-2)(3+2x) \geq 6x^2 + 4$;
в) $(y+3)^2 \geq y(y+5)$; г) $(z-2)^2 < (z-3)(z+5) + 1$.

199. а) $(2x-3)(5x+2) - (3x-1)(4x+2) > 2(1-x)(1+x) - x$;
б) $(4x+1)(3x-5) + (2x+3)(5x-4) < 2x^2 + 5(2x-1)^2$.

200. а) $(3x-2)(3x+2) - (2x-3)^2 \leq 5x(x+7) + 10$;
б) $(3x+1)^2 - (2x-3)(3-2x) \geq (2x+1)^2 + (3x-7)(3x+7)$.

201. На малюнку 4.7 зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 4 - \frac{x}{2}$.

Користуючись цими графіками, укажи множину розв'язків нерівності $\sqrt{x} < 4 - \frac{x}{2}$.



Мал. 4.7

202. Розв'яжи графічно нерівність:
а) $\sqrt{x} > \frac{8}{x}$; б) $\sqrt{x} \geq x^2$; в) $\sqrt{x} < x-2$.

Розв'яжи подвійну нерівність (203, 204):

203. а) $-3 \leq 5x - 1 \leq 4$; б) $-5 \leq 3 - 2x < 1$; в) $-3,4 \leq 5 + 2x \leq 1,8$;

204. а) $1 < 3x + 4 < 7$; б) $0,7 < 3x + 1 < 1,3$; в) $-8 < 7 - 5x < -3$.

Розв'яжи подвійну нерівність і вкажи її найбільший цілий розв'язок (205, 206):

205. а) $2 < 3x - 5 < 7$; б) $-3 \leq 4 - 2x \leq 3$;

206. а) $-2 \leq 1 + 3x \leq 4$; б) $-0,3 < 2,7 - x < 1,7$.

207. Укажи розв'язок нерівності $-4 < 6 - 2x < 2$.

А 1

Б 2

В 0

Г 3

Д 5

Розв'яжи нерівність (208, 209).

208. а) $|x| < 5$; б) $|x-3| \leq 7$; в) $|2x-3| < 1$.

209. а) $|x| \leq 1$; б) $|x+7| < 3$; в) $|5x-3| \leq 2$.

210. **НМТ** Розв'яжи нерівність $|x-9| \leq 3$. У відповіді запиши суму всіх її цілих розв'язків на проміжку $[-15; 15]$.

211. Напиши нерівність зі змінною x :



- а) яка не має жодного розв'язку;
- б) яку задовольняє кожне дійсне число;
- в) яку задовольняє тільки одне число 5;
- г) яку задовольняють усі числа з проміжку $(-2; 3)$.

212. При яких значеннях параметра a рівняння має два корені?

- а) $x^2 - 8x + 2a = 0$;
- б) $x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = 0$.

213. При яких значеннях параметра a не має коренів рівняння?

- а) $2x^2 + 3x - 6a = 0$;
- б) $x^2 + (3 - 2a)x + a^2 - a = 0$.

214. При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння додатні?

- а) $x^2 - (a + 2)x + 3a - 3 = 0$;
- б) $x^2 - (a + 7)x + 5a + 10 = 0$.

215. При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння?

- $x^2 - (a - 1)x + 2a - 6 = 0$ не більші за 3?

216. **НМТ** Визнач суму всіх цілих значень параметра a , за яких один корінь рівняння $2x^2 - (4a + 9)x + 6a + 9 = 0$ належить проміжку $(-8; 0)$, а другий — проміжку $(1; 5)$.

Для кожного значення параметра a розв'яжи нерівність (217, 218).

217. а) $ax > 5$; б) $(a - 3)x \leq (a^2 - 9)$; в) $(2a - 1)x < 4a^2 - 4a + 1$.

218. а) $ax < 6$; б) $(a + 2)x > (a^2 - 4)$; в) $(2a - 3)x \leq 4a^2 - 12a + 9$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

219. Розв'яжи нерівність:

а) $\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 > \frac{1}{x^2} + x^2$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{2} > \sqrt{2} + 3$.

220. Туристи мають повернутися на базу не пізніше, ніж через 3 год. На яку найбільшу відстань вони можуть відплисти за течією річки на моторному човні, якщо його власна швидкість 10 км/год, а швидкість течії — 2 км/год?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

221. Виконай дії:

а) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$;

б) $5 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-7}$;

в) $(3,7 \cdot 10^5) \cdot 2,4 \cdot 10^8$;

г) $(3,6 \cdot 10^6) : (2,4 \cdot 10^3)$.

222. Побудуй графік рівняння:

а) $xy + 6 = 0$;

б) $y^2 - x = 0$.



- 223.** Юрій Олексійович Митропольський очолював Інститут математики НАН України 30 років з 1958 по 1988 рік. Його наступником став відомий український математик, учень Ю. О. Митропольського, прізвище якого ти дізнаєшся, якщо правильно встановиш відповідність між цифрами першої таблиці і буквами другої. У другому рядку першої таблиці містяться абсциси, а у першому рядку другої таблиці — відповідні ординати точок, що належать графіку функції.

$$y = \begin{cases} 3 - 2x - x^2, & x \leq 1, \\ x^2 - 6x + 5, & x > 1. \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-1	-2	4	3	-3	2,5	-4	1,5	6	-1,5
-5	-4	-3,75	-3	-1,75	0	3	3,75	4	5
Е	О	Л	М	Н	Й	А	О	С	К

Побудуй графік заданої функції.

Склади аналогічну задачу про вчителя Ю. О. Митропольського.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклади:
 - нерівностей зі змінними $x^2 < 1$, $|x| \geq 0$;
 - лінійних нерівностей з однією змінною $2x < 3$, $-x \geq -5$.
- ✓ Розрізняю тотожні нерівності і нерівності з невідомими.
- ✓ Розумію і умію формулювати властивості нерівностей зі змінною.
- ✓ Умію: розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною; записувати розв'язки нерівностей у вигляді проміжків.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- як позначають множини;
- що таке підмножина;

$A, B, C, \dots, N, Z, Q, \dots$

Множина K — частина множини M .

$K \subset M$ K — підмножина M .

$N \subset Z \subset Q \subset R$.

- на основі яких властивостей розв'язують нерівності (с. 32);
- як зображають розв'язки лінійної нерівності (с. 33);
- що означають записи $a \leq b$ і $a \geq b$?

$a \leq b$
 $a < b$ або $a = b$

$a \geq b$
 $a > b$ або $a = b$

§ 5. Об'єднання і переріз множин. Числові проміжки

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- об'єднання множин — *union of sets*
- переріз множин — *intersection of sets*
- числові проміжки — *number intervals*

Ти вже знаєш, що в математиці будь-які сукупності називають *множинами*. Розглядають множини, елементами яких є і певні математичні поняття: геометричні фігури (наприклад, множина чотирикутників), числа (наприклад, множина дійсних чисел), функції (наприклад, множина лінійних функцій), рівняння (наприклад, квадратні рівняння), розв'язки нерівностей (наприклад, порожня множина) тощо. Окрім них, розглядають множини, елементами яких є довільні об'єкти: тварини, рослини, пори року, дні тижня, планети, обласні центри України, засоби зв'язку тощо. Трапляється, що деякі множини мають спільні елементи.

Розглянемо як приклад дві множини «смайликів»: множину A , що містить 3 елементи (мал. 5.1, a), і множину B , що містить 4 елементи (мал. 5.1, b).



Мал. 5.1

Зверни увагу, кожна з цих множин містить смайлик, який сміється , і сумний смайлик . Якщо множина містить усі спільні елементи множин A і B і тільки їх, то цю множину називають *перерізом* множин A і B . У даному випадку перерізом множин A і B буде множина, що складається з двох елементів, зображена на малюнку 5.1, $в$.

Іншими словами.

Перерізом двох множин називають множину, яка складається з елементів, що належать кожній з двох множин

Записують це так: $A \cap B$.

Розглянь малюнок 5.1, г. Множина, зображена на ньому, містить п'ять різних смайликів, кожен із яких є елементом або множини A або множини B . Таку множину називають *об'єднанням* множин A і B .

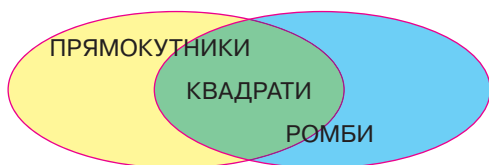
Об'єднанням двох множин називають множину, яка містить усі елементи, які належать хоча б одній з цих множин.

Записують це так: $A \cup B$.

Перерізи та об'єднання множин зручно ілюструвати діаграмами Ейлера (мал. 5.2 і 5.3).

Наприклад, перерізом обсягів понять *прямокутники* і *ромби* є множина квадратів (мал. 5.2).

Об'єднанням множини раціональних і ірраціональних чисел є множина дійсних чисел (мал. 5.3).



Мал. 5.2



Мал. 5.3

Окремі види множин — числові проміжки, що є розв'язками нерівностей. Поняття числового проміжку часто використовують і в інших розділах математики. Тому бажано розрізняти різні види числових проміжків і навчитися знаходити їх перерізи та об'єднання.

Перерізом двох числових проміжків називають множину, що містить усі числа, які належать кожному із цих проміжків.

Наприклад, перерізом проміжків $(-\infty; 4)$ і $(-3; +\infty)$ є проміжок $(-3; 4)$. Переріз двох множин позначають знаком $\cap$.

Тому пишуть: $(-\infty; 4) \cap (-3; +\infty) = (-3; 4)$.

Наочно цю рівність ілюструє малюнок 5.4.

Інші приклади. Малюнкам 5.5–5.7 відповідають рівності:

$$(-3; 5) \cap (-2; 4) = (-2; 4);$$

$$[-3; 5) \cap (-4; -3] = \{-3\};$$

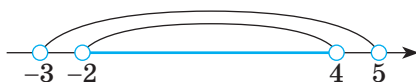
$$(-3; 5) \cap (-5; -4) = \emptyset.$$



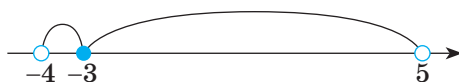
Переріз
проміжків*



Мал. 5.4



Мал. 5.5



Мал. 5.6



Мал. 5.7

Друга рівність стверджує, що числові проміжки $[-3; 5]$ і $(-4; -3]$ мають тільки одне спільне число -3 .

Знаком $\emptyset$ позначають *порожню множину*. Остання рівність стверджує, що числові проміжки $(-3; 5)$ і $(-5; -4)$ не мають спільних чисел.

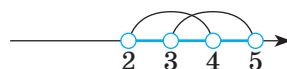
Об'єднанням двох числових проміжків називають множину, що складається з усіх чисел, які належать хоча б одному з цих проміжків.

Об'єднання двох множин позначають знаком $\cup$. Тому пишуть:

$$(2; 4) \cup (3; 5) = (2; 5).$$

Наочно цю рівність ілюструє малюнок 5.8.

Малюнкам 5.9–5.12 відповідають рівності:

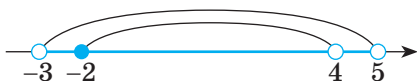


Мал. 5.8

$$(-3; 5) \cup (-2; 4) = (-3; 5);$$

$$[-3; 5) \cup (-4; -3] = (-4; 5);$$

$$(-\infty; 4) \cup (-3; 0) = (-\infty; 4).$$



Мал. 5.9



Мал. 5.10



Мал. 5.11



Мал. 5.12

Об'єднання проміжків $(-3; 5)$ і $(-5; -4)$ складається з двох роз'єднаних проміжків (мал. 5.12); його позначають так: $(-5; -4) \cup (-3; 5)$.

Іноді доводиться розглядати переріз або об'єднання трьох чи більшої кількості числових проміжків.

Перерізом трьох числових проміжків є множина чисел, яка містить числа, спільні для усіх трьох даних проміжків і тільки їх.

$$\text{Наприклад, } (-4; 5) \cap (-\infty; 6) \cap [-3; 7) = [-3; 5);$$

Об'єднанням трьох числових проміжків є множина чисел, яка містить кожне число кожного проміжку і тільки їх.

Наприклад, $(-4; 5) \cup (-\infty; 6) \cup [-3; 7) = (-\infty; 7)$.

Цим рівностям відповідає малюнок 5.13, a і b .

Оскільки існує багато видів числових проміжків, то їх бажано відповідно називати. Традиційно додержуються таких назв. Якщо a і b — довільні дійсні числа, то:

$(-\infty; a)$, $(b; \infty)$ — нескінченні числові проміжки;

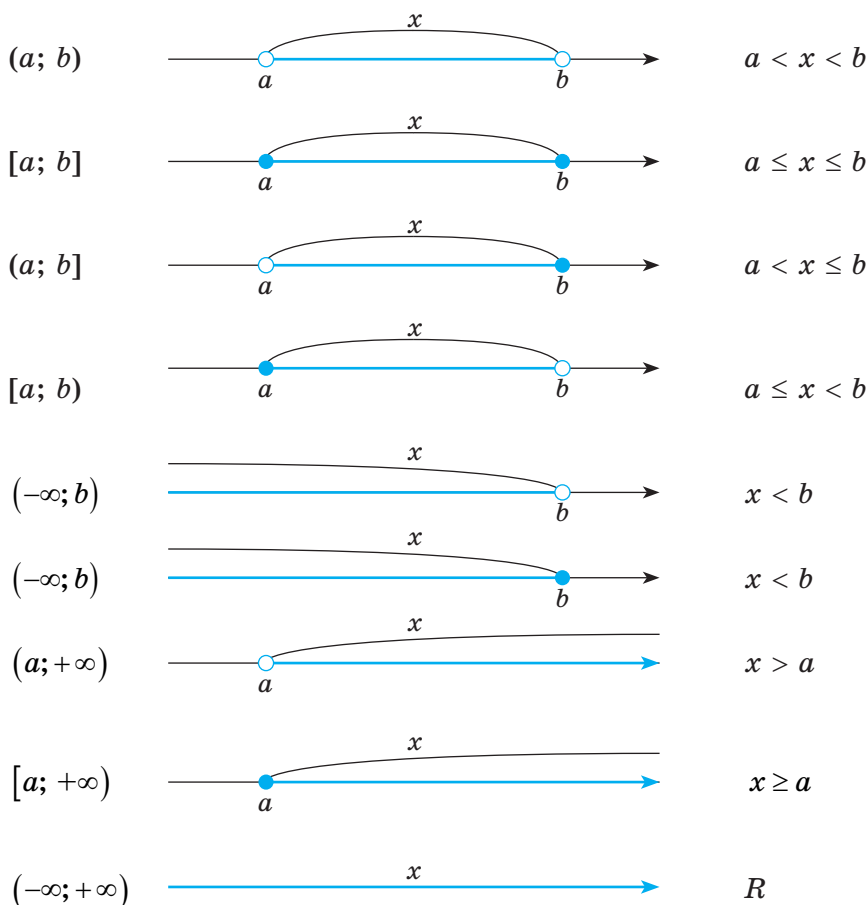
$(a; b)$ — відкритий проміжок, або *інтервал*;

$[a; b]$ — закритий проміжок, *відрізок*;

$[a; b)$ — проміжок, відкритий справа;

$(a; b]$ — проміжок, відкритий зліва.

На малюнку 5.14 зображено види проміжків та символи, якими їх позначають.



Мал. 5.14

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Іноді виникає потреба знайти об'єднання розв'язків двох або більше нерівностей. У таких випадках говорять про *сукупність нерівностей*. Її записують за допомогою квадратної дужки: $\begin{cases} 2x > 17, \\ x - 1 < 3; \end{cases}$ або $\begin{cases} x > 8,5, \\ x < 4. \end{cases}$

Розв'язком сукупності нерівностей називають значення змінної, яке задовольняє хоча б одну з даних нерівностей. Розв'язати сукупність нерівностей — означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх не існує. Множиною розв'язків даної сукупності нерівностей є проміжок $(-\infty; 4) \cup (8,5; +\infty)$.

Сукупності використовують для розв'язування деяких видів рівнянь і нерівностей, зокрема нерівностей з модулем.

Будь-яку нерівність виду $|M| > a$, де M — деякий вираз, можна записати у вигляді сукупності: $\begin{cases} M > a, \\ M < -a. \end{cases}$



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Лінійні нерівності. Урок 2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що таке переріз двох множин? Яким символом його позначають?
2. Що таке переріз двох числових проміжків?
3. Що таке об'єднання двох множин? Яким символом його позначають?
4. Що таке об'єднання двох числових проміжків?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди переріз і об'єднання числових проміжків $(-6; 8)$ і $(5; +\infty)$.

Розв'язання. Зобразимо дані проміжки геометрично (мал. 5.15). Їх спільна частина — проміжок $(5; 8)$. Отже, $(-6; 8) \cap (5; +\infty) = (5; 8)$.

Об'єднання даних числових проміжків: $(-6; 8) \cup (5; +\infty) = (-6; +\infty)$.



Мал. 5.15

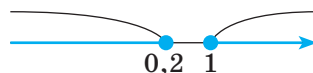
2. Розв'яжи нерівність $|5x - 3| \geq 2$.

Розв'язання. а) Нерівність $|5x - 3| \geq 2$ рівносильна сукупності нерівностей

$$\begin{cases} 5x - 3 \geq 2, \\ 5x - 3 \leq -2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 5x \geq 5, \\ 5x \leq 1, \end{cases} \text{ звідси } \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 0,2. \end{cases}$$

На малюнку 5.16 зображено множину чисел, що відповідає цій сукупності і задовольняє задану нерівність.

Відповідь. $(-\infty; 0,2] \cup [1; +\infty)$.



Мал. 5.16

ВИКОНАЙ УСНО



224. Знайди об'єднання та переріз множин A і B , якщо:
 а) $A = \{8, 6, 4, 2, 0\}$ і $B = \{0, 2, -4, -6\}$;
 б) $A = \{\text{Ш, К, О, Л, А}\}$ і $B = \{\text{Д, О, Ш, К, А}\}$.
225. Об'єднанням наведених числових проміжків є проміжок $(0; 2)$. Яке з тверджень хибне?
 А $(0; 1)$ і $(1; 2)$ Б $(0; 1)$ і $[1; 2)$ В $(0; 1]$ і $[1; 2)$ Г $(0; 1]$ і $(1; 2)$
226. Перерізом яких числових проміжків буде одне число?
 А $(-1; 3)$ і $(3; 5)$ Б $(-1; 3)$ і $[3; 5)$ В $(-1; 3]$ і $[3; 5)$ Г $(-1; 3]$ і $(3; 5)$
227. Які цілі числа містяться в числовому проміжку:
 а) $(1; 8)$; б) $[1; 8]$ в) $[-3; 4]$; г) $(-3; 4)$; ґ) $(-3; 4]$; д) $[-3; 4)$?
228. **НМТ** Скільки всього цілих чисел містить інтервал $(-2,07; 15,9)$?
 А 19 Б 15 В 13 Г 17 Д 18
229. **НМТ** Якому проміжку належить значення виразу $\frac{-1+\sqrt{27}}{2}$?
 А $(-\infty; 0)$ Б $[0; 1)$ В $[1; 2)$ Г $[2; 3)$ Д $[3; +\infty)$
230. Чому дорівнює переріз проміжків $[a; b]$ і $(a; b)$? А їх об'єднання?

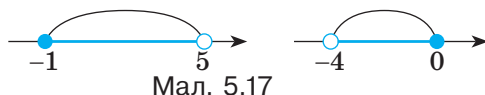
ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



231. Запиши приклад: а) інтервалу; б) відрізка.
232. Запиши приклад нескінченного числового проміжка.
233. Знайди об'єднання та переріз множин A і B , якщо:
 $A = \{ \odot, \boxtimes, \oplus, \ominus, \boxplus \}$ і $B = \{ \boxminus, \boxtimes, \ominus, \ominus, \square \}$
234. **Гра.** Двоє учнів/учениць задають множини переліком, третій/третя має знайти об'єднання цих множин, а четвертий/четверта — переріз цих множин. Потім учні міняються ролями.
235. Зобрази на координатній прямій числовий проміжок:
 а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$; в) $[-3; +\infty)$; г) $(-\infty; -4]$.
236. Зобрази у вигляді проміжків на координатній прямій множини чисел, що задовольняють нерівність:
 а) $x < 3$; б) $x \geq -2$; в) $x \leq 0$; г) $x > 7$.

Запиши символами числові проміжки, що відповідають проміжкам, зображеним на малюнках 5.17 та 5.18 (237, 238).

237.



238.



Мал. 5.18

239. Яка лінійна нерівність має множину розв'язків:

- а) $(3; +\infty)$; б) $(-2; +\infty)$; в) $(-\infty; 7]$; г) $[-3; +\infty)$?

240. Яка лінійна нерівність має множину розв'язків, зображену на малюнку 5.17 і 5.18??

241. Find the union and intersection of the number intervals:

- а) $[2; 3]$ і $[3; 5]$; б) $[-5; 0]$ і $[-3; 0]$; в) $[-5; 7]$ і $[-7; 5]$;
д) $(1; 2)$ і $(-2; 1)$; е) $(-2; -1)$ і $[-3; -1]$; ф) $(-\infty; 2)$ і $[-2; +\infty)$.

242. Знайдіть об'єднання і переріз числових проміжків:

- а) $(0; 3)$ і $(0; 5]$; б) $(-2; 0)$ і $(-3; 0]$; в) $(-\infty; 1)$ і $(0; 2)$;
г) $(-2; +\infty)$ і $(0; +\infty)$ д) $(-\infty; 1)$ і $(0; +\infty)$.

Знайди об'єднання і переріз множин, що є розв'язками нерівностей (243, 244).

243. а) $5x - 3 > 12$ і $3x + 5 \geq 11$;
б) $0,5x + 2,6 > 3$ і $1 + 2x < 7$;
в) $5 - 3x < 2$ і $-1,3x - 9 \leq 4$.
г) $0,5x - 4(x - 3) > 3x - 1$ і $2,7(x + 3) < 7,2(x - 3)$;
г) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{4} > \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}$ і $x - \frac{2}{5}(x - 3) > 0,4$.

244. а) $3x \leq 1 - 2x$ і $-2x < 3x + 5$;
б) $5x > x - 2$ і $-2x > 9 - 5x$;
в) $2x \leq 5x + 3$ і $1,1x \geq x - 5$;
г) $6x + 1,8 < 0,2x - 2(x + 3)$ і $3,5(2x + 3) > 6(x + 2)$;
г) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ і $2x - \frac{1}{5} < 0,2(x + 3)$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



245. **НМТ** Знайди область визначення функції $y = \frac{x}{x-1}$.

- А $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ Б $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ В $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
Г $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ Д $(-\infty; +\infty)$

При яких значеннях x визначена функція (246, 247):

246. а) $f(x) = \sqrt{x+6} + \frac{3x}{x-2}$; б) $f(x) = \sqrt{12-4x} - \frac{2}{x^2-1}$;
в) $f(x) = \frac{2x-3}{|x|-4} + \frac{x}{\sqrt{3x+21}}$.

247. а) $f(x) = \sqrt{2x-8} + \frac{3x}{x-7}$;

б) $f(x) = \sqrt{3x+15} - \frac{2}{x^2-9}$;

в) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-5x+20}} - \frac{3}{|x|-2}$.

248. При яких значеннях x значення виразу $1,3 + 0,3x$ належить проміжку: а) $(-0,2; 2,5)$; б) $[1; 4)$; в) $(-2,6; 0,2]$; г) $[-2; 0,1]$?

249. При яких значеннях x значення виразу $3x + 2$ належить проміжку: а) $[-1; 5]$; б) $(1; 17)$; в) $[0; 3)$; г) $(-7; -1]$?

Знайди об'єднання і переріз множин, що є розв'язками нерівностей (250, 251).

250. а) $\frac{5x-1}{4} + \frac{x+1}{2} < 0$ і $\frac{x-3}{5} + \frac{x-1}{10} \geq 2$; б) $\frac{3+x}{2} + \frac{2-x}{3} \geq 0$ і $\frac{4x+3}{7} + \frac{x+1}{2} < 2$;

в) $5(x+2) + 3(x-3) < 3(x-1) + 4(x+3)$ і $3(2x-1) + 3(x-1) \geq 5(x+2) + 2(2x+3)$;

г) $\frac{3-2x}{2} - \frac{x-1}{3} > \frac{5-3x}{4} - \frac{4x+3}{6}$ і $\frac{6x-5}{3} - \frac{11+7x}{5} < \frac{4x+3}{5} - \frac{2x+3}{10}$.

251. а) $3x - \frac{2x-1}{4} < 0$ і $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{4} \geq 2$;

б) $\frac{3-x}{15} - \frac{x-3}{3} > 0$ і $\frac{3x-2}{4} - \frac{5x+1}{3} > 1$;

в) $2(x-3) + 5(x-2) > 3(2-x) - 2(3-x)$ і $9(x-2) - 2(3x-2) \leq 5(x-2) - 2(x+5)$;

г) $\frac{x-2}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{x-4}{6} - \frac{x+1}{3}$ і $\frac{x-2}{2} + \frac{1-7x}{4} - \frac{x+11}{3} \geq \frac{5+2x}{4}$.

Розв'яжи нерівність (252, 253).

252. а) $|x| > 1$; б) $|x+2| > 5$; в) $|3x+1| > 5$;

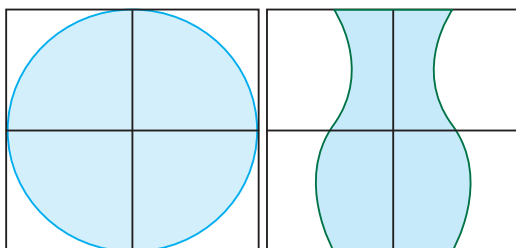
г) $|x+5| > -3$; г) $|1-3x| < -1$; д) $|2x-1| > 1$.

253. а) $|5x| > 2$; б) $|x-1| > 3$; в) $|5-2x| > 3$;

г) $|x-1| \leq 0$; г) $|5x+3| \geq -7$; д) $|8-4x| < -2$.

254. Приймаючи площу одного квадрата за 1, з'ясуй, до якого числового проміжку належить площа фігури, зображеної на малюнку 5.19:

А $[1; 2)$, Б $[2; 3)$,
В $[3; 4)$ Г $[4; 5)$



Мал. 5.19

255. Порівняй числа a і c , якщо:

а) $(-\infty; a) \cup (c; \infty) = R$;

б) $(a; x) \cap (x; c) = \emptyset$;

в) $(y; a) \cap (c; y) = \emptyset$;

г) $(a; \infty) \cup (-\infty; c) = R$.

256. За якої умови: а) $(a; b) \cup (m; n) = (a; b)$; б) $(a; b) \cap (m; n) = (a; b)$?

Зроби відповідні малюнки.

257. Порівняйте числа x і a , y і c , якщо:



а) $(a; c) \cap (x; y) = (a; c)$;

б) $(a; c) \cap (x; y) = (x; y)$;

в) $(a; c) \cup (x; y) = (a; c)$;

г) $(a; c) \cup (x; y) = (a; y)$.

258. Запиши у вигляді подвійної нерівності співвідношення між числами a , x і y , якщо:

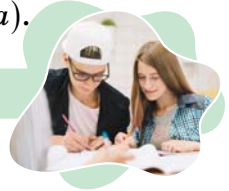
а) $(a; +\infty) \cap (x; y) = (a; y)$;

б) $(a; +\infty) \cup (x; y) = (a; +\infty)$;

в) $(-\infty; a) \cup (x; y) = (-\infty; y)$;

г) $(-\infty; a) \cap (x; y) = (-\infty; a)$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



259. Вишивальниця працює вдома і за одну годину роботи заробляє 10 грошових одиниць. Їй потрібно придбати певний товар, вартість якого у магазині становить 15 грошових одиниць за 1 пакунок без черги, а у гіпермаркеті цей самий товар вона може придбати за 11 грошових одиниць, але для цього вона має вистояти чергу протягом однієї години. З'ясуй:

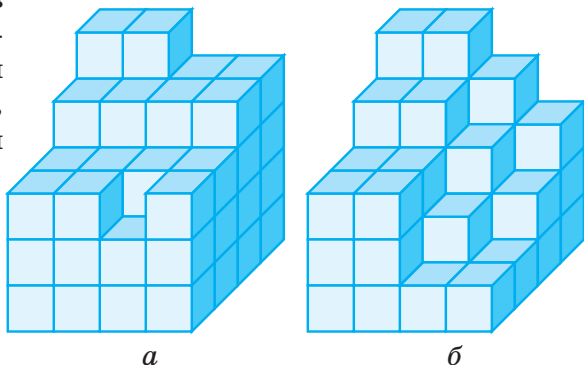
а) за яких умов вигідною є покупка дорожчого товару;

б) скільки товару слід придбати, щоб вигідно було стояти в черзі 1 годину.

260. На малюнку 5.20 зображено фігуру, складену з n кубиків, поставлених на квадрат 4×4 .

а) До якого з проміжків $(57; 67)$, $(50; 69)$ чи $[45; 55]$ входить число n ?

б) До якого з проміжків $(13; 23]$, $(25; 35]$, $(10; 20]$ входить число m кубиків, якими слід доповнити задану фігуру, щоб отримати прямокутний паралелепіпед $4 \times 4 \times 5$?



Мал. 5.20



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

261. Знайди значення добутку:

а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{40}$;

б) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{50}$;

в) $\sqrt{42} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{18}$;

г) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{45}$.

262. Знайди корені рівняння:

а) $5\sqrt{x} = 0$;

б) $10\sqrt{x} = 4$;

в) $6\sqrt{x} - 48 = 0$;

г) $3\sqrt{x} + 20 = 0$;

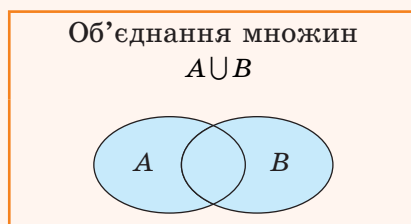
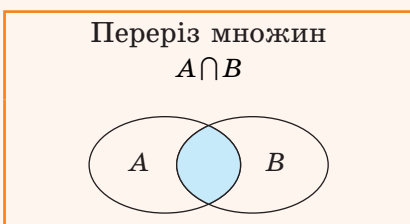
г) $4\sqrt{x} + 9 = 11$;

д) $7 - 2\sqrt{x} = 12$.

263. *Задача ал-Кархі.* Знайди площу прямокутника, основа якого вдвічі більша за висоту, а площа чисельно дорівнює периметру.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Можу пояснити, що таке переріз і об'єднання множин.



- ✓ Умію зображати числові проміжки, задані нерівностями.
- ✓ Умію зображати на координатній прямій об'єднання та переріз числових проміжків.
- ✓ Умію записувати символами і нерівностями задані графічно числові проміжки.
- ✓ Умію записувати розв'язки сукупностей нерівностей у вигляді об'єднання відповідних проміжків.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- зміст відношень «більше», «менше», «не більше», «не менше»;
- види нерівностей (строгі, нестрогі, числові, зі змінними);
- властивості числових нерівностей;
- як розв'язують лінійні нерівності;
- як записують розв'язки нерівностей;
- що таке переріз та об'єднання множин;
- як знайти переріз та об'єднання числових проміжків.

§ 6. Системи нерівностей з однією змінною

КЛЮЧОВІ СЛОВА

система нерівностей — *system of inequalities*

Знайдемо, наприклад, спільні розв'язки двох нерівностей

$$2x - 3 < 5 \text{ і } 2 - 3x < 11.$$

Тобто знайдемо такі значення x , які задовольняють як першу, так і другу нерівність. У таких випадках говорять про *систему нерівностей*.

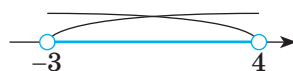
$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11. \end{cases}$$

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке задовольняє кожну з нерівностей даної системи. **Розв'язати систему нерівностей** означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Розв'яжемо наведену вище систему, поступово замінюючи кожну її нерівність простішою і рівносильною їй:

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 8, \\ -3x < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x > -3. \end{cases}$$

Множиною розв'язків системи нерівностей буде переріз множин розв'язків нерівностей, що входять до неї. Знайдемо переріз за допомогою координатної прямої. Першу нерівність задовольняють усі числа, менші від 4, а другу — всі числа, більші за -3 (мал. 6.1).



Мал. 6.1

Обидві нерівності системи задовольняють такі значення x , що $-3 < x < 4$. Ця множина значень x — проміжок $(-3; 4)$. Числа -3 і 4 цьому проміжку не належать.

Розв'яжемо ще дві системи нерівностей:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 1 > 14, \\ 2 - x < 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 1 > x + 3, \\ 5x - 1 < 6 - 2x. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 1 > 14, \\ 2 - x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 15, \\ -x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5, \\ x > -6. \end{cases}$$

Обидві нерівності задовольняють значення x , більші за 5 (мал. 6.2).



Мал. 6.2

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - x > 3 + 1, \\ 5x + 2x < 6 + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ 7x < 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < 1. \end{cases}$$

Немає числа, яке було б водночас меншим від 1 і більшим за 4 (мал. 6.3). Тому система розв'язків немає.



Мал. 6.3

Відповідь. а) $(5; +\infty)$; б) розв'язків немає.

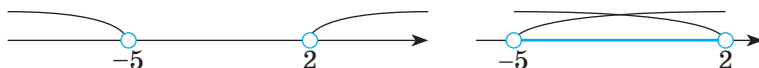
До розв'язування систем зводиться розв'язування і таких, наприклад, нерівностей:

$$\text{а) } (x - 2)(x + 5) < 0; \quad \text{б) } \frac{x - 2}{x + 5} > 0.$$

Розв'язання. а) Добуток двох чисел від'ємний, якщо одне з цих чисел від'ємне, а інше — додатне. Отже, розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування двох систем нерівностей (мал. 6.4):

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x + 5 < 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - 2 < 0, \\ x + 5 > 0. \end{cases}$$

$$\text{Маємо: } \begin{cases} x > 2, \\ x < -5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > -5. \end{cases}$$



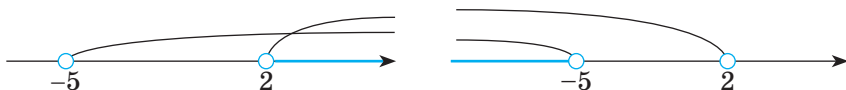
Мал. 6.4

Перша з цих систем розв'язків не має, множина розв'язків другої системи — числовий проміжок $(-5; 2)$.

б) Значення дробу додатне, якщо його чисельник і знаменник одночасно додатні або від'ємні. Тому розв'язком даної нерівності буде сукупність двох систем (мал. 6.5):

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x + 5 > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - 2 < 0, \\ x + 5 < 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x > 2, \\ x > -5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x < -5. \end{cases}$$



Мал. 6.5

$(2; +\infty)$

$(-\infty; -5)$

Відповіддю до цієї нерівності буде об'єднання цих двох проміжків: $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь. а) $(-5; 2)$; б) $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$.

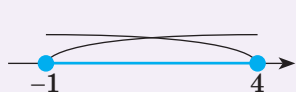
ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Розв'яжемо нерівності:

а) $|2x-3| \leq 5$; б) $|x-1| > 2x-5$.

а) Нерівність $|2x-3| \leq 5$ і подвійна нерівність $-5 \leq 2x-3 \leq 5$ — рівносильні системі нерівностей (мал. 6.6):

$$\begin{cases} 2x-3 \leq 5, \\ 2x-3 \geq -5, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x \leq 8, \\ 2x \geq -2. \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq -1. \end{cases}$$



Мал. 6.6



Мал. 6.7

Її множина розв'язків $[-1; 4]$.б) Нерівність $|x-1| > 2x-5$ рівносильна сукупності нерівностей (мал. 6.7):

$$\begin{cases} x-1 > 2x-5, \\ x-1 < -(2x-5); \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 > 2x-5, \\ x-1 < -2x+5; \end{cases} \quad \begin{cases} -x > -4, \\ 3x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x < 2. \end{cases}$$

Дану нерівність задовольняють усі числа з проміжків $(-\infty; 4)$ і $(-\infty; 2)$. Їх об'єднання $(-\infty; 4)$.Відповідь. а) $[-1; 4]$; б) $(-\infty; 4)$.Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Лінійні нерівності. Урок 3).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що таке розв'язок системи нерівностей з однією змінною?
2. Що означає «розв'язати систему нерівностей»?
3. Як знайти розв'язок системи, якщо відомі розв'язки кожної нерівності, що входять до неї?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Розв'яжи систему нерівностей:
$$\begin{cases} (z^2-2) \cdot 3 \geq 3z^2-5, \\ z^2+2z \leq (z-1)(z+1). \end{cases}$$

Розв'язання.
$$\begin{cases} 3z^2-6 \geq 3z^2-5, \\ z^2+z \leq z^2-1; \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \geq -5, \\ z \leq -0,5. \end{cases}$$

Перша числова нерівність неправильна, тому перша нерівність не має розв'язків. Тому і вся система розв'язків не має.

Відповідь. Система розв'язків не має.

2. При яких значеннях x має зміст вираз $\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{5-x}$?

Розв'язання. Вираз має зміст за умови, що: $\begin{cases} x+1 > 0, \\ 5-x \geq 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x > -1, \\ x \leq 5. \end{cases}$

Обидві нерівності задовольняють такі значення x , що $-1 < x \leq 5$ (мал. 6.8).



Мал. 6.8

Відповідь. $(-1; 5]$.

ВИКОНАЙ УСНО



264. Яка з систем нерівностей не має розв'язків?

А $\begin{cases} x > 3, \\ x < 2 \end{cases}$

Б $\begin{cases} x > 0, \\ x < 5 \end{cases}$

В $\begin{cases} x > -3, \\ x < 2 \end{cases}$

Г $\begin{cases} x \leq 3, \\ x \leq 2? \end{cases}$

265. Яке з чисел задовольняє систему нерівностей $\begin{cases} 2x \geq 0, \\ 3x < 6? \end{cases}$

А 2

Б 3

В 0

Г 6

266. Який з наведених проміжків є множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > -3? \end{cases}$

А $(-\infty; -3)$

Б $(-3; 2)$

В $[2; +\infty)$

Г $(-3; 2]$

267. Яка з нерівностей:

а) $|x| < 3;$

б) $|x| - 1 < 0,5;$

в) $|x| > 5;$

г) $7 - |x| < 0$

рівносильна системі відповідних нерівностей? А яка — сукупності?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



268. Чи є число 2 розв'язком системи нерівностей:

а) $\begin{cases} x - 3 < 5, \\ 4x + 2 > 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x \geq x + 2, \\ 12 < 8x - 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0,5x \geq 2x - 3, \\ 3x - 1 > 4? \end{cases}$

269. Які з чисел $-1, 0, 1, 2, 3$ задовольняють систему нерівностей:



а) $\begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ 7 + x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3 > 5, \\ 1 - x < 0? \end{cases}$

270. Розв'яжи систему нерівностей і вкажи два цілі числа, які її задовольняють:

а) $\begin{cases} 2x + 7 \geq 0, \\ 3x + 6 \geq 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 5 < 0, \\ 3x + 9 < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 1 < 0, \\ 2x + 5 > 0. \end{cases}$

Зобрази на координатній прямій і запиши множину розв'язків системи нерівностей (271, 272)

271. а) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x < 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x > 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > -3, \\ x \leq 5. \end{cases}$

272. а) $\begin{cases} x > -4. \\ x \leq 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > -4, \\ x \geq 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leq -4, \\ x > 7. \end{cases}$

Розв'яжи систему нерівностей (273–277).

273. а) $\begin{cases} 2x+3 > x, \\ 4x-x < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2-5x < 7, \\ 3x+1 < -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8 \leq 4x+8, \\ 0 < 3x+6. \end{cases}$

274. а) $\begin{cases} 5y-6 < 2y, \\ 3-2y < y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4-3y \geq 2y, \\ y-3 \geq 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5y-8 \leq 3y, \\ 1-4y > 5. \end{cases}$

275. а) $\begin{cases} 15-3x < 9x-12, \\ 8x-7 > 5x+4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12-z < 8z-15, \\ 7z-6 > 6z+4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2(x-3) \leq 5x+7, \\ 3+4x > 3(x-5); \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5(x+2) \geq 2x-4, \\ 3(x+3) < 7-8x. \end{cases}$

276. а) $\begin{cases} 3-2(x-1) < 0, \\ 5-3(x-4) > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4(2x-1) < 3, \\ -5(x-3) \geq 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leq 2-3x+1, \\ 5x \geq 3+(x-4); \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8(1+x) > 3(2x-1), \\ 5 < 3x-2(8x-3). \end{cases}$

277. а) $\begin{cases} 2x-0,2(x-2) > 4, \\ \frac{x}{2}-6 \leq \frac{x}{8}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4-\frac{x-1}{3} \geq x, \\ 7x-1 \geq 48; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0,5x+3 \leq 2,5-3x, \\ 5-0,2x \leq 0,2-5x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0,4z+2 \geq 3,5-2z, \\ 7-1,3z \geq 0,3-5z. \end{cases}$

278. Установіть відповідність між системою нерівностей (1–3) та множиною її розв'язків (А–Д).

1 $\begin{cases} 0,8x-3 \geq 4-0,6x \\ 0,8x+1 \geq 9+x; \end{cases}$ А $[-40; 5]$

2 $\begin{cases} 1-1,5x < x-4, \\ 1+1,8x < 16-1,2x. \end{cases}$ Б $(2; 5)$

3 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x-2}{3}, \\ 2x-3 \leq 0. \end{cases}$ В $[1, 5; +\infty)$

Г $(-\infty; -1)$

Д система розв'язків немає

279. **НМТ** Розв'яжи систему нерівностей $\begin{cases} 3x-2 \geq 5x-6, \\ 7x+1 \leq 4x-5. \end{cases}$

А $(-\infty; 2]$ Б $[2; +\infty)$ В $[-2; 2]$ Г $(-\infty; -2]$ Д $[-2; +\infty)$

280. Скільки цілих розв'язків має система нерівностей $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 > \frac{x}{3}, \\ x - 1 < 7? \end{cases}$

281. Знайди цілі розв'язки системи нерівностей:

$$\begin{cases} 2n+3 < 4(3n-5), \\ 8-4n < 7-2(4n-13). \end{cases}$$

282. Знайди найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x-6 > 4(x+3)-5, \\ 3(x+5) \geq -x-13. \end{cases}$$

283. Знайди найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} n(n+1) > (n+2)(n-2), \\ (n-3)^2 \geq 3-n(2-n). \end{cases}$$

284. Знайди суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x+6 \geq -7(x+1)-8, \\ 3x+6 > 5x+2(x-1). \end{cases}$$

285. **Гра.** Один з учнів записує подвійну нерівність, а інший записує відповідну систему нерівностей. Потім учні міняються ролями.

Розв'яжіть подвійну нерівність (286, 287):

286. а) $-2 < 3x - 4 < 5$; б) $3 < 2 - x < 5$; в) $0,4 \leq 2x + 1 \leq 0,6$;

287. а) $7 \leq 3 + 2x \leq 12$; б) $-4 \leq 2 - 3z < -1$; в) $-2,5 < 7,5 + 5x \leq 1,5$.

288. Укажіть декілька таких значень a , щоб кожна з систем нерівностей: 1) мала розв'язок; 2) не мала розв'язків.

а) $\begin{cases} x > a, \\ x < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x < a, \\ x < -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \geq a, \\ -x \geq 2. \end{cases}$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Розв'яжи систему нерівностей (289–292).

289. а) $\begin{cases} c^2 - 3 < (c+3)^2, \\ 2c + c^2 > (c-2)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5 - (x+3)^2 > (x-2)(1-x), \\ x(x+7) < (x+7)^2 - 7; \end{cases}$



$$\text{в)} \begin{cases} (z^2 - 2) \cdot 3 \geq 3z^2, \\ z^2 + 2z \leq (z-1)z; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} (x-1)^2 + 3x \geq (x-1)(x+1), \\ (x+3)(x-1) \geq (x+2)^2 - 1. \end{cases}$$

$$\text{290. а)} \begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 4, \\ (x-1)^2 > x^2 - 4; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 7 + (x+3)^2 < 5x + (x-3)^2, \\ (x-1)(x+2) < (x+1)(x-2); \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} (x-1)^2 \geq x^2 + 7, \\ (x-2)^2 \geq x^2 - 8; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 3x(x+1)^2 \leq 5 - (1-x)^2, \\ (x-3)(x+3) > (x+7)(x-7). \end{cases}$$

$$\text{291. а)} \begin{cases} \frac{2y+15}{9} - \frac{1-y}{5} \geq \frac{y}{3}, \\ 2y > \frac{19-2y}{2} - \frac{11-2y}{4}; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 4\frac{2}{3}x - 1 < 3x + 3\frac{1}{3}, \\ \frac{3x+12}{5} + 3 > \frac{8+x}{2}; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \frac{4x+3}{3} - \frac{3x-1}{8} < 1 + \frac{8-x}{6}, \\ \frac{7x+3}{5} + \frac{3x+1}{2} > 4 + \frac{x-4}{2}; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \frac{2x-1}{3} - x \leq \frac{11-x}{6} - 2, \\ 3(x+1)^2 + 8x + 2 \leq x(3x-2) + 1. \end{cases}$$

$$\text{292. а)} \begin{cases} c + 0,25 < \frac{14c+3}{12}, \\ c - \frac{1-3c}{4} < \frac{c+8}{6}; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{a}{2} < \frac{5}{3}, \\ 6 - \frac{a+16}{3} < -2a. \end{cases}$$

При яких значеннях змінної x має зміст вираз (293, 294):

$$\text{293. а)} \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}; \quad \text{б)} \sqrt{2x-1} - \sqrt{3x+2}; \quad \text{в)} \sqrt{x+3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}.$$

$$\text{294. а)} \sqrt{x-6} - \sqrt{x+8}; \quad \text{б)} \sqrt{2x-9} + \sqrt{18-3x}; \quad \text{в)} \frac{\sqrt{2x+3}}{5} + \frac{5}{\sqrt{3x+2}}.$$

При яких значеннях x визначена функція (295, 296):

$$\text{295. а)} \sqrt{x+4} - \frac{6x-2}{\sqrt{3-5x}}; \quad \text{б)} \frac{2}{\sqrt{3x-9}} + \frac{2x}{\sqrt{11-2x}}; \quad \text{в)} \sqrt{15-5x} + \frac{\sqrt{0,5x+7}}{x}.$$

$$\text{296. а)} \sqrt{x-3} + \frac{2}{\sqrt{20-3x}}; \quad \text{б)} \frac{x}{\sqrt{6x-12}} + \frac{2-x}{\sqrt{13+2x}}; \quad \text{в)} \sqrt{6x-39} + \frac{\sqrt{8-0,5x}}{x+5}.$$

297. При яких значеннях x значення виразу $4x - 1$ належить проміжку:

$$\text{а)} (1; 2); \quad \text{б)} [-2; 0]; \quad \text{в)} (-\infty; 0); \quad \text{г)} [3; 7)?$$

298. At what values of c does the value of the expression $\frac{2-3c}{4}$ belong to the interval?

$$\text{а)} (-\infty; 0); \quad \text{б)} [0; +\infty); \quad \text{в)} (-1; 1); \quad \text{г)} [1; 8)?$$

299. НМТ Знайди усі значення x , при яких значення виразу $2 - 5x$ належить проміжку $(-3; 6)$.

А $-1 < x < 0,8$

Б $-0,8 < x < 1$

В $0 < x < 9$

Г $-1,6 < x < 0,2$

Д $-0,2 < x < 1,6$

Розв'яжи нерівність (300–304).

300. а) $(x + 2)(x - 7) < 0$;

б) $(x - 3)(2x - 5) > 0$;

в) $(3 - 2z)(1 + z) \geq 0$;

г) $(2y + 8)(7 - 4y) \leq 0$;

г) $0,5x(x + 3) < 0$;

д) $(x^2 + 1)(5 - x) \leq 0$.

301. а) $(2x + 1)(10x - 7) \geq 0$;

б) $(5 - 2x)(1 - 3x) \leq 0$;

в) $(x^2 + 5)(x + 5) > 0$;

г) $2x(x - 6) < 0$.

302. а) $x^2 \leq 25$;

б) $x^2 > 16$;

в) $x^2 < 2$.

303. а) $\frac{x+3}{x-7} > 0$;

б) $\frac{5-2x}{2x-7} \geq 0$;

в) $\frac{3-x}{2x-1} < 0$;

304. а) $\frac{3x-1}{x+5} \leq 0$;

б) $\frac{5-2x}{2+5x} > 0$;

в) $\frac{6+3x}{7x-14} \leq 0$;

305. При яких значеннях n :



а) різниця дробів $\frac{1}{n+1}$ і $\frac{1}{n-1}$ більша за їх добуток;

б) сума дробів $\frac{3}{n-4}$ і $\frac{3}{3-n}$ менша за їх добуток?

306. Розв'яжи систему трьох нерівностей:

а) $\begin{cases} 2x-1 > 5, \\ 4x-3 < 37, \\ 3x-5 > 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-2 \leq 5x-8, \\ 2x-1 \leq 4(2-x), \\ 2x-7 < 3(1-x). \end{cases}$

307. Розв'яжи систему подвійних нерівностей:

а) $\begin{cases} 0 < 1-2x < 1, \\ 3 < 3x+4 < 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 < 5-3x < 3, \\ -3 < 3-2x < 1. \end{cases}$

Розв'яжи нерівність (308, 309).

308. а) $|2x+3| < 5$;

б) $|3x-1| \geq 2$;

в) $|6-x| \leq 4$.

309. а) $|3x-4| < 2$;

б) $|2x+5| > 3$;

в) $|5-x| \geq 2$.

310. Чи правильно, якщо число a додатне, то нерівність:

а) $x^2 < a^2$ рівносильна нерівності $|x| < a$;

б) $x^2 > a^2$ рівносильна нерівності $|x| > a$?

Розв'яжи нерівність двома способами (311, 312):

311. а) $(x+2)^2 > 16$;

б) $(x-1)^2 < 4$;

в) $(2x+1)^2 < 9$.



312. а) $(x-8)^2 < 1$; б) $(x-2)^2 \geq 25$; в) $(5x-3)^2 > 49$.

313. За яких значень параметра a система нерівностей не має розв'язків?

а) $\begin{cases} 3x > 2x+5, \\ x < a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(x+8) \geq 2(3+2x), \\ x+2 \geq a. \end{cases}$

Для кожного значення параметра a розв'яжи систему нерівностей (314, 315).

314. а) $\begin{cases} 5x-4 > x+8, \\ x < a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x-1) \geq x+3, \\ x \geq a. \end{cases}$

315. а) $\begin{cases} 3-x < 6-2x, \\ x > a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+13 \leq 2(1+2x), \\ x-3 \leq a. \end{cases}$

316. За яких значень параметра a найменший цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} 5x-17 < 2(x-4), \\ x \geq a \end{cases}$ дорівнює 1?

317. За яких значень параметра a найбільший цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} 4x-7 < 5(x-1), \\ x \leq a \end{cases}$ дорівнює 3?

318. За яких значень параметра a обидва корені рівняння $x^2 - (3a+5)x + 2a^2 + 8a + 6 = 0$ додатні?

319. За яких значень параметра a корені рівняння $x^2 - (3a+5)x + 2a^2 + 8a + 6 = 0$ належать відрітку $[-1; 4]$?

320. **НМТ** Укажи кількість цілих значень a , за яких рівняння $(9-a)x + 20 - 3a - 2a^2 = 0$ має лише додатні корені.

321. **НМТ** Визнач кількість цілих значень параметра a , за яких корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 4ax + 4a^2 - 25 = 0$ задовольняють умову $x_1 < 1 < x_2$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



322. Розв'яжи нерівність:

а) $(x-3)\sqrt{x-2} \leq 0$; б) $(2x-4)\sqrt{3x-2} \geq 0$; в) $(5-2x)\sqrt{x^2+3} \geq 0$.

323. Знайди найбільший цілий розв'язок нерівності:

а) $\frac{3x-1}{2x+4} \geq 2$; б) $\frac{2x+3}{2-x} \geq 5$.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

324. Розклади на множники квадратний тричлен:

- а) $x^2 - 10x + 21$; б) $a^2 + 2a - 15$; в) $2x^2 + 5x - 3$;
 г) $c^2 - 11c - 26$; ґ) $9a^2 + 3a - 2$; д) $4c^2 + 25c + 25$.

325. Доведи, що значення виразу $17^{10} + 3 \cdot 7^{10} - 3 \cdot 7^9 + 17^9$ ділиться націло на 18.

326. Запиши у стандартному вигляді число:

- а) 47000000; б) 308000000; в) 0,000000039;
 г) 0,00000407; ґ) $803 \cdot 10^9$; д) $0,42 \cdot 10^{-7}$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклад системи нерівностей з однією змінною.
- ✓ Розумію, що таке розв'язок системи нерівностей з однією змінною.
- ✓ Умію:
 - розв'язувати системи лінійних нерівностей з однією змінною;
 - записувати розв'язки системи нерівностей.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

Якщо різниця $a - b$ — число додатне, то число a більше від b .

Якщо різниця $a - b$ — число від'ємне, то число a менше від b .

Середнє арифметичне

$$\frac{a+b}{2}$$

Середнє геометричне

$$\sqrt{ab}$$

Значення виразів

$(a+b)^2 \geq 0$
 для будь-яких a і b ;

$(a+b)^2 + c > 0$
 для $c > 0$ і будь-яких a і b .

§ 7. Доведення нерівностей

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- доведення нерівностей — *proving inequalities*
- середнє арифметичне — *arithmetic mean*
- середнє геометричне — *geometric mean*

Іноді виникає потреба довести, що дана нерівність зі змінними правильна при всіх указаних значеннях змінних. Це можна робити на основі означення понять «більше» і «менше»:

$a > b$, якщо різниця $a - b$ — число додатне.

Приклад 1. Доведи, що при кожному дійсному значенні a $a^2 + 2 > 2a$.

Доведення. Знайдемо і оцінимо різницю:

$a^2 + 2 - 2a = a^2 - 2a + 1 + 1 = (a - 1)^2 + 1$. При кожному дійсному значенні a значення виразу $(a - 1)^2$ невід'ємне, тоді $(a - 1)^2 + 1$ — додатне.

Отже, завжди $a^2 + 2 > 2a$.

Приклад 2. Доведи, що при додатних a і b $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

$$\text{Доведення. } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Утворений вираз $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ при будь-яких додатних a і b невід'ємний.

Отже, якщо $a > 0$ і $b > 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Рівність тут має місце тільки тоді, коли $a = b$.

Зауваження. Вираз $\frac{a+b}{2}$ називають *середнім арифметичним* чисел a і b , а вираз $\sqrt{ab}$ — їх *середнім геометричним*. Тому доведену нерівність читають так:

середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного.

Приклад 3. Доведи, що при додатних a , b і c

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Доведення. Оскільки середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного, то

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}; \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

Перемноживши почленно ці нерівності, маємо:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca},$$

або

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Довести твердження зі змінними означає показати, що воно істинне при всіх допустимих значеннях змінних. Спростувати твердження — це означає довести, що воно хибне.

Спростувати нерівність зі змінними означає показати, що дана нерівність хибна хоч би при одному значенні змінної.

Приклад. Спростуй нерівність $(a + 1)^2 > a^2$.

Спростування. Якщо $a = -1$, то нерівність матиме вигляд $0^2 > 1^2$. Остання нерівність неправильна. Тому не правильна і дана нерівність.

Приклад, що спростовує яке-небудь твердження, називають *контр-прикладом*.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Крім середнього арифметичного і середнього геометричного науковці часто розглядають середнє квадратичне двох чи кількох чисел. *Середнім квадратичним* кількох чисел називають число, що дорівнює квадратному корню із середнього арифметичного їх квадратів.

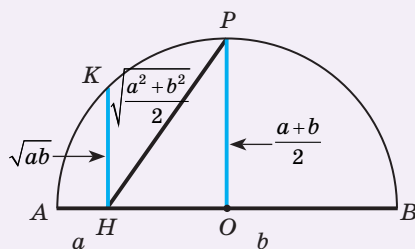
Середнім квадратичним чисел a і b або x, y і z є відповідно:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}.$$

Середнє квадратичне двох чисел завжди більше за їх середнє арифметичне. Спробуй довести, що для будь-яких додатних чисел a і b завжди:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Проілюструй правильність такої подвійної нерівності, використовуючи малюнок 7.1.



Мал. 7.1

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що означає «довести твердження»? А спростувати?
2. Що означає «довести нерівність»?
3. Сформулюй означення середнього арифметичного та середнього геометричного двох чисел.
4. Порівняй середнє арифметичне і середнє геометричне двох додатних чисел.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Доведи нерівність $x^2 + y^2 + 5 \geq 2x - 4y$.



Доведення. Виділимо повні квадрати і отримаємо:

$$x^2 + y^2 + 5 \geq 2x - 4y; (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) \geq 0; (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \geq 0.$$

Оскільки $(x - 1)^2 \geq 0$ і $(y + 2)^2 \geq 0$, то при будь-яких значеннях x і y $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \geq 0$. Рівність має місце тільки тоді, коли $x = 1$ і $y = -2$.

- 2.** Доведи, що коли $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то $(a + 2)(b + 8) \geq 16\sqrt{ab}$.

Доведення. За нерівністю про середнє арифметичне і середнє геометричне маємо:

$$\frac{a+2}{2} \geq \sqrt{2a} \text{ і } \frac{b+8}{2} \geq \sqrt{8b}.$$

Тоді $(a + 2)(b + 8) \geq 2\sqrt{2a} \cdot 2\sqrt{8b}$. Оскільки при $a \geq 0$ і $b \geq 0$, $2\sqrt{2a} \cdot 2\sqrt{8b} = 4\sqrt{16ab} = 16\sqrt{ab}$, то отримаємо, що $(a + 2)(b + 8) \geq 16\sqrt{ab}$.

- 3.** Доведи, якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$. Сформулюй це твердження.

Доведення. Якщо $a < b$, то $a + a < b + a$, тобто $2a < a + b$, звідси $a < \frac{a+b}{2}$.

Аналогічно, якщо $a < b$, то $a + b < b + b$, тобто $a + b < 2b$, звідси $\frac{a+b}{2} < b$.

Об'єднавши обидва випадки, маємо: якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Одержану подвійну нерівність можна сформулювати так: **середнє арифметичне двох нерівних дійсних чисел більше від меншого із даних чисел і менше від більшого з них.**

ВИКОНАЙ УСНО



- 327.** Знайди середнє арифметичне і середнє геометричне чисел:

а) 4 і 9; б) 38 і 0; в) 50 і 8; г) 0,2 і 0,8.

- 328.** Яка з нерівностей правильна?

А $x^2 > 0$ Б $|x| > 0$ В $-x^2 \leq 0$ Г $0x > 0$

- 329.** Яка з нерівностей хибна?

А $(a - 2)^2 + 3 > 0$ Б $(1 - 2a)^2 + 1 \geq 0$ В $(a + 2)^2 > 4a$ Г $a^2 + 1 \geq 2a$

- 330.** Чи правильні нерівності? Чому?

а) $(a - 1)(a + 1) < a^2$; б) $9 - 12a + 4a^2 \geq 0$; в) $a^2 + 6a + 10 > 0$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Доведи нерівність (331–336).

331. а) $(2a - 1)(2a + 1) < 4a^2$;

в) $(a - 2)(a + 4) < (a + 1)^2$;

г) $(a - 3)^2 > a(a - 6)$;

332. а) $(3a - 2)(3a + 2) < 9a^2$;

в) $(a - 7)(a + 2) < (a - 4)(a - 1)$;

г) $(a + 4)^2 > a(a + 8)$;

333. а) $9a^2 - 12a + 4 \geq 0$;

в) $(a + 1)^2 \geq 4a$;

г) $20(5 + a) \leq (a + 10)^2$;

334. а) $4a^2 - 12a + 9 \geq 0$;

в) $(a + 3)^2 \geq 12a$;

г) $12(3 - a) \leq (a - 6)^2$;

335. а) $a^2 + 2a + 2 > 0$;

в) $2a^2 - 10a + 25 > 0$;

г) $a^2 + 65 > 16a$;

336. а) $a^2 - 2a + 5 > 0$;

в) $2a^2 + 6a + 9 > 0$;

б) $3(a - 1) - 2(a - 2) < a + 5$;

г) $(a - 5)(a + 2) < (a - 4)(a + 1)$;

д) $(a + 1)^2 - 5a > a^2 - 3a$;

б) $6(a - 1) - 5(2a + 3) > -4(a + 8)$;

г) $(a - 5)(a + 1) < (a - 2)^2$;

д) $(a - 4)^2 + 3a > a(a - 5) + 1$;

б) $a(a + 6) + 1 \geq 4a$;

г) $(a + 3)^2 + (a - 3)^2 \geq 18$;

д) $\frac{a^2 + 4}{4} \geq a$;

б) $a(a + 4) \geq 6a - 1$;

г) $(a - 2)^2 + (a + 2)^2 \geq 8$;

д) $\frac{1 + a^2}{2} \geq a$;

б) $a^2 + 3 > 2a$;

г) $3a^2 + 1 > 2a$;

д) $a^4 + 82 > 18a^2$;

б) $a^2 + 5 > 4a$;

г) $2a^2 + 1 > 2a$;

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

337. Доведи, що для кожного від'ємного значення x :

а) $(x - 1)(x - 2) > 0$;

б) $x^2 + 9 > 10x$;

в) $(x - 3)(3 - x) < 0$;

г) $(2 - x)(x - 3) < 0$;

338. Доведіть, що для кожного додатного x :

а) $(x + 3)(x + 7) > 0$;

б) $-x(x + 2)(x + 4) < 0$;

в) $-2 - x^2 < 5x$;

339. Prove that for every positive c :

а) $c + \frac{1}{c} \geq 2$;

б) $9c + \frac{1}{c} \geq 6$;

с) $(c + 1)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 4$;

340. Доведи, що для кожного додатного b :

а) $b + \frac{4}{b} \geq 4$; б) $25b + \frac{1}{b} \geq 10$; в) $(b+2)\left(\frac{2}{b}+1\right) \geq 8$.

Доведи нерівність (341–344).

341. а) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$; б) $a^2 + 4a + b^2 - 10b + 29 \geq 0$;
 в) $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$; г) $8a^2 + 14ab + 7b^2 + 1 > 0$;
 ґ) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$; д) $(a + b + 1)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + 1)$.

342. а) $a^2 - 2a + b^2 + 6b + 10 \geq 0$; б) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$;
 в) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$; г) $2a^2 + 5c^2 + 2ac + 1 > 0$.

343. а) $12a + 3b \geq 12\sqrt{ab}$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$;
 б) $(a^2 + 2)(b^2 + 4)(c^2 + 8) \geq 64abc$, якщо $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
 в) $(3a + b)\left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$, якщо $a > 0, b > 0$;
 г) $a^4 + b^4 + 2c^2 \geq 4abc$, якщо $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

344. а) $2a + 8b \geq 8\sqrt{ab}$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$;
 б) $(a^2 + 2)(b^2 + 3)(c^2 + 6) \geq 48abc$, якщо $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
 в) $(a + 2b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b}\right) \geq 4$, якщо $a > 0, b > 0$;
 г) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$, якщо $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

345. Доведи, що сума квадратів двох будь-яких дійсних чисел не менша від їх подвоєного добутку.

346. Що більше:



- а) сума квадратів двох додатних чисел чи квадрат їх суми;
 б) сума квадратів двох від'ємних чисел чи квадрат їх суми?

347. Доведи, що півсума квадратів двох дійсних чисел не менша від квадрата їх півсуми.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

348. Доведи істинність числової нерівності:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1$;
 б) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

349. Знайди найбільше значення виразу ab , якщо $2a + 3b = 12$ і $a > 0$, $b > 0$.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



350. Розв'яжи рівняння: а) $\frac{4}{x+3} = -2x$; б) $\frac{3}{x+3} + \frac{5x}{x-1} = 1$.

351. Один із коренів рівняння $x^3 + 2x^2 - 9x + a = 0$ дорівнює -2 . Знайди решту коренів цього рівняння.

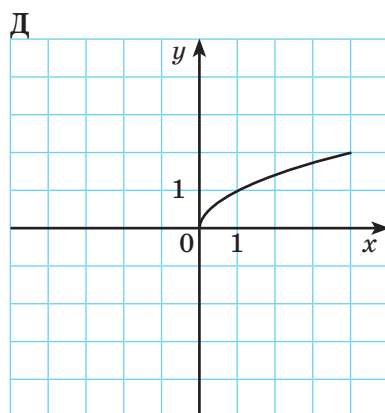
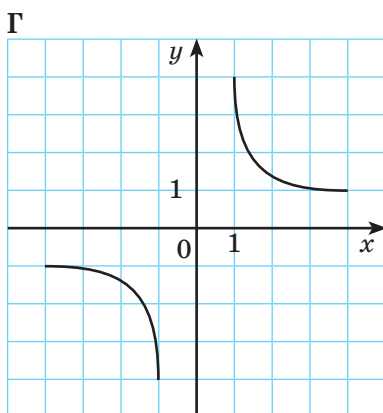
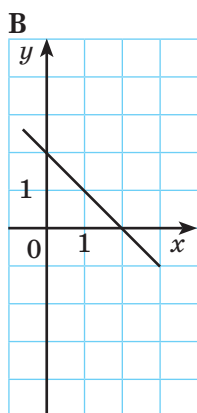
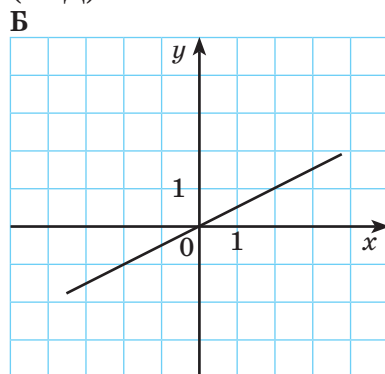
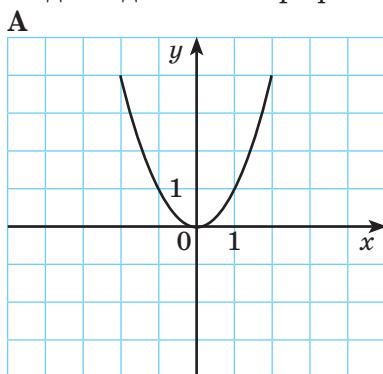
352. Установи відповідність між формулами (1–4), що задають деякі функції, та відповідними їм графіками (А–Д).

1 $y = 0,5x$

2 $y = \sqrt{x}$

3 $y = x^2$

4 $y = 2 - x$



СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
- ✓ Знаю, що спростувати нерівність зі змінною означає показати, що дана нерівність хибна хоча би при одному значенні змінної.
- ✓ Умію використовувати означення понять «більше» і «менше» для доведення нерівностей зі змінними.

Перейди за посиланнями та

- підсумуй головне в розділі <https://vse.ee/czru>
- ознайомся з історичними відомостями <https://vse.ee/czry>

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



ВАРІАНТ I

1. Розв'яжи нерівність $3(x - 5) < 13 - 4x$.
2. Розв'яжи систему нерівностей
$$\begin{cases} 2x + 3 > -7, \\ 3x - 5 \leq 1; \end{cases}$$
3. Розв'яжи подвійну нерівність $-1 \leq 2x - 3 < 5$.
4. Доведи нерівність $(a - 2)(a + 5) < a(a + 3) + 2$.

ВАРІАНТ II

1. Розв'яжи нерівність $4(x - 7) > 12 - 6x$.
2. Розв'яжи систему нерівностей
$$\begin{cases} 3x - 7 < 5, \\ 2x + 1 \geq 3; \end{cases}$$
3. Розв'яжи подвійну нерівність $-3 < 2c + 1 \leq 7$.
4. Доведи нерівність $(a - 3)(a - 2) > a(a - 5) + 3$.

ВАРІАНТ III

1. Розв'яжи нерівність $5(x - 4) < 7 - 4x$.
2. Розв'яжи систему нерівностей
$$\begin{cases} 5x - 2 \leq 18, \\ 2x + 3 > 5; \end{cases}$$
3. Розв'яжи подвійну нерівність $-2 \leq 3n + 4 < 10$.
4. Доведи нерівність $(a + 4)(a - 2) < a(a + 2) - 3$.

ВАРІАНТ IV

1. Розв'яжи нерівність $7(x + 3) > 37 + 3x$.
2. Розв'яжи систему нерівностей
$$\begin{cases} 4x - 3 > 5, \\ 5x + 2 \leq 27; \end{cases}$$
3. Розв'яжи подвійну нерівність $-5 < 2m - 1 \leq 7$.
4. Доведи нерівність $(a + 3)(a + 7) > a(a + 10) + 12$.

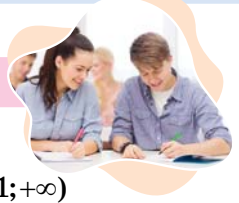
ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 1

1. Вибери правильну нерівність:
 А $0,2 > \sqrt{2}$ Б $-1 < -2$ В $5 \geq 5$ Г $2^{-1} \leq 2^{-2}$
2. Відомо, що $2 < a < 5, 3 < b < 4$. Яка нерівність хибна?
 А $5 < a + b < 9$ Б $-2 < a - b < 2$ В $6 < ab < 20$ Г $\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{5}{4}$
3. Відомо, що $a < b$. Яка нерівність хибна
 А $2a < 2b$ Б $-0,3a > -0,3b$
 В $-5a + 2 < -5b + 2$ Г $5a - 2 < 5b - 2$
4. Нерівність $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ задовольняє число:
 А 2 Б 1 В 0 Г -1
5. Скільки цілих чисел задовольняє подвійну нерівність $-1 \leq x \leq 1$?
 А одне Б два В три Г чотири
6. Укажи найменше ціле число, яке належить проміжку $[-2,7; -0,6]$
 А -3 Б -2 В -1 Г 0
7. Вибери нерівність, яка не має розв'язків.
 А $|x| \geq -3$ Б $(x-2)^2 \leq 0$ В $7 - |x| < 0$ Г $(x+3)^2 < 0$
8. Система нерівностей $\begin{cases} 2x \leq 3, \\ x+1 \leq 2 \end{cases}$ має множину розв'язків:
 А $(-\infty; 1]$ Б $[1,5; \infty)$ В $(-\infty; 1,5]$ Г $[1; 1,5]$
9. Яке найбільше число є розв'язком нерівності $x^2 - 2x \geq x^2 + 2$?
 А 2 Б 1 В -1 Г -2
10. Знайди область визначення функції $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x+3}$:
 А $(-\infty; -3]$ Б $(-\infty; 0) \cup (0; -3]$
 В $[-3; \infty)$ Г $[-3; 0) \cup (0; \infty)$

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 1



1. Розв'яжи нерівність $7x + 7 < 3x + 3$
 А $(-\infty; 1)$ Б $(-\infty; -1)$ В $(1; +\infty)$ Г $(-1; +\infty)$
2. Оціни периметр прямокутника зі сторонами a і b , якщо $7 < a < 9$, $11 < b < 12$.
 А $18 < P < 21$ Б $77 < P < 108$ В $29 < P < 30$ Г $36 < P < 42$
3. Вкажи найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x - 2,8 \leq x + 2, \\ 2x + 7 > 5x - 8. \end{cases}$$

 А 2 Б 3 В 4 Г 5
4. Установи відповідність між нерівностями (1–3) та їх розв'язками (А–Д)

- | | | |
|---|-----------------------------|------------------|
| 1 | $4(x - 2) \geq 2x$ | А $(-\infty; 4)$ |
| 2 | $16 - (x - 2)^2 < 7x - x^2$ | Б $(4; +\infty)$ |
| 3 | $-1 < 3x + 5 \leq 17$ | В $(-2; 4]$ |
| | | Г $[4; +\infty)$ |
| | | Д $[-2; 4)$ |

5. Відомо, що $x < y$. Порівняй:
 а) $x - 3$ і $y - 3$; б) $1,3x$ і $1,3y$; в) $-2x$ і $-2y$; г) $5 - x$ і $5 - y$.
6. Розв'яжи систему нерівностей:
 а)
$$\begin{cases} \frac{x-3}{5} - \frac{3x-1}{10} \geq 4, \\ 3x+16 \geq 8x-4; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} x(x+7) \geq (x-7)^2 - 7, \\ (3-x)(x+3) \geq 0,5x - x^2. \end{cases}$$
7. Знайдіть область визначення функції:
 а) $y = \sqrt{15 - 3x}$; б) $y = \sqrt{2x+6} - \frac{9}{\sqrt{9-2x}}$.
8. За яких значень параметра a рівняння $3(2x+a) = 5+a-4x$ має додатний корінь?

Додаткове завдання

9. Доведи нерівність $2a(a+5) + 15 > (a+2)^2$.

Розділ 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

БОГОЛЮБОВ Микола Миколайович

(1909–1992) Всесвітньо відомий український математик і фізик-теоретик, засновник наукових шкіл нелінійної механіки (Київ), статистичної фізики та квантової теорії поля. Академік НАН України та багатьох іноземних академій наук. Лауреат міжнародної Премії Денні Хайнемана в галузі математичної фізики. Дитячі і юнацькі роки М. М. Боголюбова — це зразок того, як молода людина, наперекір обставинам, завдяки наполегливості й працелюбству може досягти значних успіхів й отримати всесвітнє визнання.



«А чи не існує кілька Боголюбових, кожен із яких — найбільший спеціаліст у своїй галузі?»

Н. Вінер

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

§ 8

Функції

Functions

§ 9

Властивості функцій

Functions Properties

§ 10

Перетворення графіків функцій

Transforming Function
Graphs

§ 11

Квадратична функція

Quadratic Function

§ 12

Квадратні нерівності

Quadratic Inequalities

§ 13

Системи рівнянь другого степеня

Second Degree Equations
Systems

§ 14

Розв'язування задач складанням систем рівнянь

Solving problems by setting up
systems of equations

**Навчальний проєкт № 2
«Функції навколо нас»**

Квадратична функція

Функція — зручна математична модель для дослідження багатьох процесів. Функція, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, — *квадратична*. Її графік — парабола. Такі функції часто використовують в різних галузях науки. Вони пов'язані з квадратними рівняннями і нерівностями.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке функція, область визначення і область значень функції;
- способи задання функції:

формулою	графіком	таблицею	словесно тощо
----------	----------	----------	---------------

- що таке графік функції і як його будують;
- види функцій:

лінійна $y = kx + b$	обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$	квадратична $y = x^2$	інші $y = \sqrt{x}$
-------------------------	--	--------------------------	------------------------

§ 8. Функції

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- функція — *function* аргумент — *argument*
- область визначення — *domain*
- область значень — *range*

Функція — одне з найважливіших понять математики і практики. Всі ми живемо у світі функцій — змін, залежностей і відповідностей. З плином часу день змінює ніч, весна — зиму. Під цей ритм підлаштовується все живе, зокрема і світ людини. Найбільш поширений графік роботи, розклад занять, робота торгових центрів і навіть алгоритми соціальних мереж створюються залежно від часу доби і пори року.

Можна навести чимало прикладів залежностей і відповідностей між змінними у різних галузях знань:

- *геометрія* — $S = 4\pi R^2$ виражає залежність площі поверхні кулі (S) від її радіуса (R);

- *фізика* — формула $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ встановлює відповідність між довжиною маятника (l) і його періодом коливання (T). Отже, T — функція від l (тут $\pi \approx 3,14$, $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ — константи);

- *економіка* — формула $T_R = p \cdot Q$ задає залежність загального доходу (T_R), який отримує підприємство, від ціни (p) проданого товару і обсягу продажу (Q).

Нагадаємо основні відомості про функції.

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y , то таку відповідність називають **функцією**. При цьому x називають **незалежною змінною**, або **аргументом**, y — **залежною змінною або функцією**, а множину D — **областю визначення** даної функції. Множину всіх значень y , яких може набувати функція, називають її **областю значень** і позначають буквою E .

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

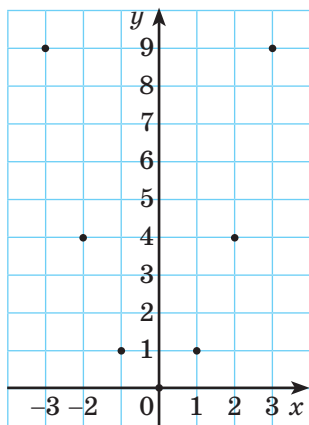
Задають функції найчастіше у вигляді формул, таблиць або графіків. Наприклад, формула $y = x^2$ задає функцію, яка виражає відповідність між числами та їх квадратами.

Якщо область визначення цієї функції — множина цілих чисел з проміжку $[-3; 3]$, то її можна задати у вигляді таблиці:

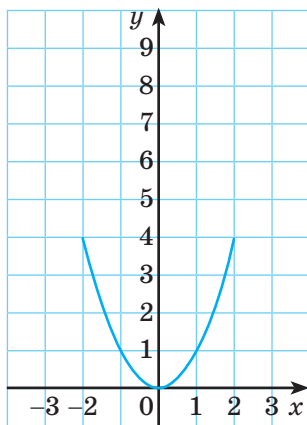
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Графік цієї функції — сім точок (мал. 8.1).

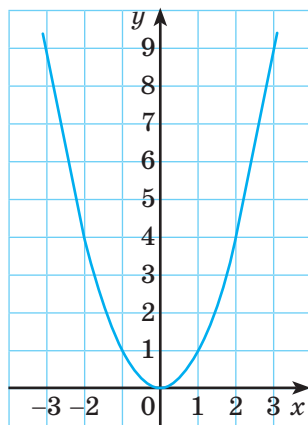
Її область визначення — множина $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, область значень — множина $E = \{0, 1, 4, 9\}$.



Мал. 8.1



Мал. 8.2



Мал. 8.3

Якщо область визначення функції $y = x^2$ — проміжок $[-2; 2]$, то її графіком є частина параболи, зображена на малюнку 8.2, а областю значень — проміжок $[0; 4]$.

Графіком функції $y = x^2$, заданої на множині всіх дійсних чисел R , є вся парабола (мал. 8.3). Область визначення цієї функції — множина дійсних чисел R , а область значень — проміжок $[0; +\infty)$.

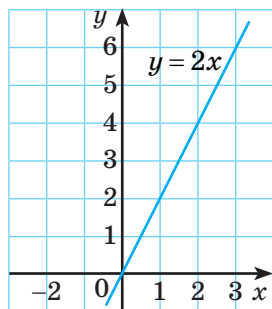
Нагадаємо ще кілька прикладів функцій.

$y = kx$ — **пряма пропорційність** ($k \neq 0$). Її графік — пряма, що проходить через початок координат. Область визначення цієї функції — множина R , область значень — теж множина R .

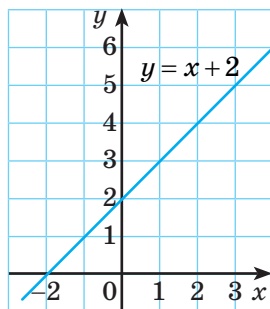
Наприклад, графік функції $y = 2x$ зображено на малюнку 8.4.

$y = kx + b$ — **лінійна функція**. Її графік — пряма, не паралельна осі y . Область визначення — множина R , область значень — R , якщо $k \neq 0$. Якщо $k = 0$, то область значень — одне число b .

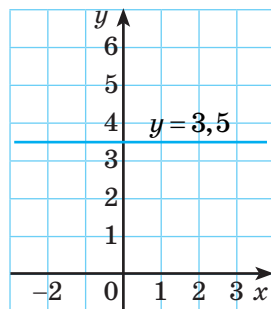
Приклади: $y = x + 2$ (мал. 8.5), $y = 3,5$ (мал. 8.6).



Мал. 8.4



Мал. 8.5



Мал. 8.6

$y = \frac{k}{x}$ — **обернена пропорційність** ($k \neq 0$). Її графік — гіпербола.

Якщо $k > 0$, то гілки цієї гіперболи розміщені в I і III чвертях координатної площини, якщо $k < 0$, — у II і IV чвертях. Область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ — множина R без числа 0, область значень — ця сама множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

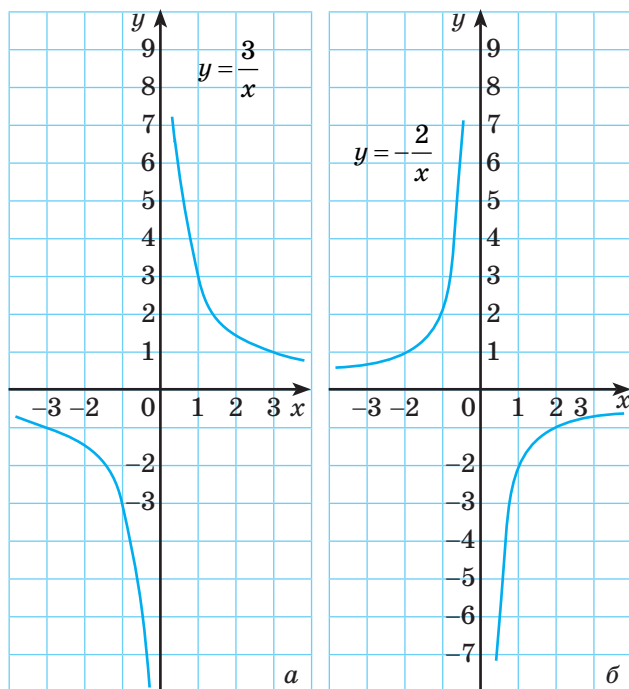
Приклади: $y = \frac{3}{x}$ (мал.

8.7, а), $y = -\frac{2}{x}$ (мал. 8.7, б).

Графік функції $y = x^3$ зображено на малюнку 8.8 (с. 74). Її область визначення і множина значень — множина R .

Графік функції $y = \sqrt{x}$ — одна гілка параболи (мал. 8.9 (с. 74)). Її область визначення $[0; +\infty)$ і область значень — $[0; +\infty)$.

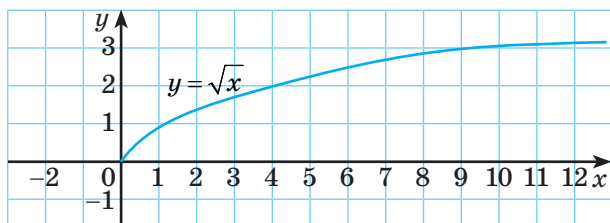
Якщо змінна y залежить від x , то записують $y = f(x)$ (читають: ігрек до рівнює еф від ікс). Симво-



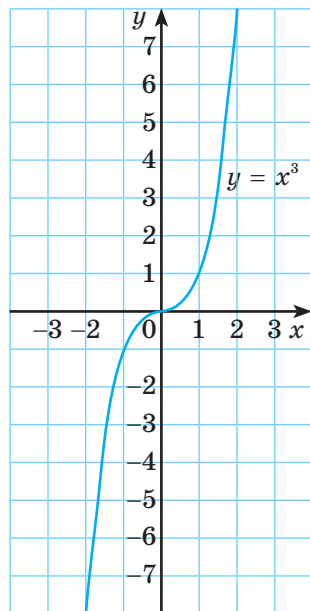
Мал. 8.7

лом $f(a)$ позначають значення функції $y = f(x)$, якщо $x = a$. Якщо $f(x) = 3x^2 - 5$, то $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 7$.

Зауваження. Якщо $y = f(x)$, то часто кажуть, що y — функція від x , тобто функцією називають змінну y . Однак здебільшого під функцією розуміють не одну залежну змінну, а відповідність між значеннями двох змінних. До того ж — не будь-яку відповідність, а однозначну, при якій кожному значенню змінної x відповідає *єдине* значення змінної y .



Мал. 8.9



Мал. 8.8

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

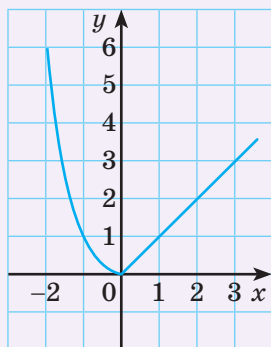
Деякі функції на окремих частинах області визначення задаються різними формулами. Такою є, наприклад, функція $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$

Значення цієї функції при від'ємних значеннях аргументу знаходять, користуючись формулою $f(x) = x^2$, а при інших — за формулою $f(x) = x$. Її графік — на малюнку 8.10.

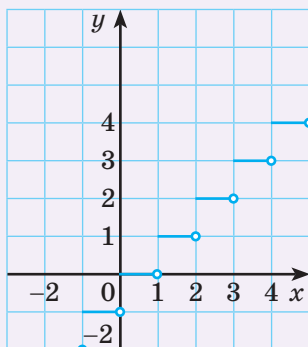
Існують також інші функції, які позначають новими для тебе символами.

Цілою частиною дійсного числа x називають таке найбільше ціле число, яке не перевищує x . Позначають цілу частину числа символом $[x]$. Графік функції $y = [x]$ зображено на малюнку 8.11. Функцію $y = [x]$ ще називають функцією Антьє.

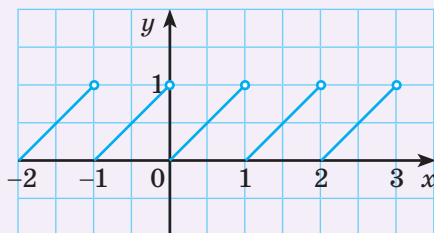
Дробовою частиною дійсного числа x називають різницю між даним числом і його цілою частиною: $\{x\} = x - [x]$. Графік функції $y = \{x\}$ — на малюнку 8.12.



Мал. 8.10



Мал. 8.11



Мал. 8.12

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй означення: а) функції; б) графіка функції.
2. Що таке: а) аргумент; б) область визначення; в) область значень функції? Наведи приклад.
3. Як можна задати функцію?
4. Які функції називають лінійними? Які їх властивості?
5. Назви властивості оберненої пропорційності.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Функцію задано формулою $f(x) = x^3 + 1$.

Знайди: $f(-3)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$.

Розв'язання. $f(-3) = (-3)^3 + 1 = -27 + 1 = -26$,

$$f(0) = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1, \quad f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + 1 = 2\sqrt{2} + 1.$$

Відповідь. $f(-3) = -26$, $f(0) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$.

2. У яких точках графік функції $y = x^2 - 3x + 2$ перетинає:

а) вісь y ; б) вісь x ?

Розв'язання. а) Якщо графік перетинає вісь y у деякій точці, то абсциса цієї точки дорівнює нулю, а координати задовольняють рівняння, що задає функцію.

Маємо: $x = 0$; $y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$.

Отже, графік функції перетинає вісь y у точці з координатами $(0; 2)$.

б) Якщо графік перетинає вісь x у деякій точці, то ордината цієї точки дорівнює нулю, а координати задовольняють рівняння, що задає функцію.

Маємо: $y = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Отже, графік функції перетинає вісь x у точках з координатами $(1; 0)$ і $(2; 0)$.

Відповідь. а) $(0; 2)$; б) $(1; 0)$ і $(2; 0)$.

3. Знайди область значень функції $y = x^2 - 5$.

Розв'язання. Зауважимо, що $D(y) = R$. Оскільки для кожного дійсного значення x виконується умова $x^2 \geq 0$, то за властивістю нерівностей $x^2 - 5 \geq 0 - 5$, тобто $x^2 - 5 \geq -5$. Отже, $E(y) = [-5; +\infty)$.

Відповідь. $E(y) = [-5; +\infty)$.

ВИКОНАЙ УСНО



353. Провідмінняй слово: а) *функція*; б) *аргумент*; в) *графік*.

354. Задай формулою функцію, яка виражає відповідність між числами та:
а) їхніми кубами; б) протилежними до них числами;
в) оберненими до них числами; г) їхніми модулями.

355. Яким є графік функції, заданої формулою:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^2$; в) $y = 3$; г) $y = \frac{3}{x}$; ґ) $y = \frac{x}{3}$; д) $y = \sqrt{x}$?

356. Чи правильно, що:

а) графік функції $y = \frac{2}{3}x - 5$ є також графіком рівняння $2x - 3y = 15$;

б) графік функції $y = \sqrt{x}$ є також графіком рівняння $y^2 = x$? Чому?

357. Графік якої з функцій не проходить через початок координат?

А $y = 2(x - 3)$ Б $y = 2x^2$ В $y = x(x - 2)$ Г $y = x^3 + x$

358. Знайди область визначення функції:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = 4 - x^2$; в) $y = -2,5$;
г) $y = \frac{5}{x(x-3)}$; ґ) $y = \sqrt{2x-4}$; д) $y = \frac{1}{x}\sqrt{5-2x}$.

359. Яка з функцій визначена на множині всіх дійсних чисел?

А $y = \sqrt{x-3}$ Б $y = \frac{3}{x-3}$ В $y = \frac{3}{x^2+1}$ Г $y = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



360. Функцію задано формулою $y = \frac{1}{2}x^2$ на області визначення $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Задай її таблично і графічно.

361. Побудуй графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ на проміжку $[-4; 4]$. Знайди її область значень.

362. Функцію $y = \frac{1}{2}x^2$ задано на множині R . Знайди її область значень.

Чи належить графіку цієї функції точка $A(-100; 5000)$?

363. Функцію задано у вигляді таблиці:



x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Задайте її формулою. Вкажіть її область визначення і область значень.

364. Функцію задано формулою $f(x) = x^2 + 10$. Знайди:

$$f(2), \quad 3f(2), \quad 2f(3), \quad 0,5f(10), \quad f(\sqrt{2}).$$

365. The function is given by the formula $f(x) = x^3 - 5$. Find:

$$f(-3), \quad -f(-2), \quad 3f(-1), \quad -5f(0), \quad f(\sqrt{3}).$$

366. Функцію задано формулою $f(x) = x^2 - x$. Обчисли:

$$\text{а) } f(-2) + f(-1); \quad \text{б) } f(0) + f(1); \quad \text{в) } f(2) - f(30).$$

367. Функцію задано формулою $f(x) = x^2 - x + 1$. Обчисли:

$$\text{а) } f(0) + f(1) + f(2) + f(3); \quad \text{б) } f(10) - f(-9) + f(8) - f(-7).$$

368. **ЗНО** Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 10, & \text{якщо } x < -2, \\ 4x^2 + 3x, & \text{якщо } x \geq -2. \end{cases}$

Обчисли $f(-4) - f(2)$.

369. На малюнку 8.13 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$.

Знайди:

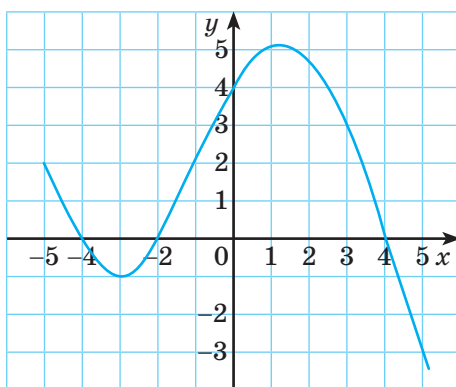
а) область визначення і область значень даної функції;

б) $f(-5)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(5)$;

в) для яких значень аргументу $f(x) = 4$, $f(x) = 0$;

г) координати точок перетину графіка функції з осями координат;

г) для яких x значення $f(x)$ найбільше, найменше.



Мал. 8.13

370. Гра. Один із учнів / одна з учениць



малює графік функції за допомогою інструменту  у Geogebra (<https://www.geogebra.org/graphing>), а другий / друга має оцінити, чи дійсно цей графік є графіком функції та знайти його область визначення та область значень. Потім учні / учениці міняються ролями.

Знайди область визначення функції (371, 372).

$$\text{371. а) } y = 3x - 2; \quad \text{б) } y = \frac{3}{x-2}; \quad \text{в) } y = \sqrt{x+5};$$

$$\text{г) } y = \frac{1}{(x-3)(x-4)}; \quad \text{г) } y = \sqrt{x+1}; \quad \text{д) } y = \frac{10}{x^2+1}.$$

$$\text{372. а) } y = 5x - 1; \quad \text{б) } y = \frac{3}{(x-4)(x+1)}; \quad \text{в) } y = \sqrt{4-x};$$

$$\text{г) } y = \frac{2x}{5-x}; \quad \text{г) } y = \sqrt{x^2+1}; \quad \text{д) } y = \frac{x-1}{1+x}.$$

Побудуй графік функції (373, 374).

373. а) $y = 3x - 2$; б) $y = 0,5x - 1$; в) $y = -3x$;
 г) $y = 7 - 2x$; ґ) $y = 5$; д) $y = 3 - x$.
374. а) $f(x) = 2 - 3x$; б) $f(x) = -1$; в) $f(x) = 0,5x$.

375. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{25 - x^2}$ точка $A(3; 4)$? Точка $B(-4; 3)$?

376. Чи проходить графік функції $y = x(x - 3)$ через точки $A(2; -2)$; $B(-1; 4)$?

377. Яка з точок $A(-2; -6)$; $B(1,5; 8)$; $C(-3; 4)$; $D(-2; -6)$ належить графіку функції:

- а) $y = -10x - 26$; б) $y = \frac{12}{x}$; в) $y = \sqrt{x^2 + 7}$?

У яких точках перетинає осі координат графік функції (378, 379):

378. а) $y = 2,5x$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = 2(x - 1)$?
379. а) $y = x - 3$; б) $y = (x - 1)(x - 2)$; в) $y = x^2 - 6x + 9$.

380. Температуру за шкалою Цельсія, Фаренгейта і Кельвіна позначимо відповідно t_C , t_F , t_K . Формули перерахунку мають вигляд:

$$t_F = \frac{9}{5}(t_C + 32), \quad t_K = t_C + 273.$$

Для довільних 10 значень температури за Цельсієм знайди відповідні значення температури за Фаренгейтом і Кельвіном. Дані занеси до таблиці. Зобрази графічно одержані залежності за допомогою Desmos Calculator.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



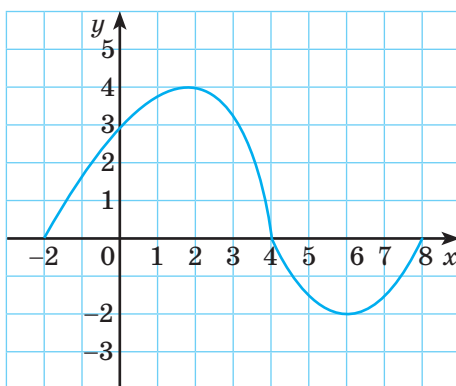
381. Функцію задано формулою $f(x) = x^2$. Чи правильно, що для кожного числа a виконується рівність $f(-a) = f(a)$?
382. Функцію задано формулою $f(x) = x^3$. Чи для кожного значення її аргументу x правильна рівність $f(-x) = -f(x)$?
383. Функцію задано формулою $y = \frac{6x}{1+x}$ на множині натуральних чисел першого десятка. Задай її у вигляді таблиці.
384. Функцію задано формулою $y = 2\sqrt{x+5}$ на області визначення $D = \{-4; -2,75; -1; 1,25; 4; 11\}$. Задай її у вигляді таблиці і графіка.
385. Не будуючи графік рівняння $9x - 2y = 14$, знайди його точку, ордината якої дорівнює абсцисі.
386. Не будуючи графік функції $y = x^2 - 2$, знайди його точку, абсциса та ордината якої — протилежні числа.

387. Кожному натуральному числу відповідає протилежне йому число. Чи є така відповідність функцією? Якщо так, то задай її формулою та графіком.

388. Кожному цілому числу відповідає рівне йому число. Чи є така відповідність функцією? Якщо так, то що є її графіком?

389. Функцію $y = f(x)$ задано графіком (мал. 8.14). Для яких значень аргументу:

- а) $f(x) = 0$, $f(x) \leq 0$;
- б) $f(x) = -2$, $f(x) > -2$, $f(x) \leq -2$;
- в) $f(x) = 3$, $f(x) \geq 3$, $f(x) < 3$;
- г) $0 \leq f(x) \leq 3$;
- г) $-2 < f(x) < 4$?



Мал. 8.14

390. При якому значенні m графік функції $y = \sqrt{x+m}$ проходить через точку $P(5; 5)$? Чи проходить цей самий графік через точку $Q(-4; 4)$?

391. Відомо, що точка $A(3; 1)$ належить графіку кожної функції $y = f(x)$. Установіть відповідність між функціями $f(x)$ (1–4) та точками (А–Д), через які проходять графіки цих функцій.

- | | |
|--------------------------|------------|
| 1 $f(x) = x^2 + m$ | А (4; 8) |
| 2 $f(x) = m - 2x$ | Б (12; 4) |
| 3 $f(x) = \frac{m}{x+1}$ | В (12; -7) |
| 4 $f(x) = \sqrt{3x+m}$ | Г (1; 2) |
| | Д (1; 5) |

«Математика — це те, за допомогою чого люди керують природою і собою».

А. М. Колмогоров

Знайди область визначення функції та побудуй її графік (**392, 393**).

392. а) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$; б) $y = \frac{10 - 5x}{x^2 - 2x}$; в) $y = -\frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$.

393. а) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; б) $y = -\frac{12 - 4x}{x^2 - 3x}$; в) $y = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$.

Знайди область визначення функції (**394, 395**).

394. а) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 5}$; б) $y = \frac{\sqrt{x^3 + 5x}}{4x}$; в) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 - 5x^2}$;

г) $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$; г) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$; д) $y = \frac{\sqrt{-3x-4}}{4-|x|}$.

395. а) $y = \frac{\sqrt{x+4}}{x^2-16}$; б) $y = \frac{\sqrt{x^3+2x}}{|x|-2}$; в) $y = \sqrt{x^2-10x+26}$.

Знайди область значень функції (396, 397).

396. а) $y = x^2 + 9$; б) $y = \sqrt{x} - 7$; в) $y = 3 - |x|$.

397. а) $y = \sqrt{x} + 2$; б) $y = x^2 - 3$; в) $y = 6 - 2|x|$.

398. Для участі у шкільному благодійному ярмарку учні / учениці класу вирішили пекти тістечка. Вартість електроенергії на випічку становить 100 грн за весь час, а ціна продуктів для одного тістечка становить 28 грн. Тістечка учні / учениці продаватимуть по 45 грн за штуку.

а) Запиши функцію $y = f(x)$, що описує залежність прибутку (y) від кількості тістечок (x).

б) Знайди область визначення цієї функції.

в) Скільки потрібно продати тістечок, щоб покрити всі витрати?

г) Визнач, який прибуток отримає клас, якщо діти продадуть 200 тістечок?

399. Учні / учениці запропоновано частину коду в Python.



Яку функцію описує частина коду? Чому саме при обчисленні $f(5)$ виникає помилка? Яка область визначення цієї функції? Як потрібно змінити код, щоб програма працювала правильно?

```
def f(x):
    return x / (x - 5)

print(f(5))
```

Побудуй графік функції (400, 401).

400. а) $y = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$

401. а) $y = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 3-x, & \text{якщо } 1 < x < 4, \\ -1, & \text{якщо } x \geq 4; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 1,5x, & \text{якщо } -2 \geq x \geq 2, \\ \frac{6}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

402. Інтернет-провайдер пропонує два тарифні плани:

Тариф А: абонплата 400 грн на місяць + 25 грн за кожен гігабайт понад 20 ГБ.

Тариф Б: абонплата 550 грн на місяць, але без додаткової оплати за трафік.



а) Запиши функцію $y = f(x)$, що описує вартість користування інтернетом за тарифом А та за тарифом Б, якщо x — кількість використаних гігабайтів на місяць, а y — вартість користування інтернетом (у грн).

б) Визнач область визначення кожної функції.

в) Скільки коштуватиме 50 ГБ інтернету за тарифом А і за тарифом Б?

г) При якому значенні x обидва тарифи дають однакову вартість?

д) Який тариф вигідніший для учня/учениці, якщо він/вона витрачає від 10 до 100 ГБ на місяць?

403. Функція попиту на товар: $Q_D = 9 - p$. Функція пропозиції товару: $Q_S = 2p - 6$. Тут Q_D — обсяг попиту і Q_S — обсяг пропозиції (мільйонів штук за рік), p — ціна (грошові одиниці). Визнач рівноважну ціну (попит дорівнює пропозиції) і обсяг продажу. Як вплине на значення рівноважної ціни товару зменшення попиту на 20 %?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



404. Порівняй значення виразів.

а) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{20}$;

б) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{44}$;

в) $\sqrt{13}$ і $2\sqrt{3}$;

г) $3\sqrt{7}$ і 8;

г) $4\sqrt{5}$ і 9;

д) $5\sqrt{2}$ і 7.

405. За один місяць роботи службовцю нараховують зарплату в розмірі 35430 грн. Із усіх нарахувань утримують податок на доходи фізичних осіб, який становить 18 %, та податок на військовий збір у розмірі 5 %. Скільки грошей службовець отримує за місяць? Яку суму складають його відрахування за рік?

406. Розв'яжи нерівність.

а) $\frac{2x+3}{3x+1} > 0$;

б) $\frac{x-6}{1-x} > -1$;

в) $\frac{9-2x}{x} \geq 1$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, як позначають функції.
- ✓ Можу навести приклади вивчених функцій:
 - лінійної $y = 2x + 3$;
 - прямої пропорційності $y = -0,5x$;
 - оберненої пропорційності $y = \frac{6}{x}$;
 - інші $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

- ✓ Умію обчислювати значення функції в точці.
- ✓ Умію будувати графіки функцій і знаю назву графіків:

$y = kx$ пряма

$y = kx + b$ пряма

$y = \frac{k}{x}$ гіпербола

$y = x^2$ парабола

- ✓ Хочу навчитися детальніше характеризувати функцію за її графіком.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— які характеристики функції можна визначати за її графіком:

область визначення

область значень

додатні значення

від'ємні значення тощо

— види функцій, їх графіки та основні характеристики:

лінійна $y = kx + b$

обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$

квадратична $y = x^2$

інші $y = \sqrt{x}$

§ 9. Властивості функцій

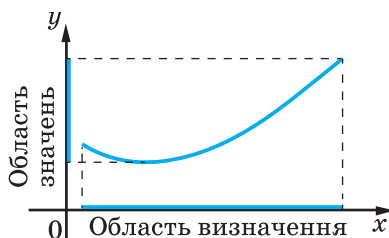
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- нулі функції — *zeros of the function*
- проміжки спадання — *intervals of decrease*
- проміжки зростання — *intervals of increase*

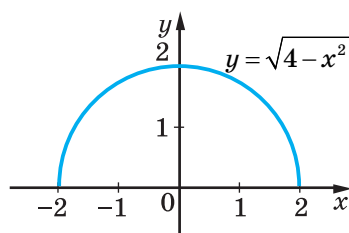
Описуючи властивості функції, зазвичай починають з її області визначення — вказують усі значення, яких може набувати аргумент.

Якщо функцію задано формулою, а про її область визначення нічого не сказано, то розуміють, що вона така сама, як і область допустимих значень змінної, яка входить до цієї формули.

Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції — проекція її графіка на вісь x ; область значень функції — проекція її графіка на вісь y (мал. 9.1). Наприклад, область визначення функції $y = x^2$ — множина всіх дійсних чисел R , область її значень — проміжок $[0; \infty)$. Область визначення і область значень функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ — проміжки $[-2; 2]$ і $[0; 2]$ (мал. 9.2).



Мал. 9.1



Мал. 9.2

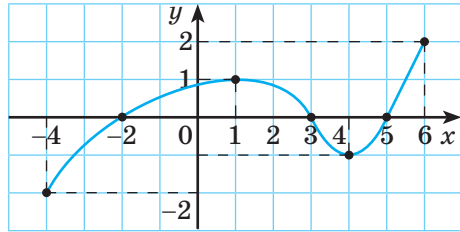
Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 9.3. При $x = -2$, $x = 3$ і $x = 5$ значення функції дорівнюють нулю.

Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають нулями функції.

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є нулями функції.

Нулем функції $y = x - 6$ є лише одне значення x : тільки при $x = 6$ значення цієї функції дорівнює нулю.

Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 9.3, має додатні, нульові й від'ємні значення. На проміжку $(-2; 3)$ її значення додатні. Це проміжок сталого знака: усі значення функції на цьому проміжку мають сталий знак «+». І проміжок $(5; 6)$ є також проміжком сталого знака «плюс». Проміжки $(-4; -2)$ і $(3; 5)$ теж є проміжками сталого знака: усі значення розглядуваної функції $y = f(x)$ на цих проміжках від'ємні.



Мал. 9.3

Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають проміжками знакосталості.

На проміжку знакосталості графік функції не перетинає вісь абсцис. Зверніть увагу на графік функції на мал. 9.3. На проміжку $[-4; 1]$ графік «йде вгору»: при збільшенні значень x із цього проміжку відповідні значення функції збільшуються.

Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Кажуть, що на проміжку $[-4; 1]$ функція $y = f(x)$ **зростає** (або є **зростаючою**). Такою вона є й на проміжку $[4; 6]$.

На проміжку $[1; 4]$ графік функції $y = f(x)$ «йде вниз»: при збільшенні значень аргументу відповідні значення функції зменшуються. Кажуть, що на цьому проміжку функція $y = f(x)$ **спадає** (або є **спадною**).

Функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

Функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

Існують функції, які зростають (або спадають) на всій області визначення. Наприклад, функції $y = 2x$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ — зростаючі, а функції $y = -2x$, $y = -\sqrt{x}$ — спадні.

Характеризуючи властивості функції, часто відмічають, в яких точках вона має найбільше значення, в яких — найменше. Функція, графік якої зображено на малюнку 9.3, найбільше значення має в точці $x = 6$; воно дорівнює 2. Найменшого значення -2 ця функція досягає в точці $x = -4$.

Якщо пропонують дослідити функцію, це означає виявити її найважливіші властивості:

- 1) вказати область визначення;
- 2) вказати область значень;
- 3) знайти точку перетину графіка функції з віссю y ;
- 4) знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
- 5) визначити проміжки зростання чи спадання;
- 6) указати найбільше та найменше значення функції;
- 7) побудувати графік функції.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зростаючою чи спадною є функція $y = kx + b$?

Нехай $x_1 < x_2$. Оцінимо значення виразу $y_1 - y_2$. Оскільки $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$, то $y_1 - y_2 = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 + b - kx_2 - b = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$.

Якщо $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$. Тоді добуток $k(x_1 - x_2) > 0$, коли $k < 0$, і $k(x_1 - x_2) < 0$, коли $k > 0$. Отже, якщо $k < 0$, то $y_1 - y_2 > 0$, тобто для $x_1 < x_2$ $y_1 > y_2$. Значить, при $k < 0$ функція $y = kx + b$ спадає. Якщо $k > 0$, то $y_1 - y_2 < 0$, тоді для $x_1 < x_2$ $y_1 < y_2$. Тому при $k > 0$ функція зростає.

Якщо $k = 0$, то функція набуває вигляду $y = b$, а значить, є сталою.

Отже, функція $y = kx + b$ зростає при $k > 0$ і спадає при $k < 0$.

Тому функції $y = 2x - 5$, $y = x$, $y = 0,3x + 7$ — зростаючі, а функції $y = -x$, $y = -7x + 2$, $y = 5 - 8x$ — спадні.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Квадратична функція. Урок 1).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що таке область визначення і область значень функції? Як їх знайти за допомогою графіка?
2. Що називають нулями функції?
3. Що називають проміжками знакосталості?
4. Які функції називають зростаючими? А спадними?
5. Що таке найбільше та найменше значення функції?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди нулі функції: а) $y = 2x^2 - x - 1$; б) $y = \frac{2x+6}{\sqrt{x-1}}$.

Розв'язання. а) Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 = 3^2; x_1 = \frac{1-3}{4} = -0,5; x_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$$

б) Спочатку знайдемо область визначення функції: $x-1 > 0, x > 1$.

Отже, $D(y) = (1; +\infty)$.

Розв'яжемо рівняння $\frac{2x+6}{\sqrt{x-1}} = 0, 2x+6=0, x=-3$. Але значення -3

не належить області визначення функції, значить не є нулем цієї функції.

Відповідь. а) Нулями даної функції є числа $-0,5$ і 1 ;

б) функція нулів не має.

2. Не виконуючи побудови, знайди проміжки знакосталості функції $y = 5x - 18$.

Розв'язання. $y > 0$, якщо $5x - 18 > 0$. Розв'яжемо цю нерівність:

$5x > 18, x > 3,6$. Аналогічно, $y < 0$, якщо $5x - 18 < 0$, тобто $x < 3,6$.

Відповідь. $y > 0$, якщо $x \in (3,6; +\infty)$; $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; 3,6)$.

3. Доведи, що функція $y = x^2 + 3$ на проміжку $(-\infty; 0)$ спадає.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — два довільних значення аргументу x даної функції з проміжку $(-\infty; 0)$, причому $x_1 < x_2$.

Відповідні їм значення функції: $y_1 = x_1^2 + 3, y_2 = x_2^2 + 3$.

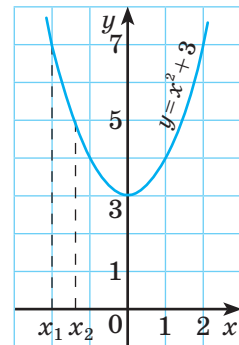
Оцінимо значення виразу:

$$y_1 - y_2 = (x_1^2 + 3) - (x_2^2 + 3) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Значення x_1 і x_2 з проміжку $(-\infty; 0)$ від'ємні, тому $x_1 + x_2 < 0$. Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$. Отже, добуток $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$.

Тому різниця $y_1 - y_2 > 0$, тобто $y_1 > y_2$.

Отже, для $x_1 < x_2$ отримали, що $y_1 > y_2$, тобто меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Отже, дана функція на цьому проміжку спадна (мал. 9.4).



Мал. 9.4

ВИКОНАЙ УСНО



407. Знайди область визначення і область значень функції:

а) $y = 2x^2$; б) $y = \frac{2}{x}$; в) $y = x^3$; г) $y = \frac{2x}{x}$;
 г) $y = x - 2$; д) $y = \frac{2x}{3} + 5$; е) $y = \sqrt{x}$; є) $y = \frac{2}{x^2}$.

408. Області значень функцій $y = x^2$ і $y = |x|$ однакові. Наведи приклади інших функцій з такими самими областями значень.

409. Чи однакові області значень функцій:

а) $y = |x+3|$ і $y = |x|+3$; б) $y = x^2 + 3$ і $y = (x+3)^2$?

410. Яка з функцій зростає на всій області визначення?

А $y = 2$ Б $y = 3 - x$ В $y = x^2$ Г $y = 3 + x$

411. Наведи приклади функцій, спадних на всій області визначення.

412. Знайди нулі функції $y = x^2 - 4$.

А 2 Б 4 В 2 або -2 Г функція нулів не має

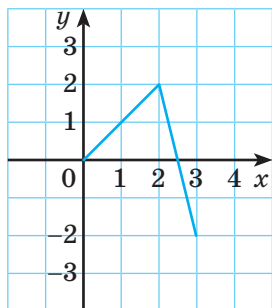
413. Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь абсцис в одній точці А(12; 0). Скільки нулів має ця функція? Скільки коренів має рівняння $f(x) = 0$?

414. Графік функції перетинає вісь абсцис n разів. Скільки нулів має ця функція?

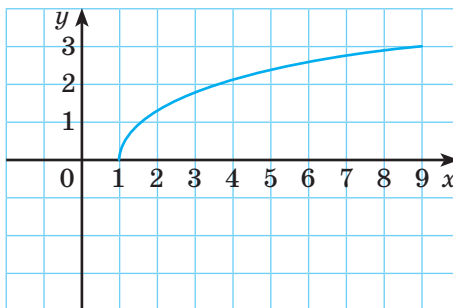
415. Укажи найбільше значення функції, графік якої подано на малюнку 9.3.

А -4 Б 1 В 6 Г 2

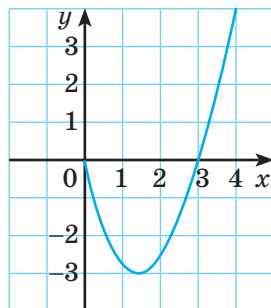
416. За малюнком 9.5 знайди: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) найбільше і найменше значення функції; г) проміжки, на яких функція зростає; г) проміжки, на яких функція спадає.



а



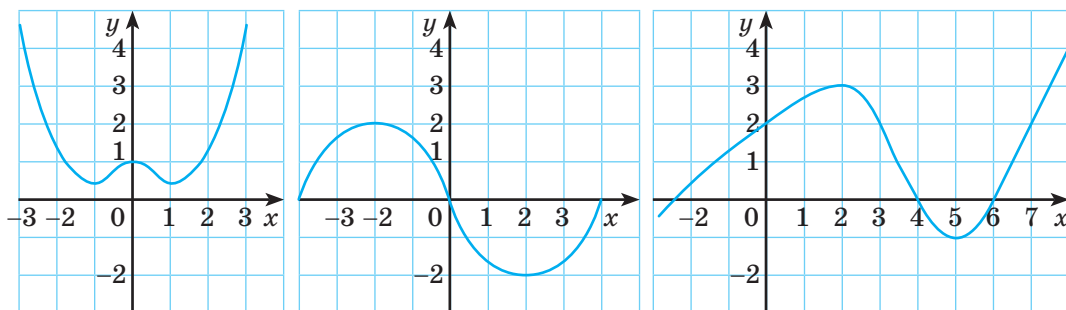
б



в

Мал. 9.5

417. Гра. Один з учнів / одна з учениць обирає малюнок 9.6, другий / друга — задає властивість функції, а третій — характеризує функцію відповідно до графіка на малюнку. Потім учні / учениці міняються ролями.



Мал. 9.6

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Знайди область визначення функції (418, 419).

418. а) $y = -7x + 3$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = \sqrt{x+4}$;

г) $y = \frac{3}{x+9}$; д) $y = \frac{-1}{x^2+4}$; е) $y = \frac{x}{1-x}$.

419. а) $y = 2x + 9$; б) $y = \sqrt{6-2x}$; в) $y = \frac{3+x}{x^2-16}$.

Знайди область значень функції (420, 421).

420. а) $y = 0,01x$; б) $y = x^2 + 2$; в) $y = \sqrt{x} - 3$.

421. а) $y = x^3$; б) $y = 2x^2 - 5$; в) $y = \sqrt{x} + 1$.

Знайди область визначення і область значень функції (422, 423).

422. а) $y = x^2 - 1$; б) $y = \frac{2-x}{3}$; в) $y = |x| + 3$.

423. а) $y = 1 - \sqrt{x}$; б) $y = \frac{x+5}{5}$; в) $y = |x| + 2$.

424. Які з функцій зростаючі, а які — спадні?

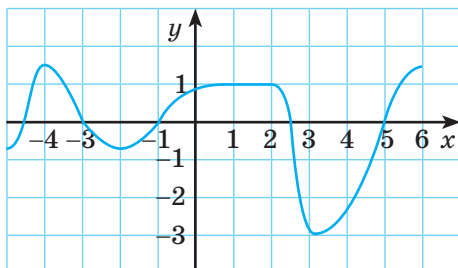
а) $y = 2x$; б) $y = -x - 2$; в) $y = x^3$; г) $y = \frac{2x}{x}$.

425. Зростаючою чи спадною є функція:

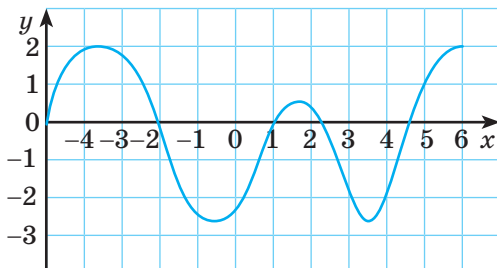
а) $y = -\frac{2}{5}x + 3$; б) $y = \frac{5x}{2}$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = \frac{-x}{5x}$?

426. На мал. 9.7 (с. 88) зображено графік функції $y = f(x)$.

Знайди: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) найбільше і найменше значення функції; ґ) проміжки, на яких функція зростає; д) проміжки, на яких функція спадає.



Мал. 9.7



Мал. 9.8

427. 1) На мал. 9.8 зображено графік функції $f(x)$, що описує рівень води в річці (y метрах) протягом 11 днів весняного паводку.

Знайди: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) найбільше і найменше значення функції; ґ) проміжки, на яких функція зростає; д) проміжки, на яких функція спадає.

2) **Відкрита задача.** Виконай це завдання для графіка функції, побудованого самостійно.

428. Функцію $y = 1,5x - 2$ задано на проміжку $[-2; 5]$. Побудуй графік даної функції і, користуючись графіком, вкажи: а) область визначення функції; б) область значень функції; в) нулі функції; г) проміжки знакосталості; ґ) зростаючою чи спадною є функція; д) найбільше і найменше значення функції.

429. Побудуй графік функції $y = x^2$, заданої на проміжку $[-1; 3]$. Користуючись графіком, вкажи: а) область визначення функції; б) область значень функції; в) нулі функції; г) проміжки знакосталості; ґ) проміжки зростання та спадання функції; д) найбільше і найменше значення функції.

430. Чи має нулі функція:

а) $y = x^4 + 3$; б) $y = x^2 + x$; в) $y = x^2 - x^4$; г) $y = \sqrt{x}$; ґ) $y = 0,5$?

Якщо так, то знайди її нулі.

431. Знайди нулі функції: а) $y = 3 - 10x$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = x^2 - 7x + 12$.

432. **ЗНО** Знайди нулі функції $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

А $-3; 0$ Б $-3; \frac{1}{2}$ В -3 Г $-\frac{1}{2}; 3$ Д $-1; 6$

Знайди проміжки знакосталості функції (**433, 434**).

433. а) $y = 2x$; б) $y = 6 - 12x$; в) $y = x^2 + 2x + 1$; ґ) $y = \frac{5}{x-3}$.

434. а) $y = -4x$; б) $y = 2x + 3$; в) $y = x^2 - 4x + 4$; г) $y = \frac{2}{x-6}$.

435. Щоб установити залежність між ціною (p) на рибу та обсягом попиту (K) на неї, ціну на рибу та обсяг попиту фіксували протягом 6 місяців. Результати спостережень занесли в таблицю. Побудуйте графік цієї функції. Знайдіть її область визначення і область значень. Чи має ця функція найменше значення? А найбільше? Зростаючою чи спадною є функція?

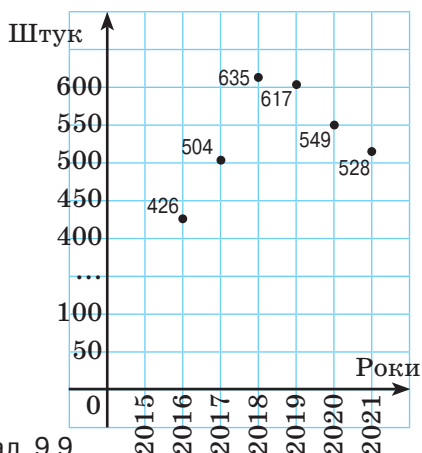
p (грн за кг)	35	40	50	60	65	70
K (тонн за місяць)	16	15	12	9	6	2

436. Концентрація певних ліків у крові після прийому таблетки описується функцією $C(t) = \frac{10}{t+1}$, де t — час після прийому в годинах ($t \geq 0$), $C(t)$ — концентрація препарату в умовних одиницях. Побудуйте графік цієї функції. Знайдіть область визначення та область значень функції. Чи існують нулі функції? Що вони означали б у контексті задачі? Визнач, чи функція зростає, чи спадає на проміжку $[0; +\infty)$. Знайдіть значення концентрації через 1, 3 та 7 годин після прийому. Протягом скількох годин після прийому ліки будуть діяти ефективно, якщо для цього концентрація має перевищувати 2 одиниці.

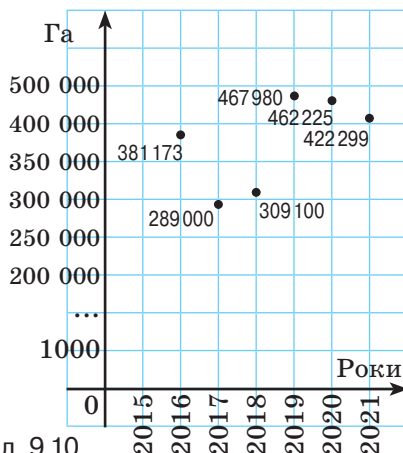
ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



437. У середині 70-х років минулого століття в Полтавській області Семеном Антонцем було започатковане органічне землеробство «Агроекологія», яке веде свою діяльність і досі. На малюнку 9.9 подано зміну кількості сертифікованих органічних господарств протягом 2016–2021 років, а на малюнку 9.10 — розвиток серед-



Мал. 9.9



Мал. 9.10

нього розміру органічних підприємств у цей період. Проаналізуй графіки цих функцій. Зроби висновки щодо основних властивостей функцій, поданих на графіках. Як змінювалися кількість і розміри органічних господарств? Чому? Дізнайся більше про сучасне органічне землеробство в Україні.

- 438.** Знайди область значень функції $y = -x^2$, заданої на вказаному проміжку, спроектувавши її графік на вісь y . Вкажи найбільше і найменше значення функції (якщо воно існує) на цьому проміжку.
а) $[-3; 3]$; б) $[1; 4]$; в) $[0; +\infty)$.

- 439.** Знайди область значень функції $y = x^2$, заданої на вказаному проміжку. Вкажи найбільше і найменше значення функції (якщо воно існує) на цьому проміжку.
а) $[-2; 2]$; б) $[-1; 3]$; в) $(-\infty; 0]$.

Знайди область визначення функції (**440, 441**).

440. а) $y = \sqrt{12-4x} + \sqrt{2x+5}$;

б) $y = \frac{3}{x^2-1} + \sqrt{x+2}$;

в) $y = \frac{2x}{\sqrt{2x-3}} + \frac{7}{\sqrt{x-5}}$;

г) $y = \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2x+1}}{|x|-3}$.

441. а) $y = \sqrt{5x+10} + \sqrt{2-4x}$;

б) $y = \frac{5x}{x^2-16} + \sqrt{x+12}$;

в) $y = \frac{6}{\sqrt{3x-15}} + \frac{3x}{\sqrt{x+2}}$;

г) $y = \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{4x+7}}{|x|-1}$.

Знайди нулі функції (**442, 443**).

442. а) $y = (2x+1)(2x-1) - 6(x-1)^2 - 9$; б) $y = x^2 - 13x + 36$;



в) $y = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{-x-2}}$;

г) $y = \frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} - \frac{18}{x^2-9}$.

443. а) $y = (x+2)(x-2) - 3(x+1)^2 + 3$; б) $y = x^2 - 5x + 4$; в) $y = \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{-x-3}}$.

- 444.** Установи відповідність між функцією, заданою умовами (1–3), та кількістю нулів цієї функції (А–Д).

1 $y = (x-1)\sqrt{x-3}$

А один

2 $y = \frac{x^4-5x^2+4}{x-2}$

Б два

3 $y = \frac{(x^2-x)(x-2)}{x^2-1}$

В три

Г чотири

Д жодного

Побудуй графік функції та запиши її властивості (область визначення; область значень; нулі функції; проміжки знакосталості; проміжки зростання та спадання; найбільше і найменше значення функції) (445, 446).

$$445. \text{ а) } y = \begin{cases} x+7, & \text{якщо } x < -3, \\ -2x-2, & \text{якщо } -3 \leq x \leq 1, \\ -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \leq -2, \\ -x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ x-6, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

$$446. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 1,5x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{6}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} 3x+18, & \text{якщо } x \leq -3, \\ x^2, & \text{якщо } -3 < x < 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

447. **Відкрита задача.** Накресли графік будь-якої функції $y = f(x)$, для якої: а) $D = [-6; 2]$, $E = [-2; 2]$; б) $D = [-1; 3) \cup (3; 5)$, $E = [-3; 1) \cup (1; 3]$.

Доведи, що функція (448, 449):

448. а) $y = 3x + 5$ зростає на R ; б) $y = 1 - x^2$ спадає на $[0; +\infty)$.

449. а) $y = -2x - 6$ спадає на R ; б) $y = 2x^2 + 3$ зростає на $[0; +\infty)$.

450. **ЗНО** Функція $y = f(x)$ зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Яке з наведених чисел може бути значенням цієї функції в точці $x = 8$, якщо $f(1) = -2$, $f(9) = 5$?

А -8

Б -3

В -2

Г 3

Д 8

451. Не будуючи графіка функції, установи, при яких значеннях x вона набуває додатних значень, якщо:

а) $y = -2x + 5$;

б) $y = 0,5x - 3$;

в) $y = x^2 - 3x + 2$;

г) $y = \sqrt{x+4}$;

г) $y = \frac{3x-9}{x}$;

д) $y = \frac{x}{x+1} + 1$.

452. Не будуючи графіка функції, установи, при яких значеннях x вона набуває недодатних значень, якщо:

а) $y = 5x - 1$;

б) $y = \sqrt{x-4}$;

в) $y = (x+1)(2-x)$;

г) $y = (x+2)^3$;

г) $y = \frac{6+2x}{x}$;

д) $y = \frac{1}{x-1} - 1$.

453. За яких значень параметра a функція $y = x^2 + (2a+1)x + a^2 - 3$ має два нулі?

454. For what values of the parameter a does the function $y = x^2 + (a-3)x + 2a^2 - a$ have one zero?

455. Покажи, що функція $f(x) = x^4 + 3$ набуває лише додатних значень. Яка область визначення цієї функції? Чи має ця функція найменше значення? А найбільше?
456. Покажіть, що функція $f(x) = -x^2 - x^4$ набуває лише недодатних значень. Яка область визначення цієї функції? Чи має ця функція найменше значення? А найбільше?

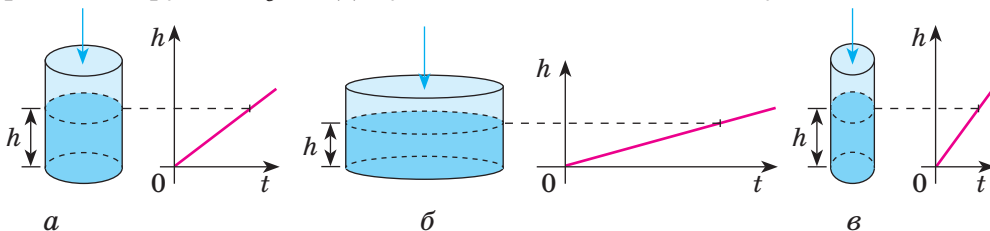
ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

457. Знайди область визначення функції $y = x^3 - 8$, якщо її область значень $[-35; 0]$.
458. Побудуй графік функції та опиши її властивості.

а) $y = x|x|$; б) $y = \sqrt{(x-2)^2}$; в) $y = \frac{4}{|x|}$.

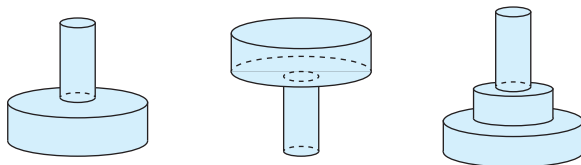
459. **Практичне завдання.** Якщо додавати воду в резервуар з постійною швидкістю, то висота води в ньому буде функцією від часу $y = f(t)$ (мал. 9.11).

1. Розглянь малюнки і встанови: а) чи залежить швидкість зростання такої функції від площі основи резервуара (воду в усі резервуари подають з однаковою швидкістю); б) у якому випадку (а-в) швидкість зростання функції $y = f(t)$ буде найбільшою, а в якому — найменшою.



Мал. 9.11

2. Зобрази схематично графік залежності висоти води від часу наповнення резервуара, зображеного на малюнку 9.12.



Мал. 9.12

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

460. Встановлено, що зайва маса людини є результатом споживання більшої кількості калорій, ніж використання.

Оскільки надмірна маса негативно впливає на стан здоров'я та стиль життєдіяльності людини, то необхідно спалювати калорій не менше, ніж споживати. Склянка напою Соса-Кола містить 26,5 г цукру на 250 мл, що дорівнює чотирьом або п'яти чайним ложкам цукру або 108 кал. За скільки хвилин ти зможеш відпрацювати калорії, отримані від склянки цього напою, за допомогою:



а) прасування білизни стоячи, якщо в цей час за 1 год на 1 кг маси твого тіла спалюється 3,6 кал;

б) прополки городу руками, якщо в цей час за 1 год на 1 кг маси твого тіла спалюється 5 кал;

в) чистки килимів пирососом, якщо в цей час за 1 год на 1 кг маси твого тіла спалюється 2,9 кал?

461. Розв'яжи рівняння.

- а) $2x^2 + 3x = 9$; б) $9x^2 - 12x + 4 = 0$; в) $5x^2 + 4x = 1$;
г) $(x+3)\sqrt{x+5} = 0$; ґ) $(x+5)\sqrt{x+3} = 0$.

462. Запиши у стандартному вигляді число:

- а) 7800; б) 140000; в) 84,17; ґ) 486000000;
г) 0,085; д) 0,00045; е) 0,58954; є) 0,0000008.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу характеризувати функцію за її графіком:
 - вказати область визначення;
 - вказати область значень;
 - знайти точку перетину графіка функції з віссю y ;
 - знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
 - визначити проміжки зростання та спадання функції;
 - вказати найбільше та найменше значення функції.
- ✓ Умію знаходити за допомогою графіка:
 - область визначення функції як проєкцію її графіка на вісь x ;
 - область значень функції як проєкцію її графіка на вісь y .
- ✓ Знаю, що таке:
 - нулі функції $y = f(x)$:

$$f(x) = 0$$

- проміжки знакосталості функції $y = f(x)$:

$$f(x) > 0 \quad \text{або} \quad f(x) < 0$$

- ✓ Знаю, які функції називають

зростаючими ↗

$$x_1 < x_2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

спадними ↘

$$x_1 < x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

- ✓ Можу визначити за графіком найбільше і найменше значення функції.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- як обчислити в точці x_0 значення функції $f(x)$: $f(x_0)$;
- як складати таблиці значень функцій за формулами;
- що таке графік функції і як його будують;
- види функцій та їх графіки:
 - лінійна функція $y = kx + b$ — пряма лінія
 - обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$ — гіпербола
 - квадратична функція $y = x^2$ — парабола

§ 10. Перетворення графіків функцій

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- перетворення графіків функції — *function graph transformations*

Складемо таблиці значень функцій а) $y = x^2$ і б) $y = -x^2$, заданих на множині $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

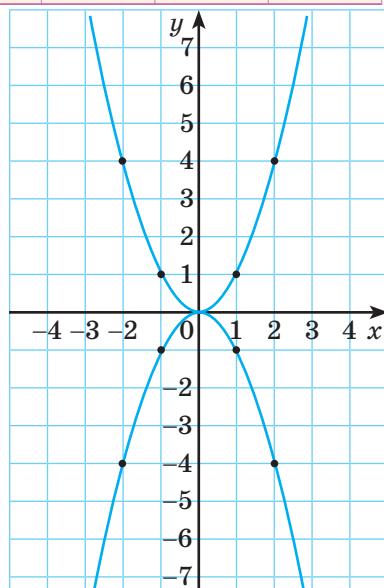
а)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	9	4	1	0	1	4	9

б)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Взагалі значення функції $y = -x^2$ протилежні відповідним значенням функції $y = x^2$. Тому графіки цих функцій симетричні відносно осі x (мал. 10.1). Таку саму властивість мають будь-які функції $y = f(x)$ і $y = -f(x)$.

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x .

Порівняємо ще функції $y = 2f(x)$ і $y = f(x)$. Щоб одержати яке-небудь значення першої з них, треба відповідне значення другої помножити на 2. Тому графік першої з цих функцій можна одержати, розтягнувши вдвічі від осі x графік другої



Мал. 10.1

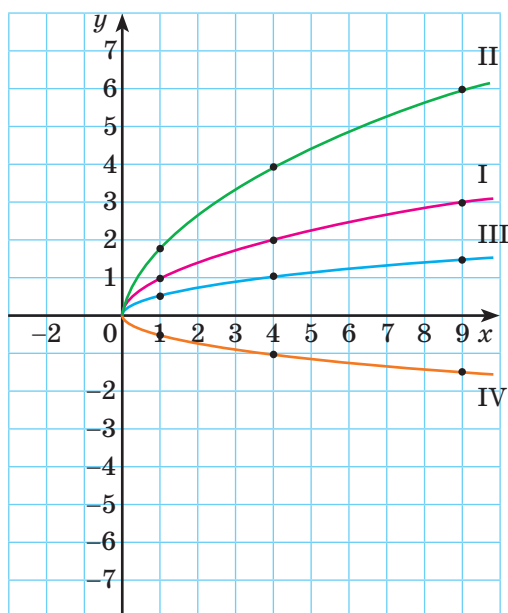
функції. А щоб побудувати графік функції $y = \frac{1}{3}f(x)$, слід втричі стиснути до осі x графік функції $y = f(x)$.

Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в k разів до осі x , якщо $0 < k < 1$.

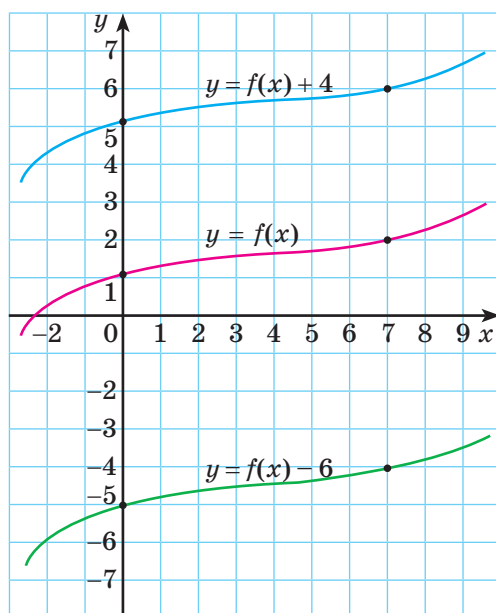
Приклад. Побудуй графіки функцій: $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0,5\sqrt{x}$, $y = -0,5\sqrt{x}$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. На малюнку 10.2 його зображає крива I. Збільшивши вдвічі ординату кожної точки цього графіка, одержимо множину точок, розміщених на кривій II. Це графік функції $y = 2\sqrt{x}$. Якщо ординату кожної точки графіка I зменшити вдвічі й нанести відповідні точки на координатну площину, то одержимо криву III — графік функції $y = 0,5\sqrt{x}$. Крива IV симетрична відносно осі x кривій III — графік функції $y = -0,5\sqrt{x}$.

Кожне значення функції $y = f(x) + 4$ на 4 більше, ніж відповідне значення функції $y = f(x)$. Тому графік функції $y = f(x) + 4$ можна одержати, перенісши графік функції $y = f(x)$ на 4 одиниці в напрямку осі y (вгору) (мал. 10.3). Щоб одержати графік функції $y = f(x) - 6$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на 6 одиниць у протилежному напрямку (вниз).



Мал. 10.2



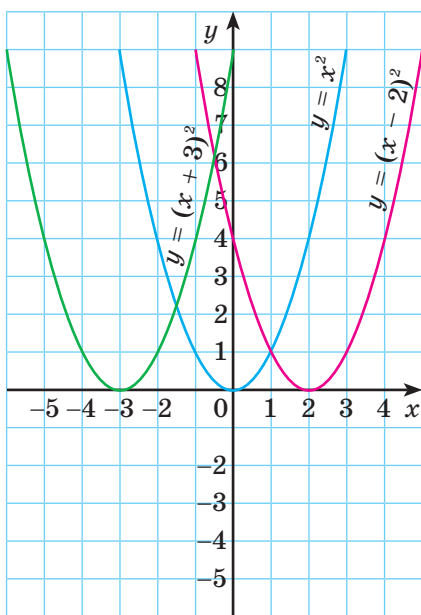
Мал. 10.3

Щоб одержати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць вгору, якщо $n > 0$, або на $-n$ одиниць вниз, якщо $n < 0$.

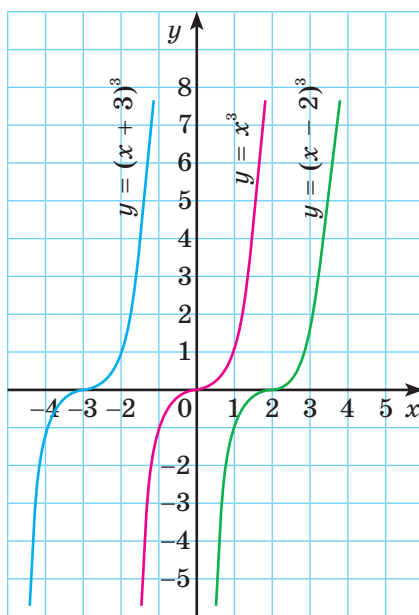
А як слід перетворити графік функції $y = f(x)$, щоб одержати графік функції $y = f(x - t)$? Обчислимо для тих самих значень x значення функцій: а) $y = x^2$ і б) $y = (x - 2)^2$.

а)	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	16	9	4	1	0	1	4	9	16
б)	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	36	25	16	9	4	1	0	1	4

Як бачимо, при кожному значенні $x = c$ значення функції $y = (x - 2)^2$ таке, як значення функції $y = x^2$, коли $x = c - 2$. Тому графік функції $y = (x - 2)^2$ можна одержати, перенісши графік функції $y = x^2$ на 2 одиниці в напрямку осі x (вправо) (мал. 10.4). Графік функції $y = (x + 3)^2$ можна одержати перенесенням графіка функції $y = x^2$ на 3 одиниці в напрямку, протилежному напрямку осі x (вліво).



Мал. 10.4



Мал. 10.5

Щоб одержати графік функції $y = f(x - t)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на t одиниць вправо, якщо $t > 0$, або на $-t$ одиниць вліво, якщо $t < 0$.

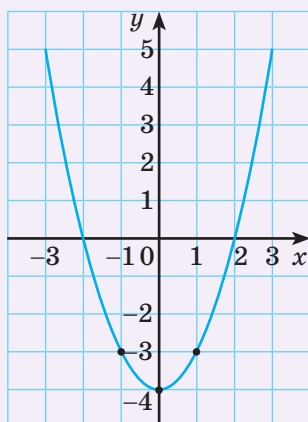
На малюнку 10.5 показано, як, наприклад, з графіка функції $y = x^3$ можна одержати графіки функцій $y = (x - 2)^3$ і $y = (x + 3)^3$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

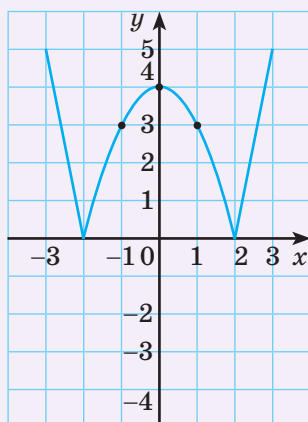
Як, маючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = |f(x)|$?

За означенням модуля, $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$

Тому значення функції $y = |f(x)|$ і $y = f(x)$ однакові за умови, що $f(x) \geq 0$, і протилежні, якщо $f(x) < 0$. Отже, щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, досить ті частини графіка функції $y = f(x)$, які лежать нижче від осі x , замінити симетричними їм відносно цієї осі, а все інше залишити без змін. Наприклад, маючи графік функції $y = x^2 - 4$ (мал. 10.6), можна одразу побудувати графік функції $y = |x^2 - 4|$ (мал. 10.7).



Мал. 10.6



Мал. 10.7

Досліди, як одержати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Квадратична функція. Урок 3).

1. Що таке графік функції?
2. Як, маючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції:

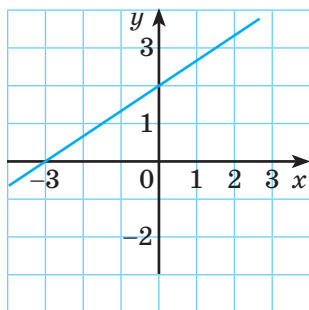
а) $y = -f(x)$;	б) $y = f(x) + n$;	в) $y = k \cdot f(x)$;
г) $y = f(x - m)$;	г) $y = f(x + m)$;	д) $y = f(x) $?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

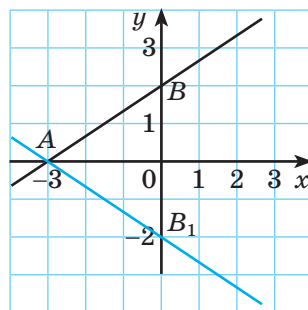


1. На малюнку 10.8, а зображено графік лінійної функції $y = f(x)$. Побудуй графік функції $y = -f(x)$.

Розв'язання. Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі абсцис. Точка $A(-3; 0)$ — спільна для обох графіків, а симетричною точці $B(0; 2)$ відносно осі x є точка $B_1(0; -2)$. Пряма AB_1 — графік функції $y = -f(x)$.



а



б

Мал. 10.8

2. Побудуй графік функції: а) $y = x^2$; б) $y = \frac{1}{2}x^2$; в) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.

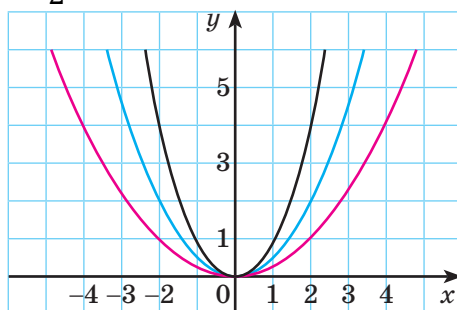
Розв'язання. а) Графік функції $y = x^2$ — звичайна парабола (мал. 10.9).

б) Щоб одержати графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$, треба ординату кожної

точки першого графіка зменшити вдвічі; на малюнку ця парабола синього кольору.

в) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$. Зменшивши

ординату кожної точки звичайної параболи у 4 рази, одержимо потрібний графік — лінію рожевого кольору.



Мал. 10.9

3. Побудуй графік функції $y = \sqrt{x+4} - 2$.

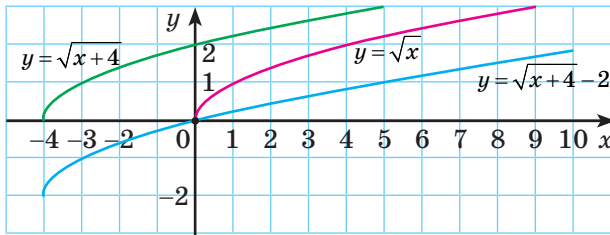
Розв'язання. Скористаємося правилами перетворення графіків функцій.

1. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$.

2. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x+4}$. Для цього перенесемо графік функції $y = \sqrt{x}$ на 4 одиниці вліво.

3. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x+4} - 2$. Для цього перенесемо графік функції $y = \sqrt{x+4}$ на 2 одиниці вниз.

Отримали графік функції $y = \sqrt{x+4} - 2$, зображений на мал. 10.10.

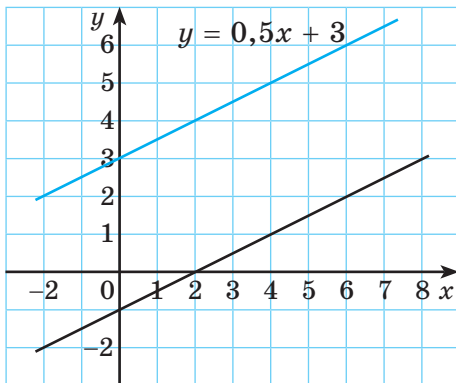


Мал. 10.10

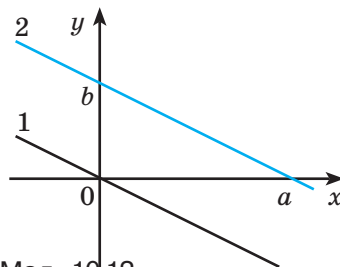
ВИКОНАЙ УСНО



- 463.** Як взаємно розташовані графіки функцій $y = x^3$ і $y = -x^3$?
А співпадають **Б** симетричні відносно осі x
В симетричні відносно осі y **Г** симетричні відносно початку координат
- 464.** Чим різняться графіки функцій:
 а) $y = x^2$, $y = (-x)^2$ і $y = -x^2$; **б)** $y = 4x^2$, $y = -(2x)^2$ і $y = (-2x)^2$;
 в) $y = \sqrt{x^2}$, $y = \sqrt{(-x)^2}$ і $y = |x|$?
- 465.** У якій чверті лежить графік функції $y = -f(x)$, якщо графік функції $y = f(x)$ розташований у: а) III чверті; б) I та II чвертях?
- 466.** Укажи найбільше значення функції $y = -f(x)$, якщо 5 — найбільше значення функції: а) $y = f(x) + 5$; б) $y = f(x - 5)$; в) $y = 5f(x)$.
- 467.** Функція $y = f(x)$ зростає на всій області визначення. Зростаючою чи спадною є функція:
 а) $y = 2f(x)$; **б)** $y = 0,5f(x)$; **в)** $y = -f(x)$?
- 468.** Чи правильно, що графіки функцій $y = 0,3x$, $y = 0,3x + 2$ і $y = 0,3x - 5$ — паралельні прямі?
- 469.** На малюнку 10.11 зображено дві паралельні прямі — графіки двох функцій. Одна з цих функцій — $y = 0,5x + 3$. Назви формулу другої функції.
А $y = 0,5x$ **Б** $y = 0,5x + 7$ **В** $y = 0,5x - 1$ **Г** $y = -0,5x - 1$



Мал. 10.11



Мал. 10.12

470. На малюнку 10.12 пряма 1 — графік функції $y = f(x)$, а паралельна їй пряма 2 перетинає осі координат у точках a і b . Один учень вважає, що пряма 2 — графік функції $y = f(x - a)$, другий — що вона є графіком функції $y = f(x + b)$, а третій — графіком функції $y = f(x) + b$. Хто з них має рацію?

А тільки I Б тільки II і III В тільки I і III Г I, II і III

471. Побудуйте в Desmos Calculator графіки:



а) $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ та $y = x^2 - 2$; б) $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$ та $y = (x + 2)^2$.

Проаналізуйте утворені графіки кожного та зробіть висновки.

472. Чим різняться графіки функцій:

а) $y = (x - 2)^3$ і $y = (x + 2)^3$; б) $y = x^3 + 1$ і $y = (x + 1)^3$?

473. Область визначення функції $y = f(x)$ — проміжок $(a; b)$. Якою є область визначення функції:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + n$; в) $y = |f(x)|$; г) $y = k \cdot f(x)$?

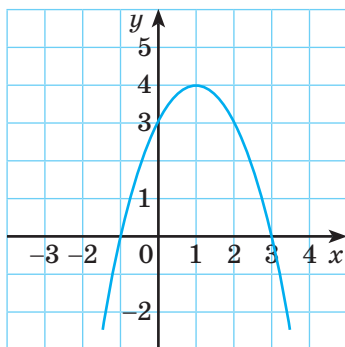
474. Область значень функції $y = f(x)$ — промінь $(c; \infty)$. Якою є область значень функції:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + n$; в) $y = f(x) - m$; г) $y = k \cdot f(x)$?

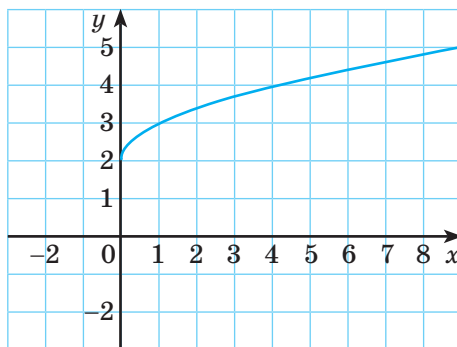
ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

475. На малюнку 10.13 зображено графік функції $y = f(x)$. Накресли його в зошиті і побудуй в тій самій системі координат графіки функцій:

а) $y = -f(x)$; б) $y = 2 \cdot f(x)$; в) $y = f(x + 3)$; г) $y = f(x) - 3$.



Мал. 10.13



Мал. 10.14

476. На малюнку 10.14 зображено графік функції $y = f(x)$. Накресли його в зошиті і побудуй в тій самій системі координат графіки функцій:

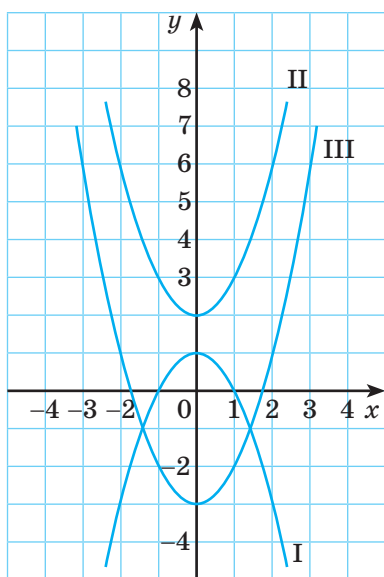
а) $y = -f(x)$; б) $y = 0,5 \cdot f(x)$; в) $y = f(x - 2)$; г) $y = f(x) + 3$.

477. Як треба перетворити графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб одержати графік функції $y = -\sqrt{x}$? Виконай побудову. Чи правильно, що об'єднання графіків функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$ є графіком рівняння $y^2 = x$?

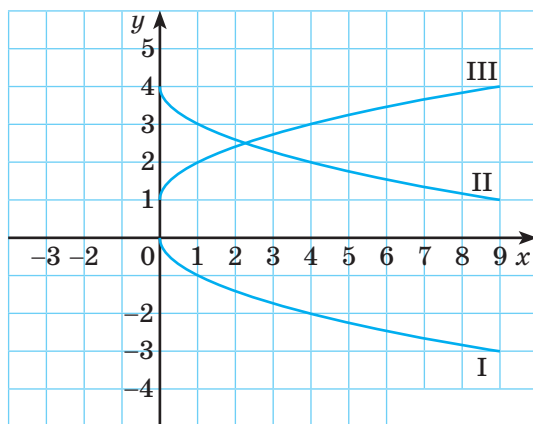
478. Як перетворити графік функції $y = 3x - 4$, щоб одержати графік функції $y = 4 - 3x$? Виконай побудову.

479. Графіки яких функцій зображено на мал. 10.15, а?

480. Графіки яких функцій зображено на мал. 10.15, б?



а



б

Мал. 10.15

Побудуй в одній системі координат графіки функцій (481, 482).

481. а) $y = 2x$, $y = 2x + 1$, $y = 2x - 3$;
б) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$, $y = -x^2 - 1$.

482. а) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 3$, $y = \sqrt{x} + 2$;
б) $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 4$.

483. Як треба перетворити графік функції $y = x^2$, щоб одержати графік функції:

а) $y = (x + 3)^2$; б) $y = (x - 3)^2$; в) $y = -(x + 3)^2$?

484. **ЗНО** Графік функції $y = x^2$ паралельно перенесли на 3 одиниці ліворуч уздовж осі x . Укажи функцію, графік якої отримали в результаті цього перетворення.

А $y = (x - 3)^2$ Б $y = x^2 + 3$ В $y = 3x^2$ Г $y = x^2 - 3$ Д $y = (x + 3)^2$

Побудуй в одній системі координат графіки функцій (485–492).

485. $y_1 = 2x$, $y_2 = 2(x - 1)$, $y_3 = 2(x + 3)$.

486. $y_1 = -3x$, $y_2 = -3(x - 2)$, $y_3 = -3(x + 1)$.

487. $y_1 = x^2$, $y_2 = (x + 4)^2$, $y_3 = (x + 2)^2$.

488. $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x + 2)^2$, $y_3 = -(x - 3)^2$.

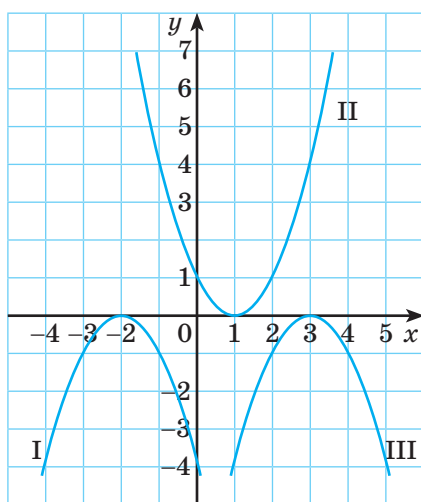
489. $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = \frac{4}{x-3}$, $y_3 = \frac{4}{x+1}$.

490. $y_1 = -\frac{6}{x}$, $y_2 = -\frac{6}{x-2}$, $y_3 = -\frac{6}{x+3}$.

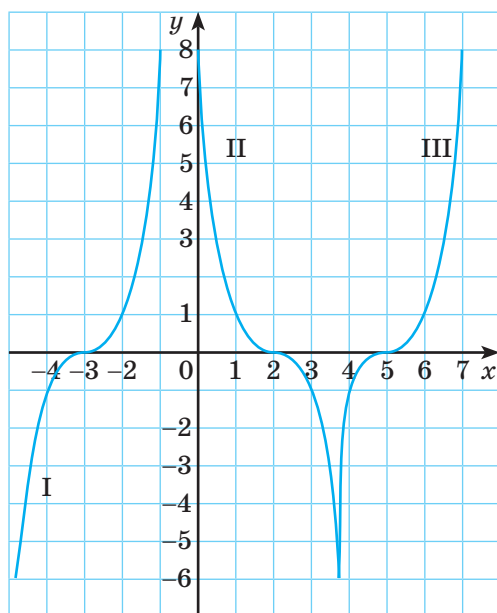
491. $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x-1}$, $y_3 = \sqrt{x+2}$.

492. $y_1 = -\sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x-3}$, $y_3 = \sqrt{x+4}$.

493. Графіки яких функцій зображено на мал. 10.16, а, б?



а



б

Мал. 10.16

494. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць записує рівняння певної гіперболи, другий / друга має задати напрям (вправо, вліво, вгору, вниз), а третій / третя записує рівняння гіперболи, яку можна одержати з даної перенесенням на певну кількість одиниць в заданому напрямі. Потім учні / учениці міняються ролями.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

495. Побудуй графік функції $y = f(x)$, який був би симетричний відносно осі y . Чи симетричний відносно цієї осі графік функції:



а) $y = 2f(x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = -2f(x)$?

Побудуй відповідні графіки.

- 496.** Побудуй графік функції $y = f(x)$, яка на проміжку $(-\infty; 2)$ спадає, а на проміжку $(2; \infty)$ — зростає. Якою є на цих проміжках функція:

а) $y = 2f(x)$;

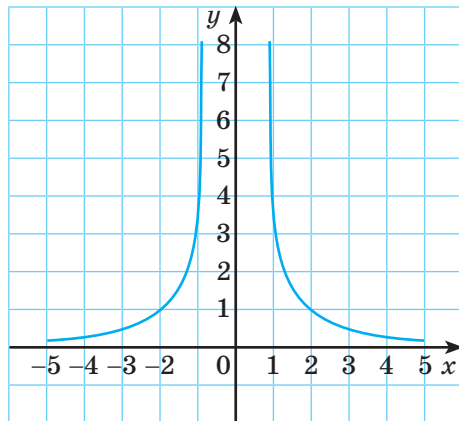
б) $y = 0,5f(x)$;

в) $y = -f(x)$?

Побудуй відповідні графіки.

- 497.** Заповни порожні комірки таблиці. Якою формулою можна задати функцію $y = f(x)$?

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	5	6	9	14
$-f(x)$						
$3f(x)$						



Мал. 10.17

- 498.** На мал. 10.17 зображено графік функції $y = \frac{4}{x^2}$. Перемалуй його в зошит і побудуй графіки функцій:

а) $y = \frac{4}{x^2} + 2$;

б) $y = \frac{4}{x^2} - 3$;

в) $y = \frac{4}{(x+2)^2}$;

г) $y = \frac{4}{(x-3)^2}$;

ґ) $y = 1 - \frac{4}{x^2}$.

- 499.** На мал. 10.18 зображено графік функції $y = \sqrt[3]{x}$. Перемалуй його в зошит і побудуй графіки функцій:

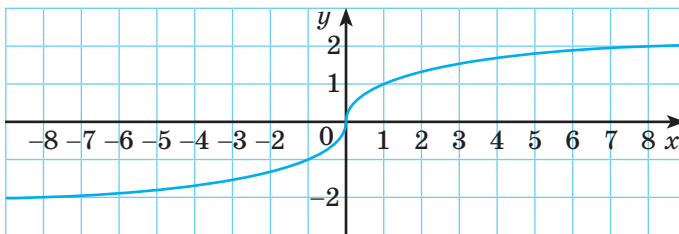
а) $y = \sqrt[3]{x-2}$;

б) $y = \sqrt[3]{x+1}$;

в) $y = \sqrt[3]{x-2}$;

г) $y = \sqrt[3]{x+4}$;

ґ) $y = 3 - \sqrt[3]{x}$.



Мал. 10.18

- 500.** Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуйте графіки функцій:



а) $y = (x-2)^2 + 1$;

б) $y = (x+3)^2 - 4$;

в) $y = 2(x-1)^2 - 3$.

Обговоріть попередньо алгоритм своїх дій у парі. Чи до однакових результатів приводять різні алгоритми?

- 501.** Використовуючи графік функції $y = -x^2$, побудуй графіки функцій:

а) $y = -(x-2)^2 - 1$;

б) $y = -(x+1)^2 - 3$;

в) $y = -0,5(x+3)^2 + 2$.

502. Використовуючи графік функції $y = \sqrt{x}$, побудуй графіки функцій:

а) $y = \sqrt{x+2} + 1$; б) $y = \sqrt{x-3} + 4$; в) $y = \sqrt{x+4} - 3$.

503. Using the graph of the function $y = -\sqrt{x}$, plot the graphs of the functions:

а) $y = -\sqrt{x-1} + 2$; б) $y = -\sqrt{x+4} - 2$; в) $y = -\sqrt{x+3} + 3$.

504. Використовуючи графік функції $y = \frac{4}{x}$, побудуй графіки функцій:

а) $y = \frac{4}{x+2} - 3$; б) $y = \frac{4}{x-3} + 4$; в) $y = \frac{4}{x+1} + 3$.

505. Використовуючи графік функції $y = -\frac{6}{x}$, побудуй графіки функцій:

а) $y = -\frac{6}{x+3} + 2$; б) $y = -\frac{6}{x-4} - 3$; в) $y = -\frac{6}{x-3} + 1$.

506. Дано параболу $y = x^2$. Установи відповідність між умовами (1–3) та рівняннями параболи (А–Д), які отримають внаслідок виконання перетворень.

- | | |
|---|---------------------|
| 1 перенести графік на 2 одиниці праворуч і 3 одиниці вгору | А $y = (x+2)^2 + 3$ |
| 2 перенести графік на 4 одиниці ліворуч і 2 одиниці вниз | Б $y = (x+4)^2 - 2$ |
| 3 відобразити графік симетрично відносно осі x і підняти на 4 одиниці вгору | В $y = 4 - x^2$ |
| | Г $y = (x-2)^2 + 3$ |
| | Д $y = (x-4)^2 - 2$ |

507. ЗНО Графік довільної функції $y = f(x)$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз. Графік якої функції отримали?

А $y = f(x+3)$ Б $y = f(x)+3$ В $y = 3f(x)$ Г $y = f(x)-3$ Д $y = f(x-3)$

508. Побудуй графік функції $y = (x-3)^2 - 4$. Користуючись графіком, знайди:

а) область визначення функції; б) область значень функції; в) нулі функції; г) проміжки знакосталості; ґ) проміжки зростання та спадання; д) найбільше і найменше значення функції (якщо вони існують).

509. Побудуй графік функції $y = -(x+2)^2 + 1$. Користуючись графіком, знайди:

а) область визначення функції; б) область значень функції; в) нулі функції; г) проміжки знакосталості; ґ) проміжки зростання та спадання; д) найбільше і найменше значення функції (якщо вони існують).

Розв'яжи графічно рівняння (510, 511).

510. а) $(x-2)^2 = 2x-1$; б) $(x+3)^2 = \sqrt{x+2}+3$; в) $\sqrt{x+1} = \frac{6}{x}$.

511. а) $(x+3)^2 = -x-1$; б) $5-(x-1)^2 = \sqrt{x-2}$; в) $\sqrt{x+1} = \frac{2}{x}$.

512. Використовуючи графік функції $y = |x|$, побудуй графіки функцій:

а) $y = |x|+2$; б) $y = |x-4|$; в) $y = |x+2|-3$.

513. Використовуючи графік функції $y = -|x|$, побудуй графіки функцій:

а) $y = -|x|-3$; б) $y = -|x+2|$; в) $y = -|x-3|+1$.

Побудуй графіки функцій (514–517).

514. а) $y = |2x-1|$; б) $y = |4-x^2|$; в) $y = |2-\sqrt{x}|$.

515. а) $y = |3x-6|$; б) $y = |(x-2)^2-1|$; в) $y = \left| \frac{6}{x-2} \right|$.

516. а) $y = 2\sqrt{x-3}+1$; б) $y = 3|x|+2$; в) $y = -2(x+1)^2+3$; ґ) $y = 0,5(x-3)^3-3$.

517. а) $y = 2|x|-3$; б) $y = 3\sqrt{x+3}-2$; в) $y = 0,5(x-2)^2-4$; ґ) $y = -2(x+1)^3+2$.

518. Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $||x|-3| = a$?

519. Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $|2-x^2| = a$?

520. За якого значення параметра a рівняння $3-x^2 = |x|+a$ має один корінь?

521. За якого значення параметра a рівняння $5-|x| = x^2+a$ має один корінь?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



522. Побудуй графіки функцій, попередньо виділивши повний квадрат:

а) $y = x^2+4x+6$; б) $y = -x^2-6x-6$; в) $y = 2x^2-4x-2$.

523. Побудуй графік функції та опиши її властивості:

а) $y = \left| \frac{6}{x+2} - 3 \right|$; б) $y = \left| \frac{x+3}{x+1} \right|$.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

524. Обчисли:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + 1\frac{2}{15}\right) : 2\frac{7}{15}; \quad \text{б) } \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{20}\right) \cdot 1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}; \quad \text{в) } \frac{7}{8} - \frac{1}{2} : \frac{3}{4} + 5 : \frac{1}{3} - \frac{1}{8}.$$

525. У таблиці подано назви, місця розташування та площі 5 найбільших і найкрасивіших дендропарків України. Склади задачу за цими даними. Скористайся також відомостями про інші дендропарки України, зокрема найближчий до тебе.

Назва	Розташування	Площа (га)
Тростянець	село Тростянець Чернігівської області	350 га
Олександрія	місто Біла Церква Київської області	290 га
Софіївка	місто Умань Черкаської області	179,2 га
Полтавський	місто Полтава	124,5 га
Веселі Боковеньки	Молинський район Кіровоградської області	109 га

526. Виділи з поданого тричлена квадрат двочлена.

$$\begin{array}{lll} \text{а) } x^2 - 6x + 15; & \text{б) } x^2 + 8x + 8; & \text{в) } x^2 + 5x + 6; \\ \text{г) } x^2 - x - 1; & \text{г) } 5x^2 - 10x + 8; & \text{д) } 9 + 6x - 3x^2. \end{array}$$

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Розумію, у чому полягає перетворення графіка функції $f(x)$:

$f(x) \rightarrow f(x - m)$ перенесення графіка $m > 0$ — праворуч $m < 0$ — ліворуч	$f(x) \rightarrow f(x) + n$ перенесення графіка $n > 0$ — вгору $n < 0$ — вниз
---	---

$$f(x) \rightarrow kf(x), k > 0$$

$$k > 1 \text{ — розтягування графіка від осі } x \text{ в } k \text{ разів,}$$

$$k < 1 \text{ — стискання графіка до осі } x \text{ в } \frac{1}{k} \text{ разів.}$$

- ✓ Розумію, що графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x .
- ✓ Можу побудувати графік функції, використовуючи правила перетворення.
- ✓ Хочу навчитися будувати графіки функцій, що містять модулі.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



ВАРІАНТ I

1. Знайди нулі функції $y = 4x^2 + x - 3$.
2. Знайди область визначення функції $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Обчисли $f(4)$, $f(-0,5)$. За якого значення x значення функції дорівнює 3?
3. Побудуй графік функції: а) $y = \sqrt{x-2}$; б) $y = \sqrt{x} - 2$.
4. Побудуй графік функції $y = (x - 3)^2 - 4$. Користуючись графіком, вкажи: а) область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) проміжки зростання та спадання; ґ) найменше значення функції.

ВАРІАНТ II

1. Знайди нулі функції $y = 3x^2 + 4x - 4$.
2. Знайди область визначення функції $f(x) = \sqrt{5x-4}$. Обчисли $f(4)$, $f(1,6)$. За якого значення x значення функції дорівнює 1?
3. Побудуй графік функції: а) $y = \sqrt{x+4}$; б) $y = \sqrt{x} + 4$.
4. Побудуй графік функції $y = -(x + 2)^2 + 1$. Користуючись графіком, вкажи: а) область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) проміжки зростання та спадання; ґ) найбільше значення функції.

ВАРІАНТ III

1. Знайди нулі функції $y = 2x^2 - 5x - 3$.
2. Знайди область визначення функції $f(x) = \sqrt{3x+7}$. Обчисли $f(3)$, $f(-1)$. За якого значення x значення функції дорівнює 2?
3. Побудуй графік функції: а) $y = \sqrt{x} - 3$; б) $y = \sqrt{x-3}$.
4. Побудуй графік функції $y = (x - 4)^2 - 1$. Користуючись графіком, вкажи: а) область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) проміжки зростання та спадання; ґ) найменше значення функції.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 2

1. R — це область визначення функції:
 А $y = -\sqrt{x+1}$ Б $y = \frac{2}{x^2-1}$ В $y = \frac{3x}{x^2+1}$ Г $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$
2. Функція $y = 4x - 2$ набуває додатних значень на проміжку:
 А $(2; +\infty)$ Б $(0,5; +\infty)$ В $(-\infty; 0,5)$ Г $(-\infty; 2)$
3. Яка з функцій спадає на R ?
 А $y = 2x + 3$ Б $y = 3 - 2x$ В $y = -\sqrt{x}$ Г $y = -x^2$
4. У якій точці графік функції $y = x^2 - 6x + 8$ перетинає вісь ординат?
 А $(2; 0)$ Б $(4; 0)$ В $(0; 8)$ Г $(0; 2)$
5. Графік функції $y = \frac{2}{x}$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз. Графік якої з наведених функцій отримали?
 А $y = \frac{2}{x+3}$ Б $y = \frac{2}{x} + 3$ В $y = \frac{2}{x-3}$ Г $y = \frac{2}{x} - 3$
6. Скільки нулів має функція $y = (x-3)(x+2)\sqrt{x+1}$?
 А один Б два В три Г жодного
7. Для функції $y = \sqrt{2+x} + x^2$ знайди значення $f(-2) + f(2)$.
 А -4 Б 12 В 2 Г 10
8. Знайди область визначення функції $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$.
 А $[-2; +\infty)$ Б $[-2; 0)$
 В $[-2; 0) \cup (0; +\infty)$ Г $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
9. Областю значень функції $y = \sqrt{x} - 2$ є проміжок:
 А $(-\infty; -2)$ Б $(2; \infty)$ В $(-\infty; 2]$ Г $[-2; \infty)$.
10. При яких значеннях b графік функції $y = bx + 3$ проходить через точку $A(2; -5)$?
 А $b = 4$ Б $b = -4$ В $b = -8$ Г $b = -1$

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 2



1. Знайди значення $f(-1)$ для функції $y = -3x^2 - 6x + 2$.
 А -7 Б -1 В 5 Г 11
2. За якого значення m графік функції $y = \sqrt{x+m}$ проходить через точку $M(3; 2)$?
 А $m = 7$ Б $m = 1$ В $m = -1$ Г $m = -7$
3. Яка з функцій зростає на R ?
 А $y = x^2 + 2$ Б $y = -0,3x - 4$ В $y = -x^2 - 3$ Г $y = 0,7x - 2$
4. Установи відповідність між функцією (1–3) та кількістю її нулів (А–Д).

1 $y = x^2 - 4x + 4$

А один

2 $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

Б два

3 $y = x^4 + 5x^2 + 4$

В три

Г чотири

Д жодного

5. Побудуй графік функції:
 а) $y = -x^2 - 2$; б) $y = (x+2)^2$.
6. Знайди область визначення функції:
 а) $y = \sqrt{2x-15} - \sqrt{10-x}$; б) $y = \sqrt{x+7} + \frac{5x}{x^2-9}$.
7. Побудуй графік функції $y = \sqrt{x+4} - 1$. Користуючись графіком, знайди: область визначення та область значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості, найменше та найбільше значення функції (якщо вони існують).
8. За якого найбільшого цілого значення параметра a функція $y = (16-3a)x + 2$ зростає на R ?

Додаткове завдання

9. Розв'яжи графічно рівняння $x^2 = 2 - \sqrt{x}$.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке квадратний тричлен і його корені;
- як знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac;$$

- розклад квадратного тричлена на множники, якщо x_1 і x_2 — його корені:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

- як виділити з квадратного тричлена повний квадрат:

$$x^2 + 6x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 1 = (x + 3)^2 - 9 + 1 = (x + 3)^2 - 8;$$

- правила перетворення графіка функції:

$$f(x) \rightarrow f(x) + n \quad f(x) \rightarrow f(x - m) \quad f(x) \rightarrow kf(x).$$

§ 11. Квадратична функція

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- квадратична функція — *quadratic function*
- вершина параболи — *vertex of the parabola*

Функцію, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, b , c — довільні числа, а x — аргумент, називають *квадратичною* (або *квадратною*) *функцією*.

Наприклад, $y = x^2$, $y = -x^2 + 2$, $y = x^2 + 3x + 5$, $y = (x + 4)^2$.

Графіки наведених функцій — однакові параболи, але по-різному розміщені на координатній площині. Графік функції $y = ax^2$ — *теж* парабола; її вершина лежить у початку координат, а гілки напрямлені вгору, якщо $a > 0$, або вниз, якщо $a < 0$.

Графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = ax^2$ — *однакові параболи*, які можна сумістити паралельним перенесенням.

Покажемо це:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Оскільки $a \neq 0$, b , c — числа, то $i \frac{b}{2a}$, $i \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ — числа.

Позначивши їх буквами $m = -\frac{b}{2a}$ і $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, матимемо тотож-

ність: $ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$.

Отже, функцію $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, завжди можна подати у вигляді $y = a(x - m)^2 + n$. Наприклад, функцію $y = 3x^2 - 12x + 8$ можна записати так: $y = 3(x - 2)^2 - 4$.

З § 10 відомо, що графік функції $y = a(x - m)^2$ можна одержати за допомогою паралельного перенесення на $|m|$ одиниць вздовж осі x графіка функції $y = ax^2$.

Якщо графік функції $y = a(x - m)^2$ перенесемо на $|n|$ одиниць уздовж осі y , то одержимо графік функції $y = a(x - m)^2 + n$. Отже, за допомогою двох паралельних перенесень графіка функції $y = ax^2$ утвориться графік функції $y = a(x - m)^2 + n$, а звідси і даної функції $y = ax^2 + bx + c$.

Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = 3x^2 - 12x + 8$, або $y = 3(x - 2)^2 - 4$, потрібно графік функції $y = 3x^2$ перенести вправо на 2 одиниці (мал. 11.1), після чого криву II зсунути на 4 одиниці вниз. Утворена крива III — графік даної функції.

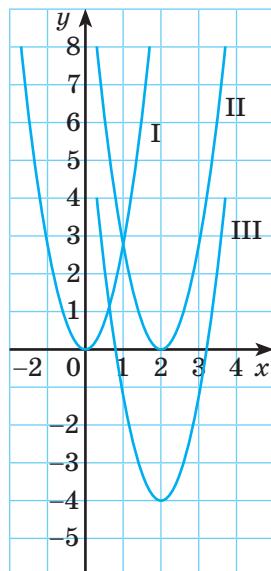
Із наведених міркувань випливає, що графік функції $y = ax^2 + bx + c$ — парабола $y = a(x - m)^2 + n$.

Координати її вершини m і n , тобто $x_e = -\frac{b}{2a}$ і

$$y_e = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Щоб побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$, треба знайти координати вершини параболи, точки її перетину з осями координат і ще кількох її точок, позначити їх на координатній площині й провести через них плавну лінію. Можна скористатись іншим способом: спочатку побудувати графік функції $y = ax^2 + bx$, а потім підняти або опустити його на $|c|$ одиниць. Графік функції $y = ax^2 + bx$, або $y = x(ax + b)$, будувати неважко, оскільки він перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$ і $x = -\frac{b}{a}$.

Приклад. Побудуй графік функції $y = 2x^2 + 4x + 3$.



Мал. 11.1



Побудова
графіка функції
 $y = 3(x - 2)^2 - 4$

Розв'язання. Графік функції $y = 2x^2 + 4x$, або $y = x(2x + 4)$, перетинає вісь x у точках $x = 0$ і $x = -2$. Позначимо їх (мал. 11.2). Ці точки симетричні відносно осі параболу, яку маємо побудувати, тому абсциса її вершини $x = -1$. Ордината дорівнює $2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2$. Позначаємо точку з координатами $(-1; -2)$. Через позначені три точки проходить графік I функції $y = 2x^2 + 4x$.

Для більш точної побудови знайдемо ще кілька точок, які належать графіку функції $y = 2x^2 + 4x$. Якщо $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 2 + 4 = 6$. Отже, графік проходить через точку $(1; 6)$ і через точку, симетричну даній відносно осі параболу $x = -1$, точку $(-3; 6)$.

Перенесемо графік I на 3 одиниці вгору і отримаємо графік II даної функції $y = 2x^2 + 4x + 3$.

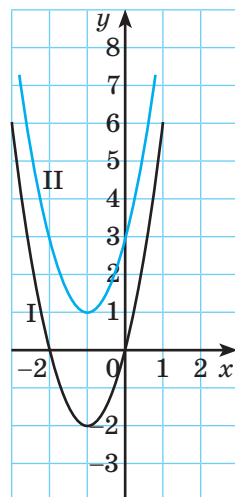
Проаналізуємо, які властивості має функція $y = ax^2 + bx + c$.

Графік даної функції — парабола. Нехай її вершина — точка $M(m; n)$, тобто $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{D}{4a}$, де $D = b^2 - 4ac$.

Якщо $a > 0$, то гілки параболу напрямлені вгору. Тоді:

- 1) область визначення функції — уся множина R ;
- 2) область значень — промінь $[n; \infty)$;
- 3) якщо $x < m$, то функція спадає, при $x > m$ — зростає;
- 4) якщо $D > 0$, то функція має два нулі: x_1 і x_2 ;
- 5) на проміжку $(x_1; x_2)$ значення функції від'ємні, на проміжках $(-\infty; x_1)$ і $(x_2; \infty)$ — додатні.

Якщо $a < 0$, то гілки параболу напрямлені вниз і властивості 2), 3), 5) слід формулювати інакше. Спробуй зробити це самостійно.



Мал. 11.2

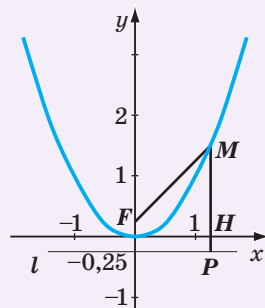
ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Графік кожної квадратичної функції — парабола.

Парабола — геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки і даної прямої. Проілюструємо це твердження на прикладі функції $y = x^2$. Розглянемо точку $F(0; 0,25)$, пряму l , рівняння якої $y = -0,25$, і довільну точку $M(x; x^2)$ на даній параболі (мал. 11.3). Нехай перпендикуляр MP до прямої l перетинає вісь абсцис у точці H . Покажемо, що $FM = MP$.

Обчислимо FM за формулою відстані між двома точками: $FM = \sqrt{x^2 + (x^2 - 0,25)^2} = \sqrt{(x^2 + 0,25)^2} = x^2 + 0,25$.

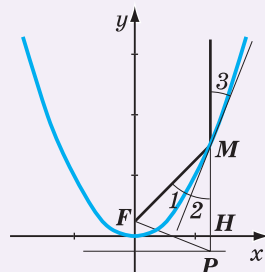
Оскільки $MP = MH + HP = x^2 + 0,25$, то при кожному значенні x $MF = MP$.



Мал. 11.3

Точку F і пряму l , які мають такі властивості, називають **фокусом** і **директри-сою** даної параболи. Кожна парабола має один фокус і одну директрису.

Цікавою і дуже важливою є ще одна властивість параболи. Оскільки трикутник FMP рівнобедрений, то $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (мал. 11.4). Тому промінь, який виходить з фокуса F , падає на ділянку параболи поблизу точки M так, що кут падіння ($\angle 1$) дорівнює куту відбивання ($\angle 3$). Отже, відбитий промінь паралельний осі Oy . Якщо осьовий переріз увігнутого дзеркала має форму параболи, то всі промені, відбившись від такого дзеркала, не розсіюються, а йдуть паралельним пучком. Цю властивість параболи використовують у прожекторах, які мають освітлювати далекі предмети. І навпаки: якщо на таке дзеркало падають промені, паралельні його осі Oy , то, відбиваючись, усі вони проходять через фокус F . У результаті фізичне тіло, що розташоване біля фокуса F , може сильно нагріватися.



Мал. 11.4



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфу (Тема. Квадратична функція. Урок 2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які функції називають квадратичними?
2. Як називають лінію, що є графіком квадратичної функції?
3. Укажи властивості функції $y = ax^2 + bx + c$.
4. Які координати вершини параболи функції $y = ax^2 + bx + c$?
5. За якої умови графік функції $y = ax^2 + bx + c$ перетинає вісь x ?
6. Укажи нулі функції $y = ax^2 + bx$.
7. Як побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Чи перетинає графік функції $y = 5x^2 + x + 3$ вісь абсцис?

Розв'язання. Якщо графік функції перетинає вісь абсцис в якійсь точці, то значення функції в цій точці дорівнює 0. Задача зводиться до іншої: чи має розв'язки рівняння $5x^2 + x + 3 = 0$? Його дискримінант $D = 1 - 60 < 0$, тому рівняння не має розв'язків.

Відповідь. Не перетинає.

2. Графік функції $y = 2x^2 - 7x + p$ перетинає вісь ординат у точці $y = 5$. У яких точках він перетинає вісь абсцис?

Розв'язання. Точка з координатами 0 і 5 належить графіку. Тому має виконуватися рівність $5 = 0 - 0 + p$, звідси $p = 5$. Отже, йдеться

про функцію $y = 2x^2 - 7x + 5$. Знайдемо її нулі: $2x^2 - 7x + 5 = 0$, $D = 49 - 40 = 9$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2,5$.

Відповідь. У точках $A(2,5; 0)$ і $B(1; 0)$.

3. Побудуй графік функції $y = 2x^2 - 4x - 3$.

Розв'язання. Графіком даної функції є парабола, гілки якої направлені вгору. Побудуємо цю параболу.

I спосіб.

Знайдемо координати вершини параболи: $x_e = -\frac{b}{2}$,

$$x_e = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1, \quad y_e = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 3 = 2 - 4 - 3 = -5.$$

Точка $(1; -5)$ — вершина параболи. Позначимо цю точку на координатній площині та побудуємо параболу виду $y = 2x^2$ з вершиною у цій точці або знайдемо ще кілька контрольних точок (можна брати точки перетину графіка функції з віссю x). Якщо $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 3 = -3$, якщо $x = -1$, то $y = 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 3 = 2 + 4 - 3 = 3$. Отже, графік

проходить через точки $(0; -3)$, $(-1; 3)$ та через точки, симетричні даним відносно осі параболи $y = 1$, тобто через точки $(2; -3)$ і $(3; 3)$.

Позначаємо знайдені точки на координатній площині і будуємо шукану параболу (мал. 11.5, а)

II спосіб.

Побудуємо спочатку графік простішої функції $y = 2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$.

Він перетинає вісь x у точках $O(0; 0)$ і $B(2; 0)$ (мал. 11.5, б). Вони симетричні відносно осі параболи $x = 1$, яка проходить через середину відрізка OB . Тому вершиною параболи є точка з абсцисою $x = 1$ і ординатою $y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2$. Позначимо цю точку $M(1; -2)$.

Позначимо контрольну точку $K(-1; 6)$ та симетричну їй відносно осі параболи точку $K_1(3; 6)$.

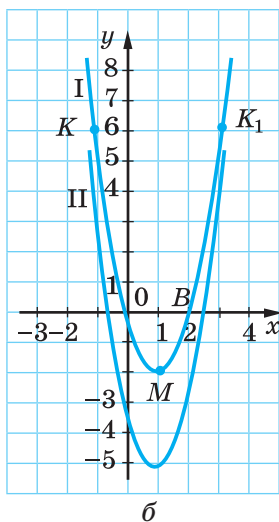
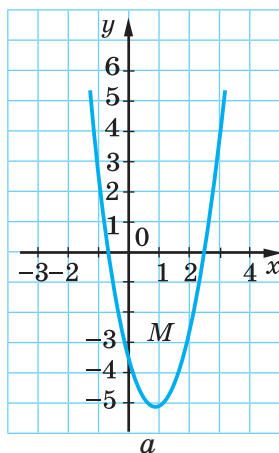
Сполучимо плавною лінією відмічені точки й одержимо графік функції $y = 2x^2 - 4x$ (крива I).

Потім перенесемо графік функції $y = 2x^2 - 4x$ на 3 одиниці вниз і матимемо графік функції $y = 2x^2 - 4x - 3$ (крива II).

III спосіб.

Виділимо повний квадрат:

$$y = 2x^2 - 4x - 3 = 2(x^2 - 2x) - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 2 - 3 = 2(x - 1)^2 - 5.$$



Мал. 11.5

Побудуємо графік даної функції, використовуючи властивості перетворення графіків функцій. Для цього побудуємо графіки функцій $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 2(x-1)^2$, $y = 2(x-1)^2 - 5$.

Або побудуємо параболу виду $y = 2x$ з вершиною в точці $(1; -5)$.

ВИКОНАЙ УСНО



527. Чим різняться графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = ax^2$?

528. За якої умови графік функції $y = ax^2 + bx + c$:

- а) напрямлений гілками вгору; б) напрямлений гілками вниз;
в) дотикається до осі абсцис; г) перетинає вісь абсцис?

529. Знайди абсцису вершини параболи $y = x^2 - 6x + 4$.

А -3

Б 3

В -2

Г 6

530. Укажи нулі функції:

а) $y = 2x^2$;

б) $y = x^2 - 7x$;

в) $y = x^2 - 9$.

531. Розгадай ребус (мал. 11.6).

532. Вкажи кількість точок перетину параболи $y = x^2 - 3x + 4$ з віссю x .

А одна

Б дві

В жодної

Г не можна встановити



Мал. 11.6

533. У якій точці параболу $y = 5x^2 - 6x + 9$ перетинає вісь y ?

А (9; 0)

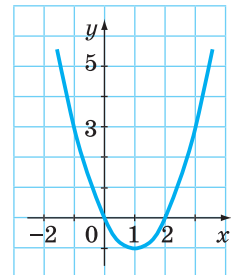
Б (-9; 0)

В (0; 9)

Г (0; -9)

534. На малюнку 11.7 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажи:

- а) область визначення функції; б) знак коефіцієнта a ; в) абсцису й ординату вершини параболи;
г) область значень функції; р) нулі функції; д) найменше значення функції; е) проміжки, на яких функція зростає, на яких — спадає; є) проміжки, на яких значення функції додатні, від'ємні.



Мал. 11.7

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

535. Гра. Один з учнів / одна з учениць задає значення k для квадратичної функції виду $y = (x + k)^2$, а інший / інша

має записати координати вершини відповідної параболи. Потім учні / учениці міняються ролями.



536. Запиши координати вершини параболи:

а) $y = (x - 3)^2$; б) $y = 2(3 - x)^2$; в) $y = (x - 5)^2 + 2$;
 г) $y = 2(5 - x)^2 - 3$; ґ) $y = 2(x + 1)^2 + 1$; д) $y = -2(x - 1)^2 - 3$.

Знайди координати вершини параболи — графіка функції (537, 538):

537. а) $y = x^2 + 4x - 5$; б) $y = 2x^2 - 6x + 3$;
 в) $y = x^2 - 4x$; ґ) $y = x^2 - 4$.

538. а) $y = x^2 - 10x - 7$; б) $y = -3x^2 + 12x - 5$;
 в) $y = x^2 + 6x$; ґ) $y = 2 - x^2$.

539. **ЗНО** Укажи функцію, графіком якої є парабола з вершиною в точці $(-2; 0)$.

А $y = x^2 - 2$ Б $y = (x - 2)^2$ В $y = (x + 2)^2$ Г $y = -2x^2$ Д $y = x^2 + 2$

Побудуй графік функції (540, 541).

540. а) $y = 2x^2$, $y = 0,5x^2$, $y = 2x^2 + 1$;
 б) $y = -2x^2$, $y = -0,5x^2$, $y = -0,5x^2 - 2$.

541. а) $y = (x - 1)^2$; б) $y = x^2 - 2x + 1$;
 в) $y = x^2 - 6x + 9$; ґ) $y = x^2 + 4x + 4$.

У яких точках графік функції перетинає осі координат (542, 543)?

542. а) $y = x(x - 2)$; б) $y = 2x^2 - 6x$; в) $y = x^2 - 3x + 2$; ґ) $y = 3x^2 - 4x + 1$.

543. а) $y = x(x + 5)$; б) $y = x^2 - 2$; в) $y = x^2 - 2x - 3$; ґ) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

Побудуй графік функції (544, 545).

544. а) $y = x^2 - 2x + 5$; б) $y = x^2 + 6x + 3$;
 в) $y = x^2 + 2x + 4$; ґ) $y = -x^2 - 8x - 10$.

545. а) $y = x^2 - 2x - 8$; б) $y = x^2 - 4x - 2$;
 в) $y = x^2 + 6x + 5$; ґ) $y = -x^2 - 10x - 27$.

Вкажи координати вершини параболи та побудуй її (546, 547).

546. а) $y = (x - 1)^2 + 2$; б) $y = (x + 2)^2 + 1$.

547. а) $y = (x + 4)^2 + 2$; б) $y = (x - 2)^2 - 3$.

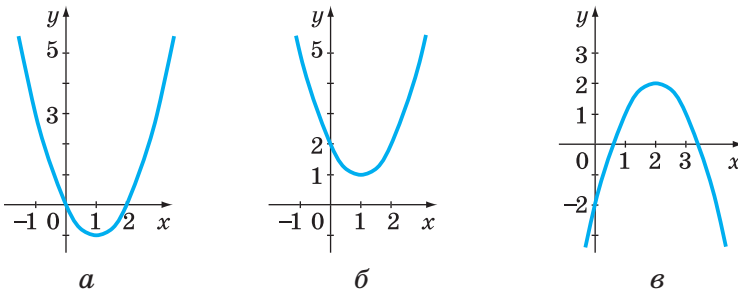
Побудуй параболу, виділивши квадрат двочлена (548, 549).

548. а) $y = x^2 + 4x + 5$; б) $y = x^2 - 6x + 5$.

549. а) $y = x^2 - 2x - 1$; б) $y = 1 + 4x + x^2$.

550. На мал. 11.8, а, б дано графіки квадратичних функцій. Знайди для кожної з них за графіком:

- а) знак дискримінанта; б) знак першого коефіцієнта;
 в) координати вершини параболи; ґ) нулі функції;
 г) проміжки, на яких функція зростає, спадає.



Мал. 11.8

551. Виконай завдання 550, але для малюнка 11.8, в.

552. Точка $M(3; 5)$ є вершиною параболи $y = x^2 + mx + n$. Знайди:

- а) m і n ; б) у яких точках графік перетинає вісь y .

553. Точка $A(-2; 1)$ є вершиною параболи $y = -x^2 + mx + n$. Знайди:

- а) m і n ; б) у яких точках графік перетинає вісь x .

554. Find p and q if the graph of the function $y = x^2 + px + q$ passes through the points $P(1; 4)$; $Q(-1; 10)$.

555. Знайди b і c , якщо графік функції $y = x^2 + bx + c$ проходить через точки $B(2; 7)$; $C(-2; 11)$.

556. Графік функції $y = x^2 - 5x + c$ перетинає вісь y в точці $A(0; 4)$. У яких точках він перетинає вісь x ?

557. Графік функції $y = x^2 - 3x + c$ перетинає вісь y в точці $A(0; 3)$. Чи перетинає він вісь x ?

558. Профіль невеликої ділянки дороги через перевал можна описати квадратичною функцією $h(x) = -0,5x^2 + 4x + 120$, де $h(x)$ — висота місцевості над рівнем моря (у метрах), x — відстань від початку ділянки дороги (у кілометрах). Знайди: а) якої форми цей перевал; б) найвищу точку цього перевалу; в) побудуй за допомогою Desmos Calculator профіль цього перевалу.

559. На тренуванні тенісний м'яч ракеткою відбили з-понад самого рівня землі під кутом до горизонту. Його висота (у метрах) через t секунд після удару описується формулою: $h(t) = -5t^2 + 20t + 2,5$. Знайди: а) яку траєкторію опише м'яч; б) через який час впаде м'яч на землю; в) якої найбільшої висоти досягне м'яч; г) як зміниться графік функції, якщо м'яч відбили з такою ж силою і в тому ж напрямі, але на рівні 2 м від землі? Дізнайся більше про Еліну Світоліну та її досягнення та назву удару, про який йдеться в задачі.



Еліна Світоліна — видатна українська тенісистка

- 560.** Кількість певних бактерій у чаші Петрі після внесення поживного розчину описується формулою $N(t) = -2t^2 + 16t + 18$, де t — час у годинах після початку експерименту, $N(t)$ — кількість бактерій (в умовних одиницях). Знайди: а) скільки бактерій було на старті експерименту; б) область визначення функції в контексті задачі; в) час, коли колонія зникає; г) через який час відбудеться пік розвитку популяції; г) як зміниться графік функції, якщо на старті колонія мала на 10 бактерій більше?


ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Не будуючи графіка функції, виконай завдання (**561, 562**).

- 561.** При якому значенні c графік функції $y = x^2 - 5x + c$:

- а) проходить через початок координат;
 б) дотикається до осі x ;
 в) перетинає вісь x у точці $A(3; 0)$;
 г) перетинає вісь y в точці $B(0; -5)$?

- 562.** При якому значенні b графік функції $y = x^2 + bx + 4$:



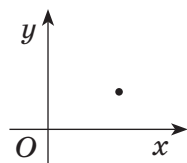
- а) дотикається до осі x ;
 б) не має спільних точок з віссю x ;
 в) перетинає вісь x у точці $A(4; 0)$;
 г) перетинає вісь x у точках, відстань між якими дорівнює 3?

Побудуй графік квадратичної функції (**563, 564**).

- 563.** а) $y = x^2 + x + 1$; б) $y = 2x^2 - 5x + 3$;
 в) $y = -3x^2 + 6x - 1$; г) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$.
564. а) $y = -x^2 + 3x + 1$; б) $y = 2x^2 + x - 4$;
 в) $y = 0,5x^2 - x + 2$; г) $y = \frac{1}{3}x^2 + x + 3$.

- 565. ЗНО** У прямокутній системі координат зображено точку, що є вершиною параболи $y = x^2 + bx + c$ (мал. 11.9). Укажи правильне твердження щодо коефіцієнтів b і c .

А $\begin{cases} b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$ Б $\begin{cases} b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$ В $\begin{cases} b > 0, \\ c = 0 \end{cases}$ Г $\begin{cases} b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$ Д $\begin{cases} b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$



Мал. 11.9

Побудуй графік функції, вкажи проміжки, на яких функція зростає (спадає) (**566, 567**).

- 566.** а) $y = x^2 - 2$; б) $y = x^2 - 6x$; в) $y = x^2 - 2x + 3$; г) $y = -x^2 - 6x - 5$.
567. а) $y = 2 - x^2$; б) $y = x^2 + 4x$; в) $y = x^2 + 6x + 7$; г) $y = -x^2 - 4x + 1$.

Побудуй графік функції, знайди її найбільше та найменше значення (якщо вони існують) та вкажи область значень функції (568, 569).

568. а) $y = 6 - x^2$; б) $y = -x^2 + 2x + 3$; в) $y = -2x^2 - 8x - 5$.

569. а) $y = x^2 - 3$; б) $y = x^2 - 8x + 13$; в) $y = 0,5x^2 + 2x - 1$.

Не виконуючи побудови, знайди проміжки зростання і спадання функції та її область значень (570, 517).

570. а) $y = x^2 + 2x - 35$; б) $y = 1 - 5x - x^2$; в) $y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 15$.

571. а) $y = x^2 - 4x + 17$; б) $y = 7 + 3x - x^2$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 13$.

572. **ЗНО** Знайди найбільше значення функції $y = -x^2 + 3x - 4$. Якщо функція не має найбільшого значення, то у відповідь запиши число 100.

Знайди координати точок перетину графіків функцій: 1) не виконуючи побудову; 2) побудувавши графіки даних функцій (573, 574).

573. а) $y = x^2$ і $y = (x - 4)^2$; б) $y = 2x^2$ і $y = -x^2 + 3$;

574. а) $y = x^2 - 3$ і $y = (x + 3)^2$; б) $y = 3x^2$ і $y = -2x^2 + 5$.

Знайди відстань між вершинами парабол, що є графіками функцій (575, 576).

575. а) $y = (x - 3)^2$ і $y = (x - 3)^2 + 7$; б) $y = x^2 - 2x + 5$ і $y = -x^2 + 2x - 4$.

576. а) $y = x^2$ і $y = (x + 5)^2$; б) $y = x^2 + 4x + 5$ і $y = -x^2 - 4x - 5$.

577. Параболу задано рівнянням $y = x^2 - 6x + 13$. Знайди відстані від її вершини до осей x , y і початку координат.

Побудуй графік функції (578, 579).

578. а) $y = |x^2 - 4x + 3|$; б) $y = |x^2 + 4x| - 2$.

579. а) $y = |x^2 + 2x - 3|$; б) $y = |x^2 - 6x| - 4$.

580. Найменше значення функції $y = x^2 - 6x + c$ дорівнює -5 . Побудуйте її графік.

581. Найбільше значення функції $y = c + 4x - 4x^2$ дорівнює 4. Побудуй її графік.

582. Знайди значення b , якщо графік функції $y = x^2 + bx + 5$ симетричний відносно прямої $x = 3$.

583. Знайди значення p , якщо графік функції $y = x^2 + px + 1$ симетричний відносно прямої $x = -2$.

584. За якого значення p проміжок $[-2; +\infty)$ є проміжком зростання функції: а) $y = 3x^2 + px - 3$; б) $y = px^2 - (p^2 - 12)x + 6$.

- 585.** За якого значення a проміжок $(-\infty; 3]$ є проміжком зростання функції: а) $y = -2x^2 + ax + 8$; б) $y = ax^2 - (a^2 - 7)x + 9$?
- 586.** За якого значення параметра a найменше значення функції $y = x^2 - 6x + a$ дорівнює найбільшому значенню функції $y = -2x^2 + 12x + 5a$?
- 587.** За якого значення параметра a найменше значення функції $y = x^2 - 2x + 5a$ дорівнює найбільшому значенню функції $y = -3x^2 + 6x + a^2$?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

- 588.** Побудуй графік функції:
а) $y = x^2 - 4|x|$; б) $y = |x^2 - 6|x| + 5|$.
- 589.** *Задача Дж. Кардано.* Знайди геометричною побудовою додатний корінь рівняння $x^2 + 6x = 91$.

Мал. 11.10. Дж. Кардано



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 590.** Заміни букви цифрами, щоб виконувалася рівність:
ПАРА + ПАРА = БОЛА.

Скільки різних розв'язків має задача?

- 591.** Розв'яжи нерівність.
а) $2(x + 7) + 3(1 - 2x) \geq 1$; б) $3(3x - 2) - 4(x + 1) < 2x$;
в) $2(x + 1) \geq 3 - (1 - 2x)$; г) $3x - 0,5(1 - 3x) \leq 2,5(x - 3)$.
- 592.** Скільки коренів має рівняння?
а) $(x + 1) \cdot |x + 2| = 5$; б) $(x + 1) \cdot |x + 2| = -5$;
в) $(x + 1) \cdot |x + 2| = -4$; г) $(x + 1) \cdot |x + 2| = -1$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, яку функцію називають квадратичною:

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

- ✓ Знаю, що графік квадратичної функції — парабола.

- ✓ Можу навести приклади квадратичної функції:

$$y = 3x^2; \quad y = x^2 + x; \quad y = -x^2 + 5; \quad y = 2x^2 - 3x + 2$$

- ✓ Можу пояснити алгоритм побудови графіка квадратичної функції.

- ✓ Можу характеризувати функцію за її графіком.

- ✓ Вмію розв'язувати вправи, що передбачають побудову графіка квадратичної функції.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— як побудувати графік квадратичної функції:

Графік функції $y = ax^2 + bx + c$	
$a > 0$, напрямлений гілками вгору	$a < 0$, напрямлений гілками вниз
дотикається до осі абсцис $D = b^2 - 4ac = 0$	перетинає вісь абсцис $D = b^2 - 4ac > 0$

- види нерівностей: строгі, нестрогі;
- властивості числових нерівностей;
- як записують розв'язки нерівностей.

§ 12. Квадратні нерівності

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- квадратна нерівність — *quadratic inequality*

Якщо лівою частиною нерівності є вираз $ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, b, c — дані числа, а правою — нуль, то її називають *квадратною нерівністю*.

Приклади:

$$x^2 - 5x + 3 < 0, \quad 2x^2 + 4 \leq 0, \quad -3x^2 + 2x \geq 0, \quad -x^2 + 3x + 7 > 0.$$

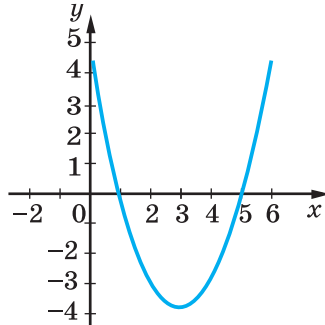
Такі нерівності зручно розв'язувати за допомогою графіків квадратичних функцій.

Приклад 1. Розв'яжи нерівність $x^2 - 6x + 5 < 0$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = x^2 - 6x + 5$ (мал. 12.1). Її нулі — числа 1; 5. Від'ємні значення ця функція має тільки в тому разі, якщо змінна x належить проміжку (1; 5). Це і є множина розв'язків даної нерівності.

Відповідь. (1; 5).

Для розв'язування таких нерівностей точно будувати графіки квадратичних функцій не обов'язково. Досить визначити напрям гілок параболи і точки перетину графіка з віссю x (якщо вони існують). Тому далі будемо зображати параболу схематично

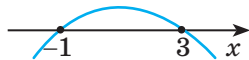


Мал. 12.1

і не у системі координат, а визначати положення заданої квадратичної функції відносно осі абсцис.

Приклад 2. Розв'яжи нерівність $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

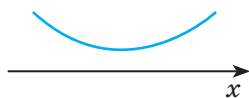
Розв'язання. Графік функції $y = -x^2 + 2x + 3$ перетинає вісь x у точках з абсцисами -1 і 3 ; гілки параболи напрямлені вниз. Тому схематично графік функції можна зобразити, як показано на малюнку 12.2. Значення функції недодатні за умови, що x належить проміжку $(-\infty; -1]$ або $[3; \infty)$. Отже, множина розв'язків даної нерівності — об'єднання цих проміжків. Оскільки об'єднання множин прийнято позначати символом $\cup$, то відповідь можна записати так: $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$.



Мал. 12.2

Приклад 3. Розв'яжи нерівність $x^2 + x + 1 < 0$.

Розв'язання. Дискримінант рівняння $x^2 + x + 1 = 0$ від'ємний, тому графік функції $y = x^2 + x + 1$ з віссю x не має спільних точок. Гілки графіка напрямлені вгору (мал. 12.3). Отже, при кожному значенні x значення функції $y = x^2 + x + 1$ додатне.

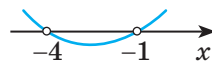


Мал. 12.3

Відповідь. Нерівність розв'язків не має.

Приклад 4. Розв'яжи нерівність $(x + 4)(x + 1) > 0$.

Розв'язання. Вираз $(x + 4)(x + 1)$ тотожно дорівнює деякому квадратному тричлену з додатним коефіцієнтом при x^2 . Отже, графік функції $y = (x + 4)(x + 1)$ — параболою, гілки якої напрямлені вгору і яка перетинає вісь x у точках з абсцисами -4 і -1 (мал. 12.4). Значення функції додатні, якщо $x < -4$ або $x > -1$.



Мал. 12.4

Відповідь. $(-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$.

Оскільки нерівність $\frac{x+4}{x+1} > 0$ рівносильна нерівності $(x + 4)(x + 1) > 0$,

то таким способом (графічно) можна розв'язувати і найпростіші дробово-раціональні нерівності.

Щоб розв'язати квадратну нерівність за допомогою графіка, потрібно:

- 1) визначити напрям гілок параболи за знаком першого коефіцієнта;
- 2) знайти корені відповідного квадратного рівняння, якщо вони є;
- 3) побудувати ескіз графіка квадратної функції;
- 4) за графіком визначити проміжки для x , на яких нерівність правильна.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Спосіб, яким розв'язують квадратні нерівності, можна поширити на багато інших видів нерівностей.

Приклад. Нехай треба розв'язати нерівність $(x - 1)(x - 2)(x + 5) < 0$.

Ця вправа рівносильна такій. При яких значеннях x від'ємними є значення функції $y = (x - 1)(x - 2)(x + 5)$?

Щоб відповісти на поставлене запитання, знайдемо спочатку нулі функції: 1, 2 і -5 . Вони розбивають область визначення функції на чотири проміжки: $(-\infty; -5)$, $(-5; 1)$, $(1; 2)$ і $(2; \infty)$. На кожному з цих проміжків кожний із множників добутку $(x - 1)(x - 2)(x + 5)$ має певний знак. Подамо їх і знак усього добутку в такій таблиці.

Множник	$(-\infty; -5)$	$(-5; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$x - 1$	—	—	+	+
$x - 2$	—	—	—	+
$x + 5$	—	+	+	+
y	—	+	—	+

Схематично графік функції y зображено на малюнку 12.5.



Мал. 12.5

Отже, функція набуває від'ємних значень на проміжках $(-\infty; -5)$ і $(1; 2)$.

Відповідь. Множина розв'язків нерівності $(-\infty; -5) \cup (1; 2)$.

У розглянутому прикладі проміжки, на яких значення функції додатні, чергуються з тими, на яких значення функції від'ємні. Однак це не завжди так. Розв'яжемо нерівність $(x + 1)^2(x + 3)(x - 5) \geq 0$.

Ліва частина нерівності дорівнює нулю, якщо значення x дорівнює -3 , -1 або 5 . Склавши відповідну таблицю, переконаємося, що значення лівої частини нерівності від'ємні на сусідніх проміжках $(-3; -1)$ і $(-1; 5)$. Отже, множина розв'язків даної нерівності $(-\infty; -3] \cup [5; \infty) \cup \{-1\}$.

Схематично графік функції $y = (x + 1)^2(x + 3)(x - 5)$ показано на малюнку 12.6.

Розглянутий спосіб розв'язування нерівностей — це окремий випадок загального методу інтервалів. Докладніше з ним ти ознайомишся у старших класах.



Мал. 12.6



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Квадратна нерівність. Урок 1).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй означення квадратної нерівності.
2. Яким символом позначають об'єднання двох множин?
3. Скільки розв'язків може мати квадратна нерівність?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



Розв'яжи нерівність.

а) $x^2 - 4 \geq 0$;

б) $x^2 + 3x < 0$;

в) $z^2 - 3z - 2 \leq 0$;

г) $t^2 + t + 1 > 0$.

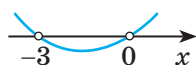
Розв'язання. а) Знайдемо корені рівняння $x^2 - 4 = 0$. $x^2 = 4$, звідси $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. На осі x позначаємо ці точки (зафарбовані, бо нерівність не строга) і схематично будуємо параболу гілками вгору (мал. 12.7). З малюнка видно, що функція набуває невід'ємних значень, якщо $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.



Мал. 12.7

б) Знайдемо корені відповідного квадратного рівняння $x(x+3)=0$, $x=0$ або $x=-3$.

Отже, графік функції $y = x^2 + 3x$ перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$ і $x = -3$, гілки параболи напрямлені вгору. Зобразимо графік схематично (мал. 12.8); множина розв'язків нерівності — проміжок $(-3; 0)$.



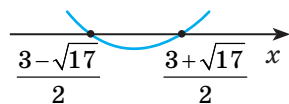
Мал. 12.8

в) Знайдемо корені рівняння $z^2 - 3z - 2 = 0$.

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17; z_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, z_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

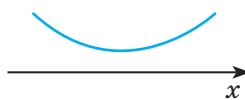
Гілки параболи напрямлені вгору, тому шукана множина розв'язків нерівності

$$\left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right] \text{ (мал. 12.9).}$$



Мал. 12.9

г) $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$. Коефіцієнт при t^2 додатний, тому гілки параболи напрямлені вгору. Уся вона розміщена у верхній півплощині. Отже, множина розв'язків нерівності — вся множина R (мал. 12.10).



Мал. 12.10

Відповідь. а) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; б) $(-3; 0)$; в) $\left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right]$; г) R .

ВИКОНАЙ УСНО

593. Наведи приклади квадратних нерівностей, які:

- а) не мають жодного розв'язку;
- б) мають тільки один розв'язок;
- в) задовольняють усі дійсні числа.



594. Яка з нерівностей не є квадратною?

А $-2x^2 - 5x + 7 \leq 0$

Б $3x^2 + 6 \leq 0$

В $x^2 + \frac{1}{x} + 3 \geq 0$

Г $\frac{x^2}{3} + 4x + \sqrt{2} < 0$

595. Визнач напрям гілок графіка функції:

а) $y = 4x^2 - 16x + 5$; б) $y = -x^2 + 4x + 3$; в) $y = 3x^2 - 7$;

г) $y = 7 - 4x - x^2$; д) $y = 3x(x - 4)$; е) $y = -x(x + 3)$.

596. Чи перетинає вісь абсцис графік функції:

а) $y = x^2 - 2x + 3$; б) $y = -x^2 + 7x - 5$; в) $y = 3x^2 - x$;

г) $y = 3x^2 - x + 3$; д) $y = 5x^2 + 3x - 1$; е) $y = x(7x - 1)$?

597. Знайди множину розв'язків нерівності $x^2 - 1 \leq 0$.

А $(-1; 1)$

Б $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

В $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Г $[-1; 1]$

598. Яка з нерівностей виконується при всіх дійсних значеннях x ?

А $x^2 - 5 < 0$

Б $x^2 + 2x + 1 \leq 0$

В $x^2 + x + 7 > 0$

Г $x^2 - 2x + 15 < 0$

599. Чому не має розв'язків нерівність:

а) $3x^2 < -3$;

б) $(x - 2)^2 + 1 \leq 0$;

в) $3x^2 - x + 1 < 0$;

г) $-x^2 \geq 2$;

д) $-(1 - x)^2 > 0$;

е) $2x^2 < x - 1$?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



600. На малюнку 12.11 схематично зображено графік функції $y = x^2 + x - 2$.

Користуючись графіком, вкажи множину розв'язків нерівності:

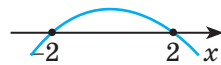
а) $x^2 + x - 2 < 0$; б) $x^2 + x - 2 \leq 0$; в) $x^2 + x - 2 > 0$; г) $x^2 + x - 2 \geq 0$.



Мал. 12.11

601. На малюнку 12.12 схематично зображено графік функції $y = 4 - x^2$. Користуючись графіком, вкажи множину розв'язків нерівності:

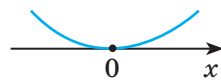
а) $4 - x^2 < 0$; б) $4 - x^2 \leq 0$; в) $4 - x^2 > 0$; г) $4 - x^2 \geq 0$.



Мал. 12.12

602. На малюнку 12.13 схематично зображено графік функції $y = x^2 + 2x + 1$. Користуючись графіком, вкажи множину розв'язків нерівності:

а) $x^2 + 2x + 1 < 0$; б) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$; в) $x^2 + 2x + 1 > 0$; г) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$.



Мал. 12.13

603. Гра. Один з учасників/одна з учасниць малює схематичний графік квадратичної функції $f(x)$, другий/друга — зазначає, які зі значень функції цікавлять (більше, менше, не більше, не менше 0), а третій/третя має заштрихувати всі значення x , які задовольняють задані умови. Потім учасники/учасниці міняються ролями.



Розв'яжи нерівність (604–613).

604. а) $y^2 - 4y - 5 < 0$; б) $x^2 + 6x + 8 \leq 0$; в) $z^2 + 6z - 7 \geq 0$;
 г) $6x^2 - x > 0$; р) $2x^2 + 7x \geq 0$; д) $x^2 - 9 < 0$.
605. а) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; б) $x^2 - 4x + 3 > 0$; в) $x^2 - 2x - 15 < 0$;
 г) $x^2 - 2x \geq 0$; р) $3x^2 - 5x < 0$; д) $x^2 - 36 \geq 0$.
606. а) $x^2 - 6x + 9 > 0$; б) $y^2 - 8y + 16 < 0$; в) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$;
 г) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$; р) $y^2 - 4y + 12 > 0$; д) $2x^2 - 3x + 5 < 0$.
607. а) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$; б) $4x^2 + 4x + 1 > 0$; в) $x^2 - 12x + 36 < 0$;
 г) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$; р) $x^2 + 2x + 6 > 0$; д) $x^2 + x + 7 < 0$.
608. а) $-2x^2 - 3x - 1 \geq 0$; б) $-x^2 + 6x - 8 < 0$; в) $-y^2 - 4y + 12 < 0$.
 г) $3x - x^2 \geq 0$; р) $5x - 2x^2 < 0$; д) $16 - x^2 \geq 0$.
609. а) $-x^2 + 3x - 2 > 0$; б) $-0,5x^2 - x + 4 < 0$; в) $-3z^2 + 5z + 12 \geq 0$;
 г) $5x - x^2 < 0$; р) $9x - 2x^2 \geq 0$; д) $25 - x^2 \leq 0$.
610. а) $x^2 - 3x + 1 > 0$; б) $2x^2 + x - 2 \leq 0$; в) $2x^2 - 3 < 0$.
611. а) $x^2 - 4x - 2 > 0$; б) $3x^2 - 2x - 2 \leq 0$; в) $5x^2 - 10 < 0$.
612. а) $x(x - 3) < -2$; б) $2(z^2 + 5) > 9z$; в) $13 - (5 - y)^2 > 3y$.
 г) $(x - 3)(x + 5) > 0$; р) $(x + 2)(x + 7) < 24$; д) $(2x - 1)(x + 3) + 8 > 2(x + 2)$.
613. а) $x(2 + x) \geq 3$; б) $6(t^2 + 1) < 13t$;
 в) $5y - (y - 2)^2 < -14$; г) $(x - 2)(x + 3) < 0$;
 р) $(a + 2)(a - 5) \leq 18$; д) $(2 - c)(3 - c) \geq -2(c - 23)$.
614. **ЗНО** Розв'яжи нерівність $(x + 4)^2 \leq 16$.
 А $(-\infty; 8]$ Б $(-\infty; 0]$ В $(-\infty; 4]$ Г $[-8; 8]$ Д $[-8; 0]$
615. **ЗНО** Розв'яжи нерівність $(x + 3)(x - 2) < 0$.
 А $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ Б $(-3; 2)$ В $(2; +\infty)$ Г $(2; 3)$ Д $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$
616. При яких значеннях x значення функції $y = x^2 + 3x$ від'ємні, а при яких — додатні?
617. For which values of x are the values of the function $y = f(x)$ positive, and for which are they negative, if:
 а) $f(x) = 9 - x^2$; б) $f(x) = x^2 + 6x - 7$; в) $f(x) = 3 + 2x - x^2$?

Знайди область визначення функції (618, 619).

618. а) $y = \sqrt{x^2 - 4}$; б) $y = \sqrt{x - x^2}$; в) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$; г) $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.
619. а) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$; б) $y = \sqrt{2x^2 - 4}$; в) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; г) $y = \frac{x + 6}{\sqrt{2 + x - x^2}}$.

Знайди цілі розв'язки нерівності (620, 621).

620. а) $x^2 + 5x - 6 < 0$; б) $x^2 - x - 6 < 0$; в) $3x^2 - 8x \leq 0$; г) $3 - x^2 \geq 0$.

621. а) $x^2 + 2x - 8 < 0$; б) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$; в) $2x^2 - 7x \leq 0$; г) $5 - x^2 \geq 0$.

622. Світлотехнік налаштовує сценічні прожектори для освітлення завіси в театрі. Сила світла описується формулою $I(x) = -x^2 + 10x$, де x — відстань прожектора від завіси у метрах. На якій відстані слід розташувати прожектор, щоб $I(x) > 21$ кд.

623. Прямокутна ділянка, відведена під сад, прилягає до стіни будинку. Для огороження саду з трьох інших сторін використано 90 м паркану. Познач сторони, що прилягають до стіни, за x . Знайди найбільше значення x і довжину третьої сторони при цьому значенні x , щоб площа саду була не меншою від 400 м^2 .

624. Одна зі сторін прямокутної клумби прилягає до стіни. Для огороження трьох інших сторін витрачено 88 м паркану. Познач сторони, що прилягають до стіни, за x . Знайди найменше значення x і довжину третьої сторони при цьому значенні x , щоб площа клумби була не менше від 576 м^2 .

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Розв'яжи нерівність (625, 626).

625. а) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$; б) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) \geq 10$;

в) $(3x - 2)^2 \geq 8(x - 1)^2 + 17$; г) $\frac{x^2 + x}{2} - \frac{5x + 1}{3} \leq \frac{x - 7}{6}$.

626. а) $(x - 2)(x + 2) + x(x + 7) \leq 0$; б) $(x - 4)(3x + 1) < (2x - 6)(x - 2) + 4$;

в) $(x - 5)^2 + 6x \geq 2(2x + 1)^2 - 29$; г) $\frac{x^2 + 2x}{3} - \frac{3x + 5}{4} \leq \frac{1 - 7x}{6}$.

627. **ЗНО** Розв'яжи нерівність $(x + 4)(x - 8) > 3(x - 8)$.

А $(-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$ Б $(-1; 8)$ В $(-1; 8) \cup (8; +\infty)$ Г $(-1; +\infty)$ Д $(8; +\infty)$

628. При яких значеннях x значення функції $y = 2x + 2$ більше за відповідне значення функції: а) $y = x^2 - 3x - 4$; б) $y = 4x^2 + 9x - 13$?

629. При яких значеннях x значення функції $y = 3x^2 + 5x - 1$ менше від відповідного значення функції $y = 4x^2 + 9x - 13$?

Знайди область визначення функції (630, 631).

630. а) $y = \frac{\sqrt{8+7x-x^2}}{x-2}$; б) $y = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x^2-3x-4}$; в) $y = \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{|x|-5}$.

631. а) $y = \frac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{x+1}$; б) $y = \frac{\sqrt{5x^2-x-4}}{|x|-3}$; в) $y = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-3x}$.

Розв'яжіть нерівність (632, 633).

632. а) $\frac{3x^2+5x-8}{x^2+2} \leq 0$; б) $\frac{2x^2-x-3}{4x^2+1} \geq 0$; в) $\frac{3+|x|}{3x^2-2x-16} > 0$.

633. а) $\frac{5x^2-9x-2}{5+x^2} > 0$; б) $\frac{3x^2-x-4}{3x^2+5} \leq 0$; в) $\frac{|x|+1}{1-x-2x^2} < 0$.

Розв'яжи систему нерівностей (634, 635).

634. а) $\begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0, \\ 2x+10 > 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-4x < 0, \\ x^2-x-6 \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x^2-1 > 0, \\ 2x^2-5x+3 < 0. \end{cases}$

635. а) $\begin{cases} x^2+4x-12 \leq 0, \\ 4x-9 > 6x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3 > 2x, \\ x^2+28 \geq 11x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2+1 \geq 4x, \\ 3x^2+2 \leq 5x. \end{cases}$

636. Знайди цілі розв'язки системи нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2-2x-15 \leq 0, \\ x^2-7x < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+4x-12 < 0, \\ x^2+5x+4 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+2x-8 \leq 0, \\ x^2-4 \geq 0. \end{cases}$

637. Знайди найменший цілий розв'язок системи нерівностей.

а) $\begin{cases} x^2-3x-10 < 0, \\ x^2+5x \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-6x-7 \leq 0, \\ x^2-4x+3 \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+4x-5 \geq 0, \\ x^2-25 \leq 0. \end{cases}$

Розв'яжи подвійну нерівність (638, 639).

638. а) $0 < x^2 - 5x < 6$; б) $x < 2x + 3 < x^2$.

639. а) $1 < x^2 + 2 < 3x$; б) $3 < x^2 - 2x + 3 < x^2$.

Знайди область визначення функції (640, 641).

640. а) $y = \sqrt{x^2+3x-18} + \sqrt{49-x^2}$; б) $y = \frac{3x}{\sqrt{x^2-3x-4}} - \sqrt{7-x}$.

641. а) $y = \sqrt{x^2-5x+4} - \sqrt{6x-x^2}$; б) $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+7x+6}} + \sqrt{x+10}$.

Розв'яжи нерівність (642, 643).

642. а) $x^2-4|x|-5 \leq 0$; б) $5x^2+|x|-4 > 0$.

643. а) $x^2-6|x|+8 \leq 0$; б) $3x^2-|x|-4 > 0$.

Розв'яжи нерівність методом інтервалів (644, 645).

644. а) $(x-2)(x+1)(x+7) \geq 0$; б) $(x-6)(x-8)(x+10) < 0$;
в) $(x-2)(x+3)^2 < 0$; г) $(x+5)(x-1)^2(x-7) \geq 0$.

645. а) $(x+6)(x+2)(x-5) \geq 0$; б) $(x-8)(x+3)(x+9) < 0$;
в) $(x+3)(x-1)^2 > 0$; г) $(x+4)(x+2)^2(x-3) \geq 0$.

646. При яких значеннях b не має розв'язків нерівність:

а) $x^2 + 2bx + 1 < 0$; б) $bx^2 + 6bx + 1 \leq 0$;

в) $(b-1)x^2 - 2bx + 3b - 3 > 0$?

- 647.** При яких значеннях t кожне дійсне число задовольняє нерівність:
 а) $x^2 - tx + 4 > 0$; б) $x^2 - 6tx + t \geq 0$; в) $tx^2 - 4x + t + 3 < 0$.

Для кожного значення параметра a розв'яжи систему нерівностей (648, 649).

648. а) $\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0, \\ x < a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0, \\ x \leq a. \end{cases}$

649. а) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0, \\ x \geq a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0, \\ x > a. \end{cases}$

- 650.** Для кожного значення параметра a розв'яжи рівняння:

а) $\frac{x^2 - (a-1)x + 2a - 6}{\sqrt{9 - x^2}} = 0$;

б) $\frac{x^2 - (a-2)x + 2a - 8}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = 0$.

- 651.** Для кожного значення параметра a вкажи кількість коренів рівняння.

а) $\frac{x^2 - (2a+3)x + 6a}{\sqrt{x^2 + 4x}} = 0$;

б) $\frac{x^2 - (a+3)x + 4(a-1)}{\sqrt{12 + 4x - x^2}} = 0$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



- 652.** Розв'яжи графічно нерівність:

а) $x^2 < x + 2$;

б) $(x-2)^2 \geq |x|$;

в) $2x^2 < 1 + \sqrt{x}$.

- 653.** Розв'яжи нерівність:

а) $|x^2 - 5x| \geq 6$;

б) $|x^2 + 5x| < 7 - x^2$;

в) $|x+2|(x+4) \leq 3x$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



- 654.** Розв'яжи систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - 2y = -2, \\ 2x + y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x + y = -4, \\ 3x - y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 4y = 16, \\ 3x + 5y = 9. \end{cases}$

- 655.** Друзі придбали спільний подарунок на суму 2600 грн. Якби їх було на 3 особи більше, то внесок кожного був би на 60 грн меншим. Скільки осіб купували подарунок?

- 656.** Спрости вираз: а) $9x^2y \cdot (-0,5x^2y)$; б) $(-0,5ab^3) \cdot (-24a^2b^3)$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклад квадратної нерівності з однією змінною:

$2x^2 + 3x + 1 > 0$

$x^2 + 1 > 0$

$x^2 - 3x < 0$

$-0,5x^2 - x + 2 \leq 0$

- ✓ Умію розв'язувати квадратні нерівності та записувати їх розв'язки.
Якщо $ax^2 + bx + c > 0$ і $D = b^2 - 4ac$, то:

$a > 0$	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	
$a > 0$	$D = 0$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$	
$a > 0$	$D < 0$	$x \in R$, тобто $x \in (-\infty; \infty)$	
$a < 0$	$D > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	
$a < 0$	$D = 0$	Розв'язків немає	
$a < 0$	$D < 0$	Розв'язків немає	

- ✓ Хочу навчитися розв'язувати нерівності методом інтервалів.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке система лінійних рівнянь;
- що таке розв'язок системи рівнянь з двома змінними;
- що означає «розв'язати систему двох рівнянь»;
- як розв'язати систему рівнянь графічним способом;
- яка фігура є графіком рівняння:

$$y = x^2 \text{ і } y = ax^2 + bx + c \text{ — парабола}$$

$$y = \frac{k}{x} \text{ — гіпербола}$$

$$y = \sqrt{x} \text{ — гілка параболи}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ і } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ — коло}$$

- скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними.

§ 13. Системи рівнянь другого степеня

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- система рівнянь — system of equations
- підстановка — substitutions
- алгебраїчне додавання — algebraic addition
- графічний метод — graphical method

З поняттям «система рівнянь» ти ознайомився / ознайомилася в 7 класі. Тоді розглядалися системи двох лінійних рівнянь з двома змінними та способи їх розв'язування. На практиці часто доводиться розглядати системи, що містять рівняння другого степеня.

Приклади рівнянь другого степеня з двома змінними:

$$x^2 + 5y^2 = 9, \quad 8z - t^2 = 12, \quad 0,5xy + y = 0.$$

Кожне з таких рівнянь має дві змінні та принаймні один член другого степеня відносно цих змінних. Тобто або одну змінну в квадраті, або добуток двох змінних.

Якщо одне з рівнянь системи — другого степеня з двома змінними, а друге — рівняння з тими самими змінними другого або першого степеня, то таку систему називають системою двох рівнянь другого степеня з двома змінними.

Розв'язком рівняння з двома змінними називають кожну пару чисел, яка перетворює це рівняння на правильну рівність.

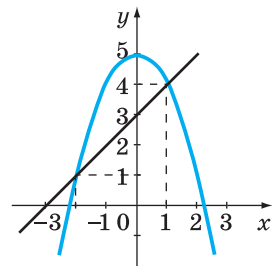
Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти множину всіх її розв'язків.

Наприклад, для рівнянь $x^2 + y - 5 = 0$ і $x - y + 3 = 0$ спільними розв'язками є пари чисел $(-2; 1)$ і $(1; 4)$. Перевір усно. Інших спільних розв'язків ці рівняння не мають (мал. 13.1).

Отже, система
$$\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$
 має два розв'язки,

її задовольняють дві пари чисел: $(-2; 1)$ і $(1; 4)$.



Мал. 13.1

СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Підстановки

Алгебраїчного
додавання

Графічний
спосіб

Заміни
змінних

Інші

Приклад. Розв'яжи систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} 2x^2 - y = 17, \\ x^2 + y = 10; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) **Спосіб додавання.**

Додаємо рівняння системи, маємо $3x^2 = 27$, звідси $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Оскільки $x^2 = 9$, то з другого рівняння $9 + y = 10$ знаходимо, що $y = 1$. Отже, система має два розв'язки: $(3; 1)$ і $(-3; 1)$.

б) *Спосіб підстановки.*

Виразимо з другого рівняння x^2 через y і підставимо його в перше рівняння: $x^2 = y + 5$, тоді $2(y + 5) - y^2 = 2$, звідси $2y + 10 - y^2 = 2$ або $y^2 - 2y - 8 = 0$.

Знаходимо корені рівняння: $y_1 = 4$, $y_2 = -2$.

Якщо $y = 4$, то $x^2 = 9$, звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Якщо $y = -2$, то $x^2 = 3$, звідси $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$.

Отже, дана система рівнянь має 4 розв'язки: $(3; 4)$, $(-3; 4)$, $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$.

в) *Графічний спосіб.*

Графіком першого рівняння є коло з центром у початку координат і радіусом 5 одиниць. Графіком другого рівняння є гіпербола

$$y = \frac{12}{x}.$$

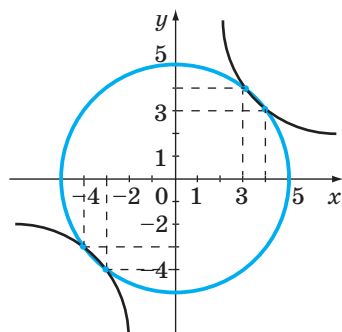
Побудуємо графіки цих рівнянь в одній системі координат (мал. 13.2) і визначимо координати точок їх перетину.

З графіка бачимо, що дана система рівнянь має чотири розв'язки: $(-4; -3)$, $(-3; -4)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$. Безпосередньою підстановкою переконуємося, що це точні розв'язки даної системи.

Відповідь. а) $(3; 1)$ і $(-3; 1)$;

б) $(3; 4)$, $(-3; 4)$, $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$;

в) $(-4; -3)$, $(-3; -4)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$.



Мал. 13.2

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Для розв'язування деяких видів систем використовують **спосіб заміни змінних**. Розв'яжемо цим способом такі системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ x + xy + y = 11; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 4x + (x - 2y)^2 = 1, \\ (x - 2)^2 + 2y - x = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. а) Запишемо систему у вигляді $\begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x + y + xy = 11. \end{cases}$

Замінивши $xy = a$, $x + y = b$, матимемо систему рівнянь $\begin{cases} ab = 30, \\ a + b = 11. \end{cases}$

Розв'яжемо її способом підстановки.

$$\begin{cases} ab = 30, \\ a = 11 - b; \end{cases} \quad \begin{cases} (11 - b)b = 30, \\ a = 11 - b; \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 - 11b + 30 = 0, \\ a = 11 - b. \end{cases}$$

Корені першого рівняння $b_1 = 5$, $b_2 = 6$. Тоді $a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_2 = 11 - 6 = 5$.

Маємо дві системи рівнянь: $\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5 \end{cases}$ і $\begin{cases} xy = 5, \\ x + y = 6. \end{cases}$

Розв'язавши обидві системи, одержимо розв'язки заданої системи:

$$(3; 2), (2; 3), (5; 1), (1; 5).$$

б) Виділимо повний квадрат двочлена в першому рівнянні системи:

$$\begin{cases} (x-2)^2 - 4 + (x-2y)^2 = 1, \\ (x-2)^2 + 2y - x = 3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (x-2)^2 + (x-2y)^2 = 5, \\ (x-2)^2 - (x-2y) = 3. \end{cases}$$

Уведемо нові змінні: $a = x - 2$, $b = x - 2y$. Тоді задана система матиме такий вигляд:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a^2 - b = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Якщо від першого рівняння відняти друге, то одержимо квадратне рівняння з однією змінною $b^2 + b = 2$, яке має корені $b_1 = -2$ і $b_2 = 1$.

Підставимо ці значення b у систему $(*)$ і знайдемо відповідні значення змінної a .

Якщо $b = -2$, то $a^2 + 2 = 3$, звідси $a^2 = 1$, тоді $a_1 = -1$ або $a_2 = 1$.

Якщо $b = 1$, то $a^2 - 1 = 3$, звідси $a^2 = 4$, тоді $a_1 = -2$ або $a_2 = 2$.

Отже, розв'язками системи рівнянь $(*)$ є такі пари чисел:

$$(-1; -2), (1; -2), (-2; 1), (2; 1).$$

Щоб знайти розв'язки заданої системи, потрібно перейти до змінних x і y та розв'язати (можна усно) відповідні системи:

$$\begin{cases} x-2 = -1, \\ x-2y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 = 1, \\ x-2y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 = -2, \\ x-2y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 = 2, \\ x-2y = 1. \end{cases}$$

Одержимо $(1; 1,5)$, $(3; 2,5)$, $(0; -0,5)$, $(4; 1,5)$.

Відповідь. а) $(3; 2)$, $(2; 3)$, $(5; 1)$, $(1; 5)$; б) $(1; 1,5)$, $(3; 2,5)$; $(0; -0,5)$, $(4; 1,5)$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклад рівняння другого степеня з двома змінними.
2. Що є розв'язком рівняння з двома змінними?
3. Що таке система двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
4. Назви основні способи розв'язування системи рівнянь другого степеня з двома змінними.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розв'яжи систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 - xy = 3, \\ xy - x^2 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$



Розв'язання. а) Додамо почленно дані рівняння системи, маємо рівняння $2x^2 = 72$, корені якого -6 і 6 . Підставивши будь-яке з цих значень у друге рівняння даної системи, матимемо $36 - y^2 = 11$, звідси $y^2 = 25$. Корені цього рівняння -5 і 5 . Отже, система має чотири розв'язки: $(-6; 5)$, $(-6; -5)$, $(6; 5)$ і $(6; -5)$.

б) Віднімемо почленно від першого рівняння друге:

$$y^2 - 2xy + x^2 = 1, \text{ або } (y - x)^2 = 1.$$

$$\text{Звідси } y - x = 1, \text{ або } y - x = -1.$$

$$\text{Отримаємо дві системи: } \begin{cases} y - x = 1, \\ xy - x^2 = 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y - x = -1, \\ xy - x^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з цих систем:

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ x(x + 1) - x^2 = 2; \end{cases} \begin{cases} y = x + 1, \\ x^2 + x - x^2 = 2; \end{cases} \begin{cases} y = x + 1, \\ x = 2; \end{cases} \begin{cases} y = 3, \\ x = 2. \end{cases}$$

$$\text{Аналогічно } \begin{cases} y = x - 1, \\ x(x - 1) - x^2 = 2; \end{cases} \begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - x - x^2 = 2; \end{cases} \begin{cases} y = x - 1, \\ x = -2; \end{cases} \begin{cases} y = -3, \\ x = -2. \end{cases}$$

Отже, система має два розв'язки: $(2; 3)$, $(-2; -3)$.

в) Розглянемо перше рівняння системи $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$. Зробимо заміну

$$\frac{x}{y} = t \text{ і отримаємо рівняння } t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}, \text{ або } 2t^2 - 5t + 2 = 0, \text{ звідси } t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Якщо $\frac{x}{y} = 2$, то $x = 2y$. Якщо $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, то $y = 2x$. Отже, отримаємо дві

$$\text{системи рівнянь: } \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases} \text{ Розв'яжемо кожну з}$$

цих систем:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 - y^2 = 3; \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ 3y^2 = 3; \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Отже, ця система рівнянь має два розв'язки $(2; 1)$, $(-2; -1)$.

$$\text{Розв'яжемо другу систему: } \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases} \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - 4x^2 = 3; \end{cases} \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 = -1. \end{cases}$$

Друге рівняння системи розв'язків не має, а, значить, і вся система розв'язків не має.

Відповідь. а) $(-6; 5)$, $(-6; -5)$, $(6; 5)$, $(6; -5)$; б) $(2; 3)$, $(-2; -3)$;

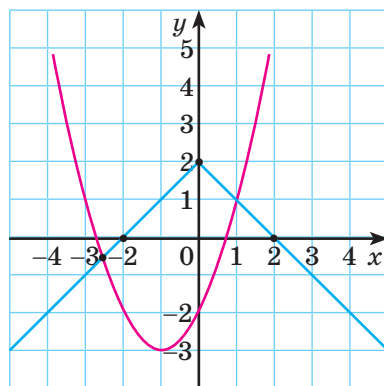
в) $(2; 1)$, $(-2; -1)$.

2. Чи має розв'язки система рівнянь.

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2, \\ y = 2 - |x| \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь. Ці графіки перетинаються у двох точках (мал. 13.3). Отже, система рівнянь має два розв'язки.

Відповідь. Система рівнянь має два розв'язки.



Мал. 13.3



ВИКОНАЙ УСНО

657. Яка фігура є графіком рівняння:

а) $y = x^2$; б) $x^2 + y^2 = 4$; в) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; г) $y^2 = x$

658. Яка з пар чисел не є розв'язком рівняння $x^2 - 3x = y$?

А (0; 0) Б (3; 0) В (0; 3) Г (-1; 4)

659. Чому не має розв'язків рівняння:

а) $x^2 + y^2 + 4 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 2xy - 3$

660. Яка пара чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ 2xy + y = 3 \end{cases}$?

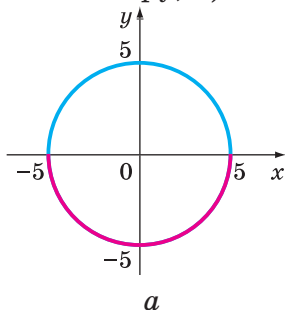
А (0; 2) Б (1; 1) В (-1; 1) Г (-2; 0)

661. Чому не має розв'язків система рівнянь:

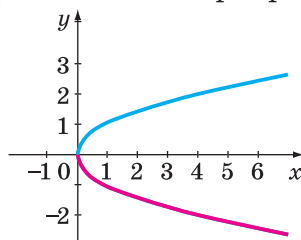
а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 7 = 0, \\ 3xy - y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 4? \end{cases}$

662. Гра. Один із гравців / одна із гравчинь складає систему рівнянь другого степеня, яка не має розв'язків, а другий / друга перевіряє. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

663. Яке рівняння відповідає графіку (мал. 13.4): а) синього кольору; б) рожевого кольору; в) синього і рожевого кольорів разом?



а



б

Мал. 13.4

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Розв'яжи графічно систему рівнянь (664–667).

664. а) $\begin{cases} y + x = 1, \\ y + x^2 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8y = x^2, \\ y - \sqrt{x} = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 6, \\ y = 1,5x. \end{cases}$

665. а) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x - y = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4y = x^2, \\ y = \sqrt{x} + 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 4, \\ x - y = 0. \end{cases}$

666. а) $\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy - 8 = 0, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

667. а) $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ y = 2 - x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2, \\ xy = -8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = 1 - x^2. \end{cases}$

668. Розв'яжи систему рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy - y^2 = 4, \\ y - x = -2. \end{cases}$

669. Solve the system of equations by substitution.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy + 2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - xy = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Розв'яжи систему рівнянь способом підстановки (670, 671).

670. а) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x - 2y^2 = -7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 2x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 19. \end{cases}$

671. а) $\begin{cases} x^2 + 2y = 27, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8x^2 - y^2 = 28, \\ 3x + y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = -10. \end{cases}$

Розв'яжи систему рівнянь способом алгебраїчного додавання (672, 673).

672. а) $\begin{cases} x + y - xy = -23, \\ x - y + xy = 49; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + xy = 5, \\ 2x^2 - 3xy = -10. \end{cases}$

Перевір відповідь за допомогою графічного способу у Desmos Calculator.

673. а) $\begin{cases} 2x + y = 3xy, \\ 2x - y = xy; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 34, \\ xz = 15. \end{cases}$

Перевір відповідь за допомогою графічного способу у Desmos Calculator.

Розв'яжи систему рівнянь (674, 675).

674. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 3y = 6, \\ x^2 - y^2 + x + 3y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ (x - y)(x + y) = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y^2 - xy = 6, \\ 3y^2 + 4xy = -17. \end{cases}$

675. а) $\begin{cases} x + y = 5xy, \\ x - y = xy; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy = 2, \\ y^2 - xy = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

676. **ЗНО** Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 9 = x + 1, \\ |x - 1| + 2y + 7 = 0. \end{cases}$

Якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи, то $x_0 + y_0 = \dots$

А -5 Б -2 В -10 Г -0,5 Д 10,5

677. **ЗНО** Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} xy = -12, \\ x(2y - 1) = -18. \end{cases}$

Якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи, то $x_0 = \dots$

А -6 Б -16 В -9 Г 2 Д 6

678. **Задачі Діофанта.** Розв'яжи системи рівнянь.

а) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 68; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 - y^2 = 80. \end{cases}$

679. **Задачі Іоанна Палермського.** Розв'яжи системи рівнянь.

а) $\begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy - x = 40, \\ x - y = 2. \end{cases}$

680. **Задачі Леонардо Фібоначчі.** Розв'яжи системи рівнянь.

а) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x(x - y) = 24y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 = 32y. \end{cases}$

681. Склади системи, аналогічні задачам 678–680, та розв'яжи їх.



Діофант
Александрійський

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Розв'яжи графічно систему рівнянь (а, б) і відкриту систему рівнянь (в) (682, 683).

682. а) $\begin{cases} y = 6x - x^2 - 7, \\ y = |x| - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1, \\ y = \frac{3}{x} + 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^2 + \Delta + \square, \\ y = \square. \end{cases}$



$$\text{683. а) } \begin{cases} y = \sqrt{x-4}, \\ 3y - x + 2 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = 2 + 2x - x^2, \\ y = 2 - |x|; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \Delta + * = 0, \\ x^2 + y = \square. \end{cases}$$

Установи графічно кількість розв'язків системи рівнянь (684, 685).

$$\text{684. а) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ |x| - y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ y = \sqrt{x+3}; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \Delta + * = 6, \\ xy = \square. \end{cases}$$

$$\text{685. а) } \begin{cases} y = 1 - 2x - x^2, \\ |x+2| - y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = 3; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \Delta - y = 0, \\ y - \square = 0. \end{cases}$$

Розв'яжи систему рівнянь (686–691).

$$\text{686. а) } \begin{cases} x^2 - 4y^2 = -7, \\ x - 2y = -1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x + y = 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 12, \\ x^3 + y^3 = 72. \end{cases}$$

$$\text{687. а) } \begin{cases} 9x^2 - y^2 = 27, \\ 3x + y = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2y - xy^2 = 6, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 109, \\ x^3 - y^3 = 218. \end{cases}$$

$$\text{688. а) } \begin{cases} x^2 - xy = 3, 36, \\ 3x + y = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - y = 13, \\ 2x^2 - xy = 21; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x-8)(x-3) = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

$$\text{689. а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ 3x + y = -4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 3y = -2, \\ 5xy + y^2 = 44; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ x(y+1) = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x - y = -3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

$$\text{690. а) } \begin{cases} xy - x - y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 13, \\ 2x^2 + y^2 = 6; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3, \\ x + y^2 = 2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = 4, \\ y^2 - x^2 + 4x = 4. \end{cases}$$

691. а) $\begin{cases} x - y + xy = 7 \\ x + y - xy = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2, \\ 2x^2 + y^2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6, \\ y^2 + 4x = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y^2 - 4x^2 - 4x = 1, \\ 4x^2 + y^2 + 3xy = 1. \end{cases}$

692. **ЗНО** Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} x - \frac{3}{y} = 3, \\ x + \frac{1}{y} = 11. \end{cases}$

Якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи, то $x_0 + y_0 = \dots$

А 5

Б -2,5

В 6,5

Г 9,5

Д 9

693. **ЗНО** Скільки всього розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = -4, \\ x^2 + y^2 = 4? \end{cases}$

А жодного

Б один

В два

Г три

Д більше трьох

Розв'яжи системи рівнянь з праць відомих авторів (694, 695).

694. **З** «Книги абака» (1202 р.) Леонардо Фібоначчі:



а) $\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{xy}{x - y} = 4\frac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \left(\frac{x}{y} + 10\right)\left(\frac{y}{x} + 10\right) = 122\frac{2}{3}. \end{cases}$

695. **З** «Алгебри» аль-Хорезмі (IX ст.):

а) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 = 4xy; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6}. \end{cases}$

«Любов до науки спонукала мене скласти коротку книгу про обчислення алгебри й алмукабали, бо це необхідно людям при поділі спадщин, складанні заповітів, поділі майна і в судових справах, у торгівлі й усіляких угодах, а також, коли міряють землю, прокладають канали...»



Аль-Хорезмі

Аль-Хорезмі

Розв'яжи систему рівнянь способом заміни змінних (696–699).

696. а) $\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ x + y + 3xy = -35; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 y^2 + xy = 72, \\ x + y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 y^3 = -8, \\ x^3 + y^3 = -7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$

697. а) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + y^2x = 30; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) = 45, \\ (x-y)^2 - 2(x+y) = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3y^3 = 27, \\ x^3 - y^3 = 26; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6. \end{cases}$

698. а) $\begin{cases} 2xy - 3\frac{x}{y} = 15, \\ xy + \frac{x}{y} = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{26}{5}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x\left(1 + \frac{x}{y}\right) = 1,5, \\ y\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 6. \end{cases}$

699. а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \\ x + y - xy = -32; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 26, \\ xy - \frac{y}{x} = 26. \end{cases}$

Знайди числа a і b , якщо (700, 701):

700. а) $3a + 4b = 8ab = 8;$
 б) $a^2 + ab - 5 = b^2 + ab = 10;$
 в) $a^2 + b - 2a = a + b = -1.$

701. а) $a^2 - 0,5b = a - b = 1;$
 б) $a^2 + b^2 - 6b = 2a + b = 0;$
 в) $3(a - 2)(b + 1) = a - b = 3.$

702. Знайди відстань між точками перетину:

а) прямої і кола, рівняння яких $x - y = 7$ і $x^2 + y^2 = 169;$
 б) кіл, рівняння яких $x^2 + y^2 = 25$ і $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1.$

Побудуй відповідні графіки і перевір безпосереднім вимірюванням або візуально, чи правильно виконане завдання. Склади і розв'яжи аналогічну задачу про гіперболу.

Скільки розв'язків залежно від значень параметра a має система рівнянь (703, 704)?

703. а) $\begin{cases} y = |x|, \\ y = a - x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (y - x)^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

704. а) $\begin{cases} y = -|x|, \\ y = x^2 + a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a + |x|; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (y - x)^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

705. **ЗНО** Знайди найбільше ціле значення параметра a , при якому система рівнянь $\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має два розв'язки.

706. **ЗНО** Знайди найбільше значення параметра a , при якому система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



707. Розв'яжи систему рівнянь.

а) $\begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5, \\ |x+1| = 4y-4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = |-x^2 + 2x|, \\ x + y = 6. \end{cases}$

708. 1) Швидкість світла дорівнює $3 \cdot 10^5$ км/с. Яку відстань світло проходить за: а) 5 с; б) 1 год; в) 1 рік?

2) Швидкість звуку в повітрі наближено дорівнює 343 м/с. Яку відстань звук проходить за: а) 5 с; б) 15 с; в) 0,5 хв?

3) Ти побачив / побачила спалах блискавки, а через 10 с почув / почувла гуркіт грому. Як знайти відстань до блискавки? Чи на безпечній відстані від блискавки ти перебуваєш за цих умов?

Зверни увагу! Блискавка дуже швидко рухається і здатна уражати людей, що перебувають від неї на відстані 15 км.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

709. Установи відповідність між парами функцій $f(x)$ і $g(x)$ (1–3) та відстанню між точками (А–Д), у яких перетинаються графіки цих функцій.

1 $f(x) = 5 - x$ і $g(x) = 4/x$

А $2\sqrt{17}$

2 $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 0,25(x + 3)$

Б $\sqrt{2}$

3 $f(x) = x^2 - 2x$ і $g(x) = -x^2 + 6x - 6$

В $3\sqrt{2}$

Г $5\sqrt{3}$

Д $2\sqrt{5}$

710. Знайди суму і різницю дробів.

а) $\frac{1}{2x^2 + 5x - 3}$ і $\frac{1}{2x^2 - 7x + 3}$;

б) $\frac{2}{6a^2 - 13a + 6}$ і $\frac{1}{3a^2 - 11a + 6}$.

711. Скороти дріб.

а) $\frac{2a^2 - 5a + 2}{3a^2 - 3,5a + 1}$;

б) $\frac{x^2 - 3}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}$;

в) $\frac{c^2 + \sqrt{5}c - 10}{c^2 - 3\sqrt{5}c + 10}$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

Розумію, що таке система двох рівнянь другого степеня з двома змінними і що є її розв'язком. Можу навести приклад.

$$\text{Система } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1 \end{cases} \text{ має розв'язки } (1; 1) \text{ і } (-1; -1).$$

- ✓ Знаю основні способи розв'язування системи рівнянь другого степеня з двома змінними:

Підстановка

Алгебраїчне
додавання

Графічний

Заміна змінних

- ✓ Знаю, скільки розв'язків може мати система двох рівнянь другого степеня з двома змінними.
 ✓ Умію знаходити розв'язки систем двох рівнянь другого степеня з двома змінними.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке прикладна задача;
- що таке математична модель;
- основні етапи розв'язування задач складанням рівнянь:
 - 1) вибрати невідоме і позначити його буквою;
 - 2) за допомогою цієї букви виразити всі інші невідомі й залежності;
 - 3) скласти рівняння;
 - 4) розв'язати рівняння;
 - 5) перевірити, чи відповідає одержаний розв'язок умові задачі.

§ 14. Розв'язування задач
складанням систем рівнянь

КЛЮЧОВІ СЛОВА

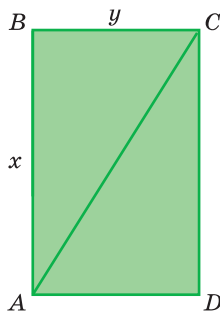
- розв'язування задач — *solving problems*

В алгебраїчних задачах найчастіше вимагається що-небудь обчислити, довести, перетворити, дослідити. Якщо, розв'язуючи задачу, як моделі використовують алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності, системи рівнянь, то говорять про алгебраїчні методи.

Задача 1. Знайди сторони прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см, а периметр на 18 см більший.

Розв'язання. Позначимо довжини шуканих сторін прямокутника x см і y см (мал. 14.1). Тоді квадрат його діагоналі дорівнює $x^2 + y^2$, а півпериметр становить $x + y$. Оскільки діагональ дорівнює 10 см, а периметр — 28 см, то маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14. \end{cases}$$



Мал. 14.1

Розв'яжемо її. З другого рівняння знайдемо y і підставимо його значення в перше рівняння. Маємо:

$$\begin{aligned} y &= 14 - x \text{ і } x^2 + (14 - x)^2 = 100, \\ x^2 + 196 - 28x + x^2 &= 100, \text{ або } 2x^2 - 28x + 96 = 0, \text{ звідси} \\ x^2 - 14x + 48 &= 0. \end{aligned}$$

Корені останнього рівняння: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$. Якщо $x = 8$, то $y = 6$; якщо $x = 6$, то $y = 8$.

Отже, сторони прямокутника 8 см і 6 см.

Відповідь. 8 см і 6 см.

Задача 2. Один велосипедист їде зі швидкістю на 2 км/год більшою, ніж другий, тому відстань 28 км він долає на 20 хв швидше, ніж другий. Знайди швидкості обох велосипедистів.

Розв'язання. Нехай швидкості велосипедистів (u кілометрів за годину) дорівнюють u і v . Швидкість першого більша на 2, тому маємо рівняння: $u - v = 2$.

Оскільки відстань 28 км перший велосипедист долав за $\frac{28}{u}$, а другий — за $\frac{28}{v}$ год, і час першого на 20 хв, або на $\frac{1}{3}$ год, менший, то маємо друге рівняння:

$$\frac{28}{v} - \frac{28}{u} = \frac{1}{3}, \text{ звідси } \frac{28u - 28v}{uv} = \frac{1}{3} \text{ або } 84(u - v) = uv.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ 84(u - v) = uv; \end{cases} \quad \begin{cases} u - v = 2, \\ 168 = uv; \end{cases} \quad \begin{cases} v = u - 2, \\ u(u - 2) = 168; \end{cases} \quad \begin{cases} v = u - 2, \\ u^2 - 2u - 168 = 0. \end{cases}$$

Корені одержаного квадратного рівняння: $u_1 = 14$, $u_2 = -12$. Значення -12 умову задачі не задовольняє. Тоді $u = 14$, а $v = 14 - 2 = 12$. Отже, швидкості велосипедистів 14 км/год і 12 км/год.

Відповідь. 14 км/год і 12 км/год.

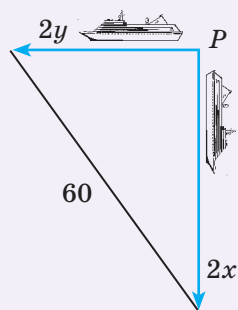
ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

При розв'язуванні задач з параметрами відповіді одержують у вигляді виразів зі змінними. Повне розв'язання такої задачі вимагає дослідження: треба вказати, за яких значень параметрів задача має розв'язки і скільки.

Задача. З порту одночасно вийшли два теплоходи: один на південь, другий — на захід. Через 2 год відстань між ними дорівнювала 60 км. Знайди швидкості теплоходів, якщо швидкість першого на a км/год більша за швидкість другого.

Розв'язання. Нехай швидкості теплоходів дорівнюють відповідно x км/год і y км/год. За 2 год вони пройшли (у напрямках, перпендикулярних один до одного) відповідно $2x$ і $2y$ км (мал. 14.2). За теоремою Піфагора, $4x^2 + 4y^2 = 60^2$, або $x^2 + y^2 = 900$. Крім того, $x - y = a$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 900, \\ x - y = a. \end{cases}$$



Мал. 14.2

Розв'яжемо її.

$$\begin{cases} x = y + a, \\ (y + a)^2 + y^2 = 900; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + a, \\ y^2 + 2ay + a^2 + y^2 = 900; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + a, \\ 2y^2 + 2ay + a^2 - 900 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо останнє квадратне рівняння відносно y :

$$D = 4a^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 900) = 4a^2 - 8a^2 + 7200 = 7200 - 4a^2 = 4(1800 - a^2)$$

$$y_{1,2} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{1800 - a^2}}{4} = \frac{-a \pm \sqrt{1800 - a^2}}{2}.$$

За умовою задачі, a і y мають бути додатними, тому можливий лише один випадок: $y = \frac{\sqrt{1800 - a^2} - a}{2}$.

При цьому мають виконуватися умови:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1800 - a^2 \geq 0, \\ \sqrt{1800 - a^2} > a, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a > 0, \\ -30\sqrt{2} \leq a \leq 30\sqrt{2}, \\ -30 < a < 30. \end{cases} \quad \text{звідси } 0 < a < 30.$$

Отже, задачу задовольняє тільки одне значення змінної y :

$$y = \frac{\sqrt{1800 - a^2} - a}{2}, \quad \text{якщо } 0 < a < 30.$$

$$\text{Тоді } x = y + a = \frac{\sqrt{1800 - a^2} - a}{2} + a = \frac{\sqrt{1800 - a^2} - a + 2a}{2} = \frac{\sqrt{1800 - a^2} + a}{2}.$$

Відповідь. Якщо $0 < a < 30$, то швидкості теплоходів $\frac{\sqrt{1800 - a^2} + a}{2}$ км/год і $\frac{\sqrt{1800 - a^2} - a}{2}$ км/год. Якщо $a \leq 0$ або $a \geq 30$, то задача розв'язків не має.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Квадратна нерівність. Урок 2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які бувають задачі?
2. Що може бути моделлю до задачі?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму його цифр і в 3 рази — за їх добуток.

Розв'язання. Позначимо цифри десятків і одиниць буквами x і y . Тоді шукане число дорівнює $10x + y$. Оскільки воно в 4 рази більше за суму цифр, то $10x + y = 4(x + y)$, звідси $10x + y = 4x + 4y$, тоді $6x = 3y$, або $2x = y$.

Число $10x + y$ втричі більше за добуток цифр, тому $10x + y = 3xy$. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x = y, \\ 10x + y = 3xy; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = y, \\ 10x + 2x = 3x \cdot 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = y, \\ 12x - 6x^2 = 0. \end{cases} \quad \text{Звідси } x = 0, \text{ або } x = 2.$$

Перша цифра двоцифрового числа — не 0. Тому $x = 2$, а $y = 2x = 4$. Шукане число 24.

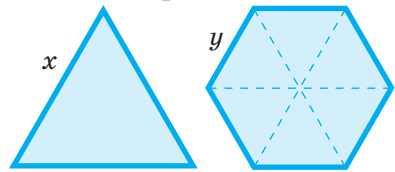
Перевірка. $24 = 4(2 + 4)$ і $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$.

Примітка. Оскільки тут x і y — натуральні числа, то, з'ясувавши, що $y = 2x$, далі можна не розв'язувати систему, а випробувати числа 12, 24, 36 і 48. З них задачу задовольняє тільки число 24.

Відповідь. Число 24.

2. Периметри правильного трикутника і правильного шестикутника рівні, а сума їх площ дорівнює $\sqrt{3}$ м². Знайди сторони цих многокутників.

Розв'язання. Нехай шукані сторони трикутника і шестикутника дорівнюють x і y (мал. 14.3). Оскільки периметри фігур рівні, то $3x = 6y$, звідси $x = 2y$.



Мал. 14.3

Площа правильного трикутника зі стороною x дорівнює $\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$.

Правильний шестикутник складається з шести правильних трикутників зі стороною y , тому його площа дорівнює $6 \cdot \frac{y^2 \sqrt{3}}{4}$. Маємо:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{y^2 \cdot 6\sqrt{3}}{4} = 10\sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 + 6y^2 = 40. \end{cases}$$

Підставимо в друге її рівняння значення $x = 2y$. Маємо рівняння $10y^2 = 40$, звідси $y^2 = 4$, а $y = 2$. Тоді $x = 4$.

Отже, сторона трикутника 4 м, а сторона шестикутника 2 м.

Відповідь. 4 м і 2 м.

ВИКОНАЙ УСНО



- 712. Відкрита задача.** Склади задачу, математичною моделлю якої була б система рівнянь:

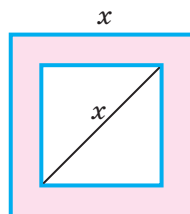
а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 40; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

- 713.** Склади кілька різних моделей для задачі: «Знайди два числа, сума яких дорівнює 15, а добуток — 56».

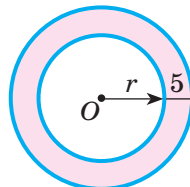
ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



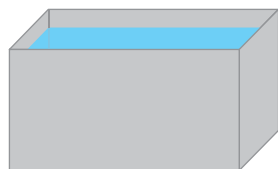
- 714.** Знайди два числа, сума яких дорівнює 21, а добуток становить 90.
- 715.** Знайди два числа, різниця яких дорівнює 1,1, а добуток — 0,6.
- 716.** Знайди два числа, сума яких дорівнює 31, а сума їх квадратів — 625.
- 717.** Середнє геометричне двох чисел дорівнює 3. Знайдіть ці числа, якщо одне з них більше від другого на 9,1.
- 718.** Периметр прямокутного трикутника дорівнює 90 см, а гіпотенуза — 41 см. Знайди катети трикутника.
- 719.** Знайди два числа, якщо:
а) їх різниця дорівнює 2, а різниця квадратів — 88;
б) їх півсума дорівнює 9,5, а сума квадратів — 185.
- 720.** Знайди катети прямокутного трикутника, у якого:
а) гіпотенуза дорівнює 13 дм, а площа — 30 дм²;
б) периметр дорівнює 30 см, а сума катетів — 17 см.
- 721.** Знайди сторони прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 м, а площа — 48 м².
- 722.** Внутрішній і зовнішній контури рамки — квадрати. Сторона одного з них дорівнює діагоналі другого (мал. 14.4). Знайди сторони цих квадратів, якщо площа рамки дорівнює 32 см².
- 723.** Знайди внутрішній і зовнішній радіуси кільця, якщо їх різниця дорівнює 5 см, а площа кільця — 125π см² (мал. 14.5).
- 724.** Знайдіть довжини ребер бака у формі прямокутного паралелепіпеда, якщо довжина одного з ребер, площа поверхні й об'єм паралелепіпеда дорівнюють відповідно 8 дм, 158 дм² і 120 дм³.



Мал. 14.4



Мал. 14.5



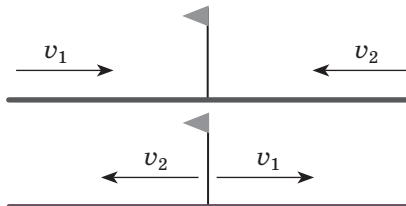
- 725.** *Задача Луки Пачіоло.* Сума квадратів двох чисел дорівнює 20, а добуток — 8. Знайди ці числа.
- 726.** Чисельник звичайного нескоротного дробу на 3 менший від знаменника, а якщо до обох його членів додати по 10, то значення дробу збільшиться вдвічі. Який це дріб?



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

- 727.** Два автомати виготовляють однакові деталі, причому перший автомат за одну годину виробляє на 2 деталі менше, ніж другий. Скільки деталей виготовляє кожен автомат за одну годину, якщо другий 156 деталей виготовляє на 2 год швидше, ніж перший 150 деталей.
- 728.** Two teams manufactured identical parts, with the first team producing 9 more parts per day than the second. How many parts did each team produce per day, if the first team needed three days less to produce 588 parts than the second team needed to produce 600 parts?

- 729.** Автомобіль і автобус виїхали одночасно з пунктів A і B , відстань між якими 280 км, назустріч один одному і зустрілися через дві години. Не зупиняючись, вони продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Знайдіть швидкість автомобіля і швидкість автобуса, якщо автобус прибув у пункт A на 1 год 10 хв пізніше, ніж автомобіль у пункт B .



- 730.** Два велосипедисти виїхали одночасно з пунктів A і B , відстань між якими 27 км, назустріч один одному і зустрілися через одну годину. Не зупиняючись, вони продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Знайди швидкість кожного велосипедиста, якщо один із них прибув у пункт A на 27 хв раніше, ніж другий у пункт B .
- 731.** З одного міста в інше, відстань між якими 360 км, одночасно виїхали два автомобілі. Через дві години з'ясувалося, що перший із них проїхав на 20 км більше, ніж другий. Знайди швидкість кожного автомобіля, якщо перший прибув у пункт призначення на 30 хв раніше, ніж другий.
- 732.** Два велосипедиста виїхали одночасно з міста A у місто B , відстань між якими 90 км. Перший велосипедист прибув до пункту B на 1 год раніше, ніж другий. Знайди швидкість кожного велосипедиста, якщо перший за 3 год проїжджає на 24 км більше, ніж другий за 2 год.
- 733.** Катер пройшов за 9 год 100 км за течією річки і 64 км — проти течії. Іншим разом за такий самий час він пройшов 80 км за течією

і 80 км — проти течії. Знайди власну швидкість катера і швидкість течії річки.

- 734.** Човен пройшов 54 км за течією річки і 24 км проти течії за 5 год. Знайди власну швидкість човна і швидкість течії, якщо 36 км за течією він проходить на 1 год швидше, ніж 36 км проти течії.

- 735.** Один комбайнер може зібрати врожай пшениці з ділянки на 24 год швидше, ніж другий. Якщо комбайнери працюватимуть разом, то можуть завершити роботу за 35 год. За який час кожний комбайнер може зібрати весь урожай?

	A	t	P
I			
II			
Разом			

- 736.** Двоє робітників, працюючи разом, можуть виконати деяке виробниче завдання за 12 днів. Якщо спочатку один з них виконає половину всієї роботи, а потім його змінить другий, то все завдання буде виконано за 25 днів. За скільки днів кожен з робітників може виконати це завдання, працюючи самостійно?
- 737.** Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати деяке виробниче завдання за 4 дні. Якщо спочатку перша бригада, працюючи самостійно, виконає третину завдання, а потім її змінить друга бригада, то все завдання буде виконано за 10 днів. За скільки днів кожна з бригад може виконати це завдання, працюючи самостійно?
- 738.** У басейн проведено дві труби. Якщо одночасно відкрити дві труби, то басейн буде наповнено водою за 6 год. Якщо спочатку 2 год працюватиме тільки перша труба, а потім 3 год тільки друга труба, то водою буде наповнена 0,4 басейну. За скільки годин може наповнити басейн водою кожна труба, працюючи самостійно?
- 739.** У басейн проведено дві труби. Якщо одночасно відкрити дві труби, то басейн буде наповнено водою за 8 год. Якщо спочатку 2 год працюватиме тільки перша труба, а потім 4 год тільки друга труба, то водою буде наповнена третина басейну. За скільки годин може наповнити басейн водою кожна труба, працюючи самостійно?
- 740.** Поїзд мав би проїхати шлях від станції A до станції B за 4 год. Однак на відстані 150 км від A його було затримано на 20 хв. Щоб прибути до B за розкладом, він пройшов решту шляху зі швидкістю, більшою від початкової на 15 км/год. Знайди відстань від A до B .
- 741.** Мотоцикліст проїхав відстань від села до міста за 5 год. Повертаючись у село, він перші 36 км їхав з тією самою швидкістю, а решту (більшу частину шляху) — зі швидкістю, на 3 км/год більшою. Тому на зворотний шлях він затратив на 15 хв менше. З якою швидкістю мотоцикліст їхав до міста?
- 742.** Шлях між селами A і B складається з підйому і спуску. Велосипедист, рухаючись на спуску зі швидкістю на 6 км/год більшою,

ніж на підйомі, шлях від A до B долає за 2 год 40 хв, а від B до A — на 20 хв швидше. Знайди швидкості велосипедиста на підйомі й спуску та довжину підйому від A до B , якщо відстань від A до B дорівнює 36 км.

743. Від пристані A за течією річки відійшов пліт. Через 3 год від пристані B , віддаленої від A на 60 км, відійшов теплохід, який прибув до A через 1 год після зустрічі з плотом. Визнач швидкість течії, якщо швидкість теплохода в стоячій воді дорівнює 24 км/год.

744. Із села в місто, відстань між якими 20 км, виїхав велосипедист, а через 15 хв слідом за ним другий. Наздогнавши першого, другий велосипедист повернувся назад і прибув до села за 45 хв до прибуття першого велосипедиста в місто. Знайди швидкість першого велосипедиста, якщо другий їхав зі швидкістю 15 км/год.

745. З пункту A одночасно і в одному напрямку виїхали два велосипедисти зі швидкостями 18 км/год і 24 км/год. Через 1 год слідом за ними виїхав автомобіль, який наздогнав спочатку одного велосипедиста, а через 10 хв — і другого. Знайди швидкість автомобіля.

746. З пункту A до B , відстань між якими 90 км, виїхав велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Через півгодини з A до B виїхав другий велосипедист зі швидкістю 15 км/год. Водночас з B у напрямку до A виїхав мотоцикліст, який спочатку зустрів першого велосипедиста, а через 2 хв — другого. Знайди швидкість мотоцикліста.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



747. Одна труба може наповнити басейн водою на 36 хв швидше, ніж друга. Якщо спочатку половину басейну наповнить одна труба, а потім половину басейну — друга, то він наповнюватиметься на півгодини довше, ніж одночасно обома трубами. За скільки хвилин може наповнити басейн водою кожна труба?

748. З *«Курсу математики»* (1813 р.) для французьких військових шкіл. Сума трьох сторін прямокутного трикутника дорівнює 156 м, площа — 1014 м^2 . Знайди його сторони.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

749. На столі в одному ряду лежать чотири фігури: трикутник, круг, шестикутник і ромб. Вони пофарбовані в різні кольори: червоний, синій, жовтий і зелений. Відомо, що праворуч від жовтої фігури лежить ромб; круг розташований праворуч від

трикутника і ромба; червона фігура лежить між синьою і зеленою; трикутник лежить не на краю столу; синя і жовта фігури не лежать поруч. Визнач, у якій послідовності розташовано фігури і якого вони кольору.

750. Побудуй графік функції $y = \frac{12}{x-3}$. Знайди координати точок перетину цього графіка з графіками рівнянь

$$3y - x + 3 = 0,$$

$$y - 3x + 9 = 0 \text{ і } x^2 - 6x + y^2 = 16.$$

751. Використовуючи результати задачі № 750, установи відповідність між абсцисами знайдених точок і відповідними їх ординатами, які подані в таблиці разом із буквами. Розташуй ординати (разом з відповідними буквами) у порядку спадання, і ти дізнаєшся назву міста, де розташований університет, у якому працював Микола Миколайович Боголюбов і на фасаді якого встановлено присвячену йому меморіальну дошку (мал. 14.6)

-6	6	-4	4	-3	3	-2	2
І	Н	В	Р	Ц	Е	І	Ч



Мал. 14.6

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Розумію, що система двох рівнянь другого степеня з двома змінними може бути математичною моделлю прикладних задач.
- ✓ Умію розв'язувати задачі складанням систем рівнянь.

Перейди за посиланнями та

- підсумуй головне в розділі <https://vse.ee/czrr>
- ознайомся з історичними відомостями <https://vse.ee/czrv>

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



ВАРІАНТ I

1. Знайди область визначення функції $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$.
2. Розв'яжи систему нерівностей
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 24 < 0, \\ 3x - 10 \geq 2. \end{cases}$$
3. Побудуй графік функції $y = x^2 - 2x - 3$. Користуючись графіком, вкажи область значень функції та проміжки зростання і спадання.
4. Площа прямокутника дорівнює 180 см^2 , а його периметр становить 54 см . Знайди сторони прямокутника.

ВАРІАНТ II

1. Знайди область визначення функції $y = \sqrt{4x^2 - 9x + 2}$.
2. Розв'яжи систему нерівностей
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ 2x - 7 < 5. \end{cases}$$
3. Побудуй графік функції $y = x^2 + 2x - 1$. Користуючись графіком, вкажи область значень функції та проміжки зростання і спадання.
4. Площа прямокутника дорівнює 216 см^2 , а його периметр — 60 см . Знайди сторони прямокутника.

ВАРІАНТ III

1. Знайди область визначення функції $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$.
2. Розв'яжи систему нерівностей
$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 < 0, \\ 5x - 6 \leq -1. \end{cases}$$
3. Побудуй графік функції $y = x^2 + 4x + 1$. Користуючись графіком, вкажи область значень функції та проміжки зростання і спадання.
4. Площа прямокутника дорівнює 108 см^2 , а його периметр — 42 см . Знайди сторони прямокутника.

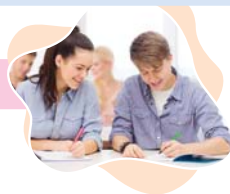
ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 3

1. Графіком якої функції є парабола, гілки якої напрямлені вниз?
А $y = -\sqrt{x+1}$ Б $y = x^2 - 2x$ В $y = 4 - x^2$ Г $y = 3 - 2x$
2. Функція $y = x^2 - 4x$ набуває додатних значень на проміжку:
А $(0; 4)$ Б $(-4; 0)$ В $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ Г $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$
3. Функція $y = x^2 + 4x - 2$ зростає на проміжку:
А $(2; +\infty)$ Б $(-6; +\infty)$ В $(-2; +\infty)$ Г $(10; +\infty)$
4. Вершиною параболи $y = 2x^2 - 8x + 1$ є точка:
А $(2; -7)$ Б $(-2; 33)$ В $(-2; 9)$ Г $(2; -11)$
5. Парабола — це графік функції:
А $y = \frac{2}{x}$ Б $y = x - 3x^2$ В $y = 2x$ Г $y = \sqrt{x}$
6. Розв'язком нерівності $x^2 + 2x - 3 > 0$ є проміжок:
А $(3; -1)$ Б $(-3; 1)$ В $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ Г $(-\infty; -1) \cup (-3; +\infty)$
7. Функція $y = -x^2 + 2x + 5$ набуває найбільшого значення, якщо:
А $x = 0$ Б $x = 1$ В $x = 2$ Г $x = -2$
8. Розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ є точка:
А $(-8; -2)$ Б $(8; 2)$ В $(4; 2)$ Г $(-2; 8)$
9. Областю значень функції $y = x^2 - 2$ є проміжок:
А $(-\infty; -2)$ Б $(2; \infty)$ В $(-\infty; 2]$ Г $[-2; +\infty)$
10. При яких значеннях b і c точка $A(2; -3)$ є вершиною параболи $y = x^2 + bx + c$?
А $b = 4, c = -15$ Б $b = 4, c = 1$ В $b = -4, c = 1$ Г $b = -4, c = -7$

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 3



1. Знайди абсцису вершини параболи $y = -3x^2 - 6x + 2$.
 А 2 Б 1 В -1 Г 5
2. Знайди область визначення функції $y = \sqrt{x^2 - 9}$.
 А $[3; +\infty)$ Б $[-3; +\infty)$ В $[-3; 3]$ Г $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$
3. У яких точках графік функції $y = x^2 - 7x$ перетинає вісь абсцис?
 А $(0; -7)$ Б $(0; 0)$ і $(0; 7)$ В $(0; 0)$ і $(7; 0)$ Г $(0; 0)$ і $(-7; 0)$
4. Установи відповідність між нерівністю $(1-3)$ та множиною її розв'язків (А-Д).

1 $x^2 - 4x + 4 > 0$

2 $x^2 - 4x + 4 < 0$

3 $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

А 2

Б $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

В $(-\infty; +\infty)$

Г $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

Д розв'язків немає

5. Побудуй графік функції $y = x^2 + 4x + 3$. Користуючись графіком, знайди: нулі функції, проміжки знакосталості, проміжки зростання та спадання функції, область значень функції.
6. Розв'яжи графічно систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$
7. Розв'яжи нерівність:
 а) $2x^2 - 9x - 5 < 0$; б) $3 - x - 4x^2 \leq 0$;
 в) $(2x - 5)(x + 2) - (2x - 1)(2x + 1) \geq 7 - 13x$.
8. Якщо з пункту А одночасно і в одному напрямку виїдуть велосипедист і мотоцикліст, то через годину відстань між ними буде 12 км. Знайди швидкість кожного з них, якщо у пункт В, який знаходиться на відстані 60 км від пункту А, велосипедист приїде на 1 год 20 хв пізніше, ніж мотоцикліст.

Додаткове завдання

9. За яких значень параметра c рівняння $x^2 + (c + 1)x + 3c - 5 = 0$ має два різних дійсних корені?

Розділ 3. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Йоганн Карл Фрідріх ҐАУСС (1777–1855) — німецький математик, астроном, фізик і геодезист. Один із найвеличніших і найвпливовіших математиків усіх часів. Характерними рисами досліджень Ґаусса є надзвичайна їх різнобічність і органічний зв'язок між теоретичною і прикладною математикою.



«Математика — цариця наук і арифметика — цариця математики».

К. Ф. Ґаусс

Премія Ґаусса (або приз Ґаусса)

Присуджується спільно Міжнародним математичним союзом і Німецьким математичним товариством раз на 4 роки на Міжнародному конгресі математиків за видатні досягнення в галузі прикладної математики.

Мета премії — заохочення математиків, які сприяють прогресу в нематематичних галузях, включаючи технології, бізнес і повсякденне життя.

Заснована 30 квітня 2002 року у день 225-ї річниці від дня народження Ґаусса.



Лауреати премії: Кійосі ІТО
Ів МЕЙЄР,
Стенлі ОШЕР

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

§ 15 **Послідовність**
Sequence

§ 17 **Геометрична прогресія**
Geometric Progression

§ 16 **Арифметична прогресія**
Arithmetic Progression

§ 18 **Задачі на обчислення сум**
Sums Calculation Problems

Послідовність — це множина будь-яких об'єктів, розташованих у певному порядку. Якщо членами послідовності є числа, її називають числовою послідовністю.

Вивчивши цей розділ, ти зможеш побачити красу математичних співвідношень у різних видах послідовностей і способах їх задання, у несподіваних залежностях і закономірностях, у незвичних фігурах і способах їх побудови тощо.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке функція та її область визначення;
- які функції називають зростаючими, а які — спадними;
- як знайти значення функції в точці;
- що таке натуральні числа.

Перші десять натуральних чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Найменше натуральне число 1.

Парні числа (діляться на 2 без остачі): 2, 4, 6, 8, 10, ...

Непарні числа: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

§ 15. Послідовність

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- числова послідовність — *number sequence*
- зростаюча послідовність — *increasing (ascending) sequence*
- спадна послідовність — *decreasing (descending) sequence*
- член послідовності — *sequence term*

Певна послідовність подій чи явищ, порядок розташування предметів, звуків, кольорів тощо — це послідовність. Згадай, як розташовані фігури на шахівниці (мал. 15.1, а) і ноти на нотному стані (мал. 15.1, б). Можна говорити і про послідовності місяців у році, днів у тижні, букв у слові, прізвищ у списку, вагонів у поїзді, станцій на залізниці тощо.



а



До ре мі фа соль ля сі до

б

Мал. 15.1

Пальці руки людини також розташовані у певній послідовності: великий, вказівний, середній, підмізинний, мізинний. І штрихи на штрих-кодів, що є на обкладинці цього підручника, нанесено у певній послідовності. Що вони означають? Навіщо вони?

Розширити відомості про послідовності в математиці та ознайомитися з їх властивостями тобі допоможе цей параграф.

Уявімо, що підряд виписано всі парні натуральні числа:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

Це **послідовність** парних натуральних чисел. Число 2 — її перший член, 4 — другий, 6 — третій, 20 — десятий і т. д.

Наведемо ще кілька прикладів числових послідовностей:

1, 2, 3, 4, 5, ... — послідовність натуральних чисел;

1, 3, 5, 7, 9, ... — послідовність непарних натуральних чисел;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ — послідовність чисел, обернених до натуральних.

Послідовності бувають **скінченні** та **нескінченні**. Скінченною, наприклад, є послідовність одноцифрових натуральних чисел:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Послідовність усіх натуральних чисел нескінченна. Записуючи нескінченну послідовність, після кількох її перших членів ставлять три крапки.

Перший, другий, третій члени послідовності парних натуральних чисел дорівнюють відповідно 2, 4, 6. Пишуть: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. А чому дорівнює її n -й член a_n ? Оскільки кожний член послідовності парних натуральних чисел удвоє більший від свого порядкового номера, то її n -й член дорівнює $2n$, тобто

$$a_n = 2n.$$

Це формула n -го члена послідовності **парних натуральних чисел**.

Формула n -го члена послідовності **непарних натуральних чисел**:

$$a_n = 2n - 1.$$

Ця формула схожа на формулу $y = 2x - 1$, яка задає лінійну функцію. Тільки в останній аргумент x може бути будь-яким дійсним числом, а у формулі $a_n = 2n - 1$ змінна n може набувати тільки натуральних значень.

Кожний член послідовності відповідає деякому натуральному числу — порядковому номеру члена послідовності. Тому **числова послідовність — функція, задана на множині всіх натуральних чисел або на множині перших n натуральних чисел**. Якщо функцію задано на множині всіх натуральних чисел, то маємо нескінченну числову послідовність; якщо функцію задано на множині перших n натуральних чисел, то вона є скінченною послідовністю, кількість членів якої дорівнює n .

Якщо відома формула n -го члена послідовності, то нескладно обчислити будь-який її член. Напишемо кілька перших членів послідовності, n -й член якої $a_n = n^2 + 2$. Надаючи змінній n значення 1, 2, 3, 4, 5, ..., одержимо перші члени послідовності:

$$3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \dots$$

Тисячний член цієї послідовності:

$$a_{1000} = 1000^2 + 2 = 1\,000\,002.$$

Набагато важче розв'язувати обернену задачу — для даної послідовності знайти її n -й член. Наприклад, формула n -го члена послідовності простих чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... невідома й досі, хоча математики шукали її понад 2000 років.

Кілька перших членів послідовності не задають її однозначно. Наприклад, існує безліч різних послідовностей, перші члени яких 2, 4, 6, 8. Зокрема, такі перші члени мають послідовності, n -ні члени яких

$$a_n = 2n \text{ і } c_n = 2n + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4).$$

Із двох сусідніх членів a_i і a_{i+1} послідовності член a_{i+1} називають наступним за a_i , а a_i — попереднім відносно a_{i+1} .

Послідовність називають зростаючою, якщо кожний її член, починаючи з другого, більший за попередній. Послідовність називають спадною, якщо кожний її член, починаючи з другого, менший від попереднього.

Зауваження. Іноді розглядають також послідовності, членами яких є різні вирази, функції, фігури тощо. Далі говоритимемо тільки про *числові послідовності*, хоч і називатимемо їх коротко *послідовностями*.

Числові послідовності часто задають *рекурентними* формулами (від латинського слова *recurrentis* — той, що повертається). Формулу називають рекурентною, якщо вона показує, як виражається будь-який член послідовності через кілька попередніх її членів.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Наприклад, рекурентною є формула $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, яка засвідчує, що кожний член послідовності (починаючи з третього) дорівнює сумі двох членів, що йому передують. Одна така формула послідовності не визначає, бо невідомі її два перших члени. Якщо крім формули вказати і два перших члени, то послідовність можна вважати цілком заданою.

Задамо рекурентною формулою послідовність, перший і другий члени якої — одиниці, а кожний наступний дорівнює сумі двох попередніх. Цю послідовність можна задати такими рівностями:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Користуючись такою формулою, можна визначити послідовно третій, четвертий та інші члени послідовності:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5.$$

Маємо послідовність: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Її називають *послідовністю Фібоначчі*, оскільки вперше розглянув та описав її властивості в трактаті «Книга про абак» (1202 р.) Леонардо Пізанський (Фібоначчі).

Формулу n -го члена як функцію від n для цієї послідовності знайдено Ж. Біне тільки у XIX ст.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Числові послідовності. Урок 1).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклади числових послідовностей.
2. Сформулюй означення числової послідовності.
3. Які послідовності називають скінченними?
4. Які послідовності називають: а) зростаючими; б) спадними?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Продовж послідовність квадратів натуральних чисел:

1, 4, 9, 16, 25, ...

Розв'язання. Кожний член указаної послідовності дорівнює квадрату його номера: перший — квадрату числа 1, другий — квадрату числа 2 і т. д. Тому шостий член дорівнює 6^2 , сьомий — 7^2 , восьмий — 8^2 і т. д. Отже, маємо послідовність:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ...

2. Знайди сороковий член послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = 3n - 2$; б) $a_n = (-1)^n$; в) $a_n = n - (-1)^{n-3}$.

Розв'язання. а) $a_{40} = 3 \cdot 40 - 2 = 120 - 2 = 118$;

б) $a_{40} = (-1)^{40} = 1$; в) $a_{40} = 40 - (-1)^{37} = 40 + 1 = 41$.

Відповідь. а) 118; б) 1; в) 41.

3. Починаючи з якого номера всі члени послідовності, заданої формулою $c_n = n^2 + n$, більші за 100?

Розв'язання. Якщо $n^2 + n > 100$, то $n^2 + n - 100 > 0$.

Розв'яжемо цю квадратну нерівність.

$D = 1 + 400 = 401$. Оскільки йдеться тільки про натуральні (отже — додатні) значення n , а додатний корінь $n = \frac{-1 + \sqrt{401}}{2} \approx 9,5$, то номер, що задовольняє умову, має бути натуральним числом, більшим від 9,5. Тому $n = 10$.

Відповідь. Починаючи з десятого номера.

4. Установи, зростаючою чи спадною є послідовність, яка задається формулою: $a_n = 1 - 2n^2$.

Розв'язання. Візьмемо два довільних послідовних члени цієї послідовності, знайдемо їх різницю та визначимо її знак:

$$a_p = 1 - 2p^2; a_{p+1} = 1 - 2(p+1)^2; a_{p+1} - a_p = \\ = 1 - 2(p+1)^2 - (1 - 2p^2) = 1 - 2p^2 - 4p - 2 - 1 + 2p^2 = -(4p + 2).$$

Для натуральних p вираз $4p + 2$ набуває лише додатних значень. Тому $a_{p+1} - a_p < 0$ для всіх натуральних p . Отже, для будь-якого номера p виконується умова $a_{p+1} < a_p$. Дана послідовність спадна, бо в ній кожний наступний член менший за попередній.

Відповідь. Послідовність спадна.

ВИКОНАЙ УСНО



- 752.** Назви 5 перших членів послідовності чисел, протилежних до натуральних.
- 753.** Назви 5 перших членів послідовності простих чисел.
- 754.** Продовж послідовність натуральних чисел:
- які діляться на 3: 3, 6, 9, 12, ... ;
 - які діляться на 5: 5, 10, 15, ... ;
 - які не діляться на 3: 1, 2, 4, 5, 7, ... ;
 - кожне з яких на 3 більше за попереднє: 1, 4, 7, ...
- 755.** Розглянь послідовності:
- 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ... ;
 - 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... ;
 - 5, 55, 555, 5555, 55555, 555555,

Для кожної послідовності вкажи такі члени: 1) другий, п'ятий і сьомий; 2) наступний за третім; 3) попередній сьомому; 4) які містяться між другим і шостим.

- 756.** Знайди четвертий член послідовності, n -й член якої задається формулою $a_n = 2n^2 - 8n$.
- А -24 Б -16 В 0 Г 64

- 757.** Скінченною чи нескінченною є послідовність:
- простих чисел;
 - чисел, протилежних натуральним;
 - правильних дробів зі знаменником 10;
 - неправильних дробів зі знаменником 10?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



- 758.** Випиши шість перших членів кожної послідовності.
- двоцифрових чисел;
 - правильних дробів із чисельником 10.
- 759.** Випиши п'ять перших членів кожної послідовності.
- неправильних дробів із чисельником 10;
 - цифр у десятковому записі числа π .
- 760.** Напиши п'ять перших членів послідовності, n -й член якої задається формулою:
- | | | |
|-----------------------|-------------------|------------------------------|
| а) $a_n = 2(n - 1)$; | б) $x_n = 12$; | в) $y_n = 3n + (-1)^n$; |
| г) $b_n = 1 - n^2$; | г) $c_n = 2n^2$; | д) $\Gamma_n = 1 + (-1)^n$. |
- 761.** Напиши сім перших членів послідовності, заданої формулою:
- а) $a_n = 3n - 2$; б) $a_n = n^2 + 1$; в) $a_n = 2 - 5n$; г) $a_n = n^2 - n$.

762. Гра. Один з учасників / одна з учасниць записує формулу числової послідовності. А інші трое записують відповідно перший, другий і третій член цієї послідовності. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

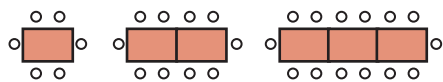
763. Напиши кілька перших членів послідовності, n -й член якої $a_n = n^2 - 1$. Знайди a_{10} , a_{20} , a_{100} .

764. Послідовність задано формулою $a_n = 2n + 3$. Знайди:
а) a_3 ; б) a_6 ; в) a_{15} ; г) a_{100} .

765. Знайди тридцятий член послідовності, заданої формулою:
а) $a_n = 2n + 7$; б) $b_n = 2n^2 - n$; в) $c_n = (-1)^n + 3$; г) $x_n = 0,5^n(n + 1)$.

766. Знайди шостий, восьмий і десятий члени послідовності, n -й член якої $b_n = 2^n$.

767. В ресторані є прямокутні столи, які офіціанти можуть зсувати, якщо є велика кількість гостей (мал. 15.2). Розглянь варіанти розсад- ки та задай формулою кількість людей, які можуть сісти, якщо зсунути n столів. Скільки людей сяде, якщо зсунути 7 столів?



Мал. 15.2

768. Напиши кілька перших членів послідовності квадратів натуральних чисел. Який її n -й член?

769. Напиши кілька перших членів і n -й член послідовності кубів натуральних чисел.

770. Напиши кілька перших членів послідовності натуральних чисел, кратних 3. Обчисли її сороковий член.

Напиши скінченну послідовність, задану формулою (**771**, **772**):

771. а) $a_n = 4n - 3$, де $1 \leq n \leq 8$; б) $b_n = \frac{n}{n+1}$, де $1 \leq n \leq 10$.

772. а) $c_n = n^2 + 2n$, де $1 \leq n \leq 8$; б) $y_n = 2^n + 1$, де $1 \leq n \leq 7$.

773. Дано послідовність, n -й член якої $a_n = 5n + 8$. На скільки її двадцятий член більший від дев'ятнадцятого?

774. Дано послідовність, n -й член якої $a_n = n \cdot 3^n$. У скільки разів її двадцятий член більший від вісімнадцятого?

775. Чи правильно, що $a_n = 5n - 3$ — формула n -го члена послідовності натуральних чисел, які при діленні на 5 дають остачу 2?

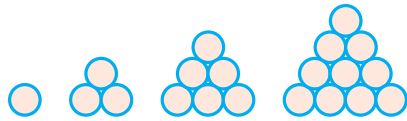
776. Перший член послідовності дорівнює 7, а кожний наступний на 2 більший від попереднього. Напиши кілька її перших членів. Зростаюча чи спадна ця послідовність?

777. The first term of the sequence is 5, and each subsequent term is 3 less than the previous one. Write down the first few terms of the sequence. Is this sequence ascending or descending?

778. Напиши формулу n -го члена послідовності натуральних чисел, які при діленні на 7 дають остачу 3.

779. Послідовність 1, 3, 6, 10, 15, ... називають послідовністю *трикутних чисел* (мал. 15.3). Напиши і зобрази 3 наступних члени цієї послідовності.

780. Відкрита задача. Дізнайся, яку послідовність називають послідовністю квадратних чисел. Склади і розв'яжи задачу про цю послідовність.



Мал. 15.3



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Напиши п'ять перших членів послідовності, яка задається рекурентною формулою (**781, 782**):

781. а) $a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n$; б) $a_1 = -1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

782. а) $a_1 = 15, a_{n+1} = a_n - 5$; б) $c_1 = -2, c_2 = 3, c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$.

783. Послідовність чисел Фібоначчі можна задати рекурентною формулою: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ або формулою n -го члена:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Знайдіть п'ять перших членів цієї послідовності двома способами і порівняйте їх. Детальніше про творців цих формул дізнайтеся самостійно з інформаційних джерел.

784. Послідовність $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ така, що $a_1 = -5$ і $a_{n+1} - a_n = 3$ для кожного натурального числа n . Знайди a_2, a_5, a_{10} .

785. Яке з чисел $-20, -10, -5, 4, 9$ є членом послідовності, n -й член якої $a_n = 2n^2 - 7n$?

786. Членом якої послідовності є число -12 ?

а) $a_n = 7n^2 - 11$; б) $a_n = 3 - 5n$; в) $a_n = 2n - n^2 + 3$;

г) $a_n = \frac{n+1}{n}$; д) $a_n = \frac{5n^2+4}{1-2n}$;

Послідовність (a_n) задана формулою n -го члена. Починаючи з якого номера всі члени послідовності (**787, 788**):

787. а) $a_n = 3n + 1$ більші за 50; б) $a_n = n^2 - 5$ більші за 220?

788. а) $a_n = 200 - 3n$ менші за 12; б) $a_n = n^2 - n$ не менші за 110?

Послідовність (a_n) задана формулою n -го члена. Для яких номерів члени послідовності (**789, 790**):

789. а) $a_n = 3n - 5$ більші за 40, але менші за 150;

б) $b_n = 200 - 2n$ більші за 50, але менші за 170?

- 790.** а) $c_n = 2n + 1$ більші за 8, але менші за 30;
 б) $x_n = 4 - 7n$ більші за -40 , але менші за -10 ;
 в) $y_n = \sqrt{n+2}$ більші за $\sqrt{10}$, але менші за 10?
- 791.** Скільки додатних членів містить послідовність, задана формулою:
 а) $a_n = -3n + 374$; б) $a_n = -n^2 + 70n + 800$?
- 792.** Послідовність задано формулою $a_n = n^2 - 15n$. Скільки в ній від'ємних членів?
- 793.** Чи є серед членів послідовності $a_n = 7n - 2$ такі, що:
 а) закінчуються цифрою 0; б) діляться на 13;
 в) діляться на 2 і не діляться на 3;
 г) при діленні на 27 дають остачу 1?
- 794.** Дано дві послідовності: $a_n = 7n - 1$ і $c_n = 8n + 3$. Знайди найменші значення k і p , для яких $a_k = c_p$.
- 795.** Зростаючими чи спадними є послідовності, задані такими формулами:
 а) $a_n = 9n - 10$; б) $b_n = 10 - 9n$; в) $c_n = 5 - n^2$;
 г) $x_n = \frac{1}{n^2 + 1}$; д) $z_n = n^2 + 2n - 3$; е) $y_n = \frac{3n+4}{n+2}$?
- 796.** Доведи, що послідовність $a_n = 8n - 7$ — зростаюча.
- 797.** Доведи, що послідовність $a_n = \frac{n+1}{n}$ — спадна.
- 798.** Знайди найбільший член послідовності, заданої формулою n -го члена: а) $a_n = 6n - n^2 - 5$; б) $a_n = -n^2 + 2n + 3$.
- 799.** Знайди найбільший від'ємний член послідовності, заданої формулою n -го члена: а) $a_n = n^2 - 35$; б) $a_n = 0,25n^2 - 10,75$.
- 800.** Зафіксовано таку кількість благодійних внесків до фонду продовж тижня: 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9. Задай цю послідовність формулою.
 Добери одну з можливих формул n -го члена послідовності, першими членами якої є числа **(801, 802)**:
- 801.** а) 2, 5, 8,...; б) 2, 4, 8,...; в) 1, -1, 1,...;
 г) 1, 0, 1,...; д) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$; е) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$
- 802.** а) 3, 6, 12, 24, 48,...; б) 1, 7, 31, 127, 511,...; в) 0, -2, -4, -6,...;
 г) -1, 2, -3, 4, -5,...; д) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$; е) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$
- 803.** Доведи, що n -й член послідовності трикутних чисел (див. задачу 779) дорівнює сумі перших n натуральних чисел.
- 804.** Нескінченна послідовність 0, 2, 0, 2, 0,... така, що сума кожних двох її сусідніх членів дорівнює 2. Чи правильно, що її n -й член $a_n = 1 + (-1)^n$?

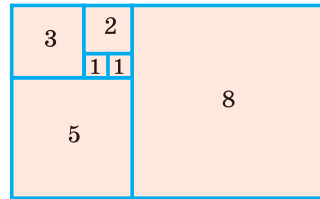
805. Послідовність задано формулою $a_n = (-1)^n$. Знайди суму її перших n членів, якщо: а) $n = 100$; б) $n = 1000$; в) $n = 1001$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



806. Напиши дві різні формули n -го члена послідовності, першими членами якої є числа 1, 3, 5, 7,...

807. Перемалюй в зошит малюнок 15.4 і доповни його двома квадратами так, щоб їх сторони дорівнювали наступним членам послідовності Фібоначчі. Наведи приклади форм чи процесів у природі, моделлю до яких можуть стати числа Фібоначчі чи їх геометрична інтерпретація.



Мал. 15.4



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

808. Підприємця купила за 2500 грн два предмети і після їх продажу одержала 40 % прибутку. Скільки вона заплатила за кожний предмет, якщо перший приніс прибутку 25 %, а другий — 50 %?

809. Побудуй графік функції:

а) $y = x^2 + 3$; б) $y = x^2 - 2$; в) $y = (x - 4)^2$; г) $y = (x + 3)^2$.

810. Розв'яжи систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 - 2x = 15; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy + 12 = 0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 4)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 - 6x = 7. \end{cases}$$

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, як позначають послідовності та її члени.
- ✓ Можу навести приклади послідовностей:

зростаючих

спадних

нескінченних

скінченних

- ✓ Знаю, якими формулами задають послідовності:

 n -го члена

рекурентними

- ✓ Умію обчислювати члени послідовності.
- ✓ Умію задавати послідовності за даними їх членами та співвідношеннями між ними.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке послідовність;
- що таке наступний і попередній член послідовності:

$$a_n \text{ і } a_{n+1}$$

a_n — попередній, a_{n+1} — наступний

- що таке формула n -го члена і рекурентна формула;
- які послідовності називають зростаючими, а які — спадними;
- як обчислювати члени послідовності.

§ 16. Арифметична прогресія

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- арифметична прогресія — *arithmetic progression/arithmetic sequences*
- різниця арифметичної прогресії — *common difference*

Нехай дано послідовність, перший член якої 5, а кожний інший член на 3 більший від попереднього:

$$5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \dots$$

Це арифметична прогресія з першим членом 5 і різницею 3.

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число. Це стало для даної послідовності число d називають різницею арифметичної прогресії.

Іншими словами, арифметична прогресія — це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою:

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, \text{ де } n \in N, a \text{ і } d \text{ — задані числа.}$$

$$\text{Тоді } d = a_{n+1} - a_n.$$

Перший член і різниця арифметичної прогресії можуть бути якими завгодно числами. Арифметична прогресія зростаюча, якщо її різниця додатна, або спадна, якщо її різниця від’ємна. Приклад спадної арифметичної прогресії:

$$11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, \dots$$

Щоб одержати будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, треба до попереднього члена додати різницю d . Тому якщо перший член і різниця арифметичної прогресії дорівнюють відповідно a_1 і d , то її перші члени становлять:

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d, \\ a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d, \dots,$$

тобто

$$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, a_5 = a_1 + 4d, \dots$$

Зверни увагу: коефіцієнт при d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії. Так само знаходимо $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ і взагалі:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Це формула n -го члена арифметичної прогресії.

Приклад 1. В арифметичній прогресії $a_1 = 4$, $d = 3$. Знайди a_{20} .

Розв'язання. $a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.

Відповідь. 61.

Приклад 2. В арифметичній прогресії $a_{19} = 8$, $d = -1$. Знайди a_1 .

Розв'язання. $a_{19} = a_1 + 18d$, $8 = a_1 - 18$. Отже, $a_1 = 8 + 18 = 26$.

Відповідь. 26.

Розглянемо кілька властивостей арифметичної прогресії.

Теорема 6. Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, дорівнює півсумі двох сусідніх з ним членів: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Доведення. За означенням, $d = a_{n+1} - a_n$ або $d = a_n - a_{n-1}$. Отже, $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, або $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$, звідси $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Правильне й обернене твердження. Доведи його самостійно.

Теорема 7. Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n.$$

Доведення. Нехай дано n членів скінченної арифметичної прогресії:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Додамо перший і останній її члени, потім — другий і передостанній, потім — третій член від початку і третій від кінця і т. д. Результати маємо однакові. Справді, якщо $a_1 + a_n = m$, то:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m;$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m;$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = m \text{ і т. д.}$$

Отже, $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$.

Теорема 8. Сума n перших членів арифметичної прогресії дорівнює півсумі крайніх її членів, помноженій на число членів: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Доведення. Нехай S_n — сума n перших членів арифметичної прогресії, тобто

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Якщо $a_1 + a_n = m$, то за теоремою 7, $a_2 + a_{n-1} = m$, $a_3 + a_{n-2} = m$ і т. д.

Враховуючи це, додамо почленно дві рівності:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n &= m + m + m + \dots + m + m + m \\ 2S_n &= mn; \quad 2S_n = (a_1 + a_n)n, \text{ звідси} \\ S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

За цією формулою знаходять суму n перших членів будь-якої арифметичної прогресії.

Якщо у цій формулі записати $a_n = a_1 + (n-1)d$, то отримаємо формулу

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Цією формулою зручно користуватися, якщо задано a_1 і d .

Приклад 3. Знайди суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії 5, 7, 9, ...

Розв'язання.

I спосіб. Скористаємося формулою $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

За умовою $a_1 = 5$, $d = 7 - 5 = 2$.

Тому $a_{20} = a_1 + (20 - 1)d = 5 + 19 \cdot 2 = 43$. Тоді $S_{20} = \frac{5+43}{2} \cdot 20 = 480$.

II спосіб. Скористаємося формулою $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Оскільки $a_1 = 5$, $d = 2$, то

$$S_{20} = \frac{2 \cdot 5 + (20-1) \cdot 2}{2} \cdot 20 = \frac{10+38}{2} \cdot 20 = 48 \cdot 10 = 480.$$

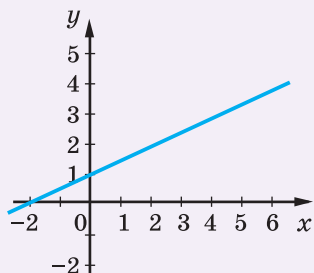
Відповідь. 480.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

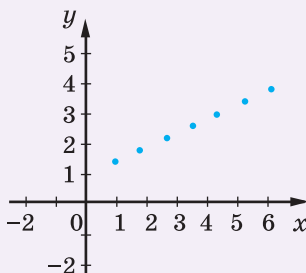
Уяви лінійну функцію, задану формулою $y = 0,5x + 1$. Її графік зображено на малюнку 16.1. Якщо аргументу x надавати тільки натуральних значень, тобто 1, 2, 3, ..., то значення функції дорівнюватимуть відповідно: 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; ...

Маємо арифметичну прогресію з першим членом 1,5 і різницею 0,5. Цій прогресії відповідає малюнок 16.2. Взагалі кожна функція виду $y = ax + b$, визначена на множині натуральних чисел, є арифметичною прогресією з першим членом $a + b$ і різницею a . Тому вважають, що **арифметична прогресія — це лінійна функція, задана на множині натуральних чисел**.

Якщо така функція визначена на множині всіх натуральних чисел, то маємо нескінченну арифметичну прогресію. Якщо вона визначена на множині перших n натуральних чисел, то маємо скінченну арифметичну прогресію, яка містить n членів.



Мал. 16.1



Мал. 16.2



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Числові послідовності. Урок 2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй означення арифметичної прогресії.
2. Що таке різниця арифметичної прогресії?
3. Як виражається n -й член арифметичної прогресії через її перший член і різницю?
4. Чому дорівнює сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців?
5. Чому дорівнює сума n перших членів арифметичної прогресії?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди суму всіх двоцифрових натуральних чисел.
Розв'язання. Знайдемо суму чисел 10, 11, 12, ..., 99.
Це скінченна арифметична прогресія, у якій $a_1 = 10$, $a_n = 99$. Вона містить 90 членів, і тому її сума дорівнює:

$$S = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905.$$

Відповідь. 4905.

2. Чи є числа 1000 і 200 членами арифметичної прогресії з першим членом 5 і різницею 3?

Розв'язання. Скористаємося формулою n -го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Якщо 1000 є n -м членом даної прогресії, то $1000 = 5 + (n - 1) \cdot 3$, звідси $3 \cdot (n - 1) = 995$. Оскільки 995 не ділиться на 3, то n не є натуральним числом, а, значить, число 1000 не є членом цієї арифметичної прогресії.

Якщо $200 = 5 + (n - 1) \cdot 3$, то $3 \cdot (n - 1) = 195$, звідси $n = 65$.

Відповідь. 1000 — не є членом даної арифметичної прогресії, а 200 — її 65-й член.

3. В арифметичній прогресії відомі $a_7 = 43$ і $a_{15} = 3$. Знайди a_{10} .

Розв'язання. Підставимо дані задачі у формулу $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} a_7 = a_1 + 6d, \\ a_{15} = a_1 + 14d; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 43 = a_1 + 6d, \\ 3 = a_1 + 14d; \end{cases} \text{ звідки } d = -5, a_1 = 73.$$

Оскільки $a_{10} = a_1 + 9d$, то $a_{10} = 73 + 9 \cdot (-5) = 28$.

Відповідь. 28.

ВИКОНАЙ УСНО



811. Знайди різницю арифметичної прогресії:

а) 3, 5, 7, ...; б) 12, 10, 8, ...; в) -2, 1, 4, ...; г) -7, -9, -11, ...

812. Різниця арифметичної прогресії дорівнює 2. Знайди її перший член, якщо $a_2 = -3$.

А -8

Б 2

В -5

Г -1

813. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

а) 1, 3, 5, 8, 11, 14, ...;

б) 0, -1, -3, -5, -8, ...?

814. Які з послідовностей можуть бути арифметичними прогресіями?

Укажи для них перший член і різницю.

а) 0; 3; 6; 9; 12; ...;

б) -2, -4, -6, -8, -10, ...;

в) 3, 3, 3, 3, 3, ...;

г) 5, 10, 20, 40, 80, ...;

г) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$;

д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \dots$

815. Знайди шостий член арифметичної прогресії 3, 7, 11, ...

А 15

Б 19

В 23

Г 27

816. Яка з послідовностей має перший член 5 та різницю 4?

А $a_n = 5(4)^{n-1}$

Б $5 + 4(n - 1)$

В $a_n = 4 + 5n$

Г $a_n = 5 - 4n$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



817. Напиши п'ять перших членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 7, d = 2$;

б) $a_1 = 0,5, d = -10$;

в) $a_1 = -\frac{1}{4}, d = \frac{1}{4}$;

г) $a_1 = 9, d = 0$.

818. Напиши сім перших членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 2, d = 5$;

б) $a_1 = -3, d = 4$;

в) $a_1 = 0, d = 7$;

г) $a_1 = 4, d = -1$.

819. В арифметичній прогресії $a_1 = 5, d = -4$. Знайди a_7, a_{20} .

820. В арифметичній прогресії $a_1 = 9$, $d = 4$. Знайди a_{15} , a_{32} .

821. В арифметичній прогресії $a_2 = 14$, $a_3 = 25$. Знайди d , a_{10} , a_{20} .

Знайди різницю і десятий член арифметичної прогресії (a_n) (**822, 823**):

822. а) 2, 7, 12,...; б) 3, 1, -1,...; в) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, ...

823. а) -8, -5, -2,...; б) 10, 8, 6,...; в) $1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{3}, \dots$

824.  **Гра.** Перший гравець / перша гравчиня задає третій член арифметичної прогресії, другий / друга — п'ятий, а третій / третя — записує четвертий член цієї послідовності. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

825. Find the common difference of an arithmetic progression (a_n) , if:

а) $a_1 = 5$, $a_7 = 95$; б) $a_1 = 2,3$, $a_5 = 1,5$.

826. Знайди різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

а) $a_1 = -15$, $a_{10} = -24$; б) $a_1 = -17$, $a_7 = 97$.

Знайди перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо (**827, 828**):

827. а) $a_{11} = 25$, $d = 2$; б) $a_{36} = 5$, $d = -1$.

828. а) $a_8 = 9$, $d = 0,3$; б) $a_{21} = -50$, $d = 3$.

829. В арифметичній прогресії $a_{17} = 53$, $a_{18} = 44$. Знайди a_1 , d , a_4 , a_{11} .

830. В арифметичній прогресії $a_{10} = 5$, $a_{11} = -4$. Знайди a_1 , d , a_5 , a_{21} .

831. В арифметичній прогресії $a_{25} = 5$, $a_{27} = 4$. Знайди a_{26} .

832. В арифметичній прогресії $a_4 = 2$, $a_6 = 3$. Знайди a_5 .

833. В театрі кожен ряд містить на однакову кількість місць більше, ніж попередній. Третій ряд містить 22 місця, а шостий — 31 місце. Знайди кількість місць в двадцятому ряді.

834. В бібліотеці кожен місяць закупають нові книжки, щомісяця на однакову кількість книжок більше, ніж попереднього. У квітні закупили 33 книжки, а в липні 51 книжку. Знайди кількість книжок, що бібліотека закупить в грудні.

835. **ЗНО** В арифметичній прогресії (a_n) : $a_1 = -4$, $a_5 = a_4 + 3$. Визнач десятий член a_{10} цієї прогресії.

А -31 Б -27 В 26 Г 27 Д 23

836. Чи є число 254 членом арифметичної прогресії:

а) 15, 23, 31,...; б) 8, 7,4, 6,8,...?

837. Чи є число 212 членом арифметичної прогресії:

а) 3, 14, 25, 36,...; б) 275, 269, 263, 257,...?

Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена. Знайди: a_1, d, a_{21} (838, 839).

838. а) $a_n = 6n - 3$; б) $a_n = -5n + 9$.

839. а) $a_n = 12 - 4n$; б) $a_n = 2n + 15$.

Знайди суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n) (840, 841).

840. а) $a_1 = -35, a_{10} = 10$; б) $a_1 = 20, a_{10} = 21,8$.

841. а) $a_1 = -2,5, a_{10} = 2$; б) $a_1 = 66, a_{10} = -6$.

Знайди суму перших сорока членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо (842, 843):

842. а) $a_1 = 2, d = 3$; б) $a_1 = -18, d = 5$.

843. а) $a_1 = 3, d = -0,2$; б) $a_1 = 7, d = 2$.

Знайди суму перших ста членів арифметичної прогресії (844, 845).

844. а) 50, 49, 48,...; б) 16, 13, 10, 7,...

845. а) -50, -49, -48,...; б) 2, 7, 12, 17,...

Знайди перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо: (846, 847):

846. а) $a_{10} = 95, S_{10} = 500$; б) $a_{15} = 47, S_{15} = 1500$.

847. а) $a_7 = 15, S_7 = 63$; б) $a_{12} = 31, S_{12} = 174$.

848. *Стародавня арабська задача.* Знайди 20-й член і суму двадцяти членів арифметичної прогресії 3, 7, 11, 15,...

849. *Стародавня єврейська задача.* Знайди суму шістдесяти перших натуральних чисел.

850. Учитель запропонував знайти суму всіх натуральних чисел від 1 до 40. Він вважав, що школярі довго додаватимуть сорок чисел. А малий Карл Гаусс (згодом відомий німецький математик) виконав завдання за хвилину. Як він міркував? Спробуй усно виконати завдання.

851. Знайди суму перших ста натуральних чисел.

852. Знайди суму перших ста непарних натуральних чисел.

853. Ресора складається з десяти сталевих смуг (мал. 16.3). Довжина верхньої смуги 105 см, а кожна інша на 9 см коротша від попередньої. Знайди суму довжин усіх смуг ресори.



Мал. 16.3

854. Ганна додала в свої щоденні тренування планку. Розпочала тиждень з 10 секунд в планці. Кожного наступного тижня вона збільшує тривалість планки на 5 секунд. Яка тривалість планки має бути на 16й тиждень з початку тренувань?



- 855.** *Стародавня задача.* Людам, які копають криницю, обіцяно за перший метр заплатити 30 крб, а за кожний наступний — на 20 крб більше, ніж за попередній метр. Скільки вони одержать за копання 12-метрової криниці?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Дано арифметичну прогресію $a_1, a_2, a_3, \dots$. Знайди a_{30} , якщо (856, 857):

- 856.** а) $a_2 = 3, a_4 = 4$; б) $a_1 = 8, a_5 - a_3 = 6$.
857. а) $a_5 = 9, a_7 = 13$; б) $a_2 = 5, a_5 - a_1 = 12$.

Дано арифметичну прогресію $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. Знайди a_1, d, a_n , якщо (858, 859):

- 858.** а) $a_4 = 10, a_7 = 19, n = 26$; б) $a_5 = 5,2, a_9 = 6,8, n = 31$.
859. а) $a_5 = 8,2, a_{10} = 4,7, n = 51$; б) $a_8 = 11,2, a_{15} = 19,6, n = 17$.
860. Знайди восьмий член арифметичної прогресії, якщо $a_2 + a_{14} = 20$.
861. Які з чисел $-26, 16, 35, 131$ є членами арифметичної прогресії, n -й член якої: а) $a_n = 5n - 19$; б) $b_n = 0,3n + 11$.

- 862.** Які з чисел $-23, -14, 3, 144$ є членами арифметичної прогресії, n -й член якої $c_n = 97 - 2n$?

- 863.** Між числами 3 і 19 вставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

- 864.** Між числами -7 і 8 вставте чотири такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

- 865.** Скільки від'ємних членів містить арифметична прогресія:
а) $-10, 3, -8, 6, \dots$; б) $-37, 5, -35, 7, \dots$?

- 866.** Скільки додатних членів містить арифметична прогресія:
а) $2, 5; 2, 3; 2, 1, \dots$; б) $176; 151; 126; \dots$?

- 867.** Знайди перший додатний член арифметичної прогресії:

- а) $-32, -30, -28, \dots$; б) $-8\frac{1}{2}, -8, -7\frac{1}{2}, \dots$

- 868.** Скільки членів арифметичної прогресії $10, 16, 22, \dots$ міститься між числами 110 і 345?

- 869.** Скільки членів арифметичної прогресії $5, 8, 11, \dots$ міститься між числами 96 і 246?

- 870.** За якого значення x значення виразів $2x^2, 3x + 2, 4x^2 + 4$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайди члени цієї прогресії.

- 871.** За якого значення y значення виразів $2y, y^2 + 5, 3y^2 + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайди члени цієї прогресії.

872. **ЗНО** За якого від'ємного значення x значення виразів $x^2 - 4$, $3 - 5x$ та $2 - 3x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії?

Чи є арифметичною прогресією послідовність, n -й член якої (873, 874):

873. а) $a_n = 3n + 1$; б) $c_n = n^2 + 2n$?

874. а) $b_n = 5 - 4n$; б) $c_n = n^2 + 1$?

875. Знайди n -й член арифметичної прогресії:

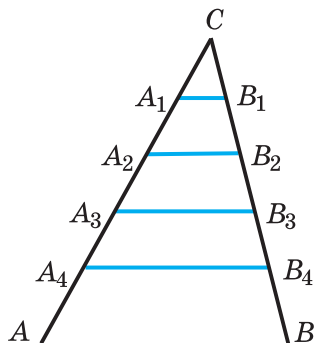
а) 2, 5, 8, ...; б) 7, 6, 5, ...; в) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \dots$

Запиши формулу n -го члена арифметичної прогресії (876, 877).

876. а) 7, 12, ...; б) -2, 5, 0, 5, ...;

877. а) -25, -19, ...; б) -4, 5, -3, 7, ...

878. На стороні CA кута ACB від його вершини відкладено рівні відрізки і через їх кінці проведено паралельні прямі (мал. 16.4). Знайди довжини відрізків A_3B_3 , A_7B_7 , A_nB_n , якщо $A_1B_1 = 2,5$ см.



Мал. 16.4

879. $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ — арифметична прогресія, c — довільне число. Доведи, що послідовність $ca_1, ca_2, ca_3, ca_4, \dots$ — так само арифметична прогресія.

880. $a_1, a_2, a_3, \dots$ і $x_1, x_2, x_3, \dots$ — арифметичні прогресії. Доведи, що арифметичною прогресією є і послідовність $a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3, \dots$

881. Дано арифметичну прогресію, n -й член якої a_n . Доведи, що:

а) $a_2 + a_{23} = a_{13} + a_{12}$; б) $a_{20} - a_{16} = a_{10} - a_6$.

882. **Задача Феофана Прокоповича.** Якесь людина має багато коней, і всім їм різна ціна. Найгірший кінь коштує 4 золотих, а найкращий — 55 золотих, і ціна від одного до другого коня весь час зростає на 3 золотих. Питаємо: скільки ж усього було коней?

883. **ЗНО** Плавець під час першого тренування подолав дистанцію 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату — 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. Скільки всього кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?

Знайди суму перших n членів арифметичної прогресії, якщо (884, 885):

884. а) $a_1 = 1, a_5 = 3, n = 40$; б) $a_3 = 7, a_9 = 19, n = 50$.

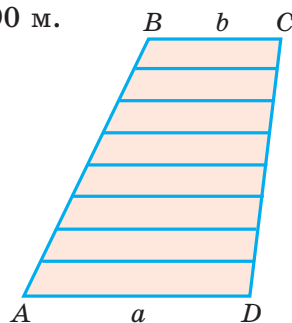
885. а) $a_2 = 5, a_4 = 11, n = 100$; б) $a_4 = 9, a_{10} = -3, n = 28$.

886. Знайди суму перших 20 членів арифметичної прогресії, заданої формулою n -го члена: а) $a_n = 2 + 5n$; б) $a_n = 2n - 1$; в) $a_n = -3 + n$.
887. Знайди суму перших 16 членів арифметичної прогресії, заданої формулою n -го члена $a_n = -3 + n$.
888. Знайди суму всіх парних натуральних чисел, менших за 200.
889. Знайди суму всіх непарних натуральних чисел, менших за 200.
890. **ЗНО** Знайди суму перших дванадцяти непарних натуральних чисел.
891. Знайди суму натуральних чисел, які не більші за 240 і кратні: а) 4; б) 12.
892. Знайди суму натуральних чисел, менших від 100, які кратні: а) 3; б) 5.
893. Знайдіть суму всіх цілих чисел, що належать проміжку:
а) $[-30; 70]$; б) $[-70; -30]$; в) $(-70; 70)$.
894. Сімнадцятий член арифметичної прогресії дорівнює 8. Знайди суму її перших 33 членів.
895. Тринадцятий член арифметичної прогресії дорівнює 3. Знайди суму її перших 25 членів.
896. **Відкрита задача.** Знайди суму перших ... членів арифметичної прогресії, якщо її ... член дорівнює 100.
897. Сума четвертого і шостого членів арифметичної прогресії дорівнює 14. Знайди суму перших дев'яти членів прогресії.
898. **ЗНО** Третій член арифметичної прогресії вдвічі більший за її перший член. Визнач різницю цієї прогресії, якщо сума перших п'яти її членів дорівнює 190.
899. В арифметичній прогресії 10 членів. Сума членів з непарними номерами дорівнює 10, а з парними — 25. Знайди її сьомий член.
900. Сума перших п'ятнадцяти членів арифметичної прогресії дорівнює 20, а сума перших її дванадцяти членів на 6 менша. Знайди суму перших 27 членів.
901. Знайди п'ятий член арифметичної прогресії, якщо суму n перших її членів можна знайти за формулою: а) $S_n = n^2 - 6n$; б) $S_n = 3n^2 - n$.
902. Знайди сьомий член арифметичної прогресії, якщо суму n перших її членів можна знайти за формулою $S_n = 4n^2 - 2n$.
903. Знайди суму членів арифметичної прогресії з шостого по двадцятий включно, якщо $a_1 = 31$, $d = -3$.
904. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії $-17, -15, -13, \dots$ з восьмого по двадцятий шостий включно.
905. **Задача Франкера.** Скільки разів проб'є годинник упродовж 12 год, якщо він відбиває щопівгодини?
906. При вільному падінні фізичне тіло проходить за першу секунду 4,9 м, а кожен наступну — на 9,8 м більше. Знайди: а) глибину

шахти, якщо камінець досяг її дна через 8 с після початку падіння;
б) скільки секунд падала б гайка з висоти 490 м.

907. Міри кутів п'ятикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведи, що міра одного з цих кутів дорівнює 108° . Склади подібні задачі для трикутника і семикутника.

908. Кінці відрізків, паралельних основам трапеції, лежать на її бічних сторонах і ділять кожну з них на 8 рівних частин. Знайди довжини цих відрізків та їх суму, якщо основи трапеції a і b (мал. 16.5).



Мал. 16.5

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

909. Числа a^2 , b^2 , c^2 нерівні й утворюють арифметичну прогресію. Доведи, що арифметичну прогресію утворюють і числа: $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$.

910. Розв'яжи рівняння:

- а) $4 + 9 + 14 + \dots + (5n - 1) = 1030$, де n — натуральне число;
б) $6 + 10 + 14 + \dots + x = 160$, де x — натуральне число.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

911. Скороти дріб:

а) $\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}$;

б) $\frac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$;

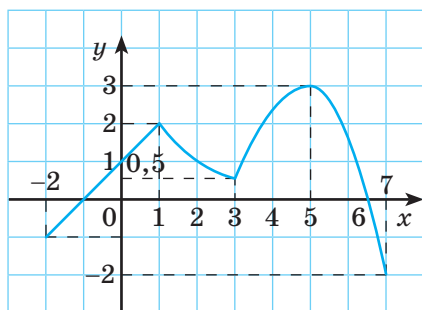
в) $\frac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$.

912. Розв'яжи нерівність:

а) $x^2 - 8x + 15 < 0$; б) $x^2 + 7x > 0$; в) $x^2 - 16 < 0$.

913. На малюнку 16.6 зображено графік функції $y = f(x)$. Установи відповідність між абсцисами точок (1–4), що є аргументами функції $y = f(x)$, і проміжками (А–Д), до яких належать значення цієї функції у заданих точках.

- | | |
|------------|-------------|
| 1 $x = -1$ | А (1,5; 2] |
| 2 $x = 1$ | Б (0; 1) |
| 3 $x = 3$ | В [-1; 0,5) |
| 4 $x = 5$ | Г (2; 3] |
| | Д [-2; -1] |



Мал. 16.6

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

Розумію, що таке арифметична прогресія.

- ✓ Можу сформулювати означення арифметичної прогресії.
- ✓ Можу навести приклади арифметичних прогресій і встановити, чи є задана послідовність арифметичною прогресією.
- ✓ Знаю, що таке різниця арифметичної прогресії. $d = a_{n+1} - a_n$
- ✓ Знаю, якими формулами задають арифметичну прогресію.

рекурентна: $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$

n -го члена: $a_n = a_1 + (n-1)d$

- ✓ Можу пояснити і сформулювати властивості арифметичної прогресії

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$$

- ✓ Знаю та вмію використовувати формулу суми n перших членів арифметичної прогресії.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

- ✓ Умію задавати арифметичну прогресію за даними її членами чи співвідношеннями між ними.
- ✓ Умію знаходити невідомі члени арифметичної прогресії.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке арифметична прогресія;
- що таке наступний і попередній члени послідовності;
- що таке формула n -го члена і рекурентна формула;
- якими формулами можна задати арифметичну прогресію:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$$

- які властивості має арифметична прогресія:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$$

- як обчислюють суму n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

§ 17. Геометрична прогресія

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- геометрична прогресія — *geometric progression/geometric sequences*
- знаменник геометричної прогресії — *common ratio*
- рекурентна формула — *recursive formula*

Розглянемо задачу з **індійського фольклору**. Цар дуже любив шахи і обіцяв винахідникові гри велику нагороду. Винахідник запросив за першу клітину шахівниці одну пшеничну зернину, за другу — дві, за третю — чотири і далі за кожен клітину вдвічі більше, ніж за попередню. Цар здивувався, що винахідник так мало просить. Але обіцянку не зміг виконати. Чому? Про це ти дізнаєшся, вивчивши властивості геометричної прогресії.

Геометричною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число. Це стало для даної послідовності число q називають знаменником геометричної прогресії.

Перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії можуть бути будь-якими числами, відмінними від нуля.

Іншими словами, геометрична прогресія — це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою:

$$b_1 = b, b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ де } n \in N, b \neq 0 \text{ і } q \neq 0 \text{ — задані числа.}$$

Приклади геометричних прогресій:

$$\begin{aligned} &3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots (b_1 = 3, q = 2); \\ &1, -3, 9, -27, 81, -243, \dots (b_1 = 1, q = -3); \\ &-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots \left(b_1 = -1, q = \frac{1}{2}\right); \\ &7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, \dots (b_1 = 7, q = 1). \end{aligned}$$

Зауваження. Кожну арифметичну прогресію з різницею 0 можна вважати також геометричною прогресією зі знаменником 1.

Геометрична прогресія з першим членом b_1 і знаменником q має такі перші члени:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \dots$$

Її другий член $b_2 = b_1q$, третій — $b_3 = b_1q^2$, а n -й член — $b_n = b_1q^{n-1}$. Це формула n -го члена геометричної прогресії.

Приклад 1. У геометричній прогресії $b_1 = 5$, $q = 2$. Знайди b_{10} .

Розв'язання. $b_{10} = b_1q^{10-1}$, $b_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2560$.

Відповідь. 2560.

Приклад 2. Перший і сьомий члени геометричної прогресії дорівнюють відповідно 81 і $\frac{64}{9}$. Знайди її знаменник q .

Розв'язання. За формулою n -го члена геометричної прогресії:

$$b_7 = b_1q^6, \frac{64}{9} = 81 \cdot q^6, q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81}, q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

А якщо $q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$, то $q = \frac{2}{3}$ або $q = -\frac{2}{3}$.

Відповідь. $\frac{2}{3}$ або $-\frac{2}{3}$.

Розглянемо властивості геометричної прогресії.

Теорема 9. Квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх його членів: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Доведення. За означенням, $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$, а $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Отже, $b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n \cdot q \cdot \frac{b_n}{q} = b_n^2$.

Правильне й обернене твердження. Доведи його самостійно.

Теорема 10. Сума n перших членів геометричної прогресії за умови, що $q \neq 1$, виражається формулою: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Доведення. Нехай $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}$.

Помножимо обидві частини рівності на q і отримаємо

$$S_n q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } S_n q - S_n &= (b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n) - \\ &\quad - (b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-2} + b_1 q^{n-1}) = \\ &= b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n - b_1 - b_1 q - b_1 q^2 - \dots \\ &\quad \dots - b_1 q^{n-2} - b_1 q^{n-1} = b_1 q^n - b_1. \end{aligned}$$

Отже, $S_n q - S_n = b_1 q^n - b_1$ або $S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1)$, звідси

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Це формула суми n перших членів геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $q \neq 1$.

Якщо $q = 1$, то цією формулою користуватися не можна (ділити на 0 не можна). У цьому випадку кожний член геометричної прогресії дорівнює b_1 , тому $S_n = nb_1$.

Приклад 3. Знайди суму перших двадцяти членів геометричної прогресії 2, 6, 18, 54,....

Розв'язання. Тут $b_1 = 2$, $q = 3$, тому $S_{20} = \frac{2(3^{20} - 1)}{3 - 1} = 3^{20} - 1$.

Відповідь. $3^{20} - 1$.

Суму n -членів скінченної геометричної прогресії можна також знаходити за формулою $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$. Доведи її самостійно.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Сума n членів геометричної прогресії зі збільшенням числа n зростає дуже швидко. Розв'яжемо задачу з індійського фольклору, яку ми розглянули на с. 176.

Розв'язання. Звичайна шахівниця має 64 клітини. Тому цар мав би дати винахіднику всього зернин $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$.

Спробуй обчислити цю суму. Ми оцінимо тільки 2^{64} :

$$2^5 = 32, \quad 2^{10} = 32^2 = 1024 > 10^3.$$

$$2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 > 16 \cdot (10^3)^6 = 16 \cdot 10^{18} = 16\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

(Насправді $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$).

Якщо прийемо, що маса 40 000 зернин становить 1 кг, то маса 2^{64} зернин більша за $16 \cdot 10^{18} : (4 \cdot 10^4) = 4 \cdot 10^{14}$ (кг), або $4 \cdot 10^{11}$ т.

І це наближене значення. Такої кількості зерна не зможуть зібрати всі країни світу впродовж сотень років. Якби це зерно потрібно було зберігати у коморі площею 12 га, то її висота була б більшою за відстань від Землі до Сонця.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклад геометричної прогресії.
2. Сформулюй означення геометричної прогресії.
3. Що таке знаменник геометричної прогресії?
4. Як виражається n -й член геометричної прогресії через її перший член і знаменник?
5. Сформулюй властивість геометричної прогресії.
6. Чому дорівнює сума n перших членів геометричної прогресії?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. У геометричній прогресії $b_4 = 2$, $b_7 = -54$. Знайди b_1 і q .

Розв'язання. За формулою n -го члена $b_4 = b_1 \cdot q^3$ і $b_7 = b_1 \cdot q^6$. Підставимо в ці рівності значення $b_4 = 2$, $b_7 = -54$ і

$$\text{розв'яжемо систему } \begin{cases} b_1 \cdot q^3 = 2, \\ b_1 \cdot q^6 = -54. \end{cases}$$

Поділимо почленно друге рівняння на перше: $\frac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3} = \frac{-54}{2}$.

Маємо: $q^3 = -27$ і $q = -3$.

З першого рівняння системи знайдемо $b_1 : b_1 \cdot (-3)^3 = 2; b_1 = 2 : (-27) = -\frac{2}{27}$.

Відповідь. $b_1 = -\frac{2}{27}$, $q = -3$.



$$b_1 = 8, \quad q = \frac{1}{2}.$$

прогресії можна знайти за формулою $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Якщо $n = 5$,

$$\text{TO } S_5 = \frac{b_1 \cdot (q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^5 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{32} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-8 \cdot \frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

Другий спосіб. Випишемо 5 членів даної прогресії: 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$. Їх суму знайдемо простим додаванням: $15\frac{1}{2}$.

Відповідь. $S_5 = 15\frac{1}{2}$.

A photograph of two women in an office environment. The woman on the left, with long dark hair and wearing a white shirt, is reaching up to high-five the woman on the right. The woman on the right, with short brown hair and wearing a dark jacket, is also reaching up to high-five. They are both smiling. The background shows office desks and computers. The image is framed by a pink, cloud-like border.

914. Укажи три наступних члени геометричної прогресії:

а) 3, 6, 12,...; б) 16, 8, 4,...; в) -1, -2, -4,...; г) -2, 4, -8,...

915. Чи є геометричною прогресією послідовність:

а) 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001,...; б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$?

Якщо так, то вкажи її знаменник.

916. Яка з послідовностей є геометричною прогресією?

A 2, 4, 6, 8,...

Б 1, -3, 9, 27, -81,...

B $-3, -6, -12, -24, \dots$

$$\Gamma\ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

917. Знайди знаменник геометричної прогресії 18, -6, 2,

$$\mathbf{A} \frac{1}{3}$$

Б -3

B 3

$$\Gamma - \frac{1}{3}$$

918. Чи є геометричною прогресією послідовність $7^n, 7^{n+1}, 7^{n+2}, 7^{n+3}$, де n — довільне натуральне число? А послідовність $7^n, -7^{n+1}, 7^{n+2}, -7^{n+3}$?

919. Яке з тверджень про щорічну зміну населення міста може бути змодельована за допомогою геометричної прогресії?

А. Щороку населення збільшується на 1000 мешканців.

Б. Щороку населення зростає на 1%.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



920. Напиши шість перших членів геометричної прогресії, у якій:

а) $b_1 = 1, q = 3$;

б) $b_1 = 10, q = \frac{1}{2}$;

в) $b_1 = -5, q = 2$;

г) $b_1 = 1, q = -2$.

921. Напиши п'ять перших членів геометричної прогресії, у якій:

а) $b_1 = 18, q = -1$;

б) $b_1 = 5, q = 2$;

в) $b_1 = -8, q = \frac{1}{2}$;

г) $b_1 = \frac{5}{27}, q = 3$.

922. Гра. Перший гравець / перша гравчиня задає перший член геометричної прогресії, другий / друга — знаменник, що менший від 1, а третій / третя — записує перших п'ять членів цієї послідовності. Потім гравці / гравчині міняються ролями.

923. У геометричній прогресії $b_1 = -3, q = 2$. Знайди b_4, b_7, b_n .

924. У геометричній прогресії $b_1 = 2, q = -3$. Знайди b_3, b_6, b_n .

Знайди знаменник і п'ятий член геометричної прогресії (925, 926).

925. а) $-1, 3, \dots$;

б) $0,1, 0,01, \dots$.

926. а) $625, 125, \dots$;

б) $4, -2, \dots$.

Знайди перший член геометричної прогресії (b_n), у якій (927, 928):

927. а) $b_8 = 384, q = 2$;

б) $b_5 = 31,25, q = -2,5$.

928. а) $b_6 = 8, q = -2$;

б) $b_5 = 1, q = \frac{1}{3}$.

929. Знайди знаменник геометрична прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 2, b_5 = 162$;

б) $b_1 = 25, b_6 = -800$.

930. Find the common ratio of the geometric progression (b_n), if:

а) $b_1 = 3, b_8 = 384$;

б) $b_1 = -4, b_4 = 108$.

931. Знайди п'ятий член геометрична прогресії (b_n), якщо:

а) $b_3 = 1, b_4 = 0,5$;

б) $b_2 = 2, b_4 = 4$.

932. Знайди сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_5 = 80, b_6 = -160$;

б) $b_6 = 18, b_4 = 72$.

933. Знайди номер n -го члена геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 4, q = 3, b_n = 324$;

б) $b_1 = -8, q = 2, b_n = -256$.

934. Число 162 є членом геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = 2, q = 3$. Знайди номер цього члена.

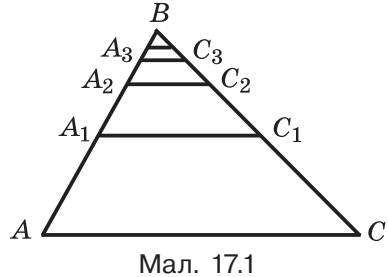
Напиши формулу n -го члена геометричної прогресії (935, 936).

935. а) $2, 6, 18, \dots$;

б) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, \dots$.

936. а) $1, \sqrt{2}, 2, \dots$; б) $64, -32, 16, \dots$

937. A_1C_1 — середня лінія $\triangle ABC$, A_2C_2 — середня лінія $\triangle A_1BC_1$, A_3C_3 — середня лінія $\triangle A_2BC_2$ і т. д. (мал. 17.1). Чи правильно, що довжини відрізків $AC, A_1C_1, A_2C_2, \dots$ утворюють геометричну прогресію?



938. У геометричній прогресії перший член b_1 , знаменник q . Знайди суму її n перших членів, якщо:

а) $b_1 = -3, q = 3, n = 6$;

б) $b_1 = 2,5, q = 0,4, n = 4$;

в) $b_1 = 4, q = -2, n = 10$;

г) $b_1 = \frac{5}{27}, q = 3, n = 6$.

939. Знайди суму n перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 1, q = 2, n = 9$;

б) $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}, n = 8$;

в) $b_1 = -\frac{1}{8}, q = 2, n = 10$;

г) $b_1 = 81, q = \frac{1}{3}, n = 8$.

940. Знайди суму перших шести членів геометричної прогресії:

а) $5, 10, \dots$;

б) $32, -16, \dots$;

в) $3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots$

941. Знайди суму восьми перших членів геометричної прогресії:

а) $1, 2, 4, 8, \dots$;

б) $1024, 512, 256, \dots$; в) $5, -5, 5, -5, \dots$

942. **ЗНО** Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших її членів дорівнює 65. Знайди перший член цієї прогресії.

943. **Старовинна задача.** Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на два тижні за таких умов: «За це я тобі першого дня заплачу 1 крб, другого — 2, третього — 3 і т. д., збільшуючи щоденну плату на 1 крб. Ти ж будеш подавати милостиню: першого дня 1 копійку, другого — 2, третього — 4 і т. д., збільшуючи щодня милостиню вдвічі». Багатій з радістю на це згодився, вважаючи умови вигідними. Скільки грошей одержав багатій?

944. **Задача Ейлера.** Чоловік, продаючи коня, запропонував покупцеві заплатити лише за цвяхи, якими прибито підкови до копит того коня. За перший цвях — 1 пфеніг, за другий — 2, за третій — 4 і т. д. — за кожний удвічі більше, ніж за попередній. За скільки він продавав коня, якщо цвяхів було 32?



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



945. $b_1, b_2, b_3, \dots$ — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q , якщо:
- а) $b_3 = 625$, $b_7 = 81$; б) $b_5 = 3$, $b_{10} = -27\sqrt{3}$;
 в) $b_4 = \frac{9}{32}$, $b_8 = \frac{1}{18}$; г) $b_4 = -6$, $b_7 = -2\frac{17}{32}$.
946. Запиши формулу n -го члена геометричної прогресії:
- а) 3, -6, ...; б) -0,1, -1, ...; в) 12, 8, ...; г) $\frac{2}{5}$, 4, ...
947. Чи є число 384 членом геометричної прогресії 3, 6, ...?
948. Число 64 є членом геометричної прогресії $\frac{4}{81}$, $\frac{8}{27}$, Знайди номер цього члена.
- Знайди перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), у якій (949, 950):
949. $b_1 + b_3 = 10$, $b_2 + b_4 = 30$.
950. $b_5 - b_1 = 15$, $b_4 - b_2 = 6$.
951. **ЗНО** Сума другого та четвертого членів зростаючої геометричної прогресії дорівнює 45, а їхній добуток — 324. Визнач перший член цієї прогресії.
952. Геометричну прогресію (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = (-3)^{n+2}$. Знайди суму чотирьох перших членів цієї прогресії.
953. Геометричну прогресію (x_n) задано формулою n -го члена $x_n = 3 \cdot 7^n$. Знайди суму чотирьох перших членів цієї прогресії.
954. Між числами $40\frac{1}{2}$ і $5\frac{1}{3}$ встав такі чотири числа, які разом з даними числами утворюють геометричну прогресію. Знайди її суму двома способами.
955. Між числами 8 і $60\frac{3}{4}$ встав такі чотири числа, які разом з даними числами утворюють геометричну прогресію. Знайди її суму двома способами.
956. Напиши кілька перших членів послідовності з такими властивостями: $b_1 = 1$, $b_n = 3b_{n-1}$. Напиши формулу її n -го члена. Знайди S_6 .
957. Напиши кілька перших членів послідовності з такими властивостями: $c_1 = 16$, $c_n = 0,5c_{n-1}$. Напиши формулу її n -го члена. Знайди S_8 .
- Знайди кількість членів скінченної геометричної прогресії (b_n), якщо (958, 959):
958. а) $q = -\frac{1}{3}$, $b_1 = 27$, $S_n = 20\frac{1}{3}$; б) $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

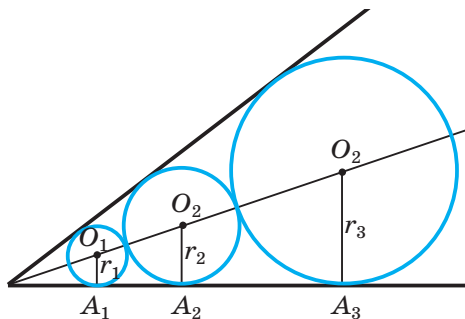
959. а) $q = \sqrt{3}$, $b_1 = 2\sqrt{3}$, $S_n = 26\sqrt{3} + 24$; б) $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$.
960. Знайди чотири числа, із яких три перших є послідовними членами геометричної прогресії, а три останніх — членами арифметичної прогресії, якщо сума крайніх чисел дорівнює 21, а сума середніх — 18.
961. Знайди три числа, які становлять геометричну прогресію, знаючи, що їх сума дорівнює 21, а добуток — 216.
962. П'ятий член геометричної прогресії дорівнює 1. Чому дорівнює добуток дев'яти її перших членів?
963. Шостий член геометричної прогресії дорівнює -2 . Чому дорівнює добуток одинадцяти її перших членів?
964. За якого значення x значення виразів $x - 2$, $x + 1$ і $3x - 3$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайди члени цієї прогресії.
965. За якого значення x значення виразів $x - 5$, $x - 1$ і $2x + 4$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайди члени цієї прогресії.
966. Знайди такі числа x , y , z , t , щоб послідовність x , y , -2 , z , -8 , t була геометричною прогресією.
967. Три числа, сума яких дорівнює 21, утворюють геометричну прогресію. Якщо до першого числа додати 1, до другого 3, а до третього 2, то одержані числа утворять арифметичну прогресію. Знайди ці числа.
968. Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 18. Якщо до них додати відповідно 1, 3 і 17, то одержані числа утворять геометричну прогресію. Знайди ці числа.
969. Доведи, що задана послідовність (x_n) є геометричною прогресією:
а) $x_n = 5 \cdot 2^{n+1}$; б) $x_n = 0,4^{1+n}$.
970. Доведи, якщо a , b , c — геометрична прогресія, то:
 $(a^2 + b^2)c = (b^2 + c^2)a$.

Дано геометричну прогресію $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$. Доведи, що геометричними прогресіями є також послідовності (971, 972):

971. а) $b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, \dots$; б) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_4, \dots$
972. $b_1 - b_2, b_2 - b_3, b_3 - b_4, \dots$
973. Числа геометричної прогресії 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 розмісти у дев'яти клітинках квадрата так, щоб їх добутки в кожному рядку, в кожному стовпчику і в кожній діагоналі дорівнювали один одному.
974. Після кожного руху поршня розріджувального насоса з посудини забирається 5 % наявного в ній повітря. Визнач тиск повітря всередині посудини після десяти рухів поршня, якщо початковий тиск був 760 мм рт. ст.

975. Чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника утворювати геометричну прогресію?

976. У гострий кут вписано n кіл, які дотикаються одне до одного (мал. 17.2). Доведи, що довжини їх радіусів утворюють геометричну прогресію. Від чого залежить її знаменник?



Мал. 17.2

977. Виведи формулу для обчислення добутку n перших членів геометричної прогресії.

978. Старовинна задача. Було це майже сто років тому. Селянин продавав 20 овець за 200 крб. Коли один із покупців почав надто довго торгуватися, селянин запропонував: «Дай за першу вівцю 1 коп., за другу — 2 коп., за третю — 4 коп. і далі за кожну вівцю вдвічі більше копійок, ніж за попередню». Покупець погодився. Скільки він заплатив за тих 20 овець?



979. Бактерія, потрапивши в організм, до кінця 20-ї хвилини ділиться на дві, кожна з них до кінця 20-ї хвилини знов ділиться на дві і т. д. Скільки бактерій в організмі буде за добу?

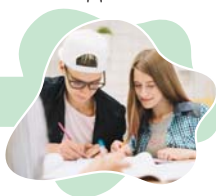
ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

980. Починаючи з якого номера члена геометричної прогресії:

а) 729, 243, ... усі її члени будуть меншими за 0,01;

б) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ... усі її члени будуть більшими за 5?

981. Уявімо, що на початку нашої ери жінка M народила дві дочки, кожна з них до 30 років так само народила дві дочки і т. д. Чи можливо це? Скільки б за таких умов нащадків M жило в наш час?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

982. Знайди область значень функції $y = x^2$, заданої на проміжку:

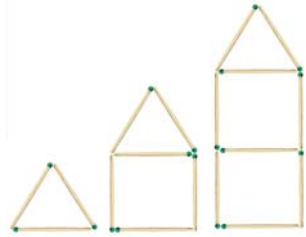
а) (0; 3); б) (-5; -3); в) [-2; 3); г) [-4; 4).

983. Маса одного куска металу 440 г, а другого — 429 г. Знайди густину кожного з цих металів, якщо густина першого на 1 г/см^3 більша, а об'єм на 5 см^3 менший, ніж другого.



984. На малюнку 17.3 зображено кілька фігур, складених із сірників (F_1, F_2, F_3). Уяви, що послідовність таких фігур продовжено. Скільки треба сірників, щоб скласти фігуру F_9 ?

Мал. 17.3



СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Розумію, що таке геометрична прогресія.
- ✓ Можу сформулювати означення геометричної прогресії.
- ✓ Можу навести приклади геометричних прогресій і встановити, чи є задана послідовність геометричною прогресією.
- ✓ Знаю, що таке знаменник геометричної прогресії. $q = b_{n+1} : b_n$
- ✓ Знаю, якими формулами задають геометричну прогресію:

$$\text{рекурентна: } b_1 = b, b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$$n\text{-го члена: } b_n = b_1 q^{n-1}$$

- ✓ Можу пояснити і сформулювати властивість геометричної прогресії.

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

- ✓ Знаю та вмію використовувати формулу суми перших n членів геометричної прогресії.

$$\text{Якщо } q \neq 1, \text{ то } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$$

$$\text{Якщо } q = 1, \text{ то } S_n = n \cdot b_1$$

- ✓ Умію задавати геометричну прогресію за даними її членами чи співвідношеннями між ними та знаходити невідомі члени геометричної прогресії.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке нескінченна послідовність;
- які послідовності називають зростаючими, а які — спадними;
- що таке геометрична прогресія;
- що таке наступний і попередній члени послідовності;
- якою формулою задають геометричну прогресію: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
- як обчислюють суму перших n членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

- що таке періодичний десятковий дріб і як його записують:

$$0,666666 = 0,(6)$$

- що таке модуль числа.

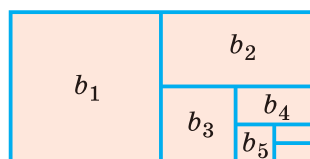
§ 18. Задачі на обчислення сум

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- сума перших n членів — *sum of the first n terms*
- сума усіх членів нескінченної геометричної прогресії — *sum of an infinitely decreasing geometric progression*

Досі ми не обчислювали суму нескінченного числа доданків, однак іноді є сенс розглядати і такі суми. Чому, наприклад, дорівнює сума всіх членів нескінченної геометричної прогресії $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$?

Нехай площа зображеного на малюнку 18.1 квадрата b_1 дорівнює 1, а площі прямокутників $b_2, b_3, b_4, \dots$ — відповідно $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Якщо



Мал. 18.1

кількість цих прямокутників збільшувати до нескінченності, то сума їх площ як завгодно близько наблизатиметься до числа 2. Тому вважають, що $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$.

Узагальнимо розглянутий приклад. Нехай дано нескінченну геометричну прогресію $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \dots$, знаменник якої $|q| < 1$. За відомою формулою,

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ або } S_n = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Тут число $\frac{b_1}{1 - q}$ стало, а n — змінне. Якщо $|q| < 1$, то при необмеженому збільшенні n степінь q_n прямує до 0 (пишуть: якщо $n \rightarrow \infty$, то $q^n \rightarrow 0$). При цьому і дріб $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$ прямує до 0.

Отже, якщо $n \rightarrow \infty$, $S_n \rightarrow \frac{b_1}{1 - q}$. Тому домовилися сумою нескінченної геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $|q| < 1$ вважати число $\frac{b_1}{1 - q}$.

Іншими словами, якщо $|q| < 1$ і $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots = S$, то $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Приклад 1. Знайди суму геометричної прогресії $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \dots$.

Розв'язання. Тут $b_1 = 4$, $q = -\frac{1}{3}$, тому шукана сума $S = \frac{4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$.

Відповідь. $S = 3$.

За допомогою формули $S = \frac{b_1}{1-q}$ нескінченні періодичні десяткові

дроби можна записувати у вигляді звичайних дробів.

Приклад 2. Запиши у вигляді звичайного дробу нескінченний періодичний десятковий дріб: а) $0,(2)$; б) $1,(6)$; в) $0,(23)$.

Розв'язання. а) $0,(2) = 0,2222\dots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots$

Отже, число $0,(2)$ можна подати у вигляді суми нескінченної геометричної прогресії, у якій $b_1 = \frac{2}{10}$, $q = \frac{1}{10}$.

$$\text{Тоді } 0,(2) = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots = \frac{0,2}{1-0,1} = \frac{0,2}{0,9} = \frac{2}{9}.$$

$$\text{б) } 0,(6) = 0,6666\dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots = \frac{0,6}{1-0,1} = \frac{0,6}{0,9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Отже, } 1,(6) = 1 + 0,(6) = 1\frac{2}{3}.$$

$$\text{в) } 0,(23) = 0,2323\dots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \dots = \frac{0,23}{1-0,01} = \frac{0,23}{0,99} = \frac{23}{99}.$$

Відповідь. а) $\frac{2}{9}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $\frac{23}{99}$.

Зверни увагу! Нескінченний десятковий періодичний дріб, ціла частина якого дорівнює нулю, а період стоїть одразу після коми, дорівнює звичайному дробу, чисельником якого є число, що стоїть у періоді, а знаменник містить стільки дев'яток, скільки цифр у періоді.

Подумай, як записати у вигляді звичайного дробу, наприклад, число $1,5(6)$.

Досі ми знаходили суми членів найпростіших послідовностей: арифметичної та геометричної прогресій. Нерідко виникає потреба обчислювати суми членів інших послідовностей. Розглянемо приклади.

Приклад 3. Знайди суму S перших ста членів послідовності

$$\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots$$

Розв'язання. Кожний член даної послідовності можна подати у вигляді різниці: $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, ...

$$\begin{aligned}\text{Отже, } S &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.\end{aligned}$$

Відповідь. $S = \frac{100}{101}$.

Приклад 4. Знайди суму квадратів n перших натуральних чисел.

Розв'язання. За формулою «куб двочлена», $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, звідси $3a^2 = (a+1)^3 - a^3 - 3a - 1$. Надаючи змінній a послідовно значення $1, 2, 3, \dots, n$, одержимо n правильних числових рівностей:

$$3 \cdot 1^2 = 2^3 - 1^3 - 3 \cdot 1 - 1,$$

$$3 \cdot 2^2 = 3^3 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 1,$$

$$3 \cdot 3^2 = 4^3 - 3^3 - 3 \cdot 3 - 1,$$

$$3 \cdot 4^2 = 5^3 - 4^3 - 3 \cdot 4 - 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$3n^2 = (n+1)^3 - n^3 - 3 \cdot n - 1.$$

Додавши почленно всі ці рівності (числа $2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3$ взаємно знищуються), одержимо тотожність:

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n+1)^3 - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n - 1.$$

Оскільки $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$ (за формулою суми n перших членів

арифметичної прогресії), то

$$\begin{aligned}3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) &= (n+1)^3 - \frac{3}{2}n \cdot (n+1) - (n+1) = (n+1)((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1) = \\ &= (n+1)(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1) = (n+1)(n^2 + \frac{1}{2}n) = \frac{n}{2} \cdot (n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

Отже, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} \cdot (n+1)(2n+1)$.

Відповідь. $\frac{n}{6} \cdot (n+1)(2n+1)$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зверни увагу на вираз $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$. Це сума перших членів геометричної прогресії з першим членом a^4 і знаменником $\frac{b}{a}$.

За формулою суми членів геометричної прогресії,

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \frac{a^4 \left(\frac{b^5}{a^5} - 1 \right)}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{a^5 - b^5}{a - b}.$$

Отже, $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Так само можна довести тотожності:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6).$$

І взагалі: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Формули «різниця квадратів» і «різниця кубів» — окремі випадки цієї загальної формули.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Числові послідовності. Урок 3).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. За якої умови геометричну прогресію називають нескінченно спадною?
2. За якою формулою знаходять суму нескінченної геометричної прогресії, у якій $|q| < 1$?
3. Чи існує сума членів нескінченної геометричної прогресії, знаменник якої більший за 1?
4. Як можна нескінченний періодичний десятковий дріб подати у вигляді звичайного дробу?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди суму $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$.

Розв'язання. Доданки цієї суми — члени геометричної прогресії, у якій перший член дорівнює 3, а знаменник $\frac{1}{3}$. Тому шукана сума

$$S = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Відповідь. 4,5.

2. Спрости вираз $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

Розв'язання. Помножимо і поділимо задану суму на 4. Одержимо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 11} + \frac{4}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{4}{(4n-1)(4n+3)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)} - \frac{1}{(4n+3)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(4n+3)} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4n+3-3}{3 \cdot (4n+3)} = \frac{4n}{4 \cdot 3 \cdot (4n+3)} = \frac{4n}{12 \cdot (4n+3)} = \frac{n}{3 \cdot (4n+3)}.$$

Відповідь. $\frac{n}{3 \cdot (4n+3)}.$

- 3.** Подай періодичний дріб $0,2(35)$ у вигляді звичайного.

$$0,2(35) = \frac{2}{10} + \left(\frac{35}{1000} + \frac{35}{100\,000} + \dots \right) = \frac{2}{10} + \frac{0,035}{1-0,01} = \frac{2}{10} + \frac{35}{990} = \frac{233}{990}.$$

Відповідь. $\frac{233}{990}.$

ВИКОНАЙ УСНО



- 985.** Знайди суму членів послідовності:

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

- 986.** Знайди суму ста членів арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 3, d = 0.$

- 987.** Чому дорівнює вираз: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10?$

А 4

Б 0

В -4

Г -5

- 988.** Як знайти суму 100 перших натуральних чисел?

- 989.** Чому дорівнює сума усіх цілих чисел від -100 до $100?$

А 200

Б 100

В 0

Г не можна

встановити

- 990.** Чи можна знайти суму чисел $2 + 6 + 18 + 54 + \dots?$

- 991.** Чому дорівнює сума нескінченної кількості доданків:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots?$$

А 1,25

Б 1,5

В 2

Г 2,5

- 992.** Чи існує сума членів нескінченної геометричної прогресії, знаменник якої більший за 1?

- 993.** Чому дорівнює сума членів нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



- 994.** Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:



а) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots;$

б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots;$

в) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots;$

г) $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \dots$

995. Знайди суму, доданками якої є послідовні члени геометричної прогресії:

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$;

б) $2 - \frac{2}{5} + \frac{2}{25} - \frac{2}{125} + \dots$;

в) $16 - 8 + 4 - 2 + \dots$;

г) $-1 - \frac{3}{4} - \frac{9}{16} - \dots$.

996. Задача Архімеда. Знайди суму нескінченної геометричної прогресії:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

997. Find the sum of the infinite geometric progression:

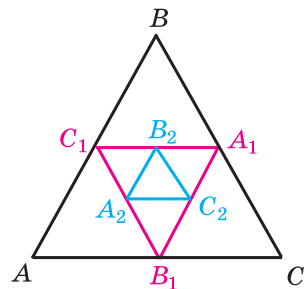
а) $3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$;

б) $6 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots$.

998. Подай у вигляді звичайного дробу нескінченні періодичні десяткові дробу: а) 0,3333... ; б) 0,6666...; в) 0,11111...; г) 0,131313...

999. Запиши нескінченний періодичний дріб у вигляді звичайного дробу: а) 0,(4); б) 0,(5); в) 0,(12); г) 0,(25).

1000. Дано рівносторонній трикутник зі стороною 1 см. Середини його сторін — вершини другого трикутника, середини сторін другого — вершини третього трикутника і т. д. (мал. 18.2). Знайди суму периметрів усіх цих трикутників.



Мал. 18.2

1001. Відкрита задача. Сформулюй і розв'яжи задачу про квадрати, подібну до задачі 1000.

1002. Задача Орема. Доведи, що:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \dots = \frac{7}{4}.$$

1003. Знайди суму нескінченного числа доданків:

$$(8 + 4\sqrt{2}) + (4 + 2\sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) + \dots$$

1004. Відомо, що $|a| < 1$, $|x| < 1$. Спростіть нескінченні суми:



а) $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$;

б) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Знайди суму членів нескінченної геометричної прогресії (1005, 1006).

1005. а) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \dots$;

б) $1, \pi - 3, (\pi - 3)^2, \dots$.

1006. а) $5\sqrt{5}$, 5, $\sqrt{5}$, 1, ...;

б) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$, ...

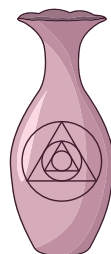
1007. Запиши таку нескінченно спадну геометричну прогресію, перший член якої дорівнює 3, а сума членів становить 4.

1008. Перший член нескінченно спадної геометричної прогресії на 8 більший, ніж другий, а її сума дорівнює 18. Знайди четвертий член цієї прогресії.

1009. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 1,5, а сума їх квадратів — 1,125. Знайди перший член і знаменник цієї прогресії.

1010. **ЗНО** Обчисли суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

1011. За малюнком знайди суму периметрів усіх трикутників і суму довжин усіх кіл (мал. 18.3).



Мал. 18.3

1012. Запишіть у вигляді звичайного дробу нескінченний періодичний десятковий дріб: а) 10,(4); б) 3,0(6); в) 0,(24); г) 1,4(7).

1013. Запиши у вигляді звичайного дробу число:
а) 3,(5); б) 21,(21); в) 1,1(6);

г) 10,00(52).

1014. У 1833 К. Гаусс разом із молодим талановитим фізиком винайшов перший у Німеччині електромагнітний телеграф і побудував його модель, за допомогою якої з'єднали фізичний кабінет Геттінгенського університету з обсерваторією. Установи відповідність між числовими виразами (1–5) та їх значеннями (А–Д), і ти дізнаєшся ім'я цього відомого фізика і зрозумієш, чия інша постать поруч із К. Гауссом відображає скульптурна композиція біля Геттінгенського університету.



1 0,(6) + 0,(7)

А $1\frac{5}{9}$

Р

2 0,(12) + 1,(5)

Б $1\frac{67}{99}$

Е

3 2,(36) – 1,(12)

В $1\frac{8}{33}$

Б

4 2,1(6) – 0,(45)

Г $1\frac{4}{9}$

В

5 0,(3) + 1,(2)

Д $1\frac{47}{66}$

Е

Розв'яжи рівняння (1015, 1016).

1015. $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^4 + \dots = \frac{7}{2}$, якщо $|x| < 1$.

1016. $1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{13}{6}$, якщо $|x| < 1$.

1017. Знайди суму перших сорока членів послідовності:

а) $\frac{41}{1 \cdot 2}, \frac{41}{2 \cdot 3}, \frac{41}{3 \cdot 4}, \frac{41}{4 \cdot 5}, \dots, \frac{41}{n(n+1)}, \dots$;

б) $\frac{3}{1 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 7}, \frac{3}{7 \cdot 10}, \frac{3}{10 \cdot 13}, \dots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}, \dots$

1018. Спростіть вираз:

а) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{3}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

1019. Знайди суму ста перших доданків:

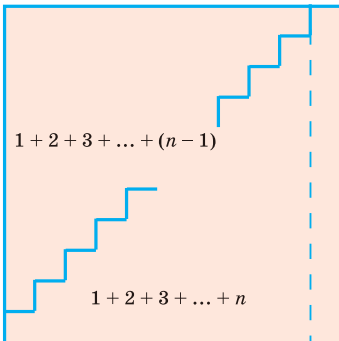
а) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + n(-1)^{n+1} + \dots$;

б) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + n^2(-1)^{n+1} + \dots$.

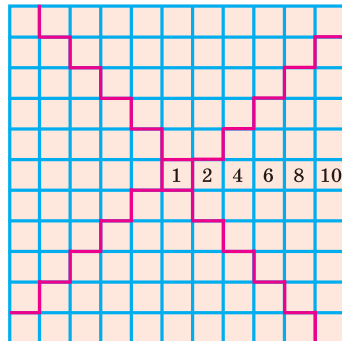
1020. Доведи тотожність:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 = n^2.$$

З'ясуй її геометричний зміст за малюнком 18.4.



Мал. 18.4



Мал. 18.5

1021. Доведи тотожність: $8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) + 1 = (2n + 1)^2$.

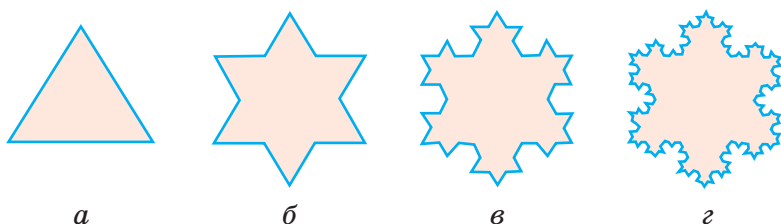
З'ясуй її геометричний зміст за малюнком 18.5.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1022. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює $3a$ (мал. 18.6, а). Поділивши його сторону на три рівні



відрізки, кожний середній з них замінимо ламаною, складеною з двох таких самих відрізків і кутом 60° між ними, як показано на малюнку 18.6, б. Кожну сторону утвореного зірчастого многокутника поділимо на три рівні відрізки і знову кожний середній із них замінимо подібною ламаною і т. д. Утворену в такий спосіб замкнену лінію називають *сніжинкою Коха*. Вважаючи рівносторонній трикутник першим членом послідовності сніжинок Коха, запиши послідовність: а) кількостей сторін сніжинок; б) довжин їх сторін; в) їх периметрів. Які з цих послідовностей є арифметичними або геометричними прогресіями?



Мал. 18.6

Знайди довжину сторони, периметр і площу третьої сніжинки Коха (мал. 18.6, в), утвореної з рівностороннього трикутника зі стороною 3 см. Чи існує сніжинка Коха, периметр якої удвічі (утричі) більший за периметр трикутника, з якого її утворено?

1023. Доведи тотожність:

а) $4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^2(n + 1)^2$;

б) $3(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots) + n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2)$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Розумію, що таке нескінченна геометрична прогресія.
- ✓ Можу навести приклади нескінченної геометричної прогресії.
- ✓ Розумію, що таке сума нескінченної геометричної прогресії ($|q| < 1$).
- ✓ Знаю та вмію використовувати формулу суми нескінченної геометричної прогресії.
$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ якщо } |q| < 1$$
- ✓ Умію записувати періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу.
$$0,(13) = \frac{0,13}{1 - 0,01} = \frac{13}{99}$$
- ✓ Хочу навчитися знаходити суми членів деяких числових послідовностей.

Перейди за посиланнями та

- підсумуй головне в розділі <https://vse.ee/czrs>
- ознайомся з історичними відомостями <https://vse.ee/czrw>

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



ВАРІАНТ I

1. Послідовність 3, 7, 11,... — арифметична прогресія. Визнач її 50-й член і суму перших п'ятдесяти членів.
2. Послідовність 2, -6, 18,... — геометрична прогресія. Визнач її шостий член і суму перших п'яти членів.
3. Знайди номер члена арифметичної прогресії (a_n), який дорівнює 136, якщо $a_1 = -8$ і $d = 6$.
4. Знайди знаменник геометричної прогресії (b_n), яка задана формулою n -го члена $b_n = 3 \cdot 2^{n+1}$.

ВАРІАНТ II

1. Послідовність 2, 7, 12,... — арифметична прогресія. Визнач її 40-й член і суму перших сорока членів.
2. Послідовність 2, -4, 8,... — геометрична прогресія. Визнач її сьомий член і суму перших шести членів.
3. Знайди номер члена геометричної прогресії (b_n), який дорівнює 3645, якщо $b_1 = 5$ і $q = 3$.
4. Знайди різницю арифметичної прогресії (a_n), яка задана формулою n -го члена $a_n = 3 - 12n$.

ВАРІАНТ III

1. Послідовність 5, 9, 13,... — арифметична прогресія. Визнач її 30-й член і суму перших тридцяти членів.
2. Послідовність 3, -6, 12,... — геометрична прогресія. Визнач її сьомий член і суму перших восьми членів.
3. Знайди номер члена арифметичної прогресії (a_n), який дорівнює 118, якщо $a_1 = -7$ і $d = 5$.
4. Знайди знаменник геометричної прогресії (b_n), яка задана формулою n -го члена $b_n = 5 \cdot 3^{n+1}$.

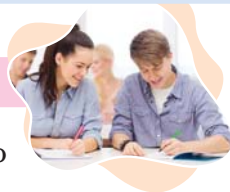
ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 4

1. Знайди сьомий член арифметичної прогресії, якщо $a_6 + a_8 = 20$.
А 5 Б 20 В 10 Г 15
2. Обчисли перший член геометричної прогресії, якщо $b_3 = 4$, а $b_4 = 2$.
А 2 Б 4 В 8 Г 16
3. Знайди п'ятий член послідовності, заданої формулою $a_1 = 2$,
 $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$.
А 162 Б 54 В 18 Г 93
4. Знайди суму нескінченної геометричної прогресії
 $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \dots$
А 3 Б $1\frac{1}{2}$ В $-\frac{3}{2}$ Г 1
5. Знайди суму всіх парних двоцифрових чисел.
А 2408 Б 2450 В 2440 Г 2430
6. Знайди добуток членів геометричної прогресії $b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$, якщо $b_4 = 2$.
А 4 Б 14 В 8 Г 60
7. Запиши формулу n -го члена арифметичної прогресії 2, 6,....
А $a_n = n^2 + n$ Б $a_n = 4n - 2$ В $a_n = 4n + 2$ Г $a_n = n - n^2$
8. Знайди суму перших шести членів геометричної прогресії, якщо $b_1 = 3$, $q = 2$.
А 197 Б 90 В 189 Г 93
9. Які два числа слід вставити між числами 2 і 31,25, щоб разом вони утворили геометричну прогресію?
А 5 і 12,5 Б 3 і 4,5 В 2,5 і 8 Г 3,5 і 4
10. Під яким номером у геометричній прогресії 3, 6,... міститься число 384?
А 7 Б 9 В 8 Г 10

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 4



1. Знайди шостий член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 4$, $a_2 = 14$.
 А 88 Б 64 В 54 Г 68
2. Знайди знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 16$, $b_3 = 4$.
 А 2 Б 2 або -2 В 0,5 Г 0,5 або $-0,5$
3. Знайди суму нескінченної геометричної прогресії 16, -4 , 1, $-\frac{1}{4}$,
 А 16 Б $5\frac{1}{3}$ В $12\frac{4}{5}$ Г $21\frac{1}{3}$
4. Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 7 - 3n$. Установи відповідність між умовами (1–3) та числовим значенням (А–Д), що відповідають цим умовам.

1	дев'ятий член прогресії	А -21
2	різниця прогресії	Б -20
3	сума перших шести членів прогресії	В -17
		Г -3
		Д 20
5. Починаючи з якого номера члени арифметичної прогресії $-3, 6; -3, 3; -3, \dots$ стануть додатними?
6. Знайди кількість n членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = \frac{3}{2}$, $q = 2$, $S_n = 1534,5$.
7. Знайди суму всіх натуральних чисел, які менші від 100 і діляться на 6.
8. За якого значення x значення виразів $x - 4$, $2x - 2$ і $7x - 1$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайди члени цієї прогресії.

Додаткове завдання

9. У саду одна дитина зірвала один персик, друга — два, а кожна наступна — на один персик більше. Потім усі, хто рвали персики, розділили їх між собою порівну і кожен одержав по 6 персиків. Скільки дітей рвали персики?

Розділ 4. ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

АБРАХАМ ВАЛЬД (1902–1950) — угорський математик і статистик. У сферу його наукових інтересів входили теорія прийняття рішень, економетрика, геометрія, математична статистика і теорія ймовірностей.



Статистика – це сукупність методів, які дають нам можливість приймати рішення в умовах невизначеності.

Абрахам Вальд

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

§ 19 Прості і складні відсотки
Simple percentages and compound percentages

§ 20 Елементи статистики. Способи подання даних та їх обробки
Elements of statistics. Methods of data presentation and processing

§ 21 Основні правила комбінаторики
Basic rules of combinatorics

§ 22 Частота та ймовірність випадкової події
Frequency and probability of a probably event

На практиці люди постійно мають справу з різними випадковими подіями або їх очікуванням. Щоразу виникає запитання, чи відбудеться та чи інша подія і за яких умов. У сучасному інформаційному суспільстві важливо вміти швидко отримувати потрібні відомості з різних джерел і правильно їх аналізувати. Під час розв'язування багатьох практичних задач виникає проблема вибору деякої сукупності об'єктів із заданих за певними їх властивостями, підрахування можливих комбінацій тощо. Ці та інші питання розглядаються в окремих математичних галузях — теорії ймовірностей, статистиці та комбінаториці.

Вивчаючи цей розділ, ти маєш можливість ознайомитися з основними поняттями комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— що таке відсоток 1% — сота частина

— які є правила для розв'язування задач на відсотки:

- знаходження відсотка від числа (щоб знайти відсоток від числа, треба число помножити на відсоток, що переведений в десятковий дріб);
- знаходження числа за його відсотком (щоб знайти число за значенням його відсотка, треба це значення поділити на відсоток, що переведений в десятковий дріб);
- знаходження відсоткового відношення (щоб знайти відсоткове відношення, треба знайти відношення, а потім помножити його на 100 %).

§ 19. Прості і складні відсотки

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- прості відсотки — *simple percentages / simple interest*
- складні відсотки — *compound percentages / compound interest*

Задача 1. Вечера в ресторані на 4 осіб коштувала 2400 грн. В рахунок додали одразу 8 % від вартості рахунку за обслуговування. Яку суму мають сплатити за обслуговування відвідувачі?

Кожну задачу на прості відсотки можна розв'язати декількома способами:

• *зведенням до одного відсотка:*

1) $2400 : 100 = 24$ (грн) — 1%

2) $24 \cdot 8 = 192$ (грн) — 8%

• *за правилами* (щоб знайти відсоток від числа, треба число помножити на відсоток, що переведений у десятковий дріб):

1) $2400 \cdot 0,08 = 192$ (грн)

• *за допомогою пропорції:*

$2400 \text{ грн} — 100\%$

$? \text{ грн} — 8\%$

$$2400 : x = 100 : 8$$

$$x = 2400 \cdot 8 : 100$$

$$x = 192 \text{ (грн)}$$

Відповідь: відвідувачі мають заплатити за обслуговування 192 грн.

Значну частку складніших задач, у яких йдеться про відсотки, можна розв'язати за допомогою рівняння чи системи рівнянь.



Задача 2. У трьох відділах бібліотеки зберігаються книжки. У другому відділі на 10 % більше книжок, ніж у першому, і на 30 % більше, ніж у третьому. Скільки книжок у кожному відділі, якщо у першому на 80 книжок більше, ніж у третьому?

Розв'язання. Нехай у третьому відділі буде x книжок, тоді у першому буде $x + 80$, а у другому $1,1(x + 80)$. Оскільки відомо, що у другому відділі на 30 % більше, ніж в третьому, то маємо рівняння:

$$1,3x = 1,1(x + 80)$$

$$1,3x - 1,1x = 88$$

$$0,2x = 88$$

$$x = \frac{88}{0,2} = 440 \text{ (кн.)} \text{ — у третьому відділі}$$

$$x + 80 = 440 + 80 = 520 \text{ (кн.)} \text{ — у першому відділі.}$$

$$1,1(x + 80) = 1,1 \cdot 520 = 572 \text{ (кн.)} \text{ — у другому відділі.}$$

Відповідь: 520, 572 та 440 книжки.

Складні відсотки

Задача 3. Вкладник поклав у банк a_0 грн під p %. Яка сума буде на його рахунку: через 1 рік; через 2 роки; через 3 роки; через n років?

Розв'язання. Якщо вкладник поклав у банк a_0 грн під p %, то у кінці першого року початковий капітал виріс на p % і складає $(100 + p)$ % від початкового вкладу. Отже, $a_1 = \left(\frac{p+100}{100}\right)a_0$ (грн) — сума на рахунку вкладника у кінці першого року.

2) У кінці другого року капітал виріс ще на p % і складає $(100 + p)$ % від вкладу першого року $a_1 = \left(\frac{p+100}{100}\right)a_0$.

Отже, $a_2 = \left(\frac{p+100}{100}\right)a_1 = \left(\frac{p+100}{100}\right)\left(\left(\frac{p+100}{100}\right)a_0\right) = \left(\frac{p+100}{100}\right)^2 a_0$ (грн) — сума на рахунку вкладника в кінці другого року.

3) Аналогічно розмірковуємо, що у кінці третього року капітал виріс ще на p % і складає $(100 + p)$ % від суми вкладу другого року $a_2 = \left(\frac{p+100}{100}\right)^2 a_0$.

Отже, $a_3 = \left(\frac{p+100}{100}\right)a_2 = \left(\frac{p+100}{100}\right)\left(\left(\frac{p+100}{100}\right)^2 a_0\right) = \left(\frac{p+100}{100}\right)^3 a_0$ (грн) — сума на рахунку вкладника в кінці третього року.

4) Розрахунки капіталу через n років подамо у вигляді схеми:

$$a_0 \xrightarrow{\text{через 1 рік}} \left(\frac{p+100}{100}\right)a_0 \xrightarrow{\text{через 2 роки}} \left(\frac{p+100}{100}\right)^2 a_0 \longrightarrow \dots \xrightarrow{n \text{ років}} \left(\frac{p+100}{100}\right)^n a_0.$$

Зверни увагу! $a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ **формула складних відсотків**, де

a_0 — початковий капітал, p — річна процентна ставка, a_n — на-
рощений капітал.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

В історії існує немало яскравих прикладів того, як невеликі суми перетворюються на величезний стан. Бенджамін Франклін (один із засновників США) перед своєю смертю заповідав по 5000 \$ двом своїм улюбленим містам: Бостону і Філадельфії, поклавши ці гроші в банк. За умовами заповіту, міста могли зняти гроші один раз через 100 років і другий — через 200. Першого разу міста могли зняти лише 500.000 \$, що вони і зробили. А в другий — вже всю суму, що залишилася. Через 200 років з рахунків міста зняли по 20.000.000 \$!



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Елементи прикладної математики. Урок 5).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які види задач на відсотки ти знаєш? Наведи приклад до кожного виду задач.
2. Як виглядає формула складних відсотків?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

Вкладник поклав у банк 5000 грн під певний відсоток річних на два роки. Нарощений капітал склав 5832 грн. Знайди відсоткову ставку банку, якщо нарахування відбувається за схемою складних відсотків.

Розв'язання. Оскільки нарахування відбувається за схемою складних

відсотків, то $a_n = \left(\frac{p+100}{100}\right)^n a_0$

$$5832 = \left(\frac{p+100}{100}\right)^2 \cdot 5000 \quad \text{або} \quad \left(\frac{p+100}{100}\right)^2 = \frac{5832}{5000}, \quad \text{тоді}$$

$$\left(\frac{p+100}{100}\right)^2 = \frac{729}{625} = \left(\frac{27}{25}\right)^2, \quad \text{маємо} \quad \frac{p+100}{100} = \frac{27}{25}, \quad \text{звідси} \quad p = 8.$$

Відповідь: відсоткова ставка складає 8 %.



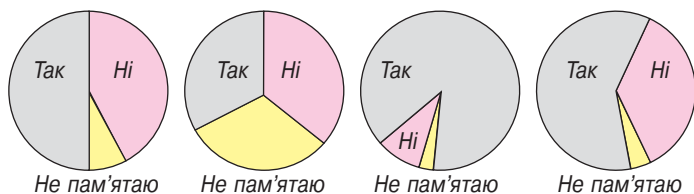
ВИКОНАЙ УСНО



1024. Переведи відсоток у десятковий дріб.

а) 3%; б) 14%; в) 50%; г) 67%; ґ) 100%; д) 120%; е) 157%.

- 1025.** 15% дорослих зазначили, що у їх 7-річних дітей немає власного мобільного телефону. Який відсоток батьків зазначили, що у їх 7-річних дітей він є?
- 1026.** Який відсоток становлять 24 грн з 100 грн?
- 1027.** Орія інвестувала 2000 грн під 10% річних. Скільки грошей вона заробить наприкінці року?
- 1028.** Дмитро мав 1000 грн, але витратив 40 % грошей. Яку суму він витратив?
- 1029.** В опитуваннях про те, хто з учнів ставив свічки вдома у День пам'яті жертв голодомору, 190 учнів із 240 відповіли, що ставили свічки о 16:00. Яка з діаграм (мал. 19.1) відповідає описаній ситуації?



Мал. 19.1



- 1030.** **ЗНО** У банку відкрили рахунок на 1000 грн під 20 % річних. Наприкінці кожного з перших двох років зберігання грошей у банку після нарахування відсотків вкладник додатково вносив ще a грн. На кінець третього року виявилось, що розмір вкладу збільшився порівняно з початковим вкладом на 300 %. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

- А** $((1000 \cdot 1,2 + a) \cdot 1,2 + a) \cdot 1,2 = 1000 \cdot 4$
- Б** $((1000 \cdot 0,2 + a) \cdot 0,2 + a) \cdot 0,2 = 1000 \cdot 4$
- В** $((1000 \cdot 1,2 + a) \cdot 1,2 + a) \cdot 1,2 = 1000 \cdot 3$
- Г** $((1000 \cdot 0,2 + a) \cdot 0,2 + a) \cdot 0,2 = 1000 \cdot 3$
- Д** $(1000 \cdot 1,2 + a) \cdot 2 = 1000 \cdot 3$

- 1031.** Скільки відсотків становить нова заробітна плата від початкової, якщо:
- а) вона зросла на 30%; б) вона зменшилася на 15%;
- в) вона збільшилась у 2 рази; г) вона зменшилась у 2 рази.
- 1032.** Як зміниться величина дробу, якщо чисельник збільшити на 100 %, а знаменник зменшити на 50 %?

- А зменшиться в 4 рази
 Б зменшиться в 2 рази
 В збільшиться в 2 рази
 Г збільшиться в 4 рази

1033. Проаналізуй продукти, що експортує Україна (мал. 19.2). Які висновки можна зробити на основі цієї діаграми за 2023 рік?



Мал. 19.2



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1034. Знайди, який відсоток становить:

- а) 369 від 900; б) 391 від 850; в) 920 від 400.

1035. Знайди, який відсоток становить:

- а) 207 від 900; б) 498 від 664; в) 144 від 32.

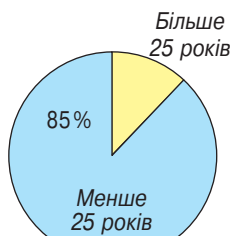
1036. Гра. Один з учасників / одна з учасниць записує число, інший / інша — відсоток, а третій / третя має знайти цей відсоток від записаного числа. Потім учні /учениці міняються ролями.

1037. Знайди: а) 51% від 300; б) 84% від 750; в) 148% від 325.

1038. Знайди число: а) 25% якого становить 16;
 б) 96% якого становить 24.

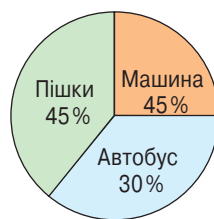
1039. Find the number: а) 6% of which is 3; б) 90% of which is 81.

1040. За діаграмою на мал. 19.3 знайди, скільки учасників опитування були молодшими за 25 років, якщо загалом опитали 60 осіб?



Мал. 19.3

1041. На діаграмі (мал. 19.4) відображено відсоток того, як діти добираються до школи. Відомо, що машиною добираються до школи 30 дітей. Знайди: а) скільки дітей опитали; б) скільки добираються пішки; в) скільки автобусом.



Мал. 19.4

1042. Під час проведення тесту на пам'ять з 20 запропонованих слів різні учасники / учасниці запам'ятали різну кількість слів. За таблицею знайди відсоток відтворення слів для кожного з учасників / учасниць.

№ учасника / учасниці	1	2	3	4	5
К-сть відтворених слів	18	17	13	12	20

- 1043.** Скільки грамів солі в 140 грамах 6% розчину?
- 1044.** У скількох грамах 8% розчину є 14 г солі?
- 1045.** У 600 г розчину є 24 г солі. Яка його процентна концентрація?

- 1046.** Шляхом випаровування з 20 г розчину отримали 4 г солі. Якої концентрації був розчин?

Маса розчину	Концентрація розчину	Маса солі
32		56
	25 %	3000
150	7 %	

- 1047.** Заповни порожні комірки таблиці, у якій вказано масу розчину, масу солі та концентрацію цього соляного розчину.

Початкова ціна	% подорожчання	Кінцева ціна
3000		5100
	15 %	2415
150	20 %	

- 1048.** Заповніть порожні комірки таблиці, де зазначено початкову ціну, % подорожчання та кінцеву ціну під час переоцінки в магазині.

- 1049.** Петро позичив другу гроші під 4 % річних. Через рік друг повернув йому 29 120 грн. Яку суму Петро позичив другові?

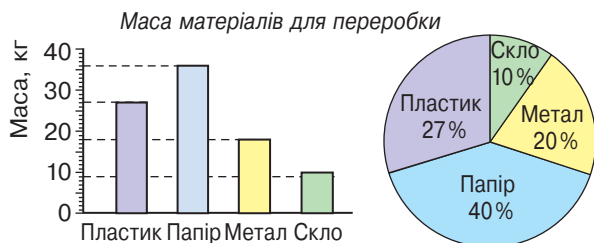
- 1050.** Пані Марина поклала у банк 23 000 грн під 12 % річних. Скільки грошей вона отримає через 2 роки, якщо нарахування відбувається за схемою простих відсотків?

- 1051.** Яка сума буде на терміновому вкладі через 3 роки, якщо банк нараховує 5 % річних, а початкова сума становить 10 000 грн? Нарахування відбувається за схемою простих відсотків.

- 1052.** Пан Олексій вирушив у подорож з 55 000 грн та витратив 65 % цієї суми. Скільки грошей у нього залишилося?

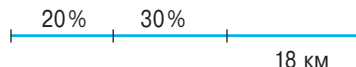
- 1053.** 20 % врожаю яблук зіпсувалося під час зберігання, але 360 кг яблук залишилося. Яка була маса початкового врожаю яблук?

- 1054.** Чи відповідає кругова діаграма стовпчастій (мал. 19.5)?



Мал. 19.5

- 1055.** Першого дня човнярі пропливли 20 % всього маршруту, другого дня — ще 35 % від усього маршруту. Третього дня вони здолали останні 18 км. Яка повна довжина маршруту? Доповни схему (мал. 19.6) і розв'яжи задачу.



Мал. 19.6

1056. На шкільному ярмарку виручили 18 000 грн, продаючи дві групи виробів: сувеніри та випічку. 25 % виручки від продажу сувенірів дорівнює одній п'ятій виручки від продажу випічки. Яка була виручка від кожного виду продукції? Склади рівняння до задачі та розв'яжи її.

- 1) Познач виручку від продажу сувенірів за x .
- 2) Вирази виручку від продажу випічки через x .
- 3) Склади рівняння, знаючи, що 25 % виручки від продажу сувенірів дорівнює одній п'ятій виручки від продажу випічки.

1057. На концерті продали квитків на 150 000 грн, продаючи два види квитків: звичайні та VIP. 30 % виручки від продажу звичайних квитків дорівнює одній п'ятій виручки від продажу VIP-квитків. Яка була виручка від кожного виду квитків?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1058. На скільки відсотків:



- а) планшет А дорожчий за планшет Б;
- б) планшет Б дешевий за планшет А (мал. 19.7)?



25 000 грн



20 000 грн

Мал. 19.7

1059. Розглянь дані про метрополітени України та знайди, на скільки відсотків:

- а) кількість станцій метрополітену у Дніпрі менша за їх кількість у Харкові;
- б) кількість станцій метрополітену у Києві більша за їх кількість у Харкові;
- в) довжина метрополітену у Кривому Розі більша за його довжину у Дніпрі;
- г) кількість ліній в Києві більша за кількість ліній у Дніпрі?

Відповіді округли до цілих.

Міста	Логотип	Дата відкриття	Кількість ліній	Кількість станція	Довжина, км
Київ		6 листопада 1960	3	52	67,8
Харків		23 серпня 1975	3	30	39
Кривий Ріг		26 грудня 1986	2	11	18
Дніпро		29 грудня 1995	1	9	7

- 1060.** Є два водно-сольові розчини. Перший містить 10 % солі, а другий — 25 % солі. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти, щоб отримати 900 г розчину з концентрацією 15 %? Доповни таблицю і розв’яжи задачу.

	Маса розчину	Концентрація	Маса солі
I	x	10 %	
II	$900 - x$	25 %	
Разом	900	15 %	

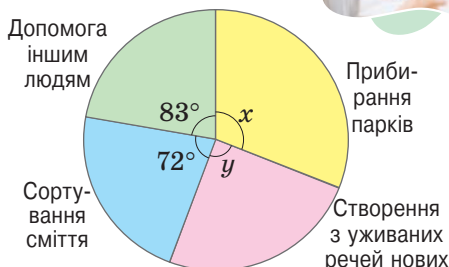
- 1061.** Є два розчини солі. Перший містить 12 % солі, а другий — 36 %. Скільки грамів кожного розчину потрібно змішати, щоб отримати 600 г розчину з концентрацією 24 %?
- 1062.** Фармацевт готує розчин, який складається з трьох компонентів: 60 % — сольовий розчин, 30 % — глюкоза, 10 % — дистильована вода. Відомо, що маса дистильованої води на 600 г менша, ніж маса глюкози. Скільки грамів кожної речовини міститься в готовому розчині?
- 1063.** Відкрита задача. На шкільному турнірі з настільного тенісу учнів було на 6 більше, ніж учениць. Якщо кількість учнів збільшити на 60 %, а кількість учениць — на 120 %, то їх стане порівну. Постав запитання до задачі та розв’яжи її.
- 1064.** У банк покладено 5000 грн під 20 % річних. Яка сума буде на рахунку через 2 роки, якщо нарахування відбуваються за схемою складних відсотків?
- 1065.** Марко поклав на депозит 8000 грн під 12 % річних із капіталізацією відсотків (тобто за схемою складних відсотків). Яку суму він матиме на рахунку через 3 роки?
- 1066.** Оля відкрила накопичувальний рахунок, поклавши 6000 грн під 10 % річних із щорічною капіталізацією. Через скільки років її депозит уперше перевищить 12 000 грн?
- 1067.** На перший рахунок покладено 8 000 грн під 10 % річних, а на другий — 7 500 грн під 20 % річних. На якому з рахунків через 3 роки сума буде більшою, якщо нарахування по обом відбувається за схемою складних відсотків?
- 1068.** Який капітал треба покласти у банк під 20 % річних, щоб через 3 роки одержати разом із відсотками 10000 грн за схемою складних відсотків? Відповідь округли до цілих гривень.
- 1069.** Пан Ігор та пані Лариса вклали по 10000 грн на рахунок в різні банки під 8 % річних. Банк пана Ігоря працює за схемою простих відсотків, а банк пані Лариси — за схемою складних відсотків. Знайди, скільки отримає кожен з них через 3 роки. Порівняй отримані суми.
- 1070.** Банк нарахував вкладнику 600 грн відсоткових грошей за рік. Доклавши 4400 грн до загальної суми, вкладник залишив ще на один

рік свої збереження у банку. В кінці року знову були нараховані відсотки. І тепер вклад разом з відсотками складає 25750 грн. Яку суму було покладено на депозит спочатку?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



1071. Учні можуть обрати один із 4 видів волонтерства. Який відсоток всіх учнів обирає сортування сміття? Знайди значення для x і y , якщо прибирання парків обирає 35 % всіх учнів (мал. 19.8).



Мал. 19.8

1072. Виробництво продукції за перший рік роботи заводу зросло на p %, а за наступний рік — на 10 % більше порівняно з попереднім роком. На скільки відсотків зросло виробництво продукції за перший рік, якщо відомо, що за два роки воно зросло всього на 48,59 %?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1073. Розв'яжи нерівність.

а) $(x - 1)(2 - x) > 0$;

б) $(3 + x)(x + 7) < 0$.

1074. Побудуй графік рівняння:

а) $2x + 3y = 6$;

б) $xy = 12$; в) $y^2 - x^2 = 0$.

1075. Розв'яжи систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} \frac{4}{x-2} - \frac{1}{y-6} = 0, \\ \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{3}{x+3} - \frac{2}{y} = 0, \\ \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 1. \end{cases}$$

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу розрізняти, до якого виду задачі відноситься задача, що містить відсотки.
- ✓ Вмію розв'язувати задачі на розчини і сплави.
- ✓ Знаю, як розв'язувати задачі на прості і складні відсотки.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— що таке середнє арифметичне двох чисел a і b або n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$;

$$\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

— як будують стовпчасті та кругові діаграми.

§ 20. Елементи статистики. Способи подання даних та їх обробки

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- вибірка — *sample*;
- частотна таблиця — *frequency table*;
- середнє значення вибірки — *sample mean*;
- гістограма — *histogram*;
- мода — *mode*;
- медіана — *median*

Науку, в якій досліджують кількісні характеристики масових явищ, називають **математичною статистикою** (від латинського слова *status* — стан, становище).

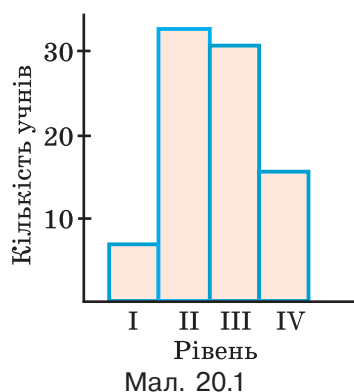
Приклад 1. Із 87 дев'ятикласників однієї школи 7 мають оцінки, що відповідають I рівню навчальних досягнень, 33 — II, 31 — III і 16 — IV рівню. Це — кількісні характеристики проведеної тематичної роботи. Їх можна подати у вигляді таблиці.

Рівень навчальних досягнень	I	II	III	IV
Кількість учнів	7	33	31	16

Наочно зобразити ці дані можна за допомогою стовпчастої діаграми (мал. 20.1).

Стовпчасті діаграми у статистиці називають **гістограмами** (від грецьких слів *histos* — стовп, *gramma* — написання).

У розглянутому прикладі йдеться про 87 учнів. Справа значно ускладнюється, якщо досліджують *масові явища*, що охоплюють тисячі або й мільйони досліджуваних об'єктів. Наприклад, взуттєвикам треба знати, скільки взуття слід випускати того чи іншого розміру. Як це з'ясувати? Опитати всіх, тобто десятки мільйонів чоловіків і жінок, — надто дорого і довго. Тому роблять *вибірку* — формують скінченну сукупність незалежних



Мал. 20.1

результатів спостережень. У даному випадку опитують вибірково лише кілька десятків чи сотень людей.

Приклад 2. Припустимо, що, опитавши 60 жінок, розміри їхнього взуття записали в таблицю.

23,5	24	23,5	23	24,5	23	22,5	24,5	22,5	23,5	23,5	23,5
25,5	21	24	25	23,5	22	23	24,5	23	24,5	23	24,5
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5	22	23,5	26,5	25,5	25	26
24	23	24	24,5	22	24	23,5	21,5	23,5	25	24	22,5
25,5	21,5	24,5	26	25	23,5	22,5	24	23	22,5	24	25

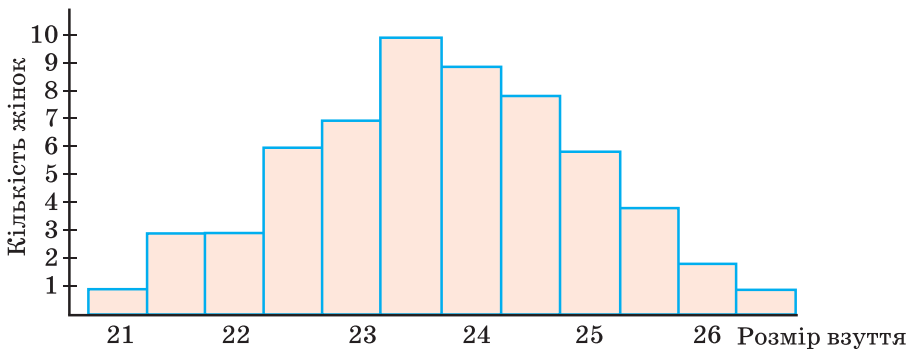
Це вибірка із 60 значень (даних). Для зручності їх групують у класи (за розмірами взуття) і відмічають, скільки значень вибірки містить кожний клас.

Розмір взуття	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5
Кількість жінок	1	3	3	6	7	10	9	8	6	4	2	1

Такі таблиці називають **частотними**. У них числа другого рядка — частоти; вони показують, як часто трапляються у вибірці ті чи інші її значення.

Відносною частотою значення вибірки називають відношення частоти значення до кількості усіх значень вибірки, виражене у відсотках. У розглянутому прикладі частота розміру взуття 24 дорівнює 9, а відносна частота — 15 %, бо $9 : 60 = 0,15 = 15 \%$.

За частотною таблицею можна побудувати гістограму (мал. 20.2). Вона наочно показує, яку частину взуття бажано випускати того чи іншого розміру. Зрозуміло, що одержані в такий спосіб висновки тільки ймовірні, наближені. Але для практичних потреб цього буває досить. Деякі статистичні дані зручно подавати за допомогою графіків.



Мал. 20.2

Вибірки характеризують *центральними тенденціями*: модою, медіаною, середнім значенням.

Для того, щоб було простіше знаходити центральні тенденції вибірки, елементи вибірки записують у вигляді *варіаційного ряду* – упорядкованої сукупності усіх значень вибірки, записаних у порядку зростання або спадання.

Мода вибірки — це те її значення, яке трапляється найчастіше.

Медіана вибірки — це число, яке «поділяє» навпіл упорядковану сукупність усіх значень вибірки, тобто варіаційний ряд.

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне усіх її значень.

Нехай дано вибірку: 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6, 4. (*)

Упорядкуємо її: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6.

Мода даної вибірки дорівнює 4, оскільки 4 трапляється найчастіше (тричі).

Медіана даної вибірки дорівнює 3, бо число 3 «поділяє» варіаційний ряд навпіл: перед нею і після неї — однакові кількості членів варіаційного ряду.

Якщо варіаційний ряд має парне число значень, то її медіана дорівнює півсумі двох її серединних значень. Наприклад, для вибірки 1,

2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6 медіана $m = \frac{3+4}{2} = 3,5$.

Середнє значення вибірки (*): $\frac{1+1+2+2+3+3+4+4+4+5+6}{11} = \frac{35}{11}$.

Вибірka може не мати моди, наприклад: 4, 5, 6, 7, 8;

мати дві моди: 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Елементи прикладної математики. Урок 3, 4).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що досліджує математична статистика?
2. Що називають гістограмою?
3. Які явища називають масовими?
4. Що називають: а) вибіркою; б) частотою вибірки?
5. Назвіть центральні тенденції вибірки.
6. Що називають: а) середнім значенням; б) медіаною; в) модою вибірки?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Перевірка інспекцією якості 20 твердих сирів сорту «Український» (за вмістом жиру) дала такі результати.



Знайди центральні тенденції вибірки.

Розв'язання. Мода даної вибірки дорівнює 47, бо це значення трапляється найчастіше (7 разів).

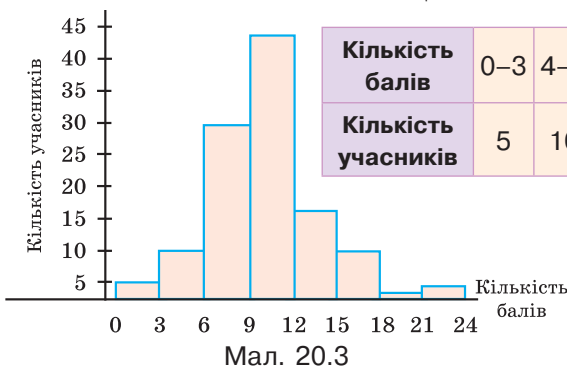
Вибірка має парне число значень, тому її медіана дорівнює півсумі двох її серединних значень варіаційного ряду — членів під десятим і одинадцятим номерами, бо всього членів вибірки 20. Цим номерам у вибірці (44; 45; 45; 45; 45; 46; 46; 46; 46; 47...) відповідають значення 46 і 47. Отже, $(46 + 47) : 2 = 46,5$ — медіана вибірки. Знайдемо середнє значення вибірки:

$$\frac{44 \cdot 1 + 45 \cdot 4 + 46 \cdot 5 + 47 \cdot 7 + 48 \cdot 3}{20} = \frac{927}{20} = 46,35.$$

Відповідь. Мода — 47; медіана — 46,5; середнє значення — 46,35.

- 2.** За розв'язування задач п'ять учасників олімпіади одержали від 0 до 3 балів, десять — від 4 до 6, тридцять — від 7 до 9, сорок чотири — від 10 до 12, шістнадцять — від 13 до 15, десять — від 16 до 18, два — від 19 до 21, три — від 22 до 24 балів. Склади частотну таблицю і побудуй відповідну гістограму.

Розв'язання. Частотна таблиця має такий вигляд:



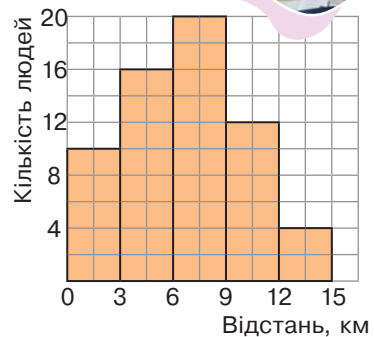
Відповідну гістограму наведено на малюнку 20.3.

ВИКОНАЙ УСНО



- 1076.** За гістограмою (мал. 20.4) знайди:
а) скільком людям добиратися до роботи від 12 до 15 км; б) скільком добиратися менше 6 км; в) скільки людей опитали; г) моду вибірки.

- 1077.** Знайди моду і медіану вибірки:
а) 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 11;
б) 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15, 16, 17.



1078. За тиждень продали спортивні костюми таких розмірів: 46, 48, 44, 52, 48, 50, 48, 46. Знайди моду цього ряду.

А 44

Б 46

В 48

Г 50

1079. Левко на тренуванні з плавання за тиждень показав такі результати: 400 м, 430 м, 450 м, 500 м, 550 м, 600 м, 645 м. Знайди медіану цієї вибірки.

А 450 м

Б 500 м

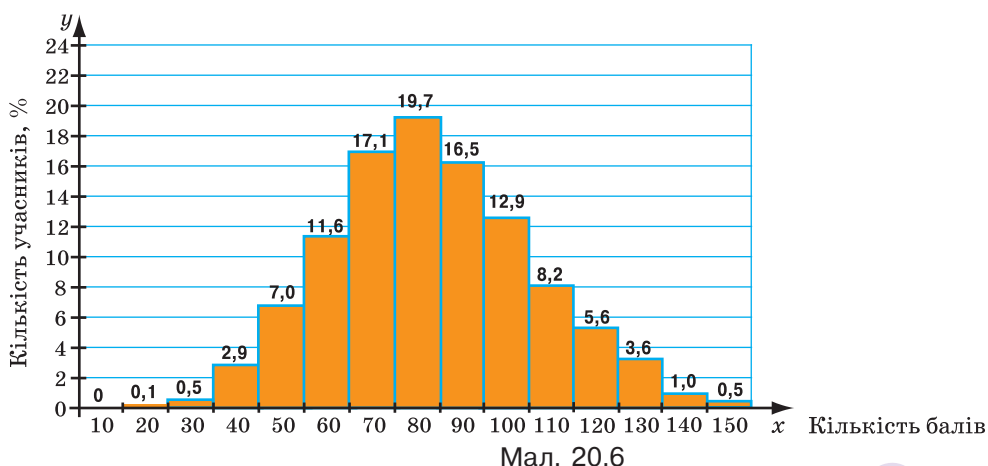
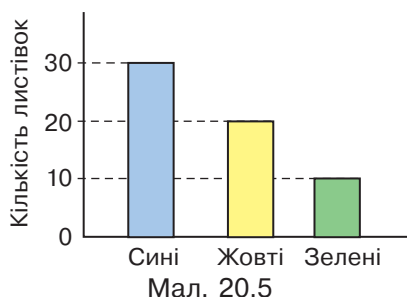
В 550 м

Г 465 м

1080. На діаграмі на мал. 20.5 подано кількість листівок кожного кольору. Знайди моду та середнє арифметичне цієї вибірки.

1081. У конкурсі «Кенгуру» брали участь 2000 осіб рівня «Кадет».

На мал. 20.6 зображено відповідність між кількістю учасників (%) і кількістю балів, яку вони набрали. Яку інформацію про результати конкурсу можна одержати за допомогою даної гістограми?



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1082. Гра. Кожен з трьох учасників / учасниць по черзі записує число, а четвертий / четверта знаходить середнє арифметичне утвореної вибірки. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

1083. Знайди моду, медіану і середнє значення вибірки (1083–1084).

а) 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 11;

б) 12, 17, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 13, 13.



1084. а) 5, 5, 6, 6, 7, 11, 11, 11, 11, 15, 15, 17;
б) 5, 7, 9, 9, 17, 19, 12, 33, 19, 16, 16, 22, 16, 6, 10.

1085. Укажи центральні тенденції вибірки і відносну частоту кожного її значення, якщо вибірку подано у формі такої частотної таблиці.

t	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
Кількість	1	3	6	17	13	8	2

1086. Вимірявши зріст 40 учнів у сантиметрах, одержали таку частотну таблицю.

Зріст, см	162	163	164	165	166	167	168	169	170
Кількість учнів	3	5	4	2	6	10	6	3	1

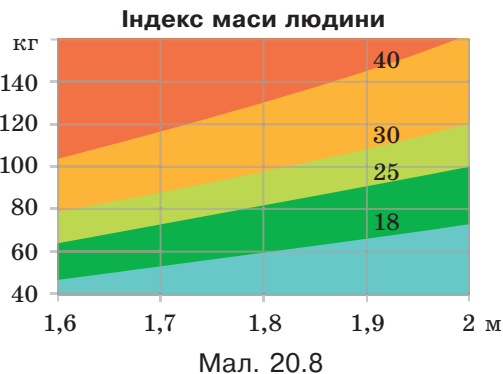
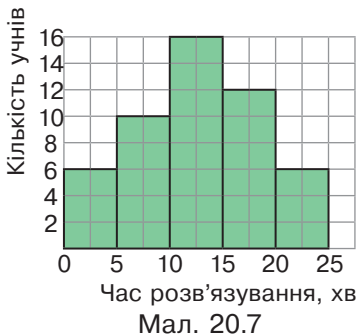
Укажи центральні тенденції вибірки і відносну частоту кожного її значення. Побудуй відповідну гістограму.

1087. У учнів 9 класу запитали, скільки часу вони витрачають на виконання домашнього завдання. Отримали такі результати:

1 год 20 хв, 1,5 год, 2 год, 1 год, 1,5 год, 2,5 год, 1 год, 1,5 год, 3 год, 2 год, 1 год 40 хв, 1,5 год, 2 год, 1 год, 2 год, 2,5 год, 1 год, 1,5 год, 2 год, 2 год. Установи відповідність між мірами центральної тенденції заданої вибірки (1–3) та їх числовими значеннями (А–Д).

- | | |
|--------------------|------------|
| 1 мода | А 1,6 год |
| 2 медіана | Б 1,5 год |
| 3 середнє значення | В 1,8 год |
| | Г 1,76 год |
| | Д 2 год |

1088. Накресли в зошиті частотну таблицю, що відповідає гістограмі, де подано, скільки часу знадобилося учням для розв'язування певної задачі (мал. 20.7).



1089. На малюнку 20.8 задано середні норми індексу маси людини, незалежно від віку, статі та інших індивідуальних характеристик. Дізнайся, за якою формулою визначається індекс маси людини. Обчисли його для себе і перевір за графіками, що відповідають твоєму віку, статі тощо.

- 1090.** У таблиці подано відсотки, що характеризують кількість учнів 10-х класів у США, які щодня курять. В Excel побудуй відповідну гістограму та графік. Які висновки можна зробити за цими даними?

2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
6,6	5,5	5,0	4,4	3,2	3,0	1,9	2,2	1,8	1,8	1,2	0,8	0,7	1,0

- 1091.** Даринка, складаючи НМТ, отримала такі бали: 194, 190, 186 і 190. А її подруга отримала 165, 160, 176 і 155. У кого з дівчат середній бал вищий і на скільки?

- 1092.** Дано 100 чисел; з них число 2 трапляється 15 разів, число 4 — 40, число 8 — 20, число 9 — 20, число 10 — 5 разів. Знайди їхнє середнє арифметичне.

- 1093.** **ЗНО** У таблиці відображено інформацію про ціну та кількість зошитів, придбаних за цією ціною Олексієм. За даними таблиці визначте середню ціну (у грн) одного зошита з придбаних Олексієм.

Ціна одного зошита, грн	8	10	12
Кількість зошитів	9	4	7

- 1094.** **НМТ** Партія складалася з 9 кавунів середньою масою 12 кг. До цієї партії додали один херсонський кавун масою 23 кг. Визнач середню масу (у кг) партії з 10 кавунів.

- 1095.** Учні / учениці класу написали діагностувальну роботу з алгебри. З них 4 одержали оцінки четвертого рівня навчальних досягнень, 16 — третього, 12 — другого, 13 — першого рівня. Зведи ці дані в таблицю і побудуй за нею кругову і стовпчасту діаграми.

- 1096.** Визначаючи розміри верхнього одягу 50 жінок, результати записали в таблицю.

50	44	50	48	54	46	52	48	54	52
48	48	52	50	46	50	54	48	56	50
52	48	42	56	50	48	50	46	54	48
46	46	48	48	52	48	56	50	52	46
52	48	50	54	50	50	54	44	58	46

Склади частотну таблицю і побудуй відповідну гістограму. Укажи міри центральної тенденції вибірки.

- 1097.** Проведи опитування 30 хлопців твоєї школи про розмір їхнього взуття. Результати запиши у таблицю, аналогічну попередній задачі. Склади частотну таблицю і побудуй відповідну гістограму. Укажи міри центральної тенденції вибірки.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

- 1098.** Щоб з'ясувати, скільки і яких кашкетів слід пошити, виміряли в сантиметрах обводи голів 35 вибраних

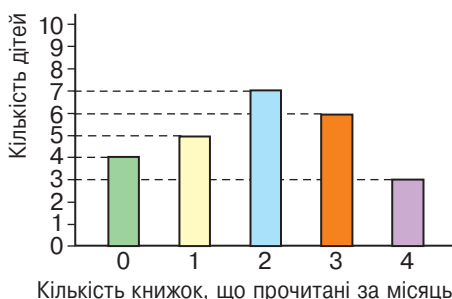


курсантів. Результати виявилися такими.

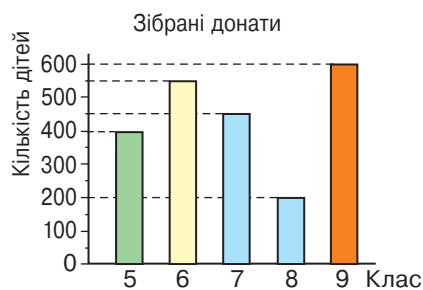
Побудуй відповідну гістограму та обчисли центральні тенденції вибірки. Знайди відносну частоту кожного значення даної вибірки.

Розмір	53	54	55	56	57	58	59
Кількість курсантів	1	7	10	12	3	1	1

- 1099.** За діаграмою на мал. 20.9, що вказує, яка кількість дітей прочитала скільки книжок за місяць, знайдіть: а) моду вибірки; б) медіану вибірки; в) середнє арифметичне вибірки.



Мал. 20.9



Мал. 20.10

- 1100.** За діаграмою на мал. 20.10, що вказує, яка кількість грошей була зібрана за місяць кожним класом, знайди: а) моду вибірки; б) медіану вибірки; в) середнє арифметичне вибірки.

- 1101.** На уроці фізкультури дівчата 9 класу у стрибках у висоту показали такі результати: 90 см, 125 см, 125 см, 130 см, 130 см, 135 см, 135 см, 135 см, 135 см, 140 см, 140 см. Знайди моду, медіану і середнє значення вибірки. Який результат найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат цього класу?

- 1102.** During physical education class, ninth-grade girls achieved the following results in the standing long jump: 135 cm, 120 cm, 115 cm, 135 cm, 130 cm, 125 cm, 120 cm, 120 cm, 135 cm, 105 cm, 130 cm, 120 cm. Find the mode, median, and mean of the sample.

- 1103.** У класі 30 учнів /учениць. Середній бал за тематичну роботу, написану 27 учнями, становив 8 балів. Три учні писали цю роботу в інший день і отримали 7, 8 і 12 балів. Яким був би середній бал за тематичну роботу, якби всі учні /учениці писали її в один день?

- 1104. НМТ** У дитячому таборі відпочивають 10 дівчат і 5 хлопців. Відомо, що середній зріст дівчат складає 142,3 см, а середній зріст хлопців — 138,4 см. Знайди середній зріст (у см) усіх дітей у таборі.

- 1105. НМТ** Компанія виділила кошти на закупівлю 70 дерев: 50 каштанів по 1600 грн кожний і 20 ялинок. Середня ціна одного дерева складає 1500 грн. Знайди вартість однієї ялинки (у грн).

1106. Шість учасників математичної олімпіади за розв'язування задач набрали менше 3 балів, десять — від 3 до 6, тридцять два — від 7 до 9, сорок п'ять — від 10 до 12, сімнадцять — від 13 до 15, вісім — від 16 до 18, п'ять — понад 18 балів. Склади за цими результатами частотну таблицю і побудуй відповідну гістограму.

1107. Пекарня випікає кілограмові калачі. Під час перевірки виявилося, що маса трьох зі ста калачів менша від 1 кг на 31–40 г, п'ятнадцяти — на 21–30 г, двадцяти — на 11–20 г, тридцяти — на 1–10 г; маса сімнадцяти калачів більша від 1 кг на 1–9 г, а двох — на 10–19 г. Склади частотну таблицю і побудуй відповідну гістограму.

1108. Розміри денної виручки (у тисячах гривень) у 30 випадково вибраних магазинах такі:

42	24	49	76	45	27	39	21	58	40
28	78	44	66	20	62	70	81	7	68
99	76	63	87	65	104	46	20	72	93

Склади частотну таблицю на 5 інтервалів і побудуй відповідну гістограму.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1109. Проведи опитування учнів вашого класу за допомогою



Google форми і з'ясує, скільки ліжок є в оселі кожного



з ваших однокласників. За отриманими даними склади частотну таблицю і побудуй відповідну гістограму у Excel. Визнач відносну частоту кожного значення вибірки.

1110. Склади таблицю в Excel про споживання електроенергії за минулий рік у твоїй родині. Обчисли, скільки в середньому споживає ваша родина електроенергії: а) за місяць; б) за кожний квартал; в) за кожну пору року.

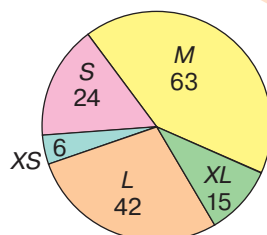
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1111. На діаграмі (мал. 20.11) подано розміри постійних клієнтів певного бренду. Бренд планує запустити нову лінію футболок загальною кількістю 1000 штук. Скільки з них має бути кожного розміру?

1112. Розв'яжи нерівність.

а) $2(3x - 1) + 4(x + 3) > 1 + 5x$;

б) $x^2 + 8x < 0$; в) $x^2 - 4 < 0$.



Мал. 20.11

1113. Розв'яжи рівняння.

а) $(x - 1)(x - 5) + (x + 3)^2 = x^2 + 18$;

б) $(x - 2)^2 + (x + 1)^2 = (x + 3)(x - 1) + 8$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу знаходити, відбирати і впорядковувати інформацію з доступних джерел.
- ✓ Знаю способи подання даних та їх обробки.
- ✓ Можу подавати статистичні дані у вигляді таблиць, діаграм, графіків.
- ✓ Умію розв'язувати задачі, що передбачають подання даних та їх обробку.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке множина і підмножина;
- що таке цифра і число;
- що таке сума чисел a і c
- що таке добуток чисел a і c

$$a + c$$

$$a \cdot c$$

§ 21. Основні правила розв'язування комбінаторних задач

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- комбінаторні задачі — *combinatorial problems*
- правило суми — *sum rule*
- правило добутку — *product rule*

Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору та розташування елементів деякої скінченної множини відповідно до заданих правил.

Розглянемо два основних правила, за допомогою яких розв'язують багато задач із комбінаторики.

Приклад 1. У місті N є два університети — політехнічний і економічний. Абітурієнту подобаються три факультети в політехнічному університеті і два — в економічному. Скільки можливостей має абітурієнт для вступу в університет?

Розв'язання. Позначимо буквою A множину факультетів, які обрав абітурієнт в політехнічному університеті, а буквою B — в економічному. Тоді $A = \{m, n, k\}$, $B = \{p, s\}$. Оскільки ці множини не мають спільних елементів, то загалом абітурієнт має $3 + 2 = 5$ можливостей вступати до університету.

Описану ситуацію можна узагальнити у вигляді твердження, яке називають **правилом суми**.

Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B — n способами, то елемент із множини A або ж із множини B можна вибрати $m + n$ способами.

Правило суми поширюється і на більшу кількість множин.

Приклад 2. Плануючи літній відпочинок, родина визначилася з місцями його проведення: в Одесі — 1, в Скадовську — 3, в Яремчі — 2, у Затоці — 2. Скільки можливостей вибору літнього відпочинку має родина?

Розв'язання. Оскільки всі бази відпочинку різні, то для розв'язання задачі досить знайти суму елементів усіх множин, про які йдеться: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$. Отже, родина може обирати відпочинок з 8 можливих.

Розглянемо задачі, що стосуються іншого правила.

Приклад 3. У господарстві є 2 каstrулі однакових розмірів і 3 кришки до них? Скільки є способів обрати каstrулю і кришку для варіння борщу?

Розв'язання. Каstrулю можна обрати двома способами. Кришку можна обрати трьома способами. До кожної з каstrул можна обрати по 3 кришки. Тобто усього є 6 варіантів.



Узагальнимо описану ситуацію.

Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий — n способами, то таку пару можна вибрати $m \cdot n$ способами.

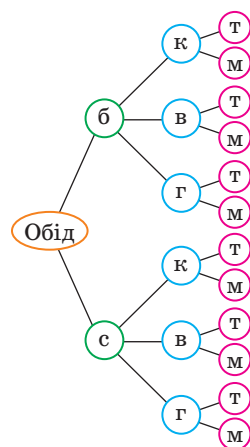
Це — **правило добутку**, його часто називають основним правилом комбінаторики. Зверни увагу: ідеться про впорядковані пари, складені з різних компонентів.

Правило добутку поширюється і на впорядковані трійки, четвірки та будь-які інші впорядковані скінченні множини. Зокрема, якщо перший компонент упорядкованої трійки можна вибрати m способами, другий — n способами, третій — k способами, то таку впорядковану трійку можна вибрати $m \cdot n \cdot k$ способами. Наприклад, якщо їдальня на обід приготувала перші страви — борщ (б) і суп (с), другі — котлети (к), вареники (в), голубці (г) і 2 десертні — тістечка (т) і морозиво (м), то всього із трьох страв їдальня може запропонувати 12 різних наборів, оскільки $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Описаній ситуації відповідає діаграма, зображена на малюнку 21.1. Такі діаграми називають *деревами*.

Приклад 4. Скільки різних поїздів можна скласти з 6 вагонів, якщо кожний з вагонів можна поставити на будь-якому місці?

Розв'язання. Першим можна поставити будь-який із 6 вагонів. Маємо 6 виборів. Другий вагон можна вибрати з решти 5 вагонів. Тому за правилом множення два перших вагони можна вибрати $6 \cdot 5$ способами. Третій вагон можна вибрати з 4 вагонів, що залишилися. Тому три перших вагони можна вибрати $6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Продовжуючи подібні міркування, приходимо до відповіді: усього можна скласти $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ різних поїздів.



Мал. 21.1

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зверни увагу на розв'язання останньої задачі. Воно звелось до обчислення добутку всіх натуральних чисел від 1 до 6. У комбінаториці подібні добутки обчислюють часто.

Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n називають n -факторіалом і позначають $n!$

Наприклад:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Домовились вважати, що $1! = 1$ і $0! = 1$.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Елементи прикладної математики. Урок 1).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які задачі називають комбінаторними?
2. Що називають комбінаторикою?
3. Сформулюй: а) правило суми; б) основне правило комбінаторики.
4. Наведи приклад діаграми-дерева.
5. Що називають факторіалом? Як його позначають?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. У розіграві на першість міста з баскетболу беруть участь команди з 12 шкіл. Скількома способами можуть бути розподілені перше і друге місця?

Розв'язання. Перше місце може одержати одна з 12 команд. Після того, як визначено володаря першого місця, друге місце може отримати



мати одна з 11 команд. Отже, загальна кількість способів, якими можна розподілити перше і друге місця, дорівнює $12 \cdot 11 = 132$.
Відповідь. 132.

- 2.** Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо жодна цифра не повторюється?

Розв'язання. Першою цифрою числа може бути одна з 5 цифр: 1, 2, 3, 4, 5 (бо 0 на першому місці стояти не може). Якщо перша цифра обрана, то друга може бути обрана 5-ма способами (уже включаємо 0), третя — 4-ма, четверта — 3-ма. Згідно з правилом множення загальне число способів дорівнює: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

Відповідь. 300.

ВИКОНАЙ УСНО



- 1114.** Є дві цифри: 1 і 9. Скількома способами з цих цифр можна скласти:
- а) одноцифрове число;
 - б) двоцифрове число, щоб цифри у числі не повторювались;
 - в) двоцифрове число, якщо цифри у числі можуть повторюватися?
- 1115.** У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одного учня в шкільний комітет самоврядування?
- А 21 Б 110 В 220 Г 420
- 1116.** У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати двох учнів (представника від класу та його заступника) у шкільний комітет самоврядування?
- А 21 Б 110 В 220 Г 420
- 1117. Гра.** Один з учасників задає кількість шапок, інший — кількість рукавиць. Третій має сказати, яка кількість наборів з шапки і рукавиць можна з них утворити. Потім учні міняються ролями.



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

- 1118.** У магазині є три види блокнотів і десять видів ручок. Сергій хоче зробити сестрі корисний подарунок — обрати блокнот або ручку. Скількома способами він може це зробити?
- 1119.** Для завершення формування експедиції в Антарктиду додатково розглядалися заяви 10 претендентів на посаду лікаря, 5 претендентів на посаду повара



і 3 претенденти на посаду техника. Жоден кандидат не претендував одночасно на дві чи більше посад. Скількома способами можна заповнити по 1 вільному місцю лікаря, повара і техника в експедиції?



На фото презмінка 29-ї та 30-ї антарктичної експедиції на українській станції «Академік Вернадський»

- 1120.** Скількома способами можна розташувати 4 картини на стіні в один ряд?
- 1121.** Скількома способами 5 осіб можуть утворити чергу до каси?
- 1122.** Їдальня приготувала на сніданок 3 другі страви (A, B, C) і два напої (M, K). Скільки різних наборів із таких страв і напоїв можна вибрати на сніданок? Склади відповідну діаграму-дерево.
- 1123.** В Антона є 2 пари штанів і 4 вишиті сорочки. Скільки різних наборів вбрання можна вибрати до Дня вишиванки? Склади відповідну діаграму-дерево.
- 1124.** Скільки різних речень можна скласти зі слів:
а) «ми», «любимо», «читати»;
б) «ми», «дуже», «любимо», «читати»?
- 1125.** Скільки всього різних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 1, 3, 7 і 9 так, щоб у кожному числі всі цифри не повторювалися? А якщо цифри можуть повторюватися?
- 1126.** Скільки існує різних трицифрових чисел, у яких всі цифри парні і різні?
- 1127.** Скільки існує різних трицифрових чисел, у яких всі цифри непарні і різні?
- 1128.** **ЗНО** Скільки всього існує різних двоцифрових чисел, у яких перша цифра є парною, а друга — непарною?
- 1129.** Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо:
а) число має починатися з цифри 5;
б) число має закінчуватися парною цифрою?
- 1130.** Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо:
а) цифри не можуть повторюватися;
б) цифри можуть повторюватися?
- 1131.** **ЗНО** Скільки існує різних дробів $m : n$, якщо m набуває значень 1, 2 або 4, а n набуває значень 5, 7, 11, 13 або 17?



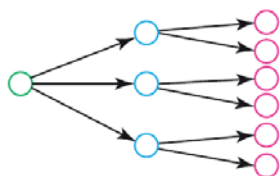
ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

- 1132.** Скількома способами дівчинка може нанизати на нитку 8 різних намистин?
- 1133.** Вісім друзів вирішили провести турнір з шашок так, щоб кожний зіграв з кожним одну партію. Скільки партій буде зіграно?
- 1134.** Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо: а) цифри не можуть повторюватися; б) цифри можуть повторюватися?
- 1135.** Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо: а) число має бути непарним; б) число має бути парним? (У числах цифри не повторюються).
- 1136.** Скільки:
а) парних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри не можуть повторюватися;
б) непарних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри не можуть повторюватися?
- 1137. ЗНО** Скільки всього різних п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 3, 5, 7 (у числах цифри не повинні повторюватися)?
А 5 Б 24 В 25 Г 96 Д 120
- 1138.** Їдальня приготувала на обід 3 перші страви (А, В, С), 3 другі (а, б, с) і 2 треті (х, у). Скільки різних наборів із трьох позицій можна вибрати на обід? Склади відповідну діаграму-дерево.
- 1139.** The canteen has prepared 3 first courses (A, B, C), 3 second courses (a, b, c) and 2 third courses (x, y) for lunch. How many different sets of two position can be chosen for lunch?
- 1140. ЗНО** Олег пише смс-повідомлення з трьох речень. У кінці кожного з них він прикріпить один із п'ятнадцяти веселих смайликів. Скільки всього є способів вибору таких смайликів для прикріплення, якщо всі смайлики в повідомленні мають бути різними?
- 1141.** В Олесі є 10 різних листівок. Вона вирішила двох своїх подруг привітати зі святом. Скільки існує способів це зробити? А якщо листівку із засніженим лісом вона вирішила подарувати бабусі?
- 1142.** На пошті є три види конвертів, два види марок до них і чотири види привітальних листівок, що вкладаються в ці конверти. Скільки існує різних способів оформлення одного привітання?

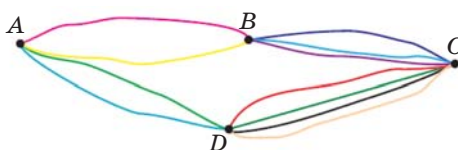


1143. У піцерії готують велику і маленьку піцу з товстою і тонкою основою. Скільки різних видів піци можна замовити в цій піцерії, якщо для тонкої піци використовують три види наповнення, а для товстої — чотири?

1144. Відкрита задача. Склади задачу за малюнком 21.2 і розв'яжи її.



Мал. 21.2



Мал. 21.3

1145. За малюнком 21.3 установи, скількома способами можна потрапити з міста A до міста C.

1146. Створюють емблему школи, елементом якої має бути многокутник певного кольору. Скільки таких елементів можна створити, якщо розглядати три фігури (трикутник, квадрат, шестикутник) і 4 кольори (синій, зелений, жовтий, червоний)? Склади відповідну діаграму-дерево.

1147. Скільки різних «кортежів» може створити хлопчик з чотирьох іграшкових автомобілів: білого, жовтого, синього і червоного?

1148. До моря веде 7 доріг. Скількома способами відпочиваючий може дістатися моря і повернутися назад? Розглянь випадки, коли рух до моря і від моря відбувається: а) однією дорогою; б) різними шляхами; в) одним із двох попередніх способів.

1149. У вівторок за розкладом в 9-Б класі є 7 різних уроків, серед яких — фізика й астрономія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб: а) фізика й астрономія стояли поруч; б) фізика й астрономія не стояли поруч?

1150. У середу за розкладом в 9-А класі є 6 різних уроків, серед яких — алгебра і геометрія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб алгебра і геометрія стояли поруч?

1151. 5 людей, із яких лише двоє мають відповідні посвідчення водія, сідають в автомобіль, у якому окрім місця водія є ще 4 пасажирських місць. Установи відповідність між умовами (1–3) та кількістю способів (А–Д) цим 5 особам зайняти місця в автомобілі, якщо на місці водія має бути особа з відповідним посвідченням.

1 тільки власник машини буде сидіти за кермом	А 96
2 кожен з тих, хто має права, може сидіти за кермом	Б 48
3 кожен з тих, хто має права, може сидіти за кермом і серед пасажирів є дитина для якої встановлено дитяче крісло	В 26
	Г 24
	Д 12

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1152. Обчисли:

- а)
- $10! : 5!$
- ; б)
- $13! : 10!$
- ; в)
- $20! : 25!$
- ; г)
- $100! : 97!$
- .

1153. Спрости вираз.

- а)
- $n! : (n - 1)$
- ; б)
- $(n - 1)! : n!$
- ; в)
- $(n + 1)! : (n - 1)!$
- .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1154. Виручка книжкового магазину становила в I кварталі 700,46 тис. грн. Відомо, що у січні виручка була на 49,8 тис. грн більше, ніж у лютому, а у березні — на 178,92 тис. грн менше, ніж у лютому. Який дохід був у магазину в березні?

1155. Побудуй графік функції $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Користуючись графіком, знайди проміжки зростання та спадання функції.

1156. Спрости вираз.

- а) $2a^3b \left(-\frac{1}{2}ab \right) a^2b$; б) $\left(-\frac{2}{3}a^2b \right) b^2a \cdot \frac{9}{4}(a^2b^2)^3$;
 в) $3ak^2 (-2kx^3)k^3$; г) $-2\frac{1}{3}a^3c^2 \cdot \frac{1}{7}ac^2 \cdot 6abc$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю основні правила комбінаторики.
- ✓ Розрізняю правило суми і правило добутку.
- ✓ Умію використовувати комбінаторне правило суми.
- ✓ Умію використовувати комбінаторне правило добутку.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— що таке відношення чисел m і n

$$m : n \text{ або } \frac{m}{n}$$

— властивість правильного дробу

$$\frac{m}{n}, m \in N, n \in N$$

$$\text{Якщо } m < n, \text{ то } \frac{m}{n} < 1, \text{ якщо } m = n, \text{ то } \frac{m}{n} = 1.$$

§ 22. Частота та ймовірність випадкової події

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- подія — *event*
- ймовірність події — *probability of an event*

Одним із розділів сучасної математики є теорія ймовірностей. Її найважливіші поняття — ймовірнісний експеримент (випробування, спостереження), *подія* (наслідок випробування) і *ймовірність події*. Наведемо приклади випробувань та їх окремих наслідків — деяких подій.

Випробування	Подія
Підкидання монети	Монета упала догори гербом
Написання контрольної роботи	Ви отримали 12 балів
Очікування ранку	Ранок настав
Підкидання грального кубика	Випало 7 очок

Остання подія неможлива, бо на гранях грального кубика немає сімки. Подія 3 достовірна (вірогідна), бо після ночі завжди настає ранок. Події 1 і 2 випадкові.

Взагалі, подію називають **неможливою**, якщо вона ніколи не може відбутися, **достовірною** — якщо вона завжди відбувається. Якщо подія може відбутися або не відбутися, її називають **випадковою**.

Події позначають великими латинськими буквами $A, B, C, \dots$ або однією латинською буквою з індексом: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Зміст події подають у фігурних дужках. Наприклад, третю подію з таблиці можна записати так:

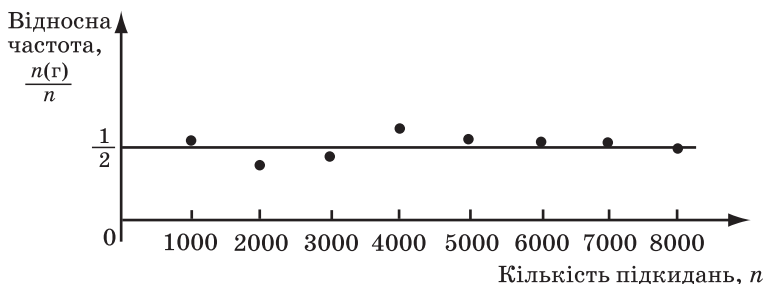
$$A_3 = \{\text{настав ранок}\}.$$

Сказати наперед про випадкову подію, що вона відбудеться чи не відбудеться, не можна. Якщо ж ця подія масова, виконується багато разів і за однакових умов, то ймовірність її настання можна характеризувати деяким числом.

Розглянемо експеримент, який полягає в підкиданні симетричної однорідної монети і фіксації того боку, яким монета упала догори. Його можна проводити в одних і тих самих умовах яку завгодно кількість разів. У таблиці подаються результати восьми серій таких випробувань.

Номер серії	1	2	3	4	5	6	7	8
Кількість підкидань, n	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
Кількість гербів, $n(r)$	501	986	1495	2036	2516	3004	3504	3997
Відносна частота появи герба, $\frac{n(r)}{n}$	0,501	0,493	0,498	0,509	0,503	0,501	0,501	0,500

Число в останньому рядку таблиці для кожної серії визначається як відношення кількості випадання герба до загальної кількості підкидань монети в цій серії випробувань. Його називають **відносною частотою появи події**. Якщо дані таблиці зобразити графічно (мал. 22.1), то можна побачити, що відносна частота появи герба коливається навколо числа 0,5 і мало відрізняється від нього.



Мал. 22.1

Якщо в n випробуваннях подія X відбувається m разів, то дріб визначає відносну частоту появи події X . Число, біля якого коливається відносна частота події, виражає ймовірність цієї події; її позначають буквою P (від англійського слова *probability* — ймовірність).

Цей термін увів Б. Паскаль. У листі до П. Ферма від 28 жовтня 1654 р. він писав:

«Більшість людей вважають, що коли вони про що небудь не мають повного знання (а ми ніколи не маємо повного знання), то вони взагалі нічого про це не знають. Я переконаний, що такі думки глибоко помилкові. Часткове знання теж є знанням, і неповне переконання все ж має деяке значення, особливо коли мені відомий ступінь цієї впевненості. Хтось може запитати: «А чи можна виміряти міру впевненості числом?». «Звичайно, — відповім я, — люди, які грають в азартні ігри, обґрунтовують свою впевненість саме так. Коли гравець кидає гральний кубик, він наперед не знає, яке саме число очок випаде. Але децю він все-таки знає. Наприклад, те, що всі шість чисел — 1, 2, 3, 4, 5, 6 — мають однакові шанси на успіх. Якщо ми домовимося вважати можливість появи достовірного за одиницю, то можливість випадання шістки, як і кожного з інших п'яти чисел, виразиться дробом $\frac{1}{6}$ ». Зазначу відразу, що міру можливості (впевненості) події я назвав імовірністю. Я багато розмірковував над вибором відповідного слова і, нарешті, саме його вважаю найвиразнішим».

Б. Паскаль визначав імовірності деяких подій без проведення випробувань. Це можна зробити тоді, коли наслідки випробувань утворюють скінченну множину і є рівноможливими, тобто в умовах проведеного випробування немає підстав uważати появу одного з наслідків більш чи менш можливим порівняно з іншими.

Розглянемо приклад. Кидають один раз правильний однорідний гральний кубик (мал. 22.2) і фіксують суму очок на грані, що випала догори. Результатом такого випробування можуть стати 6 різних подій:

- $E_1 = \{\text{випаде одне очко}\};$
- $E_2 = \{\text{випаде два очки}\};$
- $E_3 = \{\text{випаде три очки}\};$
- $E_4 = \{\text{випаде чотири очки}\};$
- $E_5 = \{\text{випаде п'ять очок}\};$
- $E_6 = \{\text{випаде шість очок}\}.$



Мал. 22.2

Ці шість подій охоплюють і вичерпують усі можливі наслідки експерименту. Вони *попарно несумісні*, бо кожного разу випадає тільки одна кількість очок. Усі шість подій *однаково можливі*, бо йдеться про однорідний кубик правильної форми і спритність гравця виключається. У такому разі говорять, що для здійснення кожної з цих подій існує один шанс із шести.

Кожну з подій E_1 — E_6 для наведеного вище випробування називають елементарною, а всю їх множину — простором елементарних подій.

Елементарною подією називають кожний можливий наслідок імовірного експерименту. Множину всіх можливих наслідків експерименту називають **простором елементарних подій** і позначають грецькою буквою Ω (омега).

Якщо простір елементарних подій для деякого випробування складається з n рівноможливих несумісних подій, то ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{n}$.

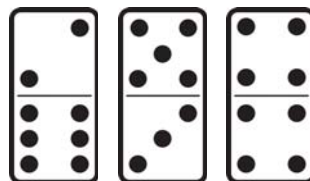
Наприклад, ймовірність того, що на підкинутому гральному кубуку випаде 5 очок, дорівнює $\frac{1}{6}$. А ймовірність того, що підкинута монета впаде догори гербом, дорівнює $\frac{1}{2}$.

Ймовірність події A позначають символом $P(A)$. Якщо першу з цих подій позначити буквою A , а другу — B , то $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$.

Існують події неелементарні. Розглянемо, наприклад, таку подію: $C = \{\text{поява пластинки доміно з 8 очками}\}$.

Оскільки пластинок доміно усього 28, то випробування, пов'язане з вибором однієї пластинки, вичерпується 28 рівноможливими і незалежними наслідками. Отже, простір елементарних подій для даного випробування складається з 28 елементарних подій E_i , де $i = 1, 2, \dots, 28$. Подія C може відбутися, якщо відбудеться одна з трьох елементарних подій (мал. 22.3):

- 1) $E_1 = \{\text{поява пластинка } \frac{2}{6}\};$
- 2) $E_2 = \{\text{поява пластинка } \frac{3}{5}\};$
- 3) $E_3 = \{\text{поява пластинка } \frac{4}{4}\}.$



Мал. 22.3

Кажуть, що події C сприяють три елементарні події (E_1, E_2, E_3) з можливих 28, тому $P(C) = \frac{3}{28}$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай випробування має скінченну кількість (n) рівноможливих і несумісних наслідків і A — деяка випадкова подія, пов'язана з даним випробуванням. Будемо називати елементарну подію E_n *сприятливою для випадкової події* A , якщо настання події E_n в результаті випробування приводить до настання події A . Якщо кількість елементарних подій, сприятливих події A , позначити через m , то ймовірність випадкової події A визначається за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Отже, *ймовірність події* — це відношення числа сприятливих випадків до загальної кількості рівноможливих випадків

Приклад. 3 перевернутих 28 кісточок доміно навмання беруть одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього:

- а) 2 очки (подія A); б) 4 очки (подія B); в) 11 очок (подія D)?

Розв'язання. Існує 2 кісточки доміно з двома очками $\left(\frac{0}{2}; \frac{1}{1}\right)$. 3 кісточки з чотирма очками $\left(\frac{0}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{2}\right)$, 1 кісточка з 11 очками $\frac{5}{6}$. Усього можливостей вибору 28, бо взяти можна будь-яку з 28 кісточок. Отже, $P(A) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$, $P(B) = \frac{3}{28}$, $P(D) = \frac{1}{28}$.

Назвемо властивості ймовірності випадкової події.

1. Якщо C — подія неможлива, то $P(C) = 0$.
2. Якщо B — подія достовірна, то $P(B) = 1$.
3. Якщо X — подія випадкова, то $0 \leq P(X) \leq 1$.
4. Якщо $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ — елементарні події, що вичерпують деяке випробування, то

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n) = 1.$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Подібно до геометрії теорію ймовірностей можна будувати на основі *системи аксіом*. При цьому вводяться основні поняття теорії ймовірностей та відношення між ними і формулюються аксіоми. Усі інші поняття і твердження базуються на

побудованій системі аксіом з нехтуванням інтуїції та досвіду. Аксиоматизувати теорію ймовірностей можна різними способами. Це в різні часи робили Г. Больман (1908), С. Н. Бернштейн (1917), Р. Мізес (1919, 1928), А. Ломницький (1923). Найкращою з таких вважається система аксіом, запропонована в 1929 р. А. М. Колмогоровим. З нею ти ознайомишся у старшій школі та вищих навчальних закладах.

Аксиоматичний підхід дає змогу широко використовувати теорію ймовірностей до розв'язування різних теоретичних і практичних завдань, а також визначати межі її застосування.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Елементи прикладної математики. Урок 2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які події називають випадковими? Наведи приклади
2. Які події називають неможливими, достовірними?
3. Наведи приклад простору елементарних подій.
4. Які події називають елементарними? Наведи приклади.
5. Чому дорівнює ймовірність випадкової події?
6. Чому дорівнює ймовірність достовірної події? А неможливої?
7. Що таке відносна частота випадкової події?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Маємо два кубики, у яких по 2 грані відповідно червоного, жовтого і зеленого кольору. Підкидають їх разом і фіксують кольори граней, на які впадуть обидва кубики. Запиши простір елементарних подій для такого випробування.
Розв'язання. Якщо обидва кубики впали на жовті грані, то цю подію позначатимемо символом *жж*. Якщо один впаде на жовту, інший — на червону, то таку подію позначатимемо *жч*. Тоді простір елементарних подій для заданого випробування буде

$$W = \{жж, жч, жч, жч, жч, жч\}.$$
2. Набираючи номер телефону, абонент забув останню цифру і набрав її намання. Яка ймовірність того, що він правильно набрав цей номер?
Розв'язання. Число всіх можливих випадків $n = 10$, а число сприятливих випадків $m = 1$. Тому шукана ймовірність $P = \frac{1}{10}$.
3. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на них впадуть очки, сума яких дорівнює: а) 4; б) 5; в) 8?
Розв'язання. Кожній розглядуваній події поставимо у відповідність двоцифрове число, цифри якого відповідають очкам, що випали при падінні першого і другого кубиків. Можливі такі випадки:

11,	12,	13,	14,	15,	16,
21,	22,	23,	24,	25,	26,
31,	32,	33,	34,	35,	36,
...	...	...	...	...	...
61,	62,	63,	64,	65,	66,



Як бачимо, для даного випробування простір елементарних подій W містить 36 елементів.

а) Суму очок, що дорівнює 4, дають три числа: 13, 22 і 31. Маємо 3 сприятливі елементарні події із 36. Тому шукана ймовірність:

$$P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

б) Суму очок 5 дають 4 пари кубиків: 14, 23, 32 і 41, тому

$$P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

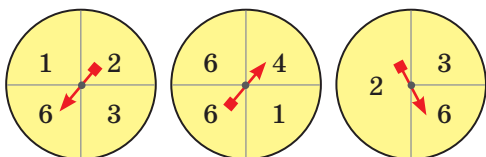
в) Суму очок 8 дають 5 пар: 26, 35, 44, 53, 62, тому

$$P(8) = \frac{5}{36}.$$

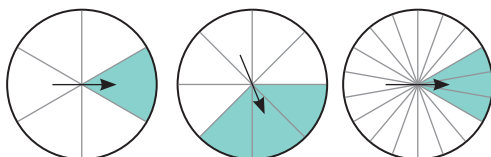
ВИКОНАЙ УСНО



1157. Яка ймовірність, що після обертання стрілки на мал. 22.4 випаде 6?



Мал. 22.4



Мал. 22.5

1158. Яка ймовірність, що стрілка на мал. 22.5 вкаже на блакитний сектор?

1159. Якою з погляду теорії ймовірностей є подія: а) при падінні грального кубика випануть п'ять очок; б) дитина народиться 30 лютого; в) перестановкою букв у слові «зебра» одержати слово «береза»; г) вибране навмання двоцифрове число виявиться меншим за 100; ґ) побудований графік непарної функції виявиться симетричним відносно початку координат.

1160. Яка ймовірність того, що при киданні грального кубика випаде два очки?

А $\frac{1}{2}$

Б $\frac{1}{6}$

В $\frac{1}{3}$

Г 1

1161. Яка ймовірність того, що при падінні грального кубика випаде:
а) парна кількість очок; б) кількість очок, кратна 3; в) 7 очок?

1162. Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що вона: а) є дублем; б) не є дублем?

1163. У хорі 15 дівчат і 12 хлопців. Яка ймовірність, що солістом буде хлопець?

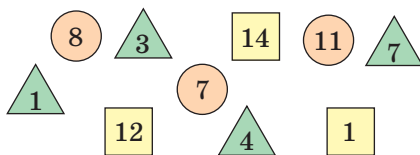
А $\frac{4}{5}$

Б $\frac{4}{9}$

В $\frac{5}{9}$

Г $\frac{5}{4}$

1164. Гра. Один з учнів / одна учениць за малюнком 22.6 визначає, що буде обрано навмання (задає певне число, колір чи фігури), а інший / інша визначає ймовірність цієї події. (Наприклад, подія: обрати трикутник; обрати парне число; обрати оранжеву фігуру з числом, більшим за 10, тощо.)



Мал. 22.6

1165. Опиши простір елементарних подій для даного експерименту: а) встановлення дня народження довільно обраного учня; б) визначення кількості коренів квадратного рівняння; в) установлення кількості спільних точок кола і гіперболи, побудованих в одній системі координат.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1166. Знайди ймовірність того, що твій товариш народився:
а) у середу; б) навесні; в) у вересні; г) 1 січня.

1167. У 9-А класі навчаються 20 учнів / учениць, 25 % із яких — відмінники / відмінниці. Доводить теорему синусів навмання викликають одного учня. Яка ймовірність того, що це буде відмінник?

1168. ЗНО З кошика, у якому лежать 4 зелених і 5 жовтих яблук, виймають навмання одне яблуко. Яка ймовірність того, що це яблуко буде жовтого кольору?

А $\frac{1}{2}$

Б $\frac{1}{9}$

В $\frac{4}{9}$

Г $\frac{5}{9}$

Д $\frac{1}{5}$

1169. У мішечку 10 згорнутих папірців. На двох із них написано «ні», а на решті — «так». Яка ймовірність того, що на взятому навмання папірці виявиться слово «так»?

1170. У торбині 5 білих і 7 чорних куль. Яка ймовірність того, беручи навмання, виймуть з неї: а) білу кулю; б) чорну кулю?

1171. Набираючи номер телефону, абонент забув першу цифру і набрав її навмання. Яка ймовірність того, що потрібний номер він набрав правильно?

1172. Для кожного з малюнків знайдіть



ймовірність навмання витягнути:

- а) червону кульку;
- б) синю кульку;
- в) жовту кульку.



1173. Із букв, написаних на окремих картках, склали слово **ТОТОЖНІСТЬ**.

Потім ці картки перевернули, перетасували і взяли навмання одну з них. Яка ймовірність того, що на ній виявиться:

- а) буква Т; б) буква О; в) буква Н?

1174. Знайди ймовірність того, що вибране навмання двоцифрове число кратно 5.

1175. What is the probability that a randomly selected two-digit number has the same digits in the tens and units places?

1176. З натуральних чисел, менших за 25, вибирають одне число. Яка ймовірність, що це число буде простим?

1177. В ящику 10 червоних і 5 жовтих куль. З нього вийняли одну кулю червоного кольору і відклали вбік. Після цього з ящика беруть ще одну кулю навмання. Яка ймовірність того, що вона виявиться жовтою?

1178. У змаганнях беруть участь 25 учнів / учениць першої школи, 15 — другої і 10 — третьої. Яка ймовірність того, що першим виступатиме учень / учениця з першої школи?

1179. Пасажирка чекає трамвай №1 або №3 на зупинці, де зупиняються трамваї №1, 3, 4 і 9. Вважаючи, що всі трамваї підходять однаково часто, знайди ймовірність того, що першим прийде до зупинки трамвай, якого чекає пасажирка.

1180. Наприкінці зміни у спортивному таборі учні мали визначитися з їх улюбленою грою в таборі. В таблиці наведено дані опитування.

Знайдіть ймовірність, що обраний наймання учасник табору: а) хлопець, б) дитина, чия улюблена гра футбол; в) дівчина, чия улюблена гра теніс. Яка ймовірність серед всіх дівчат обрати навмання ту, що полюбає баскетбол?

	Футбол	Баскетбол	Теніс
Дівчата	16	10	5
Хлопці	5	12	2

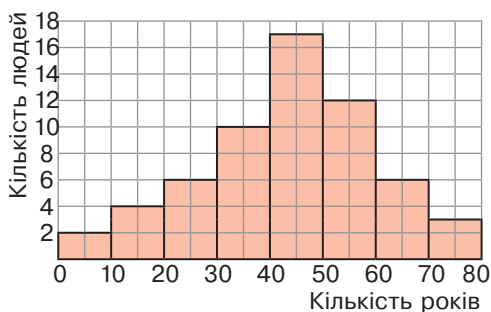
1181. В таблиці міститься інформація про колір очей дітей у класі.

Скільки учнів у класі? Яка ймовірність навмання обрати дитину з блакитними очима? Яка ймовірність навмання обрати хлопця? Яка ймовірність обрати навмання дівчину із зеленими очима?

	Хлопці	Дівчата
Блакитні	4	5
Карі	5	6
Зелені	4	8

1182. На гістограмі (мал. 22.7) зображено кількість людей кожного віку в містечку.

- 1) Скільки людей в містечку?
- 2) Скільком людям у містечку більше 30 років?
- 3) Який віковий інтервал містить 20 % всього населення?
- 4) Знайди середнє арифметичне.
- 5) Знайди, яка ймовірність серед списку всіх людей містечка обрати людину, якій більше 60, але менше 70 років.



Мал. 22.7



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

1183. На 1000 білетів лотереї припадає 1 виграш 1000 грн, 10 виграшів по 200 грн, 50 — по 100 грн, 100 — по 50 грн. Решта білетів не виграшні. Знайди ймовірність виграшу на один білет, не меншого від 100 грн.

1184. У партії зі 100 деталей 75 деталей першого сорту, 15 — другого, 8 — третього і 2 деталі браковані. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться першого або другого сорту?

1185. Із 10 карток, пронумерованих числами від 1 до 10, виймають одну. Яка ймовірність того, що її номер виявиться меншим за 7 і більшим за 3?

1186. З 15 карток, пронумерованих числами від 1 до 15, виймають одну. Яка ймовірність того, що номер вийнятої картки виявиться: а) кратним 3; б) кратним 4?

1187. В урні є 30 жетонів з номерами від 1 до 30. Яка ймовірність того, що перший витягнутий з урни навмання жетон не міститиме цифри 6?

1188. На полиці у супермаркеті лежить 56 пачок чіпсів, з яких 30 — з паприкою, а решта — з беконом. Установіть відповідність між подіями (1–4) та ймовірністю цієї події (А–Д).

1 навмання взята пачка буде зі смаком бекону	А $\frac{15}{28}$
2 навмання взята пачка буде зі смаком паприки	Б $\frac{1}{2}$
3 навмання взяти пачку чіпсів	В $\frac{13}{28}$
4 взяти пачку сухариків з хріном	Г $\frac{1}{10}$
	Д 0

1189. Зі 100 науковців установи англійською володіють 90, німецькою — 85, 80 осіб — обома цими мовами. Знайди ймовірність того, що вибраний навмання науковець з цієї установи: а) володіє англійською або німецькою; б) не знає ні англійської, ні німецької.

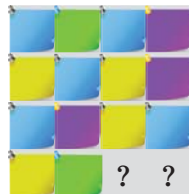
1190. Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що на ній є: а) усього 9 очок; б) більш ніж 9 очок; в) менш ніж 9 очок?

1191. Дошку 4×4 заклеїли різнокольоровими стікерами (мал. 22.8).

 Яким кольором мають бути заклеєні 2 останні стікери, щоб: а) ймо-

вірність навмання обрати синій стікер була $\frac{3}{8}$;

б) ймовірність обрати жовтий стікер була вдвічі більша, ніж обрати фіолетовий? Постав декілька аналогічних запитань до задачі своїм однокласникам / однокласницям.



Мал. 22.8

1192. У коробці лежить 3 зелені ручки і кілька синіх.

Скільки синіх ручок у коробці, якщо ймовірність першою взяти зелену ручку дорівнює 0,25?

1193. У папці лежить 5 зошитів у лінійку і кілька зошитів у клітинку. Скільки у папці зошитів у клітинку, якщо ймовірність того, що вибраний навмання зошит виявиться у клітинку, дорівнює 0,75.

1194. **ЗНО** Випущено партію з 300 лотерейних білетів. Ймовірність того, що навмання вибраний білет із цієї партії буде виграшним, дорівнює 0,2. Визнач кількість білетів без виграшу серед цих 300 білетів.

А 6

Б 60

В 294

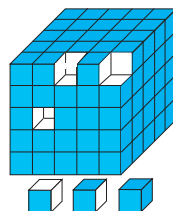
Г 150

Д 240

1195. **ЗНО** У шухляді лежать лише олівці та ручки. Відомо, що олівців на 12 менше, ніж ручок. Скільки олівців лежить у шухляді, якщо ймовірність вибрати навмання із шухляди одну ручку дорівнює $\frac{5}{8}$?

1196. **ЗНО** У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки однакової форми й розміру. Якого найменшого значення може набувати m , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша за 0,25?

1197. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 125 рівних кубиків і помістили їх у торбину. Яка ймовірність того, що беручи з торбини кубик навмання, візьмете такий, у якого пофарбовано: а) три грані; б) тільки дві грані; в) тільки одну грань (мал. 22.9)?



Мал. 22.9

1198. Пофарбований дерев'яний кубик розпиляли на 1000 рівних кубиків і помістили їх у торбину. Яка ймовірність того, що беручи з торбини навмання один кубик, ви візьмете такий, який має: а) принаймні одну пофарбовану грань; б) тільки дві пофарбовані грані?

- 1199.** Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність появи хоча б однієї шістки?
- 1200.** Одночасно підкидають дві однакові монети. Знайди ймовірність події: а) $A = \{\text{випав один герб і одна решка}\}$;
 б) $B = \{\text{випало не менше одного герба}\}$.
- 1201.** Перевірили 500 довільно вибраних деталей і виявили, що 5 із них — браковані. Скільки бракованих деталей можна очікувати в партії з 3500 штук?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



- 1202.** Досліди розподіл хлопчиків і дівчаток у родинях, які мають трое дітей різного віку. Вважай, що ймовірність народження хлопчика і дівчинки однакова.
- 1203.** Стрілець у незмінних умовах робить 5 серій пострілів по мішені. У кожній серії — 100 пострілів. Результати стрільби занесено в таблицю. Знайдіть відносну частоту влучення в мішень: а) у кожній серії; б) у перших 300 пострілах; в) в останніх 300 пострілах; г) у всіх 500 пострілах. Сформулюй гіпотезу про ймовірність влучення в мішень.

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість влучень у мішень	69	64	72	78	65

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



- 1204.** Функцію задано формулою $f(x) = -5x + 3$. Знайди $f(0,1)$; $f(-2,5)$; $f(-10)$; $f(0,3)$; $f(-1,2)$.
- 1205.** Розв'яжи нерівність.
- 1206.** а) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$; б) $x^2 + 8x + 8 < 3x^2$.
- 1207.** Побудуй графік функції: а) $y = |x^2 - x|$; б) $y = x^2 - |x|$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклади подій:
 - неможливих;
 - достовірних;
 - випадкових.
- ✓ Можу пояснити, що таке:
 - частота випадкової події;
 - ймовірність випадкової події.
- ✓ Умію розв'язувати задачі, що передбачають:
 - знаходження ймовірності випадкової події;
 - обчислення частоти випадкової події.

Перейди за посиланнями та

- підсумуй головне в розділі <https://vse.ee/czrt>
- ознайомся з історичними відомостями <https://vse.ee/czrx>

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



ВАРІАНТ I

1. Вкладник поклав у банк 200000 грн під 8% річних. Скільки грошей буде на його рахунку через чотири роки, якщо банк нараховує: а) прості відсотки; б) складні відсотки?
2. Дано вибірку: 6, 2, 4, 8, 6, 4, 7, 4, 8, 4. Знайди міри центральної тенденції цієї вибірки.
3. В Олесі є три різні конверти і чотири різні листівки. Скількома способами можна вибрати конверт з листівкою для привітання подруги?
4. На картках написані числа від 1 до 12. Яка ймовірність першою взяти картку на якій записано: а) парне число; б) число, кратне 3; в) дільник числа 12?

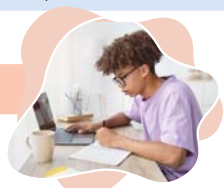
ВАРІАНТ II

1. Вкладник поклав у банк 300000 грн під 6 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через чотири роки, якщо банк нараховує: а) прості відсотки; б) складні відсотки?
2. Дано вибірку: 3, 5, 5, 7, 1, 3, 7, 3, 3, 5. Знайди міри центральної тенденції цієї вибірки.
3. В Івана є шість різних кульок і сім різних упаковок, куди кожен з цих кульок можна покласти. Скількома способами можна вибрати одну кульку та упаковку для неї?
4. На картках написані числа від 1 до 15. Яка ймовірність першою взяти картку на якій записано: а) непарне число; б) число, кратне 5; в) дільник числа 15?

ВАРІАНТ III

1. Вкладник поклав у банк 500000 грн під 5 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через чотири роки, якщо банк нараховує: а) прості відсотки; б) складні відсотки?
2. Дано вибірку: 7, 7, 1, 5, 4, 9, 7, 2, 2, 8. Знайди міри центральної тенденції цієї вибірки.
3. У пані Софії є три різні спідниці і п'ять різних жакетів. Скількома способами вона може вибрати вбрання на наступний робочий день?
4. На картках написані числа від 1 до 17. Яка ймовірність першою взяти картку на якій записано: а) парне число; б) число, кратне 7; в) дільник числа 16?

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 5

1. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 5 і 6, якщо цифри у числі можуть повторюватися?
А одне Б два В три Г чотири
2. З цілих чисел від 1 до 20 називають одне. Яка ймовірність того, що воно виявиться дільником числа 20?
А 30% Б 40% В 50% Г 60%
3. Середнє арифметичне усіх цілих чисел з проміжку $-10 < x < 20$, дорівнює:
А 4 Б 5 В 10 Г 15
4. Протягом перших десяти днів жовтня о 7 год ранку температура була такою: 6° , 8° , 8° , 7° , 5° , 8° , 6° , 7° , 8° , 8° . Знайди моду вибірки.
А 7° Б 6° В 8° Г 5°
5. Знайди медіану вибірки 1, 7, 5, 7, 3, 7, 1, 8, 3.
А 1 Б 7 В 5 Г 3
6. На таці лежать різні за формою пиріжки. Серед них 5 пиріжків із сиром і 3 з вишнями. Скількома способами можна взяти один пиріжок з сиром і один пиріжок з вишнями?
А 8 Б 5 В 3 Г 15
7. У якому випадку подію X називають неможливою?
А $P(X) = 1$ Б $P(X) = -1$ В $0 < P(X) < 1$ Г $P(X) = 0$
8. Вісім друзів вирішили обмінятися візитівками. Скільки візитівок усього буде роздано?
А 64 Б 72 В 32 Г 56
9. Із букв, написаних на окремих квадратних картках, складено слово МАТЕМАТИКА. Потім ці картки перевернуто, перемішано і навмання взято одну. Яка ймовірність того, що на ній написано букву «А»?
А 0,1 Б 0,2 В 0,3 Г 0,4
10. У пакунку лежить 10 цукерок «Білочка» і 15 цукерок «Червоний мак». Одну цукерку з'їли. Яка ймовірність того, що це — «Білочка»?
А 0,5 Б 0,4 В 0,6 Г 0,2

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 5



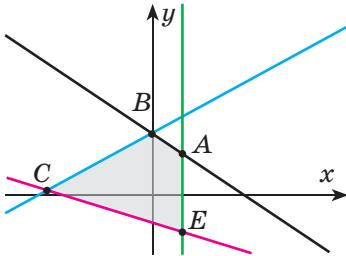
1. В коробці 20 цукерок у синіх обгортках і 80 — у червоних. Яка ймовірність того, що взята навмання цукерка виявиться в синій обгортці?
 А $\frac{1}{4}$ Б $\frac{1}{5}$ В $\frac{4}{5}$ Г $\frac{1}{2}$
2. Катруся взяла з собою до табору 4 футболки і 3 пари шортів. Скільки різних наборів вбрання можна вибрати для першого знайомства з іншими дітьми?
 А 7 Б 8 В 12 Г 16
3. За червень, липень і серпень родина витратила відповідно 188, 170 і 182 кВт · год електроенергії. Якими в середньому були витрати електроенергії цією родиною за один місяць влітку?
 А 540 кВт · год Б 270 кВт · год В 180 кВт · год Г 175 кВт · год
4. Дано вибірку: 7, 5, 3, 7, 6, 7, 4, 6, 8, 5. Установи відповідність між умовами (1–3) і числовими значеннями (А–Д), які відповідають цим умовам.

1 мода вибірки	А 5
2 медіана вибірки	Б 5,8
3 середнє значення вибірки	В 6
	Г 6,3
	Д 7
5. На 100 000 білетів лотереї припадають 662 виграші. З них: 2 по 5000 грн, 10 по 1000 грн, 50 по 200 грн, 100 по 50 грн, 500 по 10 грн. Решта білетів невіграшні. Знайди ймовірність: а) виграти понад 200 грн на один білет; б) виграти не менше 200 грн на один білет; в) витягнути виграшний білет.
6. Нехай рік має 365 днів. Яка ймовірність того, що на випадково вбраному листку календаря буде число: а) кратне 10; б) дорівнює 29?
7. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 3, 5, 7, 9, якщо: а) цифри не можуть повторюватися; б) цифри можуть повторюватися; в) число має починатися з цифри 5, але цифри не можуть повторюватися; г) число має бути парним, і цифри можуть повторюватися?
8. Яринка склала букет із 6 гілочок бузку і добавила декілька тюльпанів. Скільки тюльпанів було у букеті, якщо ймовірність взяти тюльпан дорівнює $\frac{3}{5}$?

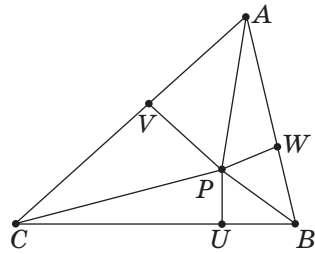
Додаткове завдання

9. Учень має 4 книжки з української літератури і 3 книжки з математики. Скількома способами він може розставити ці книжки на полиці так, щоб: а) книжки з одного предмета стояли поруч; б) книжки з одного предмета не стояли поруч?

ДОДАТКИ

Нерівності
в алгебріНерівності
з двома змінними

Навчальний проєкт № 1

ЦІКАВІ
НЕРІВНОСТІНерівності
в геометріїНерівність Барроу
 $PA + PB + PC \geq 2(PU + PV + PW)$ 

Клас поділяється на три групи: «історики», «математики», «практики». Кожен учень може взяти участь у роботі однієї або двох проєктних груп. Учні формують групи, працюють індивідуально чи в парах над однією із запропонованих нижче тем.

Теми для проєктної діяльності повідомляються наприкінці першої чверті. Учніам рекомендується самостійно ознайомитися з теоретичним матеріалом, що міститься в § 7 підручника.

Результати роботи над проєктом бажано оформити у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.

Захист проєктів доцільно провести на позакласному заході, запросивши учнів інших класів, учителів і батьків.

Історики вивчають виникнення та використання нерівностей на різних етапах розвитку математики. На захист готують коротке повідомлення і презентацію з конкретними прикладами.

Математики пропонується розширити відомості про нерівності, розглянувши нерівності в алгебрі та геометрії.

Тематика для індивідуальних досліджень (чи досліджень у малих групах) може бути такою:

- розв'язування нерівностей з двома змінними;
- розв'язування нерівностей, що містять модулі;
- розв'язування нерівностей, що містять параметри;
- різні методи доведення нерівностей;
- іменні нерівності;
- геометричні нерівності.

Розглянемо детальніше нерівність, яка стосується й алгебри, й геометрії. Це *нерівність трьох квадратів*, яка правильна для будь-яких дійсних чисел a, b і c :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Доведемо її. Знайдемо різницю лівої і правої частини нерівності та виділимо повні квадрати. Маємо:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0,5((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \geq 0, \text{ тобто} \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0, \text{ або } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Що і треба було довести.

Цікавою є геометрична модель нерівності трьох квадратів. Спробуйте довести це твердження геометрично.

У математиці нерівність трьох квадратів можна використовувати для:

- а) доведення інших нерівностей;
- б) визначення найбільших чи найменших значень багатьох виразів із трьома змінними;
- в) розв'язування цікавих рівнянь, нерівностей і їх систем.

Аналогічно можна довести і *нерівність n квадратів*:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{2}{n-1} (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n).$$

	a	b	c
a	a^2		
b		b^2	
c			c^2

Практики з'ясовують, що за допомогою нерівностей та їх властивостей моделюються відношення «менше» і «більше» із навколишнього світу. Цій групі учнів рекомендується розглянути:

- прикладні задачі, що зводяться до розв'язування нерівностей;
- нерівності та наближені обчислення;
- використання ІКТ для розв'язування нерівностей.

Розглянемо детальніше питання, що стосується нерівностей і наближених обчислень.

Наближені обчислення. Чи можна виміряти довжину рейки абсолютно точно? Ні. Навіть якщо почуєте, що довжина якоїсь рейки дорівнює, наприклад, 9,42783 м, не вірте цьому. Адже довжину такої рейки з точністю до сотої частки міліметра не можна виміряти. Результат кожного вимірювання — наближене значення величини.

• З'ясуйте, які з наведених у прикладах чисел можна віднести до точних, а які — до наближених:

- а) у школі навчаються 900 учнів;
- б) маса Місяця — $7,35 \cdot 10^{22}$ кг;
- в) площа басейну — 600 м^2 ;
- г) товарний поїзд складається з 60 вагонів;
- г) прискорення вільного падіння дорівнює $9,8 \text{ м/с}^2$;
- д) клавіатура комп'ютера містить 113 клавіш, а клавіатура фортепіано — 87;
- е) потомство однієї інфузорії тубельки на рік становить $75 \cdot 10^{108}$ особин;
- є) африканська антилопа імпада може стрибнути в довжину на 7,5 м, а кенгуру — на 12 м;
- ж) рецепт овочевої запіканки має 9 компонентів.

Якщо, вимірюючи довжину x деякої рейки, виявили, що вона більша за 6,427 м і менша від 6,429 м, то записують:

$$6,427 \text{ м} \leq x \leq 6,429 \text{ м} \text{ або } x = 6,428 \pm 0,001 \text{ м}.$$

Говорять, що значення довжини рейки знайдено з точністю до 0,001 м (одного міліметра), або абсолютна похибка наближеного значення 6,428 не перевищує 0,001.

Абсолютною похибкою наближеного значення називають модуль різниці між наближеним і точним значеннями.

Якщо точне значення величини не відоме, то не відома й абсолютна похибка її наближеного значення. У такому випадку вказують *межу абсолютної похибки* — число, яке не перевищує абсолютна похибка.

У розглянутому вище прикладі межа абсолютної похибки наближеного значення $6,428$ дорівнює $0,001$. Тут цифри 6 , 4 і 2 точні, а 8 — сумнівна, від точної цифри вона відрізняється не більш ніж на одиницю.

Якщо $x = 3,274 \pm 0,002$, тобто $3,272 \leq x \leq 3,276$, то межа абсолютної похибки наближеного значення $3,274$ дорівнює $0,002$.

- Перетворивши звичайний дріб $\frac{2}{3}$ у десятковий, одержали $0,6667$. Знайдіть

абсолютну похибку цього наближення. Знайдіть наближене значення числа $\frac{2}{3}$ з точністю до тисячних і його абсолютну похибку.

- Гепард розвинув швидкість $34,5$ м/с. Виразіть цю швидкість у кілометрах за годину, округліть до цілих і знайдіть абсолютну похибку наближення.

- Швидкість світла у вакуумі (у метрах за секунду) — $299\,792\,458 \pm 2$, а швидкість звуку в повітрі — $331,6 \pm 0,1$ м/с. Назвіть наближене значення швидкості світла і швидкості звуку та відповідні межі абсолютних похибок.

Наближені значення можна записувати і без меж похибок. При цьому домовилися записувати їх так, щоб усі цифри, крім останньої, були правильні, а останні (сумнівні) відрізнялися від правильних не більш ніж на одиницю. Наприклад, якщо пишуть $x = 6,428$ м, то розуміють, що

$$6,427 \leq x \leq 6,429, \text{ або } x = 6,428 \pm 0,001 \text{ м.}$$

Якщо $y = 3,247 \pm 0,002$ кг, то писати $y = 3,247$ кг не прийнято. Такий результат бажано округлити: $y = 3,25$ кг.

Уявіть, що виміряли (у сантиметрах) товщину h книжки і довжину l шибки: $h = 1,6$ — з точністю до $0,1$, $l = 71,5$ — з точністю до $0,1$.

Межі абсолютних похибок обох значень однакові: $0,1$. Але в одному випадку ця похибка припадає на невелике число $1,6$, а в іншому — на значно більше число $71,5$. Щоб оцінити якість вимірювань, обчислюють відносні похибки.

Відносною похибкою наближеного значення називають відношення абсолютної похибки до модуля наближеного значення.

Наприклад, відносні похибки наближень h і l дорівнюють відповідно:

$$0,1 : 1,6 = 0,0625 = 6,3 \% ; 0,1 : 71,5 = 0,0014 = 0,14 \% .$$

Значення l визначено якісніше, з меншою відносною похибкою.

- Порівняйте точність вимірювань товщини d людської волосини і діаметра D Сонця, якщо $d = 0,15 \pm 0,005$ мм, а $D = 1\,392\,000 \pm 1000$ км.

- Маса Землі дорівнює $(5,98 \pm 0,01) \cdot 10^{27}$ г, а маса дитячого м'яча — $(2,5 \pm 0,1) \cdot 10^2$ г. Яке вимірювання точніше?

Дії над наближеними значеннями можна виконувати з точним урахуванням похибок і без точного врахування похибок. Точно враховувати похибки можна на основі властивостей подвійних нерівностей. Нехай, наприклад, маса болта в грамах $x = 325 \pm 2$, а маса гайки $y = 117 \pm 1$, тобто $323 \leq x \leq 327$ і $116 \leq y \leq 118$.

Додавши почленно ці подвійні нерівності, одержимо:

$$439 \leq x + y \leq 445, \text{ або } x + y = 442 \pm 3.$$

Аналогічно можна виконувати й інші дії над наближеними значеннями. Роблять так у найвідповідальніших обчисленнях.

- Чи можна увімкнути в коло прилад з опором $44 \pm 0,5$ Ом, щоб при напрузі 215 ± 15 В сила струму не перевищувала 6 А?
- Необхідно перевезти 1000 ± 20 м³ бетону. Скільки рейсів має зробити самоскид, щоб виконати цю роботу, якщо кузов містить $2,25 \pm 0,02$ м³?

У менш відповідальних випадках користуються *правилами підрахунку цифр*.

Нагадаємо, що *десятковими знаками* числа називають усі його цифри, що стоять праворуч від десяткової коми.

Значущими цифрами числа називають усі його цифри, крім нулів ліворуч, які стоять перед першою цифрою, відмінною від нуля, і нулів праворуч, що стоять на місцях цифр, заміненіх при округленні.

Наприклад, у наближеному значенні 0,03074 п'ять десяткових знаків і чотири значущі цифри: 3, 0, 7, 4. А в наближеному значенні діаметра Землі $d = 12\,700$ км десяткових знаків немає, а значущих цифр три: 1, 2 і 7.

Нехай дано наближені значення $x = 3,24$ і $y = 1,4$. Позначимо перші відкинуті при округленні їх цифри знаками запитання: $x = 3,24?$, $y = 1,4?$. Знайдемо суму і різницю цих наближених значень:

$\begin{array}{r} 3,24? \\ + 1,4? \\ \hline 4,6?? \end{array}$	$\begin{array}{r} 3,24? \\ - 1,4? \\ \hline 1,8?? \end{array}$
--	--

Взагалі, при додаванні і відніманні наближених значень у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх має компонент дії з найменшою кількістю десяткових знаків.

При множенні наближених значень у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має множник з найменшою кількістю значущих цифр.

Подібним правилом користуються і при діленні наближених значень.

Виділені жирним шрифтом правила називають *правилами підрахунку цифр*. Вони не забезпечують високої точності наближених обчислень, але цілком достатні для більшості прикладних задач.

- Знаючи, що діаметр стовбура липи дорівнює 57 см, учень обчислив площу поперечного перерізу стовбура: $2550,5$ см². Чи правильна ця відповідь? Якщо неправильна — виправте.
- Знайдіть площу трапеції, основи якої $a \approx 1,7$; $b \approx 0,43$ і висота $h \approx 0,841$.

Люди бояться наближень, хоча в повсякденній практиці мають справу виключно з наближеними числами.

А. Б. Емпахер

Навчальний проєкт № 2



Функції НАВОКОЛО НАС



Цей навчальний проєкт складається із двох частин.

Першу частину присвячено розгляду загальних теоретичних питань, що стосуються функцій. Учні обирають напрям дослідження і в такий спосіб поділяються на групи: «дизайнери», «історики», «журналісти», «фахівці з ІТ-технологій», «математики» тощо. Кожен учень/учениця може взяти участь у роботі однієї або двох проєктних груп.

Дизайнери з'ясовують, де і як використовують елементи графіків функцій у художньо-технічному проектуванні окремих виробів та їхніх комплексів у різних галузях знань — в архітектурі, оздобленні одягу тощо. Наводять приклади таких функцій.

Історики вивчають виникнення та використання поняття «функція». На захист готують коротке повідомлення і презентацію з конкретними означеннями та відомостями про їх авторів. Наприклад.

➤ У другій половині XIX ст. (після створення теорії множин) в означення функції, крім ідеї відповідності, включено ще й ідею множини: «Якщо кожному елементу x множини A поставлено у відповідність деякий певний елемент y множини B , то кажуть, що на множині A задано функцію $y = f(x)$, або, що множина A відображається на множину B ». Таке означення функції можна застосовувати не лише до величин і чисел, а й до інших математичних об'єктів, наприклад, до геометричних фігур.

Журналісти шукають художні твори чи окремі цитати, у яких згадується про ті чи інші функції та їх властивості. Наприклад.

— Немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення.

К. Ф. Лебединцев

Фахівці з ІТ-технологій демонструють, як за допомогою інформаційних технологій можна будувати графіки складних функцій, вивчати їх властивості та розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи. Наприклад, будують графіки функцій у Excel, GRAN чи GeoGebra.

Математики — вивчають функції, що не розглядають в основній школі. Наприклад, функції цілої і дробової частини числа, показникові, тригонометричні функції тощо.

Друга частина проекту присвячена моделюванню різних процесів під час розв'язування прикладних задач. Передбачається, що функції, геометричні фігури, вирази, рівняння та їх системи, діаграми тощо будуть використовуватися як математичні моделі. Учні мають ознайомитися з поданим нижче теоретичним матеріалом «Математичне моделювання» і розв'язати визначені вчителем задачі.

Учням рекомендується самостійно опрацювати поданий нижче теоретичний матеріал.

Математичне моделювання

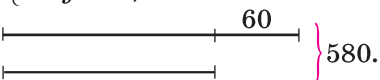
Математичними методами розв'язують не тільки абстрактні математичні задачі про числа, фігури, рівняння, функції тощо, а й багато інших. *Прикладними задачами* в математиці називають такі, умови яких містять нематематичні поняття. Розв'язуючи прикладну задачу математичними методами, спочатку створюють її математичну модель.

Задача 1. У двох магазинах — 580 кг яблук. Скільки яблук у кожному магазині, якщо в першому на 60 кг більше, ніж у другому. Складіть різні математичні моделі цієї задачі.

Розв'язання. Нехай у першому магазині — x кг яблук, тоді в другому їх — $(x - 60)$ кг, а разом — $(x + x - 60)$ кг. Маємо рівняння $x + x - 60 = 580$. Звідси: $2x = 640$, $x = 320$, $x - 60 = 320 - 60 = 260$.

Відповідь. 320 кг і 260 кг.

Рівняння $x + x - 60 = 580$ — одна з математичних моделей розглянутої задачі. Можна створити й інші її моделі, зокрема у вигляді:

- рівняння $y + y + 60 = 580$;
- системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 580, \\ x - y = 60; \end{cases}$
- схеми 

Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта (від французького слова *modèle* — копія, зразок). Зменшені моделі літака, греблі, автомобіля — приклади фізичних моделей.

Математична модель — це система математичних співвідношень, яка наближено в абстрактній формі описує досліджуваний об'єкт, процес або явище.

Математичні моделі створюють з математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів тощо. Математичними моделями здебільшого бувають функції, рівняння, нерівності, їх системи.

Процес побудови математичної моделі та подальше її застосування для розв'язування конкретних задач називається **математичним моделюванням**.

Розв'язування прикладної задачі математичними методами здійснюється в три етапи:

- 1) створення математичної моделі даної задачі;
- 2) розв'язування відповідної математичної задачі;
- 3) аналіз відповіді.

Задача 2. Чи достатньо одного мільйона літрів води для проведення змагань з плавання в басейні з горизонтальним дном прямокутної форми довжиною 100 м і шириною 25 м?

Розв'язання. I. Створення математичної моделі задачі. Вода в басейні з горизонтальним дном набуває форми прямокутного паралелепіпеда, який і є для даної задачі математичною моделлю реального об'єкта. У цьому паралелепіпеді одне з ребер відповідає висоті води (a — шукане значення), інші ребра — це довжина (b) і ширина (c) басейну.

II. Розв'язування математичної задачі. $V = a \cdot b \cdot c$ — об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами a , b і c . За умовою задачі:

$$b = 100 \text{ м}, c = 25 \text{ м}; V = 1\,000\,000 \text{ л} = 1\,000\,000 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ м}^3.$$

$$\text{Маємо: } 1000 = a \cdot 100 \cdot 25, \text{ звідси } a = \frac{1000}{2500} = 0,4 \text{ (м)}.$$

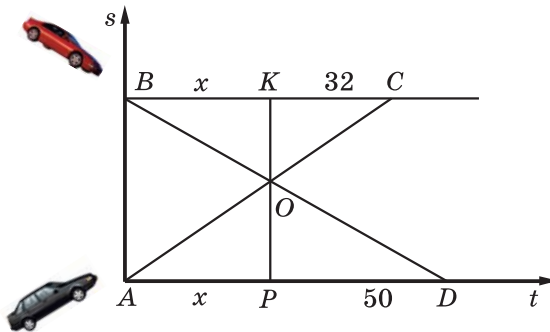
III. Аналіз відповіді. Для змагань з плавання глибина 0,4 м — надто мала. Отже, 1 000 000 л води в даному басейні недостатньо для проведення змагань з плавання.

Відповідь. Недостатньо.

Для багатьох задач на рух найзручнішими математичними моделями є графіки, побудовані в декартовій системі координат. На осі абсцис t відмічають час руху, а по осі ординат s — пройдену відстань. Зі зміною часу відстань між містами не змінюється, цьому факту відповідають паралельні прямі. Розглянемо задачу.

Задача 3. З міст A і B виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Перший приїхав до B через 32 хв після зустрічі, а другий до A — через 50 хв після зустрічі. Скільки хвилин вони їхали до зустрічі?

Розв'язання. Нехай AC і BD — графіки руху першого і другого автомобілів. Якщо кожен із них їхав до зустрічі x хв, тобто $AP = BK = x$, то $KC = 32$, $PD = 50$.



$\triangle AOP \sim \triangle COK$ і $\triangle POD \sim \triangle KOB$, тому

$$\frac{AP}{KC} = \frac{OP}{OK} = \frac{PD}{BK}.$$

$$\text{Отже, } \frac{x}{32} = \frac{50}{x}, \text{ звідси } x = 40.$$

Відповідь. 40 хв.

Математичними моделями даної задачі є система графіків, зображена на малюнку, та рівняння $x : 32 = 50 : x$. Спробуйте створити інші її математичні моделі.

Наприклад, візьміть до уваги, що $AD \parallel BC$, а тангенси кутів нахилу AC і BD до цих прямих — швидкості рухів відповідних об'єктів.

1. Наведіть приклади відношень між фізичними величинами, які можна змодельовувати рівністю: $y = mx$, $y = \frac{m}{x}$.

2. Сформулюйте прикладну задачу, математичною моделлю якої є формула:

а) $l = 2\pi r$; б) $S = \pi r^2$; в) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Виконаємо разом!

1 Два фермери, працюючи на комбайнах, можуть разом зібрати врожай пшениці за 12 год. За скільки годин кожен з них, працюючи окремо, міг би зібрати цей урожай, якщо відомо, що продуктивність праці першого в 1,5 раза вища від продуктивності праці другого?

Розв'язання. Нехай перший фермер може зібрати всю пшеницю за x год, тоді другий — за $1,5x$ год. За 1 год перший може зібрати $\frac{1}{x}$ частину поля, а другий —

$\frac{1}{1,5x}$ частину. Разом за 1 год вони можуть зібрати врожай з $\frac{1}{12}$ частини поля.

Отже, $\frac{1}{x} + \frac{1}{1,5x} = \frac{1}{12}$, звідси $\frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{1,5}\right) = \frac{1}{12}$, $x = \frac{2,5}{1,5} \cdot 12$, $x = 20$; $1,5 \cdot 20 = 30$.

Відповідь. 20 год; 30 год.

2 На проведення кожного тиражу лотереї витрачають 55 000 грн. Один білет лотереї коштує 1 грн. Третина виручки від продажу білетів іде у виграшний фонд, чверть — на сплату податків, а решта — прибуток організаторів лотереї. Яким був прибуток, якщо продали 180 000 білетів? Скільки білетів треба продати, щоб мати прибуток понад 30 000 грн? За якої умови організатори не одержать прибутку?

Розв'язання.

I. Нехай S — виручка за продаж білетів, а P — прибуток. Тоді $S = \frac{S}{3} + \frac{S}{4} + P + 55\,000$, а $P = \frac{5S}{12} - 55\,000$.

II. 1. Якщо $S = 180\,000$ грн, то $P = \frac{5 \cdot 180\,000}{12} - 55\,000 = 20\,000$ (грн).

2. Якщо $P > 30\,000$, то $\frac{5S}{12} - 55\,000 > 30\,000$, а $S > 204\,000$ (грн).

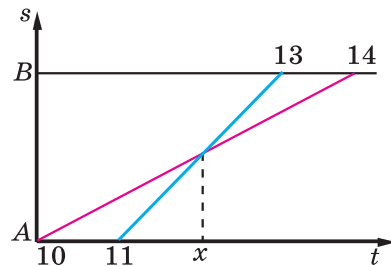
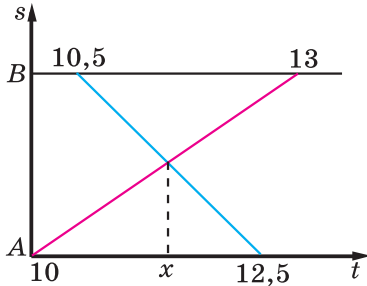
3. Якщо $P \leq 0$, то $\frac{5S}{12} - 55\,000 \leq 0$, а $S \leq 132\,000$.

III. Оскільки один білет лотереї коштує 1 грн, то кількість проданих білетів (K) чисельно дорівнює виручці. Отже, якщо $K > 204\,000$ штук, то прибуток перевищить 30 000 грн, а якщо $K \leq 132\,000$ штук, то організатори прибутку не матимуть.

Відповідь. 20 000 грн; понад 204 000 штук; якщо кількість проданих білетів не перевищить 132 000 штук.

Подані нижче дві задачі розв'яжіть усно, дивлячись на їх графічні моделі.

3 О 10 год з міста A до міста B виїхав мотоцикліст, а через 30 хв йому назустріч з B виїхав автомобіль. О котрій годині вони зустрілись, якщо автомобіль до A приїхав о 12 год 30 хв, а мотоцикліст до B — о 13 год (малюнок ліворуч)?



4 О 10 год з міста A до міста B виїхав мотоцикліст, об 11 год так само з A до B — автомобіль. О котрій годині автомобіль наздогнав мотоцикліста, якщо він приїхав до B о 13 год, а мотоцикліст — о 14 год (малюнок праворуч)?

Створіть математичні моделі до задач і розв'яжіть їх.

1. Корова прив'язана на галявині до кілка мотузкою завдовжки 8 м. Яку площу вона випасає?

2. Щоб підняти відро з криниці, треба зробити 12 обертів коловорота. Знайдіть глибину криниці, якщо діаметр вала коловорота становить 24 см.

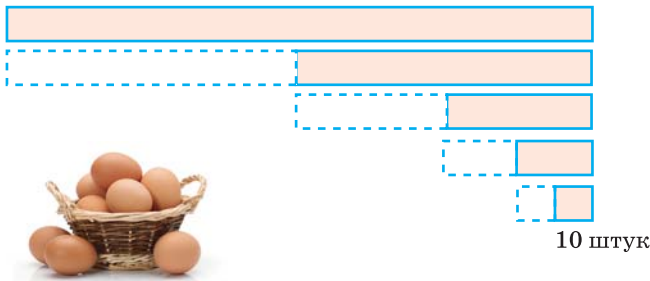
3. Батько старший за сина в 4 рази, а через 5 років він буде старший за сина тільки в 3 рази. Скільки років синові тепер?

4. **Задача Безу.** Робітнику сказали, що він одержуватиме по 24 су за кожний відпрацьований день, але при цьому відраховуватимуть по 6 су за кожний прогул. Через 30 днів з'ясувалося, що йому нічого одержувати. Скільки днів він працював?

5. На одному складі вугілля в 2 рази більше, ніж на другому. Якщо на перший склад привезти ще 80 т, а на другий — 145 т, то на обох складах вугілля буде порівну. Скільки тонн вугілля є на кожному складі?

6. В одному мішку було 60 кг цукру, а в другому — 80 кг. З другого мішка взяли цукру в три рази більше, ніж з першого, і тоді в першому мішку залишилось цукру вдвоє більше, ніж у другому. По скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

7. З кошика взяли половину всіх яєць, потім — половину остачі, потім — половину нової остачі, нарешті — половину нової остачі. Після цього в кошику залишилося 10 яєць. Скільки яєць було в кошику спочатку?



Для задач 8–9 створіть моделі, аналогічні тій, що використовується в задачі 7. Дайте відповіді на поставлені запитання.

8. Олег спік пиріжки і два відразу з'їв сам. Половину пиріжків, що залишилися, він віддав батькам, а половину остачі — подругам. Три пиріжки, що після цього залишилися, він віддав молодшому брату. Скільки пиріжків спік Олег?

9. У понеділок учні взяли половину всіх нових підручників, у вівторок — половину остачі, у середу — половину нової остачі. Після цього в бібліотеці залишилося 25 нових підручників. Скільки нових підручників було в бібліотеці?

Розв'яжіть задачі 10 і 11 та зіставте їх математичні моделі.

10. Два ковалі, працюючи разом, виконують певну роботу за 8 днів. За скільки днів виконав би цю роботу другий коваль, якщо перший може виконати її за 12 днів?

11. а) Одна бригада може виконати роботу за 3 год, друга — за 5 год. За скільки годин виконали б цю роботу обидві бригади разом?

б) Однією з двох труб басейн можна наповнити за 3 год, а другою — за 5 год. За скільки годин наповниться басейн, якщо відкрити обидві труби?

в) Від станції А до станції В і від В до А одночасно виїхали два автомобілі. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо відомо, що перший автомобіль відстань АВ долає за 3 год, а другий — за 5 год?

12. Які розміри мають золотий і срібний злитки у формі куба, якщо маса кожного дорівнює 3 кг? Густина золота — $19,3 \text{ г/см}^3$, а густина срібла — $10,5 \text{ г/см}^3$.

13. **Задача Маклорена.** Кілька людей обідали разом і мали заплатити за обід 175 шилінгів. З'ясувалося, що у двох не було з собою грошей, тому інші заплатили на 10 шилінгів більше, ніж їм належало. Скільки людей обідало?

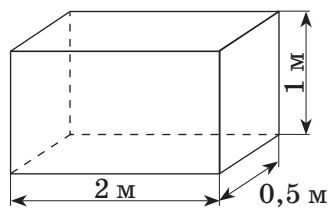
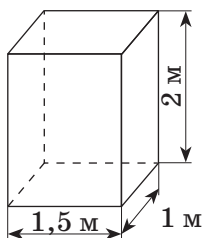
14. На малюнку зображено два резервуари, що мають форму прямокутного паралелепіпеда, і подано їх розміри. Перший резервуар наповнено водою на $\frac{3}{5}$ об'єму, а другий — на $\frac{3}{4}$ об'єму. З першого резервуара щодня беруть 112 літрів води, а з другого — 31 л.

а) Запишіть дріб, який показує, у скільки разів через x днів у першому резервуарі залишиться води більше, ніж у другому.

б) Обчисліть, у скільки разів у першому резервуарі залишиться води більше, ніж у другому через 9 днів.

в) Що означає рівність $\frac{1800-112x}{750-31x} = 3$? Розв'яжіть це рівняння і зробить вис-

новок.



15. **Відкрита задача.** Складіть задачу, аналогічну попередній.

16. Заводу було замовлено виготовити 105 двигунів. Завод щодня виготовляв на 6 двигунів більше, ніж передбачалось, тому виконав замовлення на 2 дні раніше. Скільки двигунів завод виготовляв щодня?

17. У розіграші першості з футболу було зіграно 55 матчів, кожна команда грала з кожною іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у розіграші?

18. Задача Фібоначчі. Дві вежі, одна заввишки 40, а друга — 30 футів, розташовані на відстані 50 футів одна від одної. До розміщеної між ними криниці злітаються одночасно з обох веж два птахи. Якщо птахи летять з однаковою швидкістю, то вони водночас долітають до криниці. Знайдіть відстань від криниці до веж.

19. Дві бригади мулярів, працюючи разом, можуть виконати роботу за 4 дні. За скільки днів кожна бригада окремо могла б виконати цю роботу, якщо перша зробить це на 6 днів раніше, ніж друга?

20. Двома екскаваторами різної потужності, що працювали разом, вирили котлован за 6 год. Якби одним з них вирили б половину котловану, а потім другим — решту, то всю роботу було б закінчено за 12,5 год. За скільки годин кожним екскаватором окремо можна виконати всю роботу?

21. Двома насосами, що працювали разом, наповнили танкер нафтою за 5 год. Якби потужність I насоса була удвічі меншою, а потужність II — удвічі більшою за початкову, то танкер наповнили б за 4 год. За скільки годин кожним насосом, що працював би окремо з початковою потужністю, можна наповнити танкер нафтою?

22. Маємо 10-відсотковий і 15-відсотковий розчини солі. Скільки треба взяти кожного розчину, щоб мати 100 г 12-відсоткового розчину?

23. Маємо два розчини солі. Концентрація солі в першому — 0,25, а в другому — 0,4. На скільки кілограмів більше треба взяти одного розчину, ніж другого, щоб одержати розчин масою 100 кг, концентрація солі в якому 0,37?

24. Ціна меблів після двох послідовних знижок на $p\%$ зменшилася з 12 500 грн до 8000 грн. На скільки відсотків зменшувалася ціна щоразу?

25. У дитячому кафе фруктовий салат «Екзотика», що складається на $\frac{3}{4}$ із персиків, коштує 24 грн. Якою буде ціна салату, якщо персики замінити: а) сливами, що вдвічі дешевші за персики; б) плодами, що в k разів дорожчі за персики? Врахуйте, що вартість компонентів салату становить 50 % його загальної вартості.

26. Попит і пропозиція певного товару описуються рівняннями:

$$Q_D = 750 - 23p, Q_S = 150 + 97p,$$

де Q_D — обсяг попиту (млн штук за рік), Q_S — обсяг пропозиції (млн штук за рік), p — ціна, грн. Знайдіть рівноважну ціну та обсяг продажу. Як зміниться попит і пропозиція, якщо ціна товару становитиме 6 грн?

27. Для виробництва продукції фірма закупила устаткування, вартість якого — 200 000 грн. Передбачається, що термін експлуатації устаткування — 10 років, після чого, у зв'язку із закінченням терміну експлуатації, воно може бути продано тільки на брухт за ціною 19 700 грн. Установіть, якою буде поточна вартість устаткування через 2 і через 5 років його експлуатації, якщо щороку амортизаційні відрахування залишаються сталими.

28. Фермер має 600 м металеві сітки, якою він хоче обгородити загін для телят. Яку форму загону слід обрати, щоб він мав найбільшу площу?

Енерго- ефективність і енерго- збереження

Навчальний проєкт № 3

Фінансові обчислення



Застосування МАТЕМАТИКИ



Мета даного проєкту полягає в тому, щоб учні в процесі самостійної навчально-пізнавальної діяльності розкрили значення математики в повсякденному житті, зокрема використання відсоткових розрахунків і статистичних відомостей. Передбачається, що проєктна діяльність буде супроводжуватися складанням і розв'язуванням різних задач на відсотки, а також аналізом і побудовою діаграм.

Учні/учениці класу формуються у малі групи по 2 — 3 особи. За бажанням учнів можна здійснювати індивідуальну проєктну діяльність. Кожна група обирає для проєктної діяльності одну із запропонованих нижче тем:

- 1) Математика в професії моїх батьків.
- 2) Математика на транспорті.
- 3) Математика у сільському господарстві.
- 4) Математика на кухні.
- 5) Як я використовую вільний час.
- 6) Яким книжкам я віддаю перевагу.
- 7) Що читають у моїй родині.
- 8) Спорт у моїй родині.
- 9) Індекс маси та збалансоване харчування моєї родини.
- 10) Соціальні мережі.
- 11) Інтернет у моїй родині — ефективність використання.
- 12) У який банк покласти гроші на зберігання.
- 13) Податки, які сплачує моя родина.
- 14) Як заощаджувати електроенергію.
- 15) Скільки можна заощадити при раціональному використанні телефонних апаратів.
- 16) Вода, яку ми використовуємо даремно.
- 17) Використання води в різних країнах світу.
- 18) Переваги і недоліки різних джерел світла.
- 19) Переваги і недоліки різних джерел енергії.
- 20) Енергоефективність нашої оселі.
- 21) Енергоефективність нашої школи.
- 22) Ефективне використання земельної присадибної ділянки.

Теми для проектної діяльності повідомляються учням наприкінці третьої чверті. Після вибору теми дослідження кожен учень має опрацювати обов'язковий матеріал («Відсоткові розрахунки»), що міститься нижче, і дібрати додаткові відомості, що стосуються обраної теми.

Результати роботи над проектом бажано оформити у вигляді індивідуальних портфоліо з груповою комп'ютерною презентацією. За результатами дослідження можна створити плакати, газети, збірник задач (електронний чи паперовий).

Захист проектів доцільно провести на кількох тематичних позакласних заходах, запросивши учнів інших класів, учителів і батьків.

Учням рекомендується самостійно повторити й опрацювати поданий нижче теоретичний матеріал.

Відсоткові розрахунки

Відсоток (або *процент*) — це одна сота:

$$1\% = 0,01; 50\% = 0,5; 100\% = 1.$$

Із найпростішими задачами на відсотки ви ознайомилися раніше. Пригадаймо ці види задач і способи їх розв'язування.

Існує три основні види задач на відсотки:

- 1) знаходження відсотків від числа:
 - p відсотків від числа a — $a \cdot 0,01p$;
- 2) знаходження числа за відсотками:
 - число, p відсотків якого дорівнюють b , — $b : (0,01p)$;
- 3) знаходження відсоткового відношення:
 - відсоткове відношення a і b — $(a : b) \cdot 100\%$.

Розглянемо приклади таких задач.

Приклад 1. Потрібно зорати поле, площа якого дорівнює 300 га. За перший день трактористи виконали 40 % завдання. Скільки гектарів вони зорали за перший день?

Приклад 2. За перший день трактористи зорали 120 га, що становить 40 % поля. Знайдіть площу всього поля.

Приклад 3. Потрібно зорати поле, площа якого дорівнює 300 га. За перший день трактористи зорали 120 га. Скільки відсотків усього поля вони зорали за перший день?

Спробуйте розв'язати кожну з цих задач кількома способами, замінивши 40 % дробом $0,4$ або $\frac{2}{5}$.

Такі задачі також зручно розв'язувати *способом пропорцій*. Оформлювати розв'язання сформульованих задач можна так:

$$(1) \quad 300 \text{ га} — 100\%, \quad \frac{300}{x} = \frac{100}{40}, \quad x = \frac{300 \cdot 40}{100} = 120 \text{ (га)}.$$

$$x \text{ га} — 40\%.$$

$$(2) \quad 120 \text{ га} — 40\%, \quad \frac{120}{x} = \frac{40}{100}, \quad x = \frac{120 \cdot 100}{40} = 300 \text{ (га)}.$$

$$x \text{ га} — 100\%.$$

$$(3) \quad 300 \text{ га} — 100\%, \quad \frac{300}{120} = \frac{100}{x}, \quad x = \frac{120 \cdot 100}{300} = 40 (\%).$$

$$120 \text{ га} — x\%.$$

У складніших прикладних задачах на відсотки часто йдеться про збільшення або зменшення величини на кілька відсотків. У таких випадках треба добре розуміти, від чого беруться відсотки. Наприклад, коли говорять, що заробітна плата підвищилась на 10 %, то розуміють, що вона збільшилась на 10 % від попередньої заробітної плати. При цьому, якщо значення x більше від y на p %, то значення y менше від x не на p %. Збільшенню в 2 рази відповідає збільшення на 100 %, а зменшенню в 2 рази — зменшення на 50 %. Ціна товару теоретично може збільшуватись на будь-яке число відсотків, а зменшитись, наприклад, на 120 % не може.

Розглянемо одну із задач на відсотки.

Приклад 4. Просушили 55 т зерна 16-відсоткової вологості, після чого його стало 50 т. Знайдіть відсоток вологості просушеного зерна.

Розв'язання. Зерно спочатку містило води $0,16 \cdot 55 = 8,8$ (т).

Випарувалося води 5 т ($55 - 50 = 5$).

Залишилось у зерні води $8,8 - 5 = 3,8$ (т).

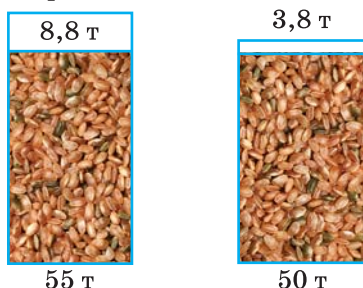
Отже, відсоток вологості просушеного зерна дорівнює:

$$3,8 : 50 = 0,076 = 7,6 \%$$

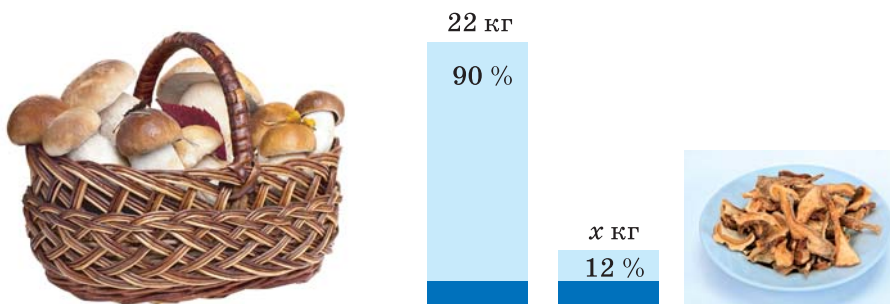
Відповідь. 7,6 %.

Можна розв'язати задачу й інакше, наприклад, склавши рівняння:

$$0,16 \cdot 55 - 0,01x \cdot 50 = 5.$$



Приклад 5. Свіжі гриби містять 90 % води, а сушені — 12 %. Скільки сушених грибів вийде з 22 кг свіжих?



Розв'язання. Нехай сушених грибів буде x кг. У них безводної маси 88 %, тобто $0,88x$. У 22 кг свіжих грибів безводної маси 10 %, тобто 2,2 кг. Безводної маси свіжих і сушених грибів рівні, звідси маємо рівняння:

$$0,88x = 2,2; x = 2,5.$$

Відповідь. 2,5 кг.

Приклад 6. Із двох розчинів солі — 10-відсоткового і 15-відсоткового — треба утворити 40 г 12-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти?

Розв'язання. Побудуємо і заповнимо таблицю, позначивши загальні маси першого та другого розчинів через x г і y г.

Розчин	Загальна маса, г	Вміст солі, %	Маса солі, г
I	x	10	$0,10x$
II	y	15	$0,15y$
III (утворений)	40	12	4,8

За значеннями у стовпцях «Загальна маса» та «Маса солі» складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 0,10x + 0,15y = 4,8, \end{cases} \text{ звідси } x = 24, y = 16.$$

Відповідь. Потрібно взяти першого розчину 24 г, другого — 16 г.

Найчастіше доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам і працівникам банків. Розглянемо приклади, пов'язані з нарахуванням інвесторам (вкладникам) відсоткових грошей.

Говорять про **прості відсотки**, якщо нараховують відсотки лише на початково інвестовану суму.

Наприклад, на початку року вкладник розміщує на рахунку в банку суму P під відсоток r річних. За рік він одержить суму P_1 , яка дорівнює початковому вкладу P плюс нараховані відсотки $\left(\frac{Pr}{100}\right)$, або $P_1 = P + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Через два і три роки сума на рахунку становитиме:

$$P_2 = P + \frac{Pr}{100} + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + 2\frac{r}{100}\right) \text{ і } P_3 = P\left(1 + 3\frac{r}{100}\right).$$

Аналогічно можна представити суму P_n , яку вкладник одержить через n років:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}n\right), \quad (1)$$

де P — сума початкового вкладу; P_n — сума вкладу через n років.

Нарахування за схемою простих відсотків застосовується, як правило, у короткострокових фінансових операціях, коли після кожного інтервалу нарахування вкладнику виплачуються відсотки.

У довгострокових фінансово-кредитних угодах частіше використовують **складні відсотки**. Їх нараховують не тільки на основну суму, а й на нараховані раніше відсотки. У цьому випадку кажуть, що відбувається **капіталізація відсотків**.

Припустимо, що вкладник поклав до банку під 9 % річних 1000 грн. Це **початковий капітал**. Через рік банк нарахує вкладнику за це 90 грн **відсоткових грошей** (9 % від 1000 грн.). Після цього на рахунку вкладника стане 1090 грн, бо $1000(1 + 0,09) = 1090$. За другий рік відсоткових грошей йому нарахують уже 9 % від 1090 грн; **нарощений капітал** вкладника після двох років дорівнюватиме $1000(1 + 0,09)^2$ грн. Зрозуміло, що через n років цей капітал становитиме $1000(1 + 0,09)^n$ грн.

Отже, вкладений в банк початковий капітал P під p % річних через n років перетвориться в нарощений капітал:

$$P_n = P\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Це формула складних відсотків. Вона є однією з базових у фінансових розрахунках.

Приклад 7. Вкладник поклав до банку 200 000 грн під складні 7 % річних. Які відсоткові гроші він матиме через 5 років?

Розв'язання. Скористаємося формулою складних відсотків $P_n = P \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$.

У даному разі $p = 7$, $n = 5$.

Отже, $P_5 = P(1,07)^5$. При $P = 200\,000$ маємо:

$$P_5 = 200\,000 \cdot (1,07)^5 = 280\,510.$$

Порівняно з початковим вкладом:

$$280\,510 - 200\,000 = 80\,510 \text{ (грн)}.$$

Відповідь. 80 510 грн.

Множник $\left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$, який забезпечує нарощення грошової суми, називають

мультиплікованим множитком. Його значення обчислюють для різних значень p і n та заносять у спеціальні таблиці.

Оберіть задачі, які стосуються теми вашого дослідження й розв'яжіть їх. Складіть власні задачі з тематики обраного проекту.

1. Посадовий оклад службовця — 4000 грн. З нового року його обіцяють підвищити на 20 %. Яким стане посадовий оклад службовця?

2. При виготовленні розсолу для соління огірків треба 0,76 кг солі на відро води (12 кг). Виразіть у відсотках міцність розчину.

3. Із 1050 зернин пшениці 1000 зернин зійшло. Який відсоток схожості має насіння?

4. Банк обслуговує 50 000 клієнтів: 21 000 — юридичні особи, а решта — фізичні. Скільки відсотків становлять: а) юридичні особи; б) фізичні особи?

5. Площа поверхні Землі становить 510,1 млн км², з них 149,2 млн км² — суходіл. Скільки відсотків поверхні Землі покрито водою?

6. Тракторист мав зорати 25 га, а зорав — 27 га. На скільки відсотків він виконав завдання? На скільки відсотків перевиконав завдання?

7. З молока одержують 10 % сиру. Скільки потрібно молока для 20 кг сиру?

8. 3 цукрових буряків одержують 12 % цукру. Скільки буряків треба, щоб одержати 1 т цукру?

9. В одній книжці на 20 % сторінок менше, ніж у другій. На скільки відсотків у другій книжці сторінок більше, ніж у першій?

10. Яка була ціна товару до переоцінки, якщо після підвищення її на 20 % цей товар коштує 450 грн?

11. Ціна краму спочатку знизилась на 10 %, а потім ще раз на 10 %. На скільки відсотків вона змінилась після двох переоцінок?

12. Ціна на автомобіль спочатку підвищилась на 20 %, а потім знизилась на 20 %. Як змінилась ціна на автомобіль після цих двох переоцінок?

13. У двох баках міститься 140 л бензину. Якщо з першого бака 12,5 % бензину перелити в другий, то в обох баках бензину стане порівну. Скільки літрів бензину в кожному баці?

14. Завод збільшив випуск продукції за перший рік на 20 %, а за другий — на 25 %. Як зріс випуск продукції на заводі за ці два роки?

15. Обсяг робіт на будівництві збільшився на 50 %, а продуктивність праці — на 20 %. Як змінилась кількість робітників?

16. До 18 кг 10-відсоткового розчину кислоти долили 2 кг води. Визначте відсоткову концентрацію нового розчину.

17. Скільки треба змішати 10-відсоткового і 20-відсоткового розчинів солі, щоб мати 1 кг 12-відсоткового розчину?

18. Скільки кілограмів 7-відсоткового розчину слід долити до 5 кг 5-відсоткового розчину, щоб він став 6-відсотковим?

19. Скільки прісної води треба долити до 100 кг морської, яка містить 5 % солі, щоб концентрація солі в ній дорівнювала 1,5 %?

20. Латунь — сплав 60 % міді і 40 % цинку. Скільки міді й цинку треба сплавити, щоб одержати 500 т латуні?

21. Бронза — сплав міді й олова. Скільки відсотків міді в бронзовому злитку, який містить 17 кг міді та 3 кг олова?

22. Скільки води треба долити до 10 кг розчину солі, концентрація якого 5 ‰, щоб одержати розчин концентрацією 3 ‰?

23. Скільки треба змішати розчину солі концентрацією 2 ‰ і розчину солі концентрацією 10 ‰, щоб одержати 800 г розчину, концентрація якого 7 ‰?

24. Скільки золота 375-ї проби треба сплавити із 30 г золота 750-ї проби, щоб одержати сплав золота 500-ї проби?

25. Із молока жирністю 5 % виготовляють сир жирністю 15,5 %, при цьому залишається сироватка жирністю 0,5 %. Скільки сиру одержують із 100 кг молока?

26. На першому полі 65 % площі засіяно житом. На другому полі під жито відвели 45 % площі. Відомо, що на обох полях житом засіяно 53 % загальної площі. Яку частину всієї засіяної площі становить перше поле?

27. З молока одержують 20 % вершків, а з вершків — 25 % масла. Скільки треба молока, щоб одержати 10 кг масла?

28. Руда містить 60 % заліза. З неї виплавляють чавун, який містить 98 % заліза. Із скількох тонн руди виплавляють 1000 т чавуну?

29. Свіжі гриби містять 90 % води, а сухі — 12 %. Скільки треба висушити свіжих грибів, щоб одержати 10 кг сухих?

30. Вологість свіжих грибів дорівнювала 99 %. Коли гриби підсушили, їх вологість зменшилась до 98 %. Як змінилась маса грибів?

31. Фірма взяла в банку кредит 250 000 грн на 5 років під простих 3 %. Визначте: а) скільки гривень фірма поверне банку через 5 років; б) який прибуток одержить банк?

32. Підприємець вніс до банку 15 000 грн під складні 5 % річних. Якою буде сума його вкладу через 4 роки?

33. Підприємству надано 50 000 грн у кредит на шість місяців за ставкою 8 % річних. Яку суму підприємство має повернути банку через півроку?

34. На вклад у розмірі 90 000 грн строком на 5 років банк нараховує 18 % річних. Яка сума буде на рахунку в кінці строку, якщо нарахування відсотків здійснюється за схемою складних відсотків: а) щопівроку; б) щоквартально?

У задачах 35–36 розгляньте різні умови нарахування відсотків.

35. Вкладник поклав до банку 200 000 грн під 17 % річних. Які відсоткові гроші він матиме через два роки?

36. За якої умови покладений до банку капітал через два роки збільшиться на 44 %?

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Числа та дії над ними

Виконай дії (1208, 1209).

1208. а) $40\,784 + 846 - (13\,843 + 787)$;

б) $(52 - 36 + 320 - 96) : 4$.

1209. а) $12,54 : (44,8 - 38,2) + 5,4 \cdot 1,5$;

б) $507,24 : 36 + 0,8(21,7 - 15,8)$.

Знайди значення виразу (1210, 1211).

1210. а) $\left(2\frac{3}{4} - 2\frac{3}{8} - 0,3\right) : 6$;

б) $\left(5\frac{9}{25} - 2,36\right) : \left(3\frac{4}{5} + 0,2\right)$.

1211. а) $\frac{2}{3}(0,3 - 0,5 : 4) : 1,75 - \frac{1}{6}$;

б) $2\frac{1}{6} : 13 + \left(3,25 + 2\frac{1}{6}\right) : 2\frac{3}{5}$.

Обчисли (2012, 2013).

1212. а) $\frac{47^2 - 41^2}{28^2 - 16^2}$;

б) $\frac{57^2 - 42^2}{29^2 - 26^2}$;

в) $\frac{51^2 - 12^2}{90^2 - 9^2}$;

г) $\frac{61^2 - 11^2}{36^2 - 24^2}$.

1213. а) $6^{32} \cdot 4^{32} - (24^{16} - 5)(24^{16} + 5)$;

б) $(56^{10} - 7)(56^{10} + 7) - 7^{20} \cdot 8^{20}$.

Обчисли значення виразу (1214–1218).

1214. а) $\sqrt{64 \cdot 900}$;

б) $\sqrt{25 \cdot 196}$;

в) $\sqrt{49 \cdot 676}$.

1215. а) $\sqrt{0,01 \cdot 121}$;

б) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$;

в) $\sqrt{0,09 \cdot 441}$.

1216. а) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$;

б) $\sqrt{10\frac{6}{25}}$;

в) $\sqrt{31\frac{93}{121}}$.

1217. а) $\sqrt{6 \cdot 10 \cdot 15}$;

б) $\sqrt{15 \cdot 21 \cdot 35}$;

в) $\sqrt{20 \cdot 28 \cdot 35}$.

1218. а) $\sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{10}{49}}$;

б) $\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{36} \cdot \frac{35}{27}}$;

в) $\sqrt{1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{7}{10}}$.

Обчисли добуток (1219, 1220).

1219. а) $\sqrt{44,1} \cdot \sqrt{12,1}$;

б) $\sqrt{28,9} \cdot \sqrt{32,4}$.

1220. а) $\sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{80}{135}}$;

б) $\sqrt{8\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{73}}$.

Подільність чисел. Відношення і пропорції

1221. Випиши усі прості числа, більші за 15 і менші за 35.

1222. Випиши такі складені числа x , які задовольняють умову $21 < x < 31$.

- 1223.** Допиши до числа 278 зліва таку цифру, щоб утворилося чотирицифрове число, кратне 9.
- 1224.** Розклади на прості множники число: а) 240; б) 350.
- 1225.** Знайди найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел: а) 18 і 32; б) 42 і 105; в) 60, 80 і 140.
- 1226.** У скільки разів НСД чисел 36 і 48 менший за їхній НСК?
- 1227.** Розклавши на прості множники числа 140, 175, 210, знайди:
а) НСД (140, 175), НСД (140, 210), НСД (140, 175, 210);
б) НСК (140, 175), НСК (175, 210), НСК (140, 175, 210);
в) суму всіх простих дільників числа 210;
г) суму всіх дільників числа 175.
- 1228.** Використовуючи цифри 1, 2, 3, напиши всі трицифрові числа, у яких кожна цифра зустрічається лише один раз. Скільки з цих чисел парних, непарних, кратних 3, 6, 9?
- 1229.** Знайди суму чисел, менших за 20 і взаємно простих з числом 20.
- 1230.** Які з чисел, що менші за 40, взаємно прості з числом 60?
- 1231.** Знайди п'ять парних натуральних чисел, кратних 7.
- 1232.** Чи може сума чотирьох послідовних натуральних чисел бути простим числом?
- 1233.** Спрости відношення:

$$\text{а) } 20 : 60; \quad \text{б) } 0,4 : 1,2; \quad \text{в) } 1 : 0,125; \quad \text{г) } \frac{2}{3} : \frac{3}{5}; \quad \text{г) } 1\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2}.$$

- 1234.** Запиши кілька пропорцій, складених із чисел 2, 4, 3 і 1,5.

- 1235.** Знайди невідомий член пропорції:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } x : 3 = 7 : 6; & \text{в) } 11 : 1001 = 0,3 : x; & \text{г) } \frac{18}{x} = \frac{1,2}{5}; \\ \text{б) } 1,2 : 5 = x : 15; & \text{г) } \frac{x}{7} = \frac{2}{3,5}; & \text{д) } 9 = \frac{16,2}{x}. \end{array}$$

Цілі вирази

Подай вираз у вигляді многочлена (**1236, 1237**).

- 1236.** а) $(0,4a^2 - 5ab)^2$; в) $(x^2y^2 - 1)^2$;
б) $(6,5xy + 8y^2)^2$; г) $(2 + a^6b^4)^2$.
- 1237.** а) $(-x + y^2)^2$; в) $(-2a^2 + 3y^3)^2$; г) $(-0,1xy + 5)^2$;
б) $\left(-\frac{1}{3} - 3x^5\right)^2$; г) $\left(-\frac{1}{2}m^3 - 0,2n\right)^2$; д) $(-6x^2y - 0,5y)^2$.

- 1238.** Спрости вираз:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } (3x - 5y)^2 - 3x(3x - 10y); & \text{в) } (4x + y)(3x + 4y) - (2y + 3x)^2; \\ \text{б) } 8a(b - 2a) + (4a + b)^2; & \text{г) } (3a + 6b)^2 - (2a + 9b)(3a + 4b). \end{array}$$

Розклади на множники многочлен (1239, 1240).

1239. а) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy$; в) $6a^2b - 18a^2 - 3ab + 9a$;
 б) $a^3c^2 - a^2c^2 + a^3 - a^2$; г) $xyz - 4xz - 5xy + 20x$.
1240. а) $a^2 - b^2 - a + b$; в) $4a^2 - 9 - 2a - 3$;
 б) $x + y + x^2 - y^2$; г) $5 - 3x + 25 - 9x^2$.
1241. Подай у вигляді добутку:
 а) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; в) $x^2 - y^2 + 8y - 16$;
 б) $a^2 + 2a + 1 - b^2$; г) $a^2 - b^2 - 14b - 49$.
1242. Подай у вигляді добутку трьох множників:
 а) $ab^2 - 4a - b^3 + 4b$; в) $x^2a + 3a^2 - a^3 - 3x^2$;
 б) $x^3 + x^2y - 9x - 9y$; г) $x^3 - 5b^2 + 5x^2 - xb^2$.

Раціональні вирази

1243. Які значення змінної допустимі для дробу?
 а) $\frac{a+2}{a(3-a)}$; б) $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$; в) $\frac{x+7}{(x^2-4)(x^2-9)}$.
1244. Скороти дріб.
 а) $\frac{(a+x)^2}{(a+x)^3}$; б) $\frac{x^2y(2-x)^7}{(xy^2(2-x))^6}$; в) $\frac{(3+c)^5}{(c^2+6c+9)^4}$; г) $\frac{(a^2-1)^3}{(a-1)^5}$.

Спрости вираз (1245–1248).

1245. $\frac{2x^2+7xy-9y^2}{x^2-y^2} + \frac{9x^2-7xy-2y^2}{x^2-y^2}$.
1246. $\frac{x+2y}{2x-y} + \frac{2x-2y}{2x-y} + \frac{6x-3y}{2x-y} + \frac{x-2y}{2x-y}$.
1247. а) $\frac{1}{m} - \frac{5}{4m}$; б) $\frac{a}{2x} - \frac{4a}{x}$; в) $\frac{1}{0,5c} - \frac{2}{c}$.
1248. а) $\frac{1}{3ax^2} + \frac{2}{5az^2}$; б) $\frac{4m}{3p^2x} - \frac{1}{5m^2x}$; в) $\frac{4}{a} - \frac{3}{2ac^2x}$.

Виконай ділення і множення дробів (1249–1252).

1249. а) $\frac{2ax}{3c^2} : \frac{4ax^2}{9c^3}$; б) $\frac{a^3c^2}{5xy} : \frac{2a^2c^3}{3x^2y}$; в) $\frac{12mn^3}{5ac^2} : \frac{3mn^2}{10a^2}$.
1250. а) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} : \frac{3a+3b}{4a-4b}$; б) $\frac{5-5a}{(1+a)^2} : \frac{10-10a^2}{3+3a}$.
1251. а) $\left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{4a}\right) : \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1\right)$; б) $\left(\frac{a^2b^{-3}}{6c}\right)^{-3} : \left(\frac{a^3b^{-5}}{9c}\right)^{-2}$.

$$1252. \frac{m^3 - mn^2}{m^2 + n^2} \cdot \left(\frac{n}{m^3 - m^2n + mn^2} + \frac{m - 2n}{m^3 + n^3} \right).$$

Ірраціональні вирази

Спрости вираз (1253–1259).

$$1253. \text{ а) } 2\sqrt{20x} - \sqrt{5x} - \sqrt{45x};$$

$$\text{в) } \sqrt{27x} + 2\sqrt{12x} - 5\sqrt{3x};$$

$$\text{б) } \sqrt{18p} - \sqrt{8p} + \sqrt{81};$$

$$\text{г) } \sqrt{18a} - \sqrt{50a} + \sqrt{8a}.$$

$$1254. \text{ а) } (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2);$$

$$\text{в) } (\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3);$$

$$\text{б) } (\sqrt{x} + 2)(3 + \sqrt{x});$$

$$\text{г) } (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

$$1255. \text{ а) } \sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) + 2\sqrt{a};$$

$$\text{б) } (3 - 2\sqrt{x})\sqrt{x} - 3\sqrt{x}.$$

$$1256. \text{ а) } \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{x}) + \sqrt{ax};$$

$$\text{б) } \sqrt{xy} - \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$1257. \text{ а) } \frac{\sqrt{a} - 1}{a - 1};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{x} - \sqrt{z}}{x - z};$$

$$\text{в) } \frac{a + \sqrt{2}}{a^2 - 2}.$$

$$1258. \text{ а) } \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + a};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{a\sqrt{x} + x\sqrt{a}};$$

$$\text{в) } \frac{a + 2\sqrt{a} + 1}{a - 1}.$$

$$1259. \text{ а) } \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{(b - a)^2}{\sqrt{ab}}; \quad \text{б) } \left(\frac{1}{x + x\sqrt{y}} + \frac{1}{x - x\sqrt{y}} \right) : \frac{2}{y - 1}.$$

Рівняння та системи рівнянь

Розв'яжи рівняння (1260–1266).

$$1260. \text{ а) } 7x - 39 = 2(x + 3) + 6 - 2x + 5;$$

$$\text{б) } 3(x - 5) = 5(x - 3) - 4(2 - 3x).$$

$$1261. \text{ а) } 5(x - 3) + 7(3x + 6) = 2(x - 2) + 103;$$

$$\text{б) } 8(y - 2) + 5(3y - 2) = 3(y - 5) + 69.$$

$$1262. \text{ а) } 7(6x - 1) + 3(2x + 1) - 5(12x - 7) = 23;$$

$$\text{б) } 5(8z - 1) + 8(7 - 4z) - 7(4z + 1) = 19.$$

$$1263. \text{ а) } x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$\text{в) } 3y^2 - 2y - 8 = 0;$$

$$\text{б) } x^2 - 8x - 20 = 0;$$

$$\text{г) } 0,25x^2 - 2x + 3 = 0.$$

$$1264. \text{ а) } \frac{x-1}{x+5} + \frac{x-1}{x-5} = 2;$$

$$\text{в) } \frac{x-1}{x+4} - 2 = \frac{1-x}{x-4};$$

$$\text{б) } \frac{2x-1}{x+2} = \frac{1-2x}{x-2} + 4;$$

$$\text{г) } \frac{2x-1}{2x+4} = \frac{1-2x}{2x-4} + 2.$$

$$1265. \text{ а) } x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$$

$$\text{б) } x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

$$1266. \text{ а) } 3x^4 - 2x^2 - 40 = 0;$$

$$\text{б) } 5y^4 + 7y^2 - 12 = 0.$$

Розв'яжи системи рівнянь (1267–1272).

$$1267. \text{ а) } \begin{cases} 2x - 3(x - y) = 7, \\ 5y - 2(x - 2y) = 23; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4y - 5(y - x) = 8, \\ 2(3x - y) + 7y = -14. \end{cases}$$

$$1268. \text{ а) } \begin{cases} \frac{4}{5}x - y = 7, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 11; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{3}{7}x - z = 15, \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{7}z = 14. \end{cases}$$

$$1269. \text{ а) } \begin{cases} \frac{5+y}{3} - \frac{3x+4y}{4} = 3x+1, \\ \frac{7x+2}{3} + \frac{4x-3}{2} + \frac{11}{6} = 1-3x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} - 3y = -5, \\ \frac{5y-7}{2} - \frac{3-4x}{6} - 18 = -5x. \end{cases}$$

1270. Розв'яжи систему рівнянь способом підстановки:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$$

1271. Розв'яжи систему рівнянь способом алгебраїчного додавання:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y - xy = -23, \\ x - y + xy = 49; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$$

1272. Розв'яжи систему рівнянь способом заміни змінних:

$$\text{а) } \begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ x + y + 3xy = -35; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} xy + x + y = -11, \\ x^2y + y^2x = 30. \end{cases}$$

Задачі на складання рівнянь і систем рівнянь

1273. На двох токах разом є 990 т пшениці. Скільки центнерів пшениці на кожному з них, якщо на першому на 20 % більше, ніж на другому?

1274. У магазин привезли крупи двох сортів, усього 1800 кг. Після того як продали 60 % 1-го сорту і 70 % 2-го сорту, у магазині залишилось 640 кг крупи. Скільки крупи 1-го і 2-го сорту окремо привезли в магазин?

1275. На вступному іспиті з математики 15 % абітурієнтів не розв'язали жодної задачі, 144 абітурієнти розв'язали задачі з помилками, а число тих, хто розв'язав усі задачі правильно, відноситься до числа тих, хто не розв'язав жодної, як 5 : 3. Скільки абітурієнтів складала іспит з математики?

1276. Відстань 400 км швидкий поїзд проїхав на годину швидше, ніж товарний. Яка швидкість кожного поїзда, якщо швидкість товарного на 20 км/год менша, ніж швидкого?

- 1277.** Турист, проїхавши 1200 км, підрахував, що коли б він був у дорозі на 6 днів більше, то проїжджав би щодня на 10 км менше. Яку відстань проїжджав турист щодня?
- 1278.** Дві ткалі, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 12 днів. За скільки днів виконала б цю саму роботу кожна ткаля окремо, якщо відомо, що продуктивність однієї з них у 1,5 раза вища від продуктивності другої?
- 1279.** Поїзд за певний час мав пройти відстань 250 км. Але через 2 год після початку руху він затримався на 20 хв і, щоб прибути вчасно до місця призначення, йому довелося збільшити швидкість на 25 км/год. Якою була швидкість поїзда за розкладом?
- 1280.** У яблуках «Антонівка» цукор становить 10,7 % маси. Скільки цукру містить 50 кг таких яблук?
- 1281.** Банк обслужив 45 клієнтів, що становить 15 % від усіх клієнтів. Скільки клієнтів має банк?
- 1282.** Ціну на товар знизили спочатку на 10 %, а потім ще на 5 %, і в результаті він став коштувати 34,2 грн. Якою була початкова ціна товару?
- 1283.** На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 20 %, а ширину — на 10 %?
- 1284.** Ціну на товар було знижено на 20 %. На скільки відсотків її потрібно підвищити, щоб одержати попередню ціну?
- 1285.** Витрати на виготовлення виробу становлять 1250 грн, а його ціна — 1750 грн. Обчисліть націнку на товар у відсотках.

Нерівності

Розв'яжи нерівність і зобрази множину її розв'язків на координатній прямій (**1286**, **1287**).

1286. а) $3x - 5 < x + 7$; в) $0,3y + 1 > 3 - 0,2y$;

б) $x + 15 \geq 5x + 3$; г) $1,5z - 2 < z + 8$.

1287. а) $5 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (3x - 2) > 3x - 4 \cdot (2x - 7)$;

б) $4 \cdot (3 - 2y) - 3 \cdot (4y + 5) < 5y + 3 \cdot (y - 4)$.

1288. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

а) $\sqrt{5x-7}$;

б) $\sqrt{1-2x}$;

в) $\frac{1}{x} + \sqrt{3x-1}$?

1289. Знайди область визначення функції:

а) $y = \sqrt{-2x}$;

б) $y = \sqrt{3-7x}$;

в) $y = \sqrt{x^2+3}$;

г) $y = \sqrt{-x^2-1}$;

г) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$;

д) $y = \frac{2}{x} - \sqrt{1-x}$.

Розв'яжи систему нерівностей (1290, 1291).

1290. а)
$$\begin{cases} 5x+1 > 6x-18, \\ 3x-7 < 5x-13; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 7y+3 > 8y-17, \\ 3y-2 < 6y-12. \end{cases}$$

1291. а)
$$\begin{cases} 1+2x > \frac{9x-2}{4}, \\ 7+2x > 3x-1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{2-6x}{5} \geq 3x+13, \\ 5x-8 \leq \frac{3x+2}{4}. \end{cases}$$

1292. Розв'яжи подвійну нерівність.

а) $9 < 2x + 3 < 17;$

в) $0 \leq 2 - x \leq 2;$

б) $-8 < 3x - 2 < 25;$

г) $-8 \leq 3 - 11x < 58.$

Функції і графіки

1293. Знайди $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, якщо функцію задано формулою:

а) $f(x) = 2x^2 + 3$; б) $f(x) = 3x^3 - 2$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1294. Функцію задано формулою $y = \frac{6x}{1+x}$ на множині натуральних чисел першого десятка. Задай її у вигляді таблиці.

1295. Функцію задано формулою $y = 2\sqrt{x+5}$ на області визначення $D = \{-4; -2,75; -1; 1,25; 4; 11\}$. Задай її у вигляді таблиці і графіка.

1296. Побудуй графік функції $y = x^2 - 4$, якщо $D = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. Знайди її область значень.

1297. Знайди область визначення функції:

а) $y = 5x - 1$;

б) $y = \sqrt{x+1}$;

в) $y = \sqrt{4-x}$.

1298. При яких значеннях x дана функція має найменше значення:

а) $y = x^2 - 6x + 9$;

в) $y = 4x^2 - 12x - 3$;

б) $y = x^2 + 4x + 7$;

г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

1299. Знайди найбільше значення функції:

а) $y = 3 - (x - 2)^2$;

в) $y = 6x - x^2 - 10$;

б) $y = -0,25(x + 5)^2$;

г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

1300. Знайдіть точки перетину графіка функції з віссю x :

а) $y = x^2 + 10x - 11$;

в) $y = -2x^2 + 7x - 3$;

б) $y = 2x^2 + 3x - 9$;

г) $y = -2x(x + 3)$.

1301. Способом виділення квадрата двочлена побудуй параболу:

а) $y = x^2 + 4x + 5$;

в) $y = 1 + 4x - x^2$;

б) $y = x^2 - 6x + 5$;

г) $y = 4x^2 - 4x + 5$.

Побудуй графік функції (1302, 1303).

1302. а) $y = (x + 2)^2 - 3$;

в) $y = 2(x + 1)^2 - 1$;

б) $y = (x - 1)^2 + 3$;

г) $y = 0,5(x - 2)^2 - 2$.

1303. а) $y = 3x^2 + 3x - 1$;
б) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

в) $y = -x^2 + x - 3$;
г) $y = -2x^2 + 3x + 2$.

Розв'яжи квадратну нерівність (1304–1310).

1304. а) $x^2 + 2x > 0$; б) $x^2 - x \geq 0$.

1305. а) $x^2 - 3x + 2 > 0$;

б) $x^2 + 5x + 6 < 0$.

1306. а) $3x^2 - x - 4 \geq 0$;

б) $5x^2 - 2x - 3 > 0$.

1307. а) $-x^2 + 2x - 1 < 0$;

б) $-x^2 - 2x - 5 > 0$.

1308. а) $(x - 3)(x + 5) > 0$;

б) $(x + 2)(x + 7) < 0$.

1309. а) $(2x + 1)(x + 1) > 0$;

б) $(3x - 2)(2x + 3) \geq 0$.

1310. а) $(x - 1)(2 - x) > 0$;

б) $(3 + x)(x + 7) < 0$.

1311. Розв'яжи нерівність:

а) $\frac{x+3}{x-7} > 0$; б) $\frac{x}{x+2} > 0$; в) $\frac{2+x}{x+3} < 0$; г) $\frac{3-x}{x} < 0$.

Числові послідовності

1312. Напиши п'ять перших членів послідовності, n -й член якої задається формулою:

а) $a_n = 2(n + 1)$; в) $y_n = n^3 + 3_n - (-1)^n$; г) $c_n = 2n - n^2$;
б) $x_n = 6 : n$; г) $b_n = 1 + n^2$; д) $z_n = 1 + (-1)^n$.

1313. Послідовність задано формулою $a_n = 2n^2 + 3$. Знайди:

а) a_3 ; б) a_6 ; в) a_{15} ; г) a_{100} .

1314. Знайди сьомий, десятий і двадцять п'ятий члени послідовності, n -й член якої задається формулою:

а) $c_n = (1 - n)^2$; б) $c_n = 350 + n$; в) $c_n = 2n - (-1)^n$.

1315. Напиши п'ять перших членів арифметичної прогресії, у якої:

а) $a_1 = 17$, $d = 2$; в) $a_1 = -\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$;
б) $a_1 = 0,5$, $d = 10$; г) $a_1 = 6$, $d = 0$.

1316. В арифметичній прогресії перший член a_1 і різниця d . Знайди суму S_n її перших n членів, якщо:

а) $a_1 = 5$, $d = 3$, $n = 31$; в) $a_1 = -\frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2}$, $n = 35$;
б) $a_1 = 14,5$, $d = 0,7$, $n = 26$; г) $a_1 = 111$, $d = -\frac{2}{5}$, $n = 56$.

1317. Сума чотирьох перших членів арифметичної прогресії дорівнює 56, а сума чотирьох останніх — 112. Знайди кількість членів прогресії, якщо перший її член дорівнює 11.

1318. Сума першого і п'ятого членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 14, добуток другого її члена на четвертий дорівнює 45. Скільки членів прогресії потрібно взяти, щоб у сумі одержати 24?

- 1319.** Дано дві арифметичні прогресії. Перший і п'ятий члени першої прогресії дорівнюють відповідно 7 і -5 . У другій прогресії перший член дорівнює 0, а останній — 3,5. Знайди суму членів другої прогресії, якщо відомо, що треті члени обох прогресій рівні між собою.
- 1320.** У геометричній прогресії $b_7 = 80$, $b_8 = -160$. Знайди b_1 , q , b_5 .
- 1321.** У геометричній прогресії $b_6 = 18$, $b_4 = 72$. Знайди b_1 , q .
- 1322.** Запиши геометричну прогресію, яка складається з шести членів, якщо сума трьох перших її членів дорівнює 168, а сума трьох останніх — 21.
- 1323.** У зростаючій геометричній прогресії сума першого і останнього членів дорівнює 66, добуток другого і передостаннього членів — 128, а сума всіх членів становить 126. Скільки членів у прогресії?
- 1324.** *Задача Жемшида аль-Каши.* У саду перший зірвав один гранат, другий — два, а кожен наступний — на один гранат більше. Потім усі, хто збирав гранати, розділили їх між собою порівну і кожен одержав по 6 гранатів. Скільки людей збирало гранати?
- 1325.** *Стародавня індійська задача.* Подорожній у перший день проходить дві одиниці шляху, а кожного наступного дня на три одиниці більше, ніж у попередній. Інший подорожній проходить у перший день три одиниці шляху, а в кожний наступний — на дві одиниці більше. Коли перший наздожене другого, якщо вони вийшли одночасно з одного місця і в одному напрямку?
- 1326.** Послідовність b_1, b_2, b_3, b_4 — геометрична прогресія. Чи буде геометричною прогресією послідовність:
- а) $5b_1, 5b_2, 5b_3, 5b_4, \dots$; в) $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5, \dots$;
- б) $b_1 + 5, b_2 + 5, b_3 + 5, b_4 + 5, \dots$; г) $\frac{5}{b_1}, \frac{5}{b_2}, \frac{5}{b_3}, \frac{5}{b_4}, \dots$?

ВІДПОВІДІ

(Доопрацьовується)

9. а) $m > n$. 10. а) $y < x$. 17. а) $2x + 3 > 3x - 2$. 19. в) $y(-8) > y(0)$.
 23. а) Так; б) ні. 28. а) $5m + 1 < 19 - 3m$. 30. Перша; у 2019 разів.
 33. $x = 1,5$. 34. $x = 1,5$. 37. 2. 39. а) $b > a$. 40. а) $x > y$. 44. б) $a = b$.
 45. а) 186,5; в) - 0,5. 46. а) 1; в) -2; г) 10. 47. б) 5; г) 12. 48. а) c^2 ; в) 1;
 д) 0. 49. б) 0. 50. а) $6\sqrt{a}$ в) 8; г) 2. 51. а) $-5i - 3$; б) $-2i + 9$; д) -0,25.
 52. а) (-2; 5). 55. 20 %. 59. а) Додатне. 65. а) $a > b$. 69. б) $1,5a > 1,5b$.
 70. б) Від'ємне. 71. в) $5 + x < 6 + z$. 72. а) $10 < 24$. 74. б) - 0,1 $m > - 0,1 n$;
 г) $1 - m > 1 - n$; г) $5m - 1 < 5n - 1$. 75. б) $x^2 > xy$. 76. в) $\sqrt{-x} > \sqrt{-y}$.
 78. $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$. 81. а) Так. 83. 1 - В, 2 - Д, 3 - Г, 4 - А. 86. а) Ні.
 89. б) $(3x + 1)(2x - 1)$; г) $(c + 2\sqrt{2})(c - \sqrt{2})$. 94. а) 0. 97. а) $3 < x < 12$.
 99. а) $7 < n < 8$.

103. а) $6 < x - y < 8$. 104. а) $15 < xy < 28$. 105. а) $2 < \frac{x}{y} < 3$.
 106. а) $-3 < 2x + 3 < 13$; в) $-3 < 2 - x < 5$. 108. в) $3,58 \cdot 10^6 < V < 3,66 \cdot 10^6$. 113. г) 1. 122. а) $-1 < x < 2$. 123. О 12 год. 125. а) (4; 2).
 127. б) $x < -3$; д) R. 128. а) Жодного; д) безліч. 131. а) $x > 3$; г) $y < 9$.
 132. а) $x > 5$; г) $x \leq -5$. 133. в) $x > 0$; г) $x < 1$. 134. а) $x < 1$; в) $x > 0$;
 г) $z > 0,25$. 135. б) Так; г) ні. 136. а) $x > 3$; б) $y < 2$; в) $x \geq 5$; г) $x < -6$.
 137. а) $x \leq -13$; б) $x > 1$; в) $x > 3$; г) $x \leq -2$. 138. а) $x > 1$; б) $x < 5$;
 в) $x < 3$; г) $x > 0$; д) розв'язків немає. 140. б) $x > 20$. 141. а) $x \geq -5$;
 б) $x \geq -2,6$. 142. а) $x > 1$. 143. а) $x > 8$; б) $x < -2,5$. 144. а) $x \leq 4,2$;
 в) $x < 0$; г) $x > -7,5$; г) $x \geq -2$; е) $x > 8$. 145. б) $x < 7$; в) $x < -6$;
 г) $x \leq 0$; е) $x > 24$. 146. а) $x < 4$; б) $x \leq 9$; в) $x > 0$. 147. а) $x > 1,8$;
 в) $x > -2$. 149. а) 4. 150. б) -4. 153. в) $x \geq 2$; д) $x \leq 2$. 154. а) $x > -2$;
 б) $x \leq 11,5$. 155. б) $x \geq 7$; в) $z \geq 0,65$. 157. а) $x > 5$. 158. а) $c > 2$;
 б) $z \geq 1$. 159. а) $x < 1,2$; б) $x < 17,5$; д) $x \leq 0$. 160. в) R; г) Розв'язків
 немає. 161. б) $x < 0$; в) $x > 1,5$. 162. [0;4). 163. а) $x > 4$; б) [0; 1]; в) $x \geq 4$.
 165. Не більш ніж $25\frac{2}{3}$ км. 166. а) $x < -0,5$; б) $x \geq -1$; в) R; г) $x \leq 5,8$.
 167. а) $-0,4 \leq x \leq 1$; б) $-1 < x < 1$; в) $1 < x \leq 4$; г) $-0,05 < x < 0,7$;
 г) $-0,1 < x < 0,1$; д) $-1,6 \leq x \leq 4,2$; е) $2 < x < 3$. 168. а) 3; б) 3; в) 1;
 г) -10. 169. а) $-5 < x < 5$; б) $-4 \leq x \leq 10$; в) $1 < x < 2$. 170. б) $-10 < x < -4$;
 в) $-0,2 \leq x \leq 0,6$. 170. б) $-10 < x < -4$. 171. б) Якщо $a < 0$, то $x \geq 0$;
 якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a > 0$, то $x \leq 0$; в) Якщо $a < 0,5$, то
 $x > 2a - 1$; якщо $a = 0,5$, то розв'язків немає; якщо $a > 0,5$, то $x < 2a - 1$;
 г) якщо $a < 0$, то $x < 1$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$,
 то $x > 1$. г) якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a \neq 0$, то $x \leq 0$.
 173. а) $1,2 \cdot 10^6$; б) $-7,5 \cdot 10^{-7}$; в) $1,764 \cdot 10^{19}$; г) $8,88 \cdot 10^{13}$. 175. На 50 %.
 177. а) (0;2); б) (0;1); в) (1;5); г) $(-\infty;3)$. 178. а) (0;1); б) (0,5;1); в) {2}; г) $\emptyset$.

188. а) $[2; 5]$ і $\{3\}$; б) $[-5; 0]$ і $[-3; 0]$; в) $[-7; 7]$ і $[-5; 5]$; г) $(-2; 2)$ і $\emptyset$; д) $[-3; -1]$ і $(-2; -1)$; е) $(-\infty; \infty)$ і $[-2; 2]$. 190. а) $a > c$; б) $a < c$; в) $a > c$; г) $a < c$. 191. а) $x > 3$; б) $x \geq 3$; в) $x > 0,8$; г) $x < 3$; д) $x > 1$; е) $x \geq 10$. 192. а) $x \leq 0,2$; б) $x > -0,5$; в) $x > -0,5$; г) $x > 3$; д) $x \geq -0,6$; е) $x \geq -50$. 194. а) $x \geq 0,2$; б) $x > 6,6$; г) $x < 2,25$. 195. а) $x > 1$; б) $y < -1$. 196. а) $m < a$, $b < n$. 197. а) $x < a$, $y > c$; б) $x > a$, $y < c$; в) $x > a$, $y < c$; г) $x > a$, $y > c$. 198. а) $x < a < y$; б) $a < x < y$; в) $x < a < y$. 200. а) $-4 < x < 5$; б) $-9 < x \leq 1$.

201. а) $-1 < x < 1$; г) $-3 < x \leq -1$. 203. а) $(-\infty; \infty)$. 204. б) $x \geq 4$. 206. б) R ; $[-13; 1)$. 209. д) $(-\infty; 1) \cup (4; \infty)$. 210. а) R . 219. б) 2 і 3. 221. а) $(-3; 1)$. 222. а) Розв'язків немає. 224. а) $(6; 8)$. 226. б) $(10; \infty)$. 227. в) $-0,25$. 228. а) $(2; 16]$. 229. а) $\{3, 4, 5, 6\}$. 230. б) $(-3; -1)$. 232. а) $(1,5; 2,5)$. 234. б) $(-\infty; -0,4)$. 235. а) $[3; 5]$. 236. а) $0,625 < x < 0,875$. 238. а) $(-2; 7)$. 239. в) $(-5; \infty)$. 240. а) $(-\infty; -3) \cup (7; \infty)$. 241. г) $(-\infty; -9) \cup (-2; \infty)$. 242. $(-1; 1)$. 244. а) $(4; 10)$. 247. а) Так; б) так. 248. а) $(-1; 3)$. 249. а) $(-4; 1)$; б) $[-2,5; 4,5]$. 250. а) $(-\infty; 4,5) \cup (5,5; \infty)$. 251. а) $(2; 3)$. 256. б) 19. 257. б) 200. 262. в) $a^2 + 65 - 16a = (a - 8)^2 + 1 > 0$. 263. а) $(a + 1)^2 - 4a = (a - 1)^2 \geq 0$. 264. а) При кожному від'ємному x числа $x - 1$ і $x - 2$ від'ємні, а їх добуток додатний; б) при від'ємному x число $x^2 + 9$ додатне, а $10x$ від'ємне. 267. а) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0,5(2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) = 0,5((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \geq 0$. 269. б) Квадрат суми двох від'ємних чисел більший, ніж сума їхніх квадратів. 281. а) -2 і -1 ; б) -4 і 0 . 282. -3 і 3 . 283. 1633,4 т. 284. а) 0,8. 285. 1 - Б, 2 - Д, 3 - А, 4 - В. 288. а) Прямая; г) гіпербола. 291. а) R ; г) $x \geq 2$. 296. $f(2) = 14$. 297. $f(-3) = 22$. 298. а) 8. 299. а) 12.

301. а) R ; г) $x \neq 3$ і $x \neq 4$. 302. б) $x \neq -1$ і $x \neq 4$; в) $x \leq 4$. 305. а) $\{7\}$; б) R . 306. Точка A належить. 307. Через точку A проходить. 308. а) Належать точки A і C . 309. а) $(0; 0)$; б) $(1,5; 0)$ і $(0; 3)$. 311. Так. 312. Так. 313. а) $f(-2) = 11$, $f(-1) = 5$, $f(0) = 3$, $f(2) = 11$, $f(1) = 5$. 316. $(2; 2)$. 321. а) $(-6; 0)$ і $(0; 3)$; г) $(-2; 0)$, $(2; 0)$ і $(0; 4)$. 325. $m = 20$; так. 326. 1 - А, 2 - Д, 3 - Г, 4 - Б. 328. а) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$; б) $[0; \infty)$; г) $[-5; 5]$. 329. $0 \leq x \leq 1$. 332. $p = 5$ гр. од.; $QS = QD = 4$ млн штук у рік; зменшиться на 8 %. 335. б) $x > 1$. 338. а) Ні. 345. а) R ; в) $x \geq -4$; г) R . 346. а) R ; г) $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; д) R . 347. а) R і $[-1; \infty)$; г) $[0; \infty)$ і $(-\infty; 1]$; д) R і $[2; \infty)$. 349. $[-2; 5]$ і $[-5; 5,5]$. 353. а) Ні; б) так: -1 і 0 . 359. а) Зростаюча; б) спадна. 363. а) R і $[4; \infty)$. 365. а) $x < 2,5$; б) $x > -4$. 366. б) $0 \leq x \leq 16$; в) $-3 \leq x \leq 0$; г) $x \leq -2$. 369. а) $(-\infty; 0]$; б) $(-\infty; 3]$. 370. а) R . 372. Ні. 375. г) Парна; г) непарна. 388. а) -3 і $1,5$. 389. а) -5 і -3 . 390. а) $7,8 \cdot 10^3$; д) $4,5 \cdot 10^{-4}$. 393. а) Зростаючою. 398. а) $(a; b)$. 399. а) $(-\infty; -c)$.

410. б) перенести на 3 одиниці у напрямку осі x . 414. а) $y = (x - 2)^2 + 3$. 429. а) 0,5. 431. а) -6 і 2,5. 432. а) $(x - 3)^2 + 6$; г) $(x - 0,5)^2 - 1,25$. 436. а) (3; 0); в) (5; 2). 440. а) (0; 0) і (2; 0). 442. а) (0; 4); в) (2; -4). 447. а) $m = -6$, $n = 14$. 450. Ні. 452. а) $x = 3$. 453. а) $c = 0$; в) $c = 6$. 454. а) -4 і 4. 463. а) $x = 3$; б) $x = -2$. 464. а) $y = 3$; б) $y = -1$. 466. б) (-1; 2) і (1; 2). 467. а) 7. 469. $b = -6$. 471. *Вказівка.* Побудуйте квадрат зі стороною x і до його двох суміжних сторін добудуйте прямокутники зі сторонами x і 3. 473. б) $x \leq 4$. 474. б) $-7 \leq x \leq -3$. 475. а) Два. 481. а) (0; 4); б) [-6; 0]; в) [-7; 1]; г) $(-\infty; -3,5] \cup [0; \infty)$. 482. а) $(-\infty; 3) \cup (3; \infty)$; б) розв'язків немає; в) {-2}; г) {-0,5}; д) R . 483. а) [1; 2]; б) розв'язків немає; в) $(-\infty; 1] \cup [3; \infty)$. 484. а) $(-\infty; 0,5] \cup [1; \infty)$; б) (2; 4); г) (-2; 6); д) $(-\infty; 2] \cup [9; \infty)$. 485. б) $(-\infty; 6) \cup (6; \infty)$; г) (-2,5; 1,5). 486. а) (1; 2); б) $(-\infty; 2) \cup (2,5; \infty)$; в) розв'язків немає; д) (-7; 2). 487. а) $(-\infty; -7] \cup [1; \infty)$; б) [3; 5]; в) (-3; 2); д) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$. 490. а) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. 491. а) -5; -4; -3; -2; -1; 0; в) -1; 0; 1; 2; г) -3; -2; -1; 0; 1; 2; д) {2}. 492. а) [1; 4]; б) (-5; 6); в) (-1; 0); г) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$. 493. а) (1,5; 2); в) $(-\infty; -0,5) \cup (1; \infty)$; г) розв'язків немає. 494. а) (-2; 3); б) $(-\infty; -2) \cup (7; \infty)$; д) (0,25; 1,5). 495. а) $(-3; \infty)$; б) (1; 9); д) $(-\infty; 2) \cup (10; \infty) \cup \{6\}$. 496. а) $(-\infty; -7) \cup [-5; \infty)$; б) (2; 3); в) $(-\infty; -0) \cup (1; \infty)$; г) (-8; 7). 497. а) (0,5; 3); б) [-4; 0,5]; г) (-4; 5). 498. а) $[-7; 1] \cup [2; \infty)$; б) $(-5; -4) \cup (4; 5)$; в) (-3; 1). 499. а) [-2; 3]; б) [-1; 1] $\cup$ [2; 3]; в) $(-\infty; -3) \cup (-1; 4) \cup (5; \infty)$.

500. а) $\{-1\} \cup [1; 2,5]$; б) $(-\infty; -5) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (3; \infty)$. 501. б) $(-\infty; 0,25) \cup [6; \infty)$. 502. а) $(-0,2; 2) \cup (2; 0,2)$; в) (1; ∞). 503. а) (-1; 6). 504. а) [-1; 8]; в) $[-5; -3) \cup (-3; 1] \cup [5; \infty)$; г) [-3; 0,5]. 505. а) $b \in [-1; 1]$; б) $b \in [9; \infty)$; в) $b \in (-\infty; 0]$. 506. а) $m \in (-4; 4)$; б) $m \in [9; \infty)$; в) $m \in (-\infty; -4]$. 507. а) [3; 4). 508. а) $(-\infty; -1) \cup (3; 4] \cup [7; \infty)$. 509. а) $(-1; 0) \cup (5; 6)$. 511. Три. 512. 10. 513. а) $-4,5x^4y^2$. 521. а) (0; 1), (1; 0); б) (0; 0), (4; 2); в) (-3; 2). 522. а) (3; 3), (-3; -3); б) (0; 1), (1; 0); в) (4; 4), (-4; -4). 523. а) (0; 0), (1; 1); б) система розв'язків не має; в) (2; 4). 524. а) (0; -5), (3; 4), (-3; 4); б) (3; 3), (-3; -3); в) (0; 2), (-2; 0). 525. а) (3; 0), (0; -3); б) (-1; -4), (4; 1); в) (0; -2), (4; 2). 526. а) (6; 8), (8; -6); б) $(-1; \sqrt{3})$, $(-1; -\sqrt{3})$; в) (1; -2), (2; -1); г) (5; 3). 527. б) (12; 16), (4; 0); в) (-3; -3), (2; 2); г) (2; 0), (0; 2). 528. а) (13; 3); б) (3; 2), (-3; -2); в) (3; 1), (3; -1), (-3; 1), (-3; -1); г) $(\sqrt{15}; \sqrt{10})$, $(\sqrt{15}; -\sqrt{10})$, $(-\sqrt{15}; \sqrt{10})$, $(-\sqrt{15}; -\sqrt{10})$. 529. а) (4; 5), (5; 4), (-4; -5), (-5; -4); б) (5; 3), (3; 5), (-5; -3), (-3; -5); в) (2; 1), (-2; -1); г) (0; 0). 530. а) (2; 8), (8; 2); б) (12; 8). 531. а) (8; 6), (-5; -7); б) (-5; -7), (8; 6). 532. а) (8; 2), (-15; 25); б) (8; 2), (-40; 50). 534. а) (2; 1), (3; 2); б) (3; 2). 535. а) (5; 1), (8; 2); б) (3; 4), (4; 3),

- (-3; -4), (-4; -3). 536. а) (4; 4), (-4; 4); б) (-1; 1), (0; 0), (1; 1).
 537. а) (1,2; -1,6), (-0,7; 4,1); б) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$; в) (3; 4), (3; -4); г) $(\sqrt{51}; -1)$,
 $(-\sqrt{51}; -1)$. 538. а) $(4-\sqrt{10}; 4+\sqrt{10})$, $(4+\sqrt{10}; 4-\sqrt{10})$; б) (3; 6);
 в) (4; 2), (4; -2); г) (3; -1), (3,5; 1). 539. а) (3; 5); в) (5; 3), (3; 5),
 (-5; -3), (-3; -5); г) (5; 1), (-5; -1). 540. (1; 1), (1; -1); б) (1; 2), (-1; 2),
 (1; -2), (-1; -2); в) (2; 2), (-2; -2); г) (3; 2), (2; 3), (-3; -2), (-2; -3).
 541. а) (0; 10), (8; 2); б) (4; 6), (6; 4). 542. а) (-6; 18), (9; 3); б) (6; 4),
 (4; 6). 543. а) (-5; -1), (5; 1); б) (3; 2), (-3; -2), (-2; 3), (2; -3);
 в) (0; -2), (0; 2), (2; 0); г) (0; 1), (0; -1), $(-\frac{1}{2}; 0)$. 544. а) (1; 1), (-2; -2);
 б) (2; 1), (2; -1); в) (4; 1), (1; 4); г) (9; 4), (4; 9). 545. а) (9; 3), (-9; -3),
 $(0; 3\sqrt{10})$, $(0; -3\sqrt{10})$; б) $(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$, $(4\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$, $(4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$,
 $(-4\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$; в) (4; 2), (2; 4), $(3-3\sqrt{2}; 3+3\sqrt{2})$, $(3+3\sqrt{2}; 3-3\sqrt{2})$;
 г) (7; 2), (2; 7). 546. а) (4; -3), (-3; 4); б) (5; 1), (1; 5), (2; 3), (3; 2);
 в) (1; 3), (3; 1); г) (-1; 2), (2; -1). 547. а) (6; 2), (-6; -2); б) (1; 4), (4; 1);
 в) (1; 2), (2; 1); г) (4; 12), (12; 4). 548. а) (2; 4), (4; 2); б) (7; 5), (-5; -7);
 в) (1; 2), (3; -6); г) $(3\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$. 549. б) $a = 1$ і $b = 0$ або $a =$
 $= -\frac{1}{2}$ і $b = -\frac{3}{2}$; в) $a = 3$ і $b = 2$ або $a = -3$ і $b = -2$; д) $a = 3$ і $b = 0$; $a = 1$ і
 $b = -2$. 550. а) $17\sqrt{2}$ лін. од.; б) $\sqrt{2}$ лін. од. 551. 1 - В, 2 - А, 3 - Б, 4 - Д.
 552. 1) а) $1,5 \cdot 10^6$ км; б) $10,8 \cdot 10^8$ км; 2) а) 1 км 715 м; б) 5 км 145 м.
 553. а) $\frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-9)}$; $\frac{-3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-9)}$. 554. б) $\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$; в) $\frac{c+2\sqrt{5}}{c-2\sqrt{5}}$.
 559. -10 і -0,9 або 0,9 і 10. 561. а) 23 і 21. 562. а) 12 дм і 5 дм.
 563. 6 м і 8 м. 564. 35 см і 12 см. 565. 8 см і $4\sqrt{2}$ см. 566. 15 см і 10 см.
 567. 3, 5 і 8 см. 568. 84 год і 60 год. 571. 180 деталей. 572. 15 днів.
 573. 49 верстатів. 574. 32 м^3 . 575. 36 хв і 72 хв. 576. 39 м, 52 м і 65 м.
 577. 300 км або 360 км. 578. 48 км/год. 579. 12 км/год, 18 км/год, 24 км.
 580. 18 км/год, 2 км/год. 583. 10 км/год. 584. 72 км/год. 585. 60 км/год або
 93 км/год. 598. а) Нескінченна; в) скінченна.

600. а) 9; б) 15. 606. а) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29.
 607. а) 67; в) 4. 608. На 5. 609. У 10 раз. 610. $b_6 = 64$;
 $b_8 = 256$; $b_{10} = 1024$. 611. Ні. 612. $an = 7n - 4$. 613. 7, 9, 11, 13, 15,....
 616. а) 2, -4, 8, -16, 32; в) 15, 10, 5, 0, -5. 618. $a_2 = -2$; $a_5 = 7$;
 $a_{10} = 22$. 619. а) $n = 17$; б) $n = 16$. 620. а) $16 \leq n \leq 51$; в) $3 \leq n \leq 4$;
 г) $9 \leq n \leq 97$. 621. а) 124; б) 79. 622. 14. 624. $k = 4$, $p = 3$. 625. $a_n =$
 $= (4 - n)^2$. 626. а) $an = 3n - 1$; б) $2n$. 633. а) Зростаюча; в) спадна.
 636. а) $a_3 = 4$. 637. а) $a_5 = -10$. 640. 1000 грн, 1500 грн. 642. а) (5; 0),
 (1; 4); б) (-3; 4), (3; -4), (-4; 3), (4; -3). 647. а) 7, 9, 11, 13, 15.
 649. а) $a_7 = -19$, $a_{20} = -71$; б) $a_{15} = 65$, $a_{32} = 133$. 650. $d = 11$, $a_{10} = 102$,

$a_{20} = 212$. **651.** $d = 5$, $a_{10} = 47$. **652.** а) $d = 15$; б) $d = -0,2$. **653.** а) $a_1 = 5$; б) $a_1 = 40$; г) 19. **654.** $a_1 = 5$, $a_5 = 17$, $a_{11} = 35$, $a_{21} = 65$. **655.** $d = -9$, $a_1 = 86$, $a_5 = 50$, $a_{21} = -94$. **656.** $a_7 = 14$, $a_{20} = 7,5$. **657.** $a_{40} = 20$, $a_{41} = 20,5$. **658.** а) $a_n = 3n - 1$. **659.** а) $a_n = 5n + 2$; б) $a_n = 3n - 5,5$. **660.** а) -125 ; б) $-2,5$. **884.** а) $a_1 = 5$, $d = 10$; б) $d = -7$, $a_1 = 153$. **662.** а) 50; б) -50 ; г) 13250. **663.** а) 2420; б) 3180; г) 4180. **664.** а) 1088; б) 1100; г) -522 ; д) 400. **665.** $a_{20} = 79$; $S_{20} = 820$. **666.** 1830. **668.** 5050. **669.** 10000. **670.** 645 см. **671.** 1680 грн. **672.** $a_9 = 16,1$, $a_n = 2n - 1,9$, $a_{3p} = 6p - 1,9$. **673.** в) 95. **674.** а) $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_{21} = 61$, $a_{100} = 298$; г) $a_1 = 2,8$, $d = 1,2$, $a_{21} = 26,8$, $a_{100} = 121,6$. **678.** а) 7. **679.** а) 13. **680.** б) 16. **681.** 39. **682.** а) $c_1 = 2$, $d = 5$. **684.** $A_3B_3 = 7,5$ см, $A_nB_n = 2,5n$ см. **689.** 18 коней. **690.** а) 430; г) 300. **691.** 9900. **693.** а) 166833. **694.** а) 2020. **695.** $a_7 = 8$. **696.** $S_{25} = 75$. **697.** $S_{27} = 54$. **698.** а) $S_{20} = 1090$. **699.** а) $a_5 = 3$.

700. $S_9 = 63$. **701.** 90 разів. **702.** а) ≈ 314 м. **703.** Розгляньте прогресію $a - 2d$, $a - d$, $a + d$, $a + 2d$, сума членів якої $180(5 - 2)$.

704. $3,5(a + b)$. **705.** а) $\frac{3}{2x+1}$; б) $\frac{c+2}{c-1}$. **706.** а) (0; 8). **707.** 1 - В,

2 - А, 3 - Б, 4 - Г. **714.** б) $q = 0,1$, $b_5 = 0,00001$. **715.** $b_4 = -24$, $b_7 = -192$, $b_n = -3 \cdot 2^{n-1}$. **716.** а) $b_1 = 3$. **717.** г) $b_{12} = 64$.

718. а) $b_7 = 48$; б) $b_7 = -24$. **719.** а) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. **720.** а) $n = 5$. **721.** Так. **722.** а) $S_6 = -1092$. **723.** а) 511. **724.** а) $S_6 = 5208$; б) $S_6 = 21$.

725. а) $S_{15} = 32$ 767. **727.** 4294967295 або $(2^{32} - 1)$ пфенігів.

728. а) $b_1 = 1736\frac{1}{9}$, $q = \pm\frac{3}{5}$. **731.** а) 20. **732.** а) $b_1 = 1$, $q = 3$. **737.** 1.

738. -2048 . **739.** 3, 6, 12. **741.** ≈ 455 мм рт. ст. **742.** Так. **745.** 27, 18, 12, 8. **746.** а) $n = 6$; б) $n = 10$. **747.** 3, 6, 12, 18 або 18,75, 11,25, 6,75, 4,05.

748. $-0,5$, -1 , -4 , -16 або $-0,5$, 1 , 4 , 16 . **749.** а) b_{12} .

750. $P_n = b_1^n q^{0,5n(n-1)}$. **751.** Понад 10 000 крб. **752.** $\approx 2^{72}$ бактерій. **753.** 2^{65} , а це набагато більше, ніж усіх людей на Землі. **754.** а) (0; 9). **756.** $8,8$ і $7,8$ г/см³. **761.** а) 3; г) $-\frac{16}{3}$. **762.** а) 1,5. **763.** $\frac{4}{3}$. **764.** а) $\frac{10}{3}$. **765.** б) $\frac{2}{3}$.

766. а) $\frac{4}{9}$. **767.** 6 см. **770.** а) $2 + \sqrt{2}$; б) $\frac{1}{4-\pi}$. **771.** $6\sqrt{3}r$, $4\pi r$. **772.** в) $\frac{24}{99}$.

773. в) $\frac{7}{6}$. **775.** б) $\frac{1}{1+x}$. **776.** $16 + 8\sqrt{2}$. **777.** 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$, **778.** $b_4 = \frac{4}{9}$.

779. 1 і $\frac{1}{3}$. **780.** а) -50 ; б) -5050 . **781.** а) 40. **784.** а) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

789. а) 3, 12, 48.... **871.** а) 27 000. **873.** а) $\frac{1}{80}$. **874.** а) $-\frac{1}{15}$.

875. а) 1.

876. а) 25. **879.** а) $3\frac{1}{4}$. **881.** а) $\frac{2}{21}$. **883.** а) $\frac{8}{15}$. **884.** 17, 19, 23, 29, 31.

885. 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30. **888.** а) НСД (18, 32) = 2; НСК (18, 32) = 288. **892.** 80. **893.** Таких чисел 10. **895.** Ні. **898.** б) 3,6; д) 1,8.

901. а) $25y^2$. 902. а) $x(x + y)(x + 2)$. 904. $(x - y - z)(x - y + z)$.
 905. а) $(a - b)(b - 2)(b + 2)$. 906. а) $a \neq 0$ і $a \neq 3$. 907. б) $\frac{2-x}{x^4 y^{11}}$; г) $\frac{(a+1)^3}{(a-1)^2}$.
 908. 11. 909. 5. 911. а) $\frac{5z^2 + 6x^2}{15ax^2z^2}$. 912. а) $\frac{3c}{2x}$. 914. а) $\frac{a+b}{a-b}$. 917. а) $a + \sqrt{a} - 2$.
 919. а) a . 922. а) $2(a - b)$. 923. а) 8. 924. а) 3. 927. а) 25. 929. а) -2 і 2.
 930. а) (2; 3). 931. а) (15; 5). 932. а) (0; 1). 933. а) (3; 0) і (0; -3).
 935. а) (-3; 4) і (4; -3). 937. 1000 кг і 800 кг. 938. 240.
 939. 100 км/год, 80 км/год. 940. 50 км. 941. 30 і 20 днів. 942. 75 км/год.
 944. 300. 945. 40 грн. 946. 32%. 947. 25%. 948. 40%. 950. а) $x > 7,25$.
 954. а) $x < 6$. 955. а) $3 < x < 7$. 960. а) R ; в) $x \leq 4$. 961. а) $x = 3$.
 962. а) $y = 3$; г) $y = 1,8$. 963. а) (0; -11) і (1; 0). 967. а) $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$;
 б) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$. 968. а) $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$; б) $(-3; -2)$. 969. а) $(-\infty; -1] \cup [1\frac{1}{3}; \infty)$;
 970. а) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$; б) розв'язків немає. 971. а) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$; б) $(-7; -2)$.
 972. а) $(-\infty; -1) \cup (-0,5; \infty)$; б) $(-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{2}{3}; \infty)$. 973. а) (1; 2); б) $(-7; -3)$.
 974. а) $(-\infty; -3) \cup (7; \infty)$. 980. 11. 981. 4. 982. 14. 985. 96, 48, 24, 12, 6, 3.
 986. 6. 989. а) Так; б) ні.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

990. Піднесіть дані вирази до квадрата. 991. Покажіть, що $\sqrt{9 \pm 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} \pm 2$. 992. а) $2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac = (a - b)^2 + (a - c)^2$.
 993. а) $x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 = (x - y)(x^3 - y^3)$, а числа $x - y$ і $x^3 - y^3$ однакових знаків; б) $(x - 1)^2 + (x - 2y)^2 + (y - 2)^2 + 1 > 0$.
 996. $x^2 + (1 - x)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x - 1)^2$. 997. б) $(-\infty; 2\frac{1}{2}) \cup (-2; \frac{2}{3}) \cup (1; \infty)$.
 999. $(-\infty; -4) \cup (8; \infty)$. 1000. Найменше значення x , при якому вираз $\sqrt{x - 6}$ має значення, дорівнює 6. Множина розв'язків кожної нерівності $(6; \infty)$.
 1004. $y = |x + \sqrt{2}| + |x - \sqrt{2}|$. 1008. 0, 2, 4, 3, 2; побудуйте графік функції $y = |x^2 - 6x + 5|$. 1009. а) $(-\infty; 0] \cup [6; \infty)$; б) розв'язків немає. 1012. ≈ 16 днів.
 1013. 3 : 4. 1014. $x = 3\frac{3}{4}$; $y = 5\frac{1}{2}$; $z = 7\frac{1}{4}$. 1015. а) 71071; б) 428429.
 1016. $a_1^n(q^{n^2} - 1) : (q^n - 1)$. 1017. $q : (1 - q)^2$. 1018. 6, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$,
 1019. 1 або -2. 1020. Покажіть, що при $a + c = 2b$ різниця між третім і другим тричленами дорівнює різниці між другим і першим.
 1021. а) $a_n = 1,5 + (-1)^n \cdot 0,5$; б) $a_n = (-1)^n n$. 1022. а) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;
 б) $n^2(n+1)$. 1024. 3, 7, 11, 1025. 1480 фунтів. 1026. 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35.
 1027. $a_n = n^2 + 2$. 1028. $x = 7$. 1029. Так, це арифметична прогресія 16, 31, 46, ..., $15n + 1$, 1034. У 2 рази.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК (Доопрацьовується)

Аргумент функції 75

Вибірка 211

Вирази 258

— зі змінними 258

— раціональні 258

— цілі 258

Відсотки 234

— прості 236

— складні 236

Відсоткові гроші 236

Властивості

— функцій 85

— числових нерівностей 17

Гістограма 211

Графік рівняння 261

— функції 75

Дискримінант 260

Доведення нерівностей 60

Знаки десяткові 225

— нерівності 9

— — строгої 8

— — нестрокої 8

Знаменник геометричної прогресії 171

Значення функції 75, 85

— найбільше 87

— найменше 87

Значущі цифри 225

Імовірність 202

— події 202

— — випадкової 202

— — достовірної 202

— — неможливої 202

Квадратний корінь 260

Коефіцієнт 259

Комбінаторика 196

Комбінаторне правило

— добутку 197

— суми 196

Корені квадратного рівняння 260

Масові явища 211

Математичне моделювання 227

Многочлен 259

Множина 41

— дійсних чисел 258

— порожня 43

Медіана вибірки 213

Мода вибірки 213

Модель 227

Наближені значення 223

— обчислення 223

Нерівності 8

— зі змінними 9

— з невідомими 31

— квадратні 118

— лінійні 33

— нестрогі 8

— подвійні 24

— рівносильні 31

— строги 8

— тотожні 31

— числові 8

Нулі функції 86

Область визначення функції 75

— значень функції 75

Обчислення сум 181

Об'єднання множин 42

— числових проміжків 43

Одночлен 259

Основна властивість дробу 256
— пропорції 257
Оцінювання значень 25

Парабола 111
Переріз множин 42
— числових проміжків 43
Перетворення виразів
— графіків 98
Події 204
— елементарні 204
— однаково можливі 204
— попарно несумісні 204

Послідовність 152
— зростаюча 154
— нескінченна 153
— спадна 154
— скінченна 153

Похибка абсолютна 223
— відносна 224
Правила округлення чисел 258
— підрахунку цифр 225

Прикладні задачі 227
Прогресія арифметична 161
— геометрична 171

Проміжки 32
— числові 43
— знакосталості функції 86
— спадання функції 87
— зростання функції 87

Пропорційність обернена 76
— пряма 75

Простір елементарних подій 205

Рівняння 260
— квадратні 260
— лінійні 260
— рівносильні 260

Розв'язок нерівності 31
— рівняння 260
— системи нерівностей 52
— системи рівнянь 127

Середнє арифметичне 61
— геометричне 61

Середнє значення вибірки 213

Система нерівностей 52
— рівнянь 126

Статистика 211

Сукупність нерівностей 45

Сума нескінченної геометричної прогресії 182
— членів арифметичної прогресії 162

— — геометричної прогресії 172

Теорема Вієта 260

Тотожні вирази 258

Тотожність 259

Факторіал 198

Формула коренів квадратного рівняння 260

— складних відсотків 236

Функція 74

— зростаюча 86
— квадратична 109
— лінійна 76
— непарна 87
— парна 87
— спадна 87

Центральні тенденції 212

Частота 212

— випадкової події 202
— відносна 212

Частотні таблиці 212

Числа дійсні 258

— ірраціональні 258
— раціональні 256

Числові проміжки 43

ЗМІСТ

Розділ 1. Нерівності	4
§ 1. Загальні відомості про нерівності	5
§ 2. Властивості числових нерівностей	13
§ 3. Подвійні нерівності	21
§ 4. Розв'язування нерівностей з однією змінною	29
§ 5. Об'єднання і переріз множин. Числові проміжки	41
§ 6. Системи нерівностей з однією змінною	51
Розділ 2. Квадратична функція	70
§ 8. Функції	71
§ 9. Властивості функцій	82
§ 10. Перетворення графіків функцій	94
§ 11. Квадратична функція	110
§ 12. Квадратні нерівності	121
§ 13. Системи рівнянь другого степеня	130
§ 14. Розв'язування задач складанням систем рівнянь	142
Розділ 3. Числові послідовності	154
§ 15. Послідовність	155
§ 16. Арифметична прогресія	164
§ 17. Геометрична прогресія	175
§ 18. Задачі на обчислення сум	186
Розділ 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики	198
§ 19. Прості і складні відсотки	199
§ 20. Елементи статистики. Способи подання даних та їх обробки	208
§ 21. Основні правила розв'язування комбінаторних задач	217
§ 22. Частота та ймовірність випадкової події	225
Додатки	239
Навчальний проєкт № 1	239
Навчальний проєкт № 2	243
Навчальний проєкт № 3	250
Задачі і вправи для повторення	256