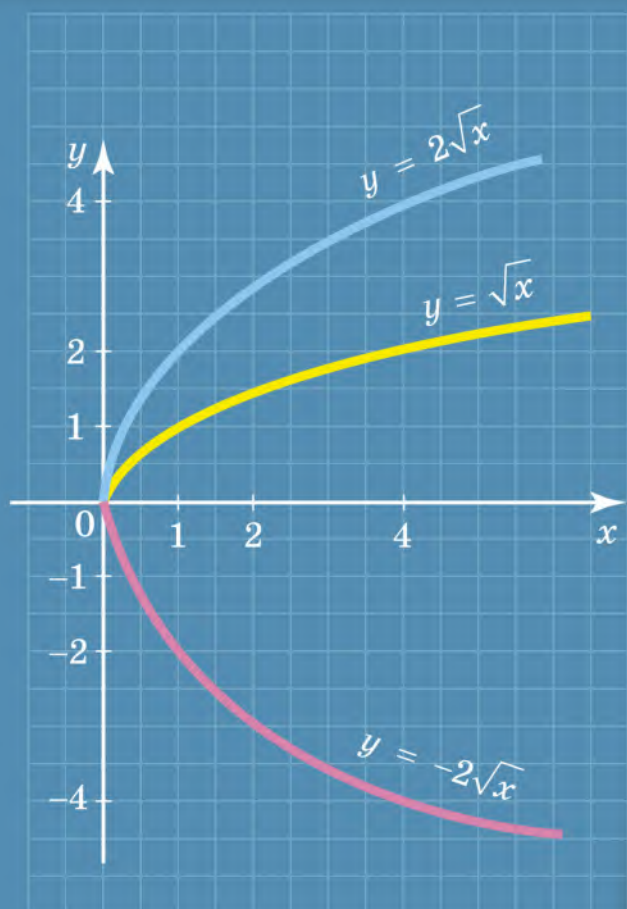


Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА
ШКОЛА

Олександр Істер, Дмитро Істер

АЛГЕБРА



Олександр Істер, Дмитро Істер

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

17.82 обл.-вид.арк.

Київ
«ГЕНЕЗА»
2025

Відповідає модельній навчальній програмі «**Алгебра. 7–9 класи**»
для закладів загальної середньої освіти
(авт. Істер О. С.)

Електронний додаток до підручника <https://faino.school/>

Шановні дев'ятикласниці та дев'ятикласники!

Ви продовжуєте вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – **алгебру**. Допоможе вам у цьому підручник, у якому використано такі умовні позначення:



– пригадай (раніше вивчене);



– зверни особливу увагу;



– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

1.13

– завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;



– кінець доведення;



– рубрика «Україна – це ми»;



– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;



– рубрика «Життєва математика»;



– вправи для підготовки до вивчення нової теми;



– вправи для повторення;



– рубрика «Головне в розділі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так: із позначок **1**, **2**, **3**, **4**, ***** починаються вправи відповідно початкового, середнього, достатнього, високого рівнів та підвищеної складності.

Перевірити свої знання й підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, основний теоретичний матеріал (рубрика «Головне в розділі»), а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 9 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади і поглибити знання з математики.

Автори намагалися подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці «Життєва математика» зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці «А ще раніше...».

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів / учениць, диференціації навчання та інших критеріїв.

Додаткові вправи в «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів / учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель / учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці «Життєва математика» зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю й підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці «Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу» – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«Задачі підвищеної складності» в кінці підручника допоможуть підготувати учнів / учениць до різноманітних математичних змагань та підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс алгебри 9 класу», які також розміщено в кінці підручника, можна запропонувати учням для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посилять, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу алгебри 9 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на «Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника.

Бажаємо успіхів в опануванні курсу!

ПОВТОРЮЄМО АЛГЕБРУ ЗА 8 КЛАС

Раціональні вирази

1 1. Скоротіть дробі:

1) $\frac{7x}{7y}$; 2) $\frac{2x}{10m}$; 3) $\frac{mc}{xm}$; 4) $\frac{p^2}{pa}$; 5) $\frac{4ab}{7bc}$; 6) $\frac{6ay}{6by}$.

2. Скоротіть дробі:

1) $\frac{9a}{9b}$; 2) $\frac{5t}{15a}$; 3) $\frac{ad}{dm}$; 4) $\frac{c^2}{5c}$; 5) $\frac{7xy}{9yt}$; 6) $\frac{4xp}{4yp}$.

3. Виконайте дію:

1) $\frac{x+y}{5} - \frac{x}{5}$; 2) $\frac{4m^2}{5} + \frac{m^2}{5}$; 3) $\frac{12}{x^2} \cdot \frac{x}{3}$; 4) $\frac{a^2}{3} : \frac{a}{15}$.

4. Виконайте дію:

1) $\frac{a-b}{3} + \frac{b}{3}$; 2) $\frac{7a^2}{6} - \frac{a^2}{6}$; 3) $\frac{y}{4} \cdot \frac{16}{y^2}$; 4) $\frac{m^2}{5} : \frac{m}{10}$.

2 5. Скоротіть дробі:

1) $\frac{16m^2p}{20mb}$; 2) $\frac{ab^2(x+2)}{a^2b(x+2)^2}$; 3) $\frac{5m-15}{10}$; 4) $\frac{a+2b}{a^2+2ab}$.

6. Скоротіть дробі:

1) $\frac{15a^2x}{25ay}$; 2) $\frac{m^2c(a-2)^2}{mc^2(a-2)}$; 3) $\frac{4x+12}{16}$; 4) $\frac{m-3p}{m^2-3mp}$.

7. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{x+2y}{5} + \frac{4x-7y}{5}$; 2) $\frac{x-y}{x^2-4} - \frac{y-2}{x^2-4}$; 3) $\frac{4-2m}{m} - \frac{5-2p}{p}$;
4) $\frac{m}{m-4} - \frac{m^2}{m^2-8m+16}$; 5) $\frac{p^2-p}{3py} \cdot \frac{3p}{p^2-1}$; 6) $10x^2 : \left(-\frac{5x}{m}\right)$.

8. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{a+3b}{4} + \frac{3a-7b}{4}$; 2) $\frac{m-b}{m^2-1} + \frac{b-1}{m^2-1}$; 3) $\frac{5-3y}{y} - \frac{2-3x}{x}$;
4) $\frac{b}{b+2} - \frac{b^2}{b^2+4b+4}$; 5) $\frac{c^2-2c}{5ma} \cdot \frac{5m}{c^2-4}$; 6) $\frac{4a^2}{p} : (-8a)$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-6}{x+3} = 0$; 2) $2 - \frac{x+4}{x} = 0$; 3) $\frac{x}{x-2} = \frac{7}{5}$; 4) $\frac{3x^2-9}{x+1} = 3x$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+4}{x-2} = 0$; 2) $3 - \frac{x+8}{x} = 0$; 3) $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{5}$; 4) $\frac{2x^2+8}{x-1} = 2x$.

11. Обчисліть:

- 1) 9^{-2} ; 2) $(-4)^{-3}$; 3) $(-1)^{-7}$; 4) 14^{-1} ;
 5) $2^9 \cdot 2^{-10}$; 6) $5 : 5^{-1}$; 7) $\frac{4^{-3}}{4^{-2}}$; 8) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}$.

12. Обчисліть:

- 1) 2^{-3} ; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $(-1)^{-11}$; 4) 15^{-1} ;
 5) $4^8 \cdot 4^{-10}$; 6) $7^{-1} : 7$; 7) $\frac{9^{-4}}{9^{-5}}$; 8) $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}\right)^{-1}$.

13. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(1,8 \cdot 10^{-5}) \cdot (3 \cdot 10^9)$; 2) $(1,7 \cdot 10^4) : (3,4 \cdot 10^{-3})$;
 3) $3,2 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-3}$; 4) $5,42 \cdot 10^8 - 4,3 \cdot 10^8$.

14. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(5 \cdot 10^8) \cdot (2,4 \cdot 10^{-3})$; 2) $(7 \cdot 10^8) : (3,5 \cdot 10^{-1})$;
 3) $4,9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4$; 4) $4,42 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$.

15. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = -\frac{10}{x}$.

16. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = \frac{12}{x}$; 2) $y = -\frac{4}{x}$.

3 17. Виконайте дію:

- 1) $\frac{2a^2 - 2a}{4a^2 - b^2} + \frac{b(a-1)}{b^2 - 4a^2}$; 2) $\frac{x+3}{xy-x^2} + \frac{y+3}{xy-y^2}$;
 3) $\frac{x^2+x-3}{x^2-9} - \frac{3}{2x-6} - 1$; 4) $\frac{ax-2x}{3y+6} : \frac{4-a^2}{y^2+4y+4}$.

18. Виконайте дію:

- 1) $\frac{3x(x-1)}{9x^2-y^2} + \frac{xy-y}{y^2-9x^2}$; 2) $\frac{a-5}{ab-a^2} - \frac{5-b}{ab-b^2}$;
 3) $\frac{x^2+x-2}{x^2-4} - \frac{2}{3x-6} - 1$; 4) $\frac{m^2-9}{a^2+6a+9} : \frac{12-4m}{ap+3p}$.

19. 7 липня 2024 року українська легкоатлетка Ярослава Магучіх установила новий світовий рекорд зі стрибків у висоту – 2 м 10 см.



Знайдіть значення виразу $\left(\frac{a}{a+6} + \frac{a^2+36}{a^2-36} - \frac{a}{a-6}\right) : \frac{a-6}{a^2+12a+36}$,

якщо $a = 31$, відтак дізнається, скільки років тримався попередній світовий рекорд у цій дисципліні.

20. Доведіть тотожність $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} - \frac{x^2+1}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1}$.

21. Розв'яжіть рівняння



$$2 + \frac{1}{x-20} = \frac{x-18}{20-x} \text{ і } \frac{4}{y+1} + \frac{3y-7}{y-2} = 3.$$

Знайдіть значення виразу $100x + 18y$ та дізнайтеся, якого року українка Катерина Логвинівна Ющенко розробила концепцію першої у світі формальної мови адресного програмування.

22. Національний університет «Острозька академія» – один із найдавніших навчальних закладів Європи і перший – створений в Україні. Розв'яжіть рівняння



$$3 + \frac{1}{x-16} = \frac{x-13}{16-x} \text{ і } \frac{5}{y+1} + \frac{2y-1}{y+3} = 2$$

та знайдіть значення виразу $100x + 19y$, відтак дізнаєтеся рік заснування цього університету.

23. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:

1) $(4^{-3})^7 \cdot (((4^{-2})^3))^{-4}$; 2) $\frac{10^{-5} \cdot (10^{-7})^4}{(10^{-11})^3}$;

3) $4^{-5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$; 4) $243^{-2} \cdot (3^{-7})^{-2}$;

5) $\frac{(-5)^{-4} \cdot 25^{-2}}{(-125)^{-3}}$; 6) $0,01^{-3} \cdot 10^{-8}$.

24. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:

1) $(5^{-2})^5 \cdot ((5^{-1})^{-3})^3$; 2) $\frac{7^{-4} \cdot (7^{-2})^5}{(7^3)^{-5}}$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-7} \cdot 36^{-4}$; 4) $16^{-5} \cdot (2^{-3})^{-7}$;

5) $\frac{(-3)^{-5} \cdot 27^{-3}}{(-9)^{-6}}$; 6) $0,2^{-8} \cdot 25^{-4}$.



25. Доведіть, що значення виразу $\frac{3ab - a^2}{a^2 - 9b^2} - \frac{3b^2}{ab + 3b^2}$ не залежить від значення змінних.

26. Чи існує така пара значень $(x; y)$, що вираз $\frac{4y^2}{xy + 4y^2} - \frac{4xy - x^2}{x^2 - 16y^2}$ набуває від'ємного значення?

27. Обчисліть значення виразу $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{1 - x^2} : \frac{x^2 + 2x + 1}{3 - 3x}$, якщо



$x = 2026$, відтак дізнаєтеся, скільки разів українські футболісти отримували «Золотий м'яч» – нагорода найкращому футболісту Європи. З інтернету дізнаєтеся прізвища цих футболістів.

28. У перших Зимових Олімпійських іграх 1924 року брав участь американець українського походження Валентин Білас. Він був учасником змагань із ковзанярського спорту на дистанції 5000 м.

Знайдіть значення виразу $-\frac{6-6y^2}{y^3-3y^2+3y-1} : \frac{y+1}{y^2-2y+1}$, якщо $y = 2027$, відтак дізнаєтеся, яке підсумкове місце він зайняв.

29. 1) Знайдіть цілі корені рівняння $\frac{8}{|x|} = 6 - x$, використовуючи графічний спосіб розв'язування.
2) Спробуйте розв'язати рівняння аналітично та знайти його нецілий корінь.

30. Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{6}{|x|} = 2x - 4$.

Квадратні корені. Дійсні числа

31. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , що відповідає значенням $x = -2$; 0 ; 7 .

32. Чи має корені рівняння:

- 1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = -4$;
3) $x^2 = 0$; 4) $x^2 = 10$?

33. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{0,09}$; 3) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 4) $\sqrt{64} - 2\sqrt{0,04}$;
5) $-5\sqrt{0,16}$; 6) $4\sqrt{20\frac{1}{4}}$; 7) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; 8) $\sqrt{2(0,3^2 + 0,41)}$.

34. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{0,49}$; 3) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{100} + 5\sqrt{0,64}$;
5) $-10\sqrt{0,09}$; 6) $8\sqrt{3\frac{1}{16}}$; 7) $\sqrt{15^2 - 9^2}$; 8) $\sqrt{8(0,4^2 + 0,34)}$.

35. Знайдіть наближене значення виразу $\sqrt{13} + 6,79$, округливши значення кореня до сотих. Відтак дізнаєтеся загальну площу лісових ділянок (у млн га), що належать до лісового фонду України.

36. Знайдіть наближене значення виразів, округливши значення кореня до тисячних:

- 1) $\sqrt{15} + 7,383$; 2) $13 - \sqrt{26}$; 3) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

37. Обчисліть:

- 1) $(-\sqrt{17})^2$; 2) $2,9 + (\sqrt{3})^2$; 3) $\sqrt{100 \cdot 64}$; 4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$;
5) $\sqrt{\frac{121}{169}}$; 6) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$; 7) $-3\sqrt{(-7)^2}$; 8) $\sqrt{3^6}$.

38. Обчисліть:

$$\begin{array}{llll}
 1) (\sqrt{19})^2; & 2) 3,7 - (-\sqrt{2})^2; & 3) \sqrt{25 \cdot 10\,000}; & 4) \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}; \\
 5) \sqrt{\frac{64}{81}}; & 6) \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}; & 7) -2\sqrt{5^2}; & 8) \sqrt{(-11)^4}.
 \end{array}$$

39. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{llll}
 1) x^2 = 49; & 2) x^2 = -49; & 3) x^2 + 0,07 = 0,08; & 4) 2x^2 = 12; \\
 5) \sqrt{x} = 3; & 6) \sqrt{x} = 0; & 7) \sqrt{x} + 3 = 8; & 8) -\frac{1}{3}\sqrt{x} = 5.
 \end{array}$$

40. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{llll}
 1) x^2 = 64; & 2) x^2 = -64; & 3) x^2 + 5 = 7; & 4) \frac{1}{4}x^2 = 0; \\
 5) \sqrt{x} = 1; & 6) \sqrt{x} = -8; & 7) \sqrt{x} - 2 = 3; & 8) 4\sqrt{x} = 8.
 \end{array}$$

41. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{200}; \quad 2) \sqrt{75}; \quad 3) \sqrt{5^4 \cdot 2}; \quad 4) \sqrt{7^3 \cdot 2^6}.$$

42. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{20}; \quad 2) \sqrt{45}; \quad 3) \sqrt{11^2 \cdot 3}; \quad 4) \sqrt{2^4 \cdot 5^3}.$$

43. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 4\sqrt{3}; \quad 2) -2\sqrt{7}; \quad 3) \frac{1}{3}\sqrt{3m}; \quad 4) -0,3\sqrt{2a}.$$

44. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 3\sqrt{11}; \quad 2) -3\sqrt{5}; \quad 3) -\frac{1}{2}\sqrt{8x}; \quad 4) 0,1\sqrt{200m}.$$

3 45. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll}
 1) 4\sqrt{x} - 12 = 0; & 2) \frac{20}{\sqrt{x-3}} = 10; & 3) (x-5)^2 = 36; \\
 4) (x-9)^2 = -4; & 5) \frac{x-1}{5} = \frac{7}{x+1}; & 6) (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 18.
 \end{array}$$

46. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{lll}
 1) 5\sqrt{x} + 15 = 0; & 2) \frac{15}{\sqrt{x+2}} = 3; & 3) (x+9)^2 = 0; \\
 4) (x-3)^2 = 49; & 5) \frac{3}{x-2} = \frac{x+2}{4}; & 6) (3x+1)^2 + (3x-1)^2 = 56.
 \end{array}$$

47. Обчисліть:

$$\begin{array}{llll}
 1) \sqrt{9 \frac{49}{64}} \cdot 6 \frac{3}{121}; & 2) \sqrt{4 \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{3 \frac{13}{17}}; & 3) \sqrt{80} \cdot \sqrt{605}; & 4) \sqrt{36^3}.
 \end{array}$$

48. Обчисліть:

$$\begin{array}{llll}
 1) \sqrt{4 \frac{33}{64}} \cdot 4 \frac{21}{25}; & 2) \sqrt{3 \frac{4}{5}} \cdot \sqrt{6 \frac{11}{19}}; & 3) \sqrt{175} \cdot \sqrt{28}; & 4) \sqrt{25^3}.
 \end{array}$$

49. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a + 5\sqrt{a}}{a - 25}$;

2) $\frac{x - 4y}{x + 4\sqrt{x}\sqrt{y} + 4y}$;

3) $\frac{\sqrt{21} - 3}{7 - \sqrt{21}}$.

50. Скоротіть дріб:

1) $\frac{y - 36}{y - 6\sqrt{y}}$;

2) $\frac{a - 6\sqrt{a}\sqrt{b} + 9b}{a - 9b}$;

3) $\frac{\sqrt{26} + 13}{2 + \sqrt{26}}$.

51. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = 3x$;

2) $\sqrt{x} = 3 - 0,25x$.

52. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -2x$;

2) $\sqrt{x} = 5 - 4x$.

4 53. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x + 1} = 3$;

2) $\sqrt{2 + \sqrt{x^2 + 2}} = 2$;

3) $3|x^2 - 2| + 1 = 4$.

54. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x - 1} = 5$;

2) $\sqrt{3 + \sqrt{x^2 + 3}} = 3$;

3) $5|x^2 - 2| - 2 = 8$.

55. Обчисліть:

1) $(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}})^2$;

2) $\frac{4}{8 - 3\sqrt{7}} + \frac{4}{8 + 3\sqrt{7}}$.

56. Обчисліть:

1) $(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2$;

2) $\frac{2}{9 + 4\sqrt{5}} + \frac{2}{9 - 4\sqrt{5}}$.

57. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1; \end{cases}$

2) $y = \frac{3\sqrt{x} - x}{3 - \sqrt{x}}$.

58. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} 6 - x, & \text{якщо } x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 4; \end{cases}$

2) $y = \frac{2\sqrt{x} - x}{2 - \sqrt{x}}$.

Квадратні рівняння

1 59. Випишіть коефіцієнти a , b і c квадратного рівняння:

1) $3x^2 + 4x - 7 = 0$;

2) $4x^2 + 8 = 0$;

3) $4x - x^2 + 9 = 0$;

4) $5x^2 = 0$;

5) $9x - x^2 = 0$;

6) $9 + 8x - x^2 = 0$.

60. Знайдіть, використовуючи теорему Вієта, суму і добуток коренів рівняння:

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

2) $x^2 - 2x = 0$;

3) $-x^2 + 9x - 8 = 0$;

4) $2x^2 - 4x - 7 = 0$;

5) $5x^2 - 8x + 1 = 0$;

6) $6x^2 - 12 = 0$.

61. Розв'яжіть неповні квадратні рівняння:

- 1) $7x^2 - 28 = 0$; 2) $4x^2 - 8x = 0$; 3) $9x^2 = 0$;
 4) $2x^2 + 18 = 0$; 5) $-4x^2 - 2x = 0$; 6) $0,2x^2 + 0,6x = 0$.

62. Розв'яжіть неповні квадратні рівняння:

- 1) $4x^2 + 12x = 0$; 2) $4x^2 - 36 = 0$; 3) $-x^2 + 2x = 0$;
 4) $-7x^2 = 0$; 5) $3x^2 + 27 = 0$; 6) $0,3x^2 - 3x = 0$.

63. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 2) $3x^2 + 2x - 5 = 0$; 3) $x^2 - 10x + 25 = 0$;
 4) $2x^2 = 4 - 7x$; 5) $x^2 = 5x - 7$; 6) $2x = x^2 - 8$.

64. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - x - 2 = 0$; 2) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; 3) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
 4) $3x = 5x^2 - 2$; 5) $x^2 + 2 = 3x$; 6) $3x = x^2 + 7$.

65. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 96 см^2 , а одна зі сторін на 4 см більша за другу.

66. Ділянку землі прямокутної форми, одна зі сторін якої на 5 см більша за другу, потрібно обнести парканом. Знайдіть довжину паркана, якщо площа ділянки становить 300 м^2 .

67. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - 7x + 6$; 2) $2x^2 + 5x + 2$; 3) $-3x^2 - 5x + 2$.

68. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - 5x - 6$; 2) $3x^2 - 4x + 1$; 3) $-2x^2 + 7x - 3$.

69. Розв'яжіть бікватратне рівняння:

- 1) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; 2) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$; 3) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

70. Знайдіть корені бікватратного рівняння:

- 1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; 2) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; 3) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$.

71. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 + x - 2}{x - 3} = 0$; 2) $\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x - 2} = \frac{2x}{x - 2}$;
 4) $\frac{x^2 - 2x}{x - 3} = \frac{1}{3 - x}$; 5) $\frac{x - 3}{8} = \frac{x}{x + 3}$; 6) $\frac{4}{x} = x + 3$.

72. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 - 2x - 8}{x + 1} = 0$; 2) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x + 4} = \frac{16}{x + 4}$;
 4) $\frac{x^2 - 3x}{x - 5} = \frac{2}{5 - x}$; 5) $\frac{x + 2}{x} = \frac{3}{x - 2}$; 6) $\frac{5}{x} = 6 - x$.

73. За яких значень коефіцієнтів a і b числа -1 і 3 є коренями рівняння $ax^2 + bx - 6 = 0$?

74. За яких значень коефіцієнтів b і c числа -3 і 2 є коренями рівняння $3x^2 + bx + c = 0$?

75. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)(x - 4) = -12$;

2) $(2x - 1)^2 = (x - 2)^2$;

3) $(2x - 3)(2x + 3) = 3x + 1$;

4) $x(x - 3) - (x + 2)^2 = x^2 - 3x$.

76. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 6)(x - 2) = -12$;

2) $(3x - 1)^2 = (x - 3)^2$;

3) $(3x + 2)(3x - 2) = x + 6$;

4) $x(x - 2) - (x + 1)^2 = x^2 - 2x$.

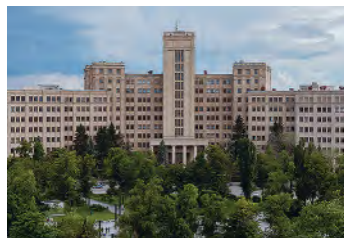
77. Розв'яжіть рівняння:



1) $\frac{x^2 + 2x}{8} = \frac{2x - 1}{3}$;

2) $\frac{y + 3}{5} - \frac{y^2 - 1}{10} = \frac{2}{5}$;

3) Нехай x – найбільший корінь першого рівняння, y – найбільший корінь другого рівняння. Знайдіть значення виразу $600y + 2x$, відтак дізнається рік заснування Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.



78. Розв'яжіть рівняння:



1) $\frac{x^2 + 5}{6} = \frac{4x + 5}{5}$;

2) $\frac{x^2 + 2}{4} + \frac{x - 3}{5} = \frac{13}{10}$;

3) Знайдіть суму всіх коренів обох рівнянь, відтак дізнається, яке місце у світі посідає Україна за кількістю громадян з вищою освітою.

79. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + px - 6 = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 3x_2 = 0$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p .

80. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 3x + q = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 3x_2 = 5$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт q .

81. Скоротіть дроб:

1) $\frac{4x - 12}{x^2 - 2x - 3}$;

2) $\frac{x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2}$;

3) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{3x - 2x^2 - 1}$.

82. Скоротіть дроб:

1) $\frac{x^2 - x - 6}{2x + 4}$;

2) $\frac{3x^2 - 8x - 3}{x^2 - 9}$;

3) $\frac{2x^2 - 3x - 2}{x + 1 - 2x^2}$.

83. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x^2 + 11x - 3}{1 - 4x} = 7$;

2) $\frac{x + 4}{x - 2} + \frac{x - 3}{x + 2} = 7$;

3) $\frac{3x + 2}{x + 1} + \frac{x + 4}{x - 3} = \frac{3x^2 + 1}{(x + 1)(x - 3)}$;

4) $\frac{2x - 2}{x + 3} - \frac{x - 6}{x - 3} = \frac{18}{x^2 - 9}$.

84. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{6x^2 + 5x - 4}{1 - 2x} = 2$;

2) $\frac{x + 4}{x + 1} + \frac{x - 4}{x - 1} = 1$;

3) $\frac{2x - 7}{x + 4} + \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{2x^2 + 4x - 11}{(x + 4)(x - 1)}$;

4) $\frac{x - 4}{x + 2} - \frac{x + 4}{x - 2} = \frac{24}{x^2 - 4}$.

85. З міста A в місто B , відстань між якими 360 км, одночасно виїхали два авто. Швидкість одного з них була на 10 км/год більша за швидкість другого, тому перше авто прибуло у місто B на 30 хв раніше, ніж друге. Знайдіть швидкість кожного авто.

86. З одного села в інше, відстань між якими 24 км, виїхав велосипедист. Через 30 хв у тому самому напрямку виїхала велосипедистка, швидкість якої на 4 км/год більша за швидкість велосипедиста. Знайдіть швидкості велосипедистів, якщо до пункту призначення вони прибули одночасно.



4 87. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1) + x^2 - 3$;

2) $(\sqrt{x} - 3)(x^2 + 2x - 3) = 0$;

3) $x|x| - 3x - 4 = 0$.

88. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) = 3x(3x - 1)(3x + 1) + x - x^2$;

2) $(\sqrt{x} - 2)(2x^2 + 3x - 5) = 0$;

3) $x|x| + 5x - 6 = 0$.

89. За яких значень a рівняння має лише один корінь:

1) $4x^2 + x - a = 0$;

2) $ax^2 - 8x - 4 = 0$?

90. За яких значень b рівняння має лише один корінь:

1) $x^2 + bx + 4 = 0$;

2) $bx^2 + 6x - 1 = 0$?

91. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 1)^4 - 3(x + 1)^2 - 4 = 0$;

2) $(x^2 + x)^2 - 4x^2 - 4x - 12 = 0$.

92. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)^4 + 4(x - 2)^2 - 5 = 0$;

2) $(x^2 - x)^2 - 5x^2 + 5x + 6 = 0$.

РОЗДІЛ 1

НЕРІВНОСТІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **пригадаєте** числові нерівності, подвійні нерівності;
- **ознайомитеся** з поняттями об'єднання і перетину проміжків, лінійними нерівностями з однією змінною та їх системами;
- **дізнаєтеся** про властивості числових нерівностей;
- **навчитися** розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною та системи лінійних нерівностей з однією змінною.

§ 1. Числові нерівності. Доведення нерівностей

1. Числові нерівності



У попередніх класах ви навчилися порівнювати будь-які числа та записувати результат порівняння у вигляді рівності або нерівності, використовуючи знаки $=$, $>$, $<$.

Наприклад: $0,4 = \frac{2}{5}$, $-2 > -11$, $5 < 7$.

Вираз, який записано з лівого боку від знака нерівності, називають *лівою частиною нерівності*, а вираз, який записано з правого боку, – *правою частиною нерівності*. Так, в останній нерівності лівою частиною нерівності є число 5, а правою – число 7.

Нерівність, обидві частини якої – числа або числові вирази, називають *числовою нерівністю*.

Наприклад:

$$1,2 > -0,8; \sqrt{2} < 2; 0,1 < \frac{1}{9}; \sqrt{7} + 2 > \sqrt{8}.$$

2. Загальне означення порівняння чисел

Для двох довільних чисел a і b правильним є одне і тільки одне зі співвідношень: $a > b$, $a < b$ або $a = b$. Раніше ми використовували те чи інше правило порівняння чисел залежно від виду чисел (натуральні числа, десяткові дробі, звичайні дробі з однаковими або різними знаменниками). Але зручно було б мати універсальне правило порівняння.

Відомо, що $5 > 2$. Розглянемо різницю лівої і правої частин цієї нерівності: $5 - 2 = 3 > 0$, різниця є додатною. Розглядаючи різницю лівої і правої частин нерівності $3 < 7$, матимемо: $3 - 7 = -4 < 0$, різниця є від'ємною. У рівності $4 = 4$, розглянувши різницю лівої і правої частин, отримаємо: $4 - 4 = 0$, тобто різниця дорівнює нулю.

Приходимо до означення порівняння чисел.

$$\begin{aligned} a &> b, \text{ якщо } a - b > 0; \\ a &< b, \text{ якщо } a - b < 0; \\ a &= b, \text{ якщо } a - b = 0. \end{aligned}$$

Приклад 1. Порівняти $\frac{5}{9}$ і 0,6.

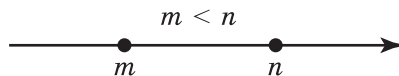
Розв'язання. Розглянемо різницю чисел $\frac{5}{9}$ і 0,6:

$$\frac{5}{9} - 0,6 = \frac{5}{9} - \frac{3}{5} = \frac{25 - 27}{45} = -\frac{2}{45} < 0.$$

Різниця є від'ємною, тому $\frac{5}{9} < 0,6$.

Відповідь: $\frac{5}{9} < 0,6$.

Нагадаємо, що на координатній прямій меншому числу відповідає точка, що лежить зліва від точки, що відповідає більшому числу. На малюнку 1.1 точка, що відповідає числу m , лежить зліва від точки, що відповідає числу n , тому $m < n$.



Мал. 1.1

Числові нерівності бувають *правильними* і *неправильними*. Наприклад:

$$\frac{5}{9} < 0,6; \sqrt{2} > 1 \text{ — правильні числові нерівності;}$$

$$1,8 > 2; \frac{3}{8} < -0,1 \text{ — неправильні числові нерівності.}$$

Крім знаків $>$ і $<$, які називають *знаками строгої нерівності*, у математиці також використовують знаки $\leq$ (читають: «менше або дорівнює», або «не більше») і $\geq$ («більше або дорівнює», або «не менше»). Знаки $\geq$ і $\leq$ називають *знаками нестрогої нерівності*.

Нерівності, які містять знак $>$ або $<$, називають *строгими нерівностями*, а ті, що містять знак $\geq$ або $\leq$, — *нестрогими нерівностями*.

З означення співвідношень «більше», «менше» і «дорівнює» доходимо висновку, що $a \geq b$, якщо $a - b \geq 0$, і $a \leq b$, якщо $a - b \leq 0$.

3. Доведення нерівностей

Розглянемо, як за допомогою означення порівняння чисел можна доводити нерівності.

Приклад 2. Довести, що для будь-якого значення a справджується нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$.

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та спростимо її: $(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) = a^2 - 6a + 9 - (a^2 - 2a - 4a + 8) = a^2 - 6a + 9 - a^2 + 6a - 8 = 1 > 0$.

Оскільки $(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) > 0$ за будь-якого значення a , то за будь-якого значення a справджується нерівність

$$(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4). \quad \blacksquare$$

Умову для прикладу 2 можна було сформулювати коротше, наприклад: довести нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$.

Приклад 3. Довести нерівність $2(x - 8) \leq x(x - 6)$.

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та спростимо її: $2(x - 8) - x(x - 6) = 2x - 16 - x^2 + 6x = -x^2 + 8x - 16 = -(x^2 - 8x + 16) = -(x - 4)^2$.

Оскільки $(x - 4)^2 \geq 0$ за будь-якого значення x , то $-(x - 4)^2 \leq 0$.

Отже, за означенням, нерівність $2(x - 8) \leq x(x - 6)$ є правильною за будь-якого x . $\blacksquare$

Приклад 4. Довести нерівність $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$.

Доведення. У виразі, який записано в лівій частині нерівності, виділимо квадрати двочленів:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 15 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2.$$

Для будь-яких значень x та y : $(x + 2)^2 \geq 0$ і $(y - 3)^2 \geq 0$.

Тому $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 0$, а $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2 > 0$.

Отже, $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$. $\blacksquare$

4. Нерівність Коші для середнього арифметичного та середнього геометричного

Нагадаємо, що число $\frac{a + b}{2}$ називають *середнім арифметичним*

чисел a і b . Для невід'ємних чисел a і b число $\sqrt{ab}$ називають їхнім *середнім геометричним*.

Приклад 5. Довести, що середнє арифметичне двох невід'ємних чисел a і b не менше від їхнього середнього геометричного (*нерівність Коші*):

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0.$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та перетворимо її, врахувавши, що $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ для $a \geq 0, b \geq 0$.

$$\text{Матимемо: } \frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \text{ для всіх } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0.$$

Отже, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для будь-яких $a \geq 0, b \geq 0$. ■

Зауважимо, що знак рівності в нерівності Коші можливий тоді й тільки тоді, коли $a = b$. Якщо $a \neq b$, то $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Розглянемо застосування нерівності Коші для доведення нерівностей.

Приклад 6. Довести, що $\frac{16a}{5b} + \frac{5b}{4a} \geq 4$, якщо $a > 0$ і $b > 0$.

Розв'язання. Оскільки $a > 0$ і $b > 0$, то $\frac{16a}{5b} > 0$ і $\frac{5b}{4a} > 0$. Тоді, за нерівністю Коші, маємо:

$$\frac{\frac{16a}{5b} + \frac{5b}{4a}}{2} \geq \sqrt{\frac{16a}{5b} \cdot \frac{5b}{4a}}; \quad \frac{16a}{5b} + \frac{5b}{4a} \geq 2\sqrt{4}; \quad \frac{16a}{5b} + \frac{5b}{4a} \geq 4. \quad \blacksquare$$

А ще раніше...

Поняття «більше» й «менше» виникли одночасно з поняттям «дорівнювати». Адже ще з давніх часів у практичній діяльності людини виникла потреба порівнювати кількість предметів, довжини відрізків, площі ділянок тощо. Так, наприклад, кілька нерівностей є й у видатній праці «Начала» давньогрецького математика Евкліда (бл. 356–300 до н. е.). Зокрема, він наводить доведення нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для додатних чисел a і b геометричним методом.

Інший давньогрецький фізик і математик Архімед (бл. 287–212 до н. е.), щоб оцінити значення відношення довжини кола C до його діаметра d (пізніше назване числом π), використовує нерівність: $3\frac{10}{71} < \frac{C}{d} < 3\frac{1}{7}$.

Звичні нам символи для запису нерівностей з'явилися лише в XVII–XVIII ст. Знаки строгої нерівності ($>$ і $<$) вперше вжив англійський математик Томас Гарріот (1560–1621) у праці «Практика аналітичного мистецтва», що вийшла друком 1631 р. А знаки нестрогої нерівності ($\geq$ і $\leq$) – 1734 р. французький математик і астроном П'єр Бугер (1698–1758).

З відомих нерівностей, крім нерівності Коші, зазначимо такі:

1) Нерівність *Бернуллі*.

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x, \text{ де } x \geq -1, \alpha - \text{ціле число.}$$

2) Нерівність *Чебишова*.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n},$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – додатні числа і $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

3) Нерівність *Коші–Буняковського*.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – довільні числа.

Останню нерівність довів французький математик *О.Л. Коші* (1789–1857) та наш земляк *В.Я. Буняковський*.

Віктор Якович Буняковський (1804–1889) народився в містечку Бар (нині – Вінницька обл.). Навчався він здебільшого за кордоном, в основному у Франції, де його найближчим наставником був сам Коші. 1825 р. у Паризькому університеті Буняковський захистив дисертацію і здобув ступінь доктора наук. Його дослідження стосувалися галузі прикладної математики та математичної фізики. 1826 р. він повертається з Парижа до Петербурга і починає викладати математику та механіку у відомих на той час навчальних закладах. Тоді ж він перекладав праці Коші з французької.



В. Я. Буняковський

- ? Назвіть ліву і праву частини нерівності $-5 > -10$. ○ Наведіть приклади числових нерівностей. ○ Сформулюйте означення порівняння чисел. ○ Які нерівності називають строгими? Нестрогими? ○ Сформулюйте та доведіть нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох невід'ємних чисел (нерівність Коші).



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1.1. Порівняйте числа:

- 1) 0,8 і 0,7; 2) $-1,2$ і $-1,25$; 3) $1\frac{2}{3}$ і $\frac{2}{3}$;
4) $-\frac{4}{7}$ і $-\frac{3}{7}$; 5) π і 3; 6) $-2,31$ і 0.

1.2. Порівняйте числа:

- 1) 1,8 і 1,9; 2) $-1,3$ і $-1,27$; 3) $\frac{4}{5}$ і $2\frac{4}{5}$;
4) $-\frac{5}{8}$ і $-\frac{7}{8}$; 5) 4 і π ; 6) 0 і $-3,71$.

1.3. (Усно.) Які із числових нерівностей правильні:

- 1) $2,7 > -3,1$; 2) $0,5 < -3,17$; 3) $7,8 > 7,08$;
4) $4,1 < 4\frac{1}{10}$; 5) $-7,1 > -7,19$; 6) $5,05 < 5,5$?

1.4. Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $a - b = 5$; 2) $a - b = 0$; 3) $a - b = -7$.

1.5. Порівняйте числа m і n , якщо різниця $m - n$ дорівнює:

- 1) -18 ; 2) $1,7$; 3) 0.

1.6. Яке із чисел x чи y менше, якщо:

- 1) $x + 4 = y$; 2) $y - 2 = x$; 3) $y + 2 = x$; 4) $x - 3 = y$?

1.7. Яке із чисел a чи b більше, якщо:

- 1) $a - 7 = b$; 2) $a + 3 = b$; 3) $b + 2 = a$; 4) $b - 5 = a$?

1.8. Позначте на координатній прямій точки, що відповідають числам m , n і p , якщо $m < n$ і $p > n$.

1.9. 1) Запишіть у порядку зростання числа:

 $\frac{4}{5}$ (Й); $-\frac{3}{7}$ (О); $\frac{3}{8}$ (Н); 0 (О); -0,1 (Р); -1,2 (В); 0,7 (И).

2) Прочитайте прізвище видатного українського математика, професора Варшавського університету.

3) Дізнайтеся з інтернету про його здобутки.

1.10. 1) Запишіть у порядку спадання числа:

 -1,2 (Р); $\frac{3}{4}$ (І); 0 (О); -0,99 (У); 0,8 (Б); -0,6 (К); 0,51 (Л).

2) Прочитайте прізвище української художниці, творами якої захоплювався Пабло Пікассо.

3) Дізнайтеся з інтернету про її творчий доробок та назву відомої картини на ілюстрації.



Пабло Пікассо:
Якби ми мали художницю
такого рівня майстерності,
то змусили б заговорити
про неї цілий світ!

1.11. Укажіть серед даних нерівностей ті, що є правильними за будь-якого значення x :

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 1) $x^2 > 0$; | 2) $x^2 \geq 0$; |
| 3) $x + 1 > 0$; | 4) $x^2 + 1 > 0$; |
| 5) $(x - 3)^2 \geq 0$; | 6) $(x + 4)^2 > 0$; |
| 7) $x > -x$; | 8) $-x \leq x$. |

1.12. Доведіть нерівність:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 1) $3m + 5 > 3(m - 1)$; | 2) $p(p - 2) < p^2 - 2p + 7$; |
| 3) $(a + 1)(a - 1) < a^2$; | 4) $x(x + 2) > 2x - 1$. |

1.13. Доведіть нерівність:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1) $2a - 3 < 2(a - 1)$; | 2) $c(c + 2) > c^2 + 2c - 3$; |
| 3) $(x + 2)(x - 2) + 5 > x^2$; | 4) $3m - 2 < m(m + 3)$. |

1.14. Доведіть нерівність:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 + y^2 \geq -2xy$; | 2) $p(p - 6) \geq -9$; |
| 3) $a(a + b) \geq ab$; | 4) $m^2 + 5m + 4 \geq m$. |

1.15. Доведіть нерівність:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $m^2 + n^2 \geq 2mn$; | 2) $t(t + 2) \geq -1$; |
| 3) $c(c - d) \geq -cd$; | 4) $p^2 - 11p + 36 \geq p$. |

 1.16. Порівняйте числа:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sqrt{5} - 2$ і $\frac{1}{\sqrt{5} + 2}$; | 2) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ і $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$. |
|--|--|

1.17. Порівняйте числа:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sqrt{3} - 1$ і $\frac{1}{\sqrt{3} + 1}$; | 2) $4 + \sqrt{15}$ і $\frac{1}{4 - \sqrt{15}}$. |
|--|--|

1.18. Доведіть нерівність:

1) $a^2 + 10a + 26 > 0$; 2) $8a < a^2 + 20$.

1.19. Доведіть нерівність:

1) $b^2 - 4b + 7 > 0$; 2) $-2b < b^2 + 2$.

1.20. Нехай x – довільне число. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $x^2 + 5$; 2) $-(x - 1)^2 - 3$; 3) $(x - 7)^2$;
4) $-(x + 9)^2$; 5) $9 + (x - 1)^2$; 6) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2$.

1.21. Доведіть, що:

1) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \geq 0$, якщо $x \geq 3$;
2) $\frac{3}{a + 3} > \frac{1}{a + 1}$, якщо a – додатне число.

1.22. Доведіть, що:

1) $m^3 + m^2 + 5m + 5 \geq 0$, якщо $m \geq -1$;
2) $\frac{p}{p + 7} < \frac{p + 1}{p + 8}$, якщо p – додатне число.

4

1.23. Доведіть нерівність:

1) $m^2 + 4m + p^2 + 2p + 5 \geq 0$;
2) $a^2 + b^2 \geq 4(a + b) - 8$;
3) $m^2 + n^2 + 1 \geq m + n + mn$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 > 2(a + b + c) - 4$.

1.24. Для кожного додатного значення a доведіть, що:

1) $a^3 + 2a^2 + a > 0$; 2) $a^3 + 1 \geq a^2 + a$;
3) $(a + 1)^3 \leq 4(a^3 + 1)$; 4) $a^6 - a^5 + a^4 > 0$.

1.25. Для кожного від'ємного значення p доведіть, що:

1) $p^3 + 10p^2 + 25p \leq 0$; 2) $1 - p^3 > p - p^2$.

1.26. Доведіть, що:

1) $\frac{7a}{2b} + \frac{8b}{7a} \geq 4$, якщо a і b – числа одного знака;
2) $\frac{3m}{5n} + \frac{5n}{12m} \leq -1$, якщо m і n – числа різних знаків.

1.27. Доведіть, що:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, якщо $a > 0$, $b > 0$;
2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$, якщо $a < 0$, $b > 0$.

1.28. Порівняйте значення виразів $m^3 + n^3$ і $mn(m + n)$, якщо m і n – додатні числа, $m \neq n$.

1.29. До кожного із чисел 2, 3, 4, 5 додали одне й те саме число a . Порівняйте добуток першого й четвертого виразів, що утворилися, з добутком другого й третього.

 1.30. Дві школи закупили бейджики (*badge*) для перших класів на однакову суму грошей. Перша школа закупила на половину коштів бейджів по 4 грн, а на іншу половину – по 6 грн. Друга школа на всі кошти закупила бейджі по 5 грн. Яка зі шкіл закупила більше бейджів, якщо обидві школи витратили всі кошти?

 1.31. Софія і Поліна купили однакову кількість зошитів. Софія всі зошити купила за ціною 30 грн, а Поліна – третину зошитів за ціною 24 грн, а решту – за ціною 32 грн. Котра з дівчат витратила на покупку менше грошей?



Вправи для повторення

1.32. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; 2) $5x^2 - 2x - 3 = 0$.

1.33. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = 7$; 3) $y = -0,2x$.

1.34. Трактористи мали зорати поле площею 40 га. Щодня вони орали на 1 га більше, ніж планували, а тому закінчили оранку на 2 дні раніше визначеного терміну. За скільки днів трактористи зорали поле?

1.35. Обчисліть значення суми:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{45}}.$$



Життєва математика

1.36. Для будівництва гаража можна використати один із двох типів фундаменту: бетонний або з піноблоків. Для фундаменту з піноблоків потрібно 3 кубометри піноблоків та 6 мішків цементу. Для бетонного фундаменту потрібно 3 тонни щебеню і 30 мішків цементу. Кубометр піноблоків коштує 1560 грн, щебінь – 370 грн за тонну, а мішок цементу коштує 130 грн. Скільки коштуватиме матеріал, якщо вибрати найдешевший тип фундаменту?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.37. Прочитайте запис:

1) $a \leq 7$; 2) $b > -8$; 3) $x < -2$; 4) $m \geq 0$;
5) $-2 < x \leq 3$; 6) $0 < p < 5$; 7) $3 \leq c \leq 5$; 8) $-5 \leq y < 7$.

1.38. Чи правильне твердження:

- 1) якщо $a = b$, то $b = a$;
- 2) якщо $a = b$, $b = c$, то $a = c$;
- 3) якщо $a = b$ і p – будь-яке число, то $a + p = b + p$;
- 4) якщо $a = b$ і p – будь-яке число, то $a - p = b - p$?

1.39. Порівняйте числа x та y , якщо:

- 1) $x < 0, y > 0$; 2) $x \geq 0, y < 0$;
 3) $x > 0, y \leq 0$; 4) $x \leq 0, y > 0$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

1.40. Водійка планувала їхати з міста A в місто B зі швидкістю 60 км/год, а повертатися назад зі швидкістю 80 км/год. Та, повертаючись назад, проїхала половину шляху із запланованою швидкістю і зупинилася на ночівлю. Яка середня швидкість водійки за описаний проміжок часу?

§ 2. Основні властивості числових нерівностей

1. Властивості числових нерівностей та їхні наслідки

Розглянемо властивості числових нерівностей.

Властивість 1. Якщо $a > b$, то $b < a$;
 якщо $a < b$, то $b > a$.

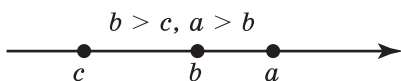
Доведення. Оскільки $a > b$, то $a - b > 0$. Тоді $-(a - b) < 0$, але $-(a - b) = b - a$, тому $b - a < 0$. Отже, $b < a$. Аналогічні міркування можна провести, якщо $a < b$. ■

Властивість 2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$;
 якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

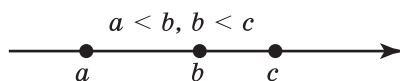
Доведення. За умовою $a > b$ і $b > c$. Тому $a - b > 0$ і $b - c > 0$, тобто $a - b$ і $b - c$ – додатні числа. Розглянемо різницю $a - c$. Маємо: $a - c = a - c - b + b = (a - b) + (b - c) > 0$ (оскільки $a - b$ і $b - c$ – додатні числа). Тому $a > c$. ■

Аналогічні міркування можна провести, якщо $a < b$ і $b < c$.

Геометричні ілюстрації до властивості 2 подано на малюнках 2.1 і 2.2.



Мал. 2.1



Мал. 2.2

Властивість 3. Якщо $a > b$ і p – будь-яке число, то $a + p > b + p$.

Доведення. За умовою $a > b$, тому $a - b > 0$. Розглянемо різницю $(a + p) - (b + p)$ та перетворимо її:

$$(a + p) - (b + p) = a + p - b - p = a - b > 0.$$

Тому $a + p > b + p$. ■



Наслідок. Якщо $a > b + m$, то $a - m > b$.

Доведення. Оскільки $a > b + m$, то $a - (b + m) > 0$, тобто $a - b - m > 0$. Але $a - b - m = (a - m) - b$, тому $(a - m) - b > 0$. Отже, $a - m > b$. ■

Із цього наслідку випливає:

якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності у другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Властивість 4. Якщо $a > b$ і $p > 0$, то $ap > bp$;
якщо $a > b$ і $p < 0$, то $ap < bp$.

Доведення. Нехай $a > b$, тоді $a - b > 0$. Розглянемо різницю $ap - bp$ і перетворимо її: $ap - bp = p(a - b)$.

Якщо $p > 0$, то $p(a - b) > 0$, тому $ap > bp$;
якщо $p < 0$, то $p(a - b) < 0$, тому $ap < bp$. ■

Оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене до дільника $\left(\frac{a}{q} = a \cdot \frac{1}{q}\right)$, то аналогічна властивість справджується і в разі ділення обох частин нерівності на відмінне від нуля число q .
Отже,

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність;

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.



Наслідок. Якщо $ab > 0$, тобто a і b — числа одного знака

і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доведення. Поділимо ліву і праву частини нерівності $a > b$ на додатне число ab . Матимемо:

$\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$; $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, тобто $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ■

2. Застосування властивостей числових нерівностей до порівняння виразів

Приклад 1. Дано: $m > n$. Порівняти:

- 1) $m + 1$ і $n + 1$; 2) $n - 5$ і $m - 5$; 3) $1,7m$ і $1,7n$;
 4) $-m$ і $-n$; 5) $-10n$ і $-10m$; 6) $\frac{m}{8}$ і $\frac{n}{8}$.

Розв'язання. 1) Якщо до обох частин правильної нерівності $m > n$ додамо число 1, то за властивістю 3 матимемо: $m + 1 > n + 1$.

2) Якщо до обох частин правильної нерівності $m > n$ додамо число -5 , то за властивістю 3 матимемо правильну нерівність $m - 5 > n - 5$, тобто $n - 5 < m - 5$ (властивість 1).

3) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на додатне число 1,7, то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $1,7m > 1,7n$.

4) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на від'ємне число -1 , то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $-m < -n$.

5) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на від'ємне число -10 , то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $-10m < -10n$, тобто $-10n > -10m$ (властивість 1).

Записати розв'язання таких вправ можна й коротше:

$$\begin{aligned} m > n & \mid \cdot (-10) \\ -10m & < -10n; \\ -10n & > -10m. \end{aligned}$$

6) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ поділимо на додатне число 8, то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

Відповідь: 1) $m + 1 > n + 1$; 2) $n - 5 < m - 5$; 3) $1,7m > 1,7n$;
 4) $-m < -n$; 5) $-10n > -10m$; 6) $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

3. Застосування властивостей числових нерівностей до подвійних числових нерівностей



Нагадаємо, що в математиці трапляються також *подвійні числові нерівності*: $a < b < c$, $a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a \leq b \leq c$. Наприклад, подвійна нерівність $a < b < c$ означає, що одночасно справджуються нерівності $a < b$ і $b < c$.

Оскільки $a < b$ і $b < c$, то для будь-якого числа p за властивістю 3 справджуються нерівності:

$$a + p < b + p \text{ і } b + p < c + p, \text{ тобто } a + p < b + p < c + p.$$

Отже, якщо до всіх частин правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну подвійну нерівність.

Міркуючи аналогічно, матимемо:

якщо $a < b < c$ і $p > 0$, то $ap < bp < cp$;

якщо $a < b < c$ і $p < 0$, то $ap > bp > cp$, тобто $cp < bp < ap$;

якщо a, b, c – додатні числа і $a < b < c$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$, тобто $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

4. Оцінювання значення виразу

Властивості числових нерівностей, які ми розглянули, можна використовувати для оцінювання значення виразу.

Приклад 2. Оцінити периметр квадрата зі стороною a см, якщо

$$3,2 < a < 3,9.$$

Розв'язання. Оскільки периметр P квадрата обчислюють за формулою $P = 4a$, то всі частини нерівності $3,2 < a < 3,9$ помножимо на 4.

Матимемо: $3,2 \cdot 4 < 4a < 3,9 \cdot 4$, тобто $12,8 < P < 15,6$.

Отже, периметр квадрата більший за 12,8 см, але менший від 15,6 см.

Відповідь: $12,8 < P < 15,6$.

Приклад 3. Дано: $1 < x < 5$. Оцінити значення виразу:

$$1) x + 2; \quad 2) x - 3; \quad 3) 6x; \quad 4) -x;$$

$$5) \frac{x}{15}; \quad 6) -\frac{x}{10}; \quad 7) 3x - 1; \quad 8) \frac{1}{x}.$$

Розв'язання. Використаємо форму запису, запропоновану в завданні 5 прикладу 1.

$$\begin{aligned} 1) \quad & 1 < x < 5 \mid + 2 \\ & 1 + 2 < x + 2 < 5 + 2; \\ & 3 < x + 2 < 7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 1 < x < 5 \mid \cdot 6 \\ & 1 \cdot 6 < 6x < 5 \cdot 6; \\ & 6 < 6x < 30; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & 1 < x < 5 \mid : 15 \\ & \frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{5}{15}; \\ & \frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & 1 < x < 5 \mid \cdot 3 \\ & 1 \cdot 3 < 3x < 5 \cdot 3 \mid - 1 \\ & 3 - 1 < 3x - 1 < 15 - 1; \\ & 2 < 3x - 1 < 14; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 1 < x < 5 \mid - 3 \\ & 1 - 3 < x - 3 < 5 - 3; \\ & -2 < x - 3 < 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 1 < x < 5 \mid \cdot (-1) \\ & 1 \cdot (-1) > x \cdot (-1) > 5 \cdot (-1); \\ & -5 < -x < -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & 1 < x < 5 \mid : (-10) \\ & \frac{1}{-10} > \frac{x}{-10} > \frac{5}{-10}; \\ & -\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad & 1 < x < 5 \\ & \frac{1}{1} > \frac{1}{x} > \frac{1}{5}; \\ & \frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1. \end{aligned}$$

- Відповідь: 1) $3 < x + 2 < 7$; 2) $-2 < x - 3 < 2$;
 3) $6 < 6x < 30$; 4) $-5 < -x < -1$;
 5) $\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3}$; 6) $-\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10}$;
 7) $2 < 3x - 1 < 14$; 8) $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1$.



Сформулюйте й доведіть властивості числових нерівностей та наслідки з них.
 ○ Наведіть приклади подвійних числових нерівностей. ○ Сформулюйте властивості подвійних числових нерівностей.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 2.1. Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:
 1) до обох частин нерівності $-2 < 5$ додамо -5 ;
 2) від обох частин нерівності $7 > 3$ відніmemo 1;
 3) обидві частини нерівності $-2 < 9$ помножимо на 3;
 4) обидві частини нерівності $-5 > -10$ помножимо на -2 ;
 5) обидві частини нерівності $8 > 4$ поділимо на 2;
 6) обидві частини нерівності $3 < 18$ поділимо на -3 .
- 2.2. Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:
 1) до обох частин нерівності $7 > 5$ додамо 8;
 2) від обох частин нерівності $0 < 8$ відніmemo 6;
 3) обидві частини нерівності $12 > 4$ помножимо на 3; на -1 ;
 4) обидві частини нерівності $15 < 18$ поділимо на 3; на -3 .
- 2.3. (Усно.) Порівняйте x і y , якщо:
 1) $x < 5$, $5 < y$; 2) $x > 2$, $2 > y$.
- 2** 2.4. Покажіть на координатній прямій розташування точок, що відповідають числам a , b , c , d , e , якщо: $a > b$, $b > c$, $d < c$, $a < e$.
- 2.5. Відомо, що $m > n$, $p < n$, $t > m$. Порівняйте:
 1) p і m ; 2) p і t ; 3) n і t .
- 2.6. Порівняйте число a з нулем, якщо:
 1) $a > b$, $b \geq 1$; 2) $a < b$, $b < -2$.
- 2.7. Порівняйте число x з нулем, якщо:
 1) $x < y$, $y \leq -3$; 2) $x > y$, $y > 5$.
- 2.8. Відомо, що $x > y$. Яким знаком ($>$ чи $<$) треба замінити «зірочку», щоб утворилася правильна нерівність:
 1) $x + 2 * y + 2$; 2) $x - 3 * y - 3$; 3) $1,8x * 1,8y$;
 4) $-x * -y$; 5) $-2,7x * -2,7y$; 6) $\frac{x}{3} * \frac{y}{3}$?
- 2.9. Дано: $a < b$. Порівняйте:
 1) $a - 7$ і $b - 7$; 2) $a + 3$ і $b + 3$; 3) $1,9a$ і $1,9b$;

4) $-a$ і $-b$; 5) $-0,8a$ і $-0,8b$; 6) $\frac{a}{5}$ і $\frac{b}{5}$.

2.10. Відомо, що $1 < p < 2$. Оцініть значення виразу:

1) $p + 3$; 2) $p - 4$; 3) $12p$; 4) $\frac{p}{2}$; 5) $-p$; 6) $-3p$.

2.11. Відомо, що $2 < t < 10$. Оцініть значення виразу:

1) $t + 1$; 2) $t - 2$; 3) $3t$; 4) $\frac{t}{5}$; 5) $-t$; 6) $-7t$.

2.12. Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$, якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a < b$;
2) $\frac{1}{m}$ і $\frac{1}{n}$, якщо $m > n$, m і n – додатні числа.

2.13. Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{x}$ і $\frac{1}{5}$, якщо $x > 5$; 2) $\frac{1}{b}$ і $\frac{1}{2}$, якщо $0 < b < 2$.

2.14. Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{9}$, якщо $0 < a < 9$; 2) $\frac{1}{c}$ і $\frac{1}{3}$, якщо $c > 3$.

2.15. Оцініть значення виразу $\frac{1}{a}$, якщо $10 < a < 20$.

2.16. Оцініть значення виразу $\frac{1}{x}$, якщо $5 < x < 10$.

3 **2.17.** Порівняйте число a з нулем, якщо:

1) $a + 2 > b + 2$ і $b \geq 0,3$; 2) $a - 3 < p - 3$ і $p < -0,7$;
3) $7a > 7x$ і $x > 8$; 4) $-9a < -9b$ і $b \geq 13$.

2.18. Порівняйте число x з нулем, якщо:

1) $x - 5 < y - 5$ і $y < -1$; 2) $x + 7 > a + 7$ і $a \geq 1$;
3) $2x > 2p$ і $p > 0,17$; 4) $-x > -t$ і $t \leq -2,5$.

2.19. Чи правильне твердження:

1) якщо $a > 5$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{5}$; 2) якщо $a < 5$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{5}$?

2.20. Відомо, що $x > y$. Порівняйте, якщо це можливо:

1) $x + 2$ і y ; 2) $y - 3$ і x ; 3) $-x + 1$ і $-y + 1$;
4) $-x$ і $-y + 8$; 5) $-(x + 1)$ і $-y$; 6) $x - 1$ і $y + 2$.

2.21. Відомо, що $a < b$. Порівняйте, якщо це можливо:

1) $a - 2$ і b ; 2) $b + 3$ і a ; 3) $-a + 2$ і $-b + 2$;
4) $-b - 7$ і $-a$; 5) $-a$ і $-(b + 3)$; 6) $a + 3$ і $b - 1$.

2.22. Відомо, що $1,2 < x < 1,5$. Оцініть значення виразу:

- 1) $2x + 0,7$; 2) $5 - x$; 3) $\frac{x}{3} - 1$; 4) $2 - 10x$.

2.23. Відомо, що $0,8 < a < 1,2$. Оцініть значення виразу:

- 1) $3a - 0,2$; 2) $4 - a$; 3) $\frac{a}{2} + 3$; 4) $10 - 5a$.

2.24. Оцініть значення виразу:

- 1) $\frac{20}{a}$, якщо $2 < a < 5$; 2) $\frac{1}{3a + 4}$, якщо $-1 < a < 2$.

2.25. Оцініть значення виразу:

- 1) $\frac{100}{x}$, якщо $5 < x < 10$; 2) $\frac{1}{2x - 3}$, якщо $2 < x < 4$.

2.26. Ділянка землі має форму рівностороннього трикутника, периметр якого дорівнює P м. Оцініть сторону a (у м), якщо $126 < P < 150$.

2.27. Маса чотирьох однакових мішків із цукром дорівнює m кг. Оцініть масу p (у кг) одного такого мішка, якщо $192 < m < 204$.

4 2.28. Порівняйте x і y , якщо:

- 1) $x + 2 > m > y + 3$; 2) $x - 2 < p < y - 3$.

2.29. Порівняйте a і b , якщо:

- 1) $a + 3 < c < b + 2$; 2) $a - 7 > d > b - 5$.

2.30. Відомо, що $1 < a < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{12}{7 - 3a}$.

2.31. Відомо, що $2 < b < 5$. Оцініть значення виразу $\frac{27}{13 - 2b}$.

2.32. Дано $-2 < x < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{6}{x}$.



Вправи для повторення

2.33. Виконайте дії:

- 1) $\frac{x + 3y}{3x} - \frac{x + 2y}{2x}$; 2) $\frac{1}{m(m + n)} + \frac{1}{n(m + n)}$;
 3) $\frac{3p^2}{p - 2} - 3p$; 4) $\frac{a}{a - 5} + \frac{5}{5 - a}$.

2.34. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x + 3}{x + 1} - \frac{x + 2}{1 - x} = \frac{x + 5}{x^2 - 1}$; 2) $\frac{3}{x} - \frac{x}{2 - x} = \frac{x + 2}{x^2 - 2x}$.

2.35. Доведіть, що значення виразу $8^{15} - 2^{40}$ кратне числу 31.

4 2.36. Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 10 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.



Життєва математика

2.37. Незалежна експертна лабораторія визначає рейтинг R побутових приладів на підставі коефіцієнта цінності, у якому враховують 0,01 від середньої ціни P , показники функціональності F , якості Q і дизайну D . Кожен з показників оцінюють цілим числом від 0 до 4. Підсумковий рейтинг обчислюють за формулою $R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P$.

У таблиці подано середню ціну та оцінку кожного з показників для кількох моделей блендерів.

Визначте моделі з найвищим і найнижчим рейтингами серед тих, які подано в таблиці.

Модель блендера	Середня ціна, P (грн)	Функціональність, F	Якість, Q	Дизайн, D
А	2800	3	2	4
Б	3000	3	3	3
В	3150	4	2	4
Г	3400	4	3	2

Додаткове завдання. Спробуйте розв'язати задачу, використовуючи електронні таблиці, наприклад *Excel*.



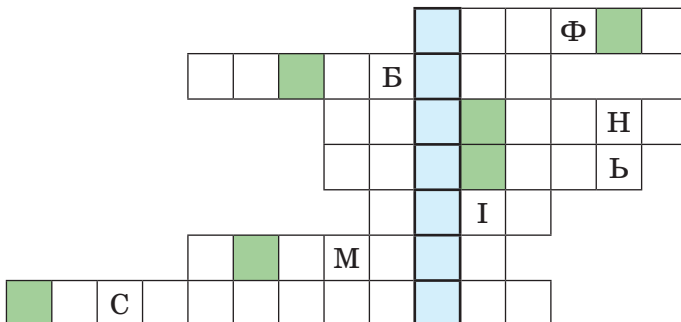
Цікаві задачі – поміркуй одначе

2.38. 1) Пригадайте алгебраїчні поняття і впишіть їх у рядки кросворда, деякі літери до якого вже внесено.



Якщо назви понять запишете правильно, то у виділеному стовпчику отримаєте назву гори – найвищої точки України, а з літер у зафарбованих клітинках можна буде скласти назву річки, що протікає територією України. Знайдіть ці назви.

2) Користуючись додатковими джерелами інформації, зокрема інтернетом, знайдіть відомості про ці географічні об'єкти.



§ 3. Почленне додавання і множення числових нерівностей

1. Почленне додавання числових нерівностей

Продовжимо розглядати *властивості* нерівностей.

Нехай маємо дві правильні нерівності одного й того самого знака: $2 < 5$ і $3 < 7$. Додамо їхні ліві та праві частини й між результатами запишемо той самий знак: $2 + 3 < 5 + 7$. Отримаємо правильну числову нерівність, адже, справді, $5 < 12$. Дію, яку ми виконали, називають *почленним додаванням нерівностей*. Зауважимо, що почленно додавати можна лише нерівності одного знака.

Властивість 5 (про почленне додавання нерівностей).
Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення. До обох частин нерівності $a < b$ додамо число c , а до обох частин нерівності $c < d$ – число b , отримаємо дві правильні нерівності: $a + c < b + c$ і $c + b < d + b$, тому $a + c < b + d$. ■

Аналогічно можна довести, якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Зауважимо, що властивість 5 справджується і для більш ніж двох нерівностей.

Приклад 1. Сторони деякого трикутника дорівнюють a см, b см і c см.

• Оцінити периметр трикутника P (у см), якщо $2,1 < a < 2,3$; $2,5 < b < 2,7$; $3,1 < c < 3,5$.

• *Розв'язання.* Наведемо скорочений запис розв'язання:

$$\begin{array}{r} 2,1 < a < 2,3 \\ + \\ 2,5 < b < 2,7 \\ + \\ 3,1 < c < 3,5 \\ \hline 7,7 < a + b + c < 8,5. \end{array}$$

Отже, $7,7 < P < 8,5$.

• *Відповідь:* $7,7 < P < 8,5$.

2. Почленне множення числових нерівностей

Аналогічна до почленного додавання двох і більше нерівностей властивість справджується і для *множення*. Почленно помноживши правильні нерівності $2 < 7$ і $3 < 4$, одержимо правильну нерівність $2 \cdot 3 < 7 \cdot 4$, адже $6 < 28$. Якщо почленно помножити правильні нерівності $-2 < -1$ і $2 < 8$, то одержимо $-4 < -8$ – неправильну нерівність. Зауважимо, що в першому випадку обидві частини нерівностей були додатними (2 і 7; 3 і 4), а у другому – деякі були від'ємними (-2 і -1).

Властивість 6 (про почленне множення нерівностей).
Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac < bd$.

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число c , а обидві частини нерівності $c < d$ – на додатне число b , одержимо дві правильні нерівності: $ac < bc$ і $bc < bd$. Тоді $ac < bd$ (за властивістю 2). ■

Аналогічно можна довести, якщо $a > b$ і $c > d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac > bd$.

Зауважимо, що властивість 6 справджується і для більш ніж двох нерівностей.



Наслідок. Якщо a і b – додатні числа і $a < b$, то $a^n < b^n$, де n – натуральне число.

Доведення. Перемноживши почленно n правильних нерівностей $a < b$, де a і b – додатні числа, отримаємо $a^n < b^n$. ■

3. Оцінювання значень виразів

За допомогою властивостей, які ми розглянули, можна оцінювати суму, різницю, добуток і частку чисел.

Приклад 2. Дано: $10 < a < 12$, $2 < b < 5$. Оцінити:

- 1) суму $a + b$; 2) добуток ab ; 3) різницю $a - b$; 4) частку $\frac{a}{b}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{rcl} 1) & 10 < a < 12 & \\ & + & \\ & 2 < b < 5 & \\ \hline & 12 < a + b < 17 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2) & 10 < a < 12 & \\ & \times & \\ & 2 < b < 5 & \\ \hline & 20 < ab < 60 & \end{array}$$

3) Щоб оцінити різницю $a - b$, подамо її у вигляді суми $a - b = a + (-b)$ та оцінимо спочатку вираз $-b$.

Оскільки $2 < b < 5$, то, помноживши обидві частини нерівності на число -1 і змінивши знаки нерівності на протилежні, матимемо $-2 > -b > -5$, тобто $-5 < -b < -2$. Отже,

$$\begin{array}{rcl} 10 < a < 12 & \\ + & & \\ -5 < -b < -2 & \\ \hline 5 < a - b < 10. & \end{array}$$

4) Щоб оцінити частку $\frac{a}{b}$, подамо її у вигляді добутку: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

Оцінимо вираз $\frac{1}{b}$. Якщо $2 < b < 5$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$, тобто $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$.

Отже,

$$\begin{array}{rcl} 10 < a < 12 & \\ \times & & \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2} & \\ \hline 2 < \frac{a}{b} < 6. & \end{array}$$

Відповідь: 1) $12 < a + b < 17$; 2) $5 < a - b < 10$;

3) $20 < ab < 60$; 4) $2 < \frac{a}{b} < 6$.

4. Застосування властивостей до доведення нерівностей

За допомогою властивостей, які ми розглянули, можна також доводити нерівності.

Приклад 3. Довести, що $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

Доведення. Застосуємо до кожного множника лівої частини нерівності нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним (нерівність Коші). Матимемо:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{і} \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}.$$

Обидві частини кожної із цих нерівностей за властивістю 4 помножимо на 2, отримаємо:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad \text{і} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}.$$

Перемножимо ці нерівності почленно:

$$\begin{array}{r} x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ \times \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \\ \hline (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{1}{xy}}. \end{array}$$

Отже, $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$. ■



Що мають на увазі під почленным додаванням нерівностей? ○ Сформулюйте й доведіть властивість про почленне додавання нерівностей. ○ Що мають на увазі під почленным множенням нерівностей? ○ Сформулюйте й доведіть властивість про почленне множення нерівностей. ○ Сформулюйте наслідок з властивості про почленне множення нерівностей.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 3.1. Додайте почленно нерівності:

1) $3 < 9$ і $10 < 14$; 2) $-2 > -5$ і $3 > 0$.

3.2. Додайте почленно нерівності:

1) $8 > 3$ і $10 > 7$; 2) $-3 < -1$ і $-5 < 1$.

3.3. Перемножте почленно нерівності:

1) $3 > 1$ і $5 > 2$; 2) $7 < 10$ і $2 < 5$.

3.4. Перемножте почленно нерівності:

1) $5 < 7$ і $1 < 10$; 2) $7 > 3$ і $5 > 1$.

3.5. (Усно.) Чи отримаємо правильну нерівність, перемноживши почленно нерівності:

1) $-2 < -1$ і $5 < 17$; 2) $0 > -3$ і $1 > -5$?

2 3.6. Оцініть значення виразу $a + b$, якщо:

1) $-3 < a < 5$ і $0 < b < 7$; 2) $2 < a < 7$ і $-10 < b < -8$.

3.7. Оцініть значення виразу $m + n$, якщо:

1) $3 < m < 7$ і $0 < n < 2$; 2) $-3 < m < -2$ і $-5 < n < -1$.

3.8. Оцініть значення виразу xy , якщо:

1) $1 < x < 2$ і $5 < y < 10$; 2) $3 < x < 4,5$ і $1 < y < 10$.

3.9. Оцініть значення виразу cd , якщо:

1) $2 < c < 10$ і $1,5 < d < 2,5$; 2) $\frac{1}{3} < c < 1$ і $3 < d < 8$.

3.10. Відомо, що $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$. Оцініть:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; 2) $\sqrt{10}$.

3.11. 1) Оцініть значення виразу $3a + b$, де $-1 < a < 10$, $2 < b < 16$.

 2) Найбільше ціле значення виразу вкаже кількість перемог, які здобув український боксер Віталій Кличко за роки професійної кар'єри.

3.12. 1) Оцініть значення виразу $2x + y$, де $-2 < x < 1$, $2 < y < 7$.

 2) Найбільше ціле значення виразу вкаже кількість медалей, які здобула жіноча збірна України із шахів на всесвітніх шахових олімпіадах.

3.13. Оцініть значення виразу p^2 , якщо $2 < p < 3$.

3.14. Оцініть значення виразу m^2 , якщо $1 < m < 5$.

3.15. Відомо, що $x > 3$, $y > 4$. Чи правильне твердження:

1) $x + y > 7$; 2) $x + y > 6$; 3) $x + y > 8$;
4) $xy > 12$; 5) $xy > 13$; 6) $xy > 10$?

3 3.16. Відомо, що $x < 3$, $y < 4$. Чи можна стверджувати, що $xy < 12$?

3.17. Відомо, що $-3 < x < 4$, $1 < y < 4$. Оцініть значення виразу:

1) $x - y$; 2) $3x - y$;
3) $2y - x$; 4) $2x - 3y$.

3.18. Відомо, що $-2 < a < 0$, $3 < b < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $a - b$; 2) $2a - b$;
3) $3b - a$; 4) $4a - 5b$.

3.19. Дано: $5 < a < 10$, $1 < b < 2$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4b}{3a}$.

3.20. Дано: $2 < x < 4$, $1 < y < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{5y}{2x}$.

3.21. Поле має форму прямокутника зі сторонами a км і b км. Оцініть периметр P поля, якщо $2,3 < a < 2,5$, $3,1 < b < 3,7$.



3.22. Уляна вирізала елемент одягу для ляльки-мотанки, що має форму рівнобедреного трикутника з основою x см та бічною стороною y см. Оцініть, скільки тасьми (у см) знадобиться дівчині, щоб обшити цей елемент одягу, якщо $10 < x < 12$, $9 < y < 11$.



3.23. Оцініть міру кута A трикутника ABC , якщо $50^\circ < \angle B < 52^\circ$, $60^\circ < \angle C < 65^\circ$.



3.24. Дано: $a > 4$, $b < -3$. Доведіть, що:

1) $a - b > 7$; 2) $2a - b > 11$;
3) $5b - a < -19$; 4) $6b - 11a < -60$.

3.25. Дано: $m > 6$, $n < -1$. Доведіть, що:

1) $m - n > 7$; 2) $3m - n > 13$;
3) $2n - m < -8$; 4) $4n - 5m < -34$.

3.26. Доведіть нерівність:

1) $(x^3 + y)(x + y^3) \geq 4x^2y^2$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$;
2) $(m + 6)(n + 3)(p + 2) \geq 48\sqrt{mnp}$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$, $p \geq 0$;
3) $(a + 1)(b + 1)(c + 1) > 32$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $abc = 16$.

3.27. Доведіть нерівність:

1) $(mn + 1)(m + n) \geq 4mn$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$;
2) $(a + 2c)(b + 2a)(c + 2b) \geq 16\sqrt{2}abc$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;
3) $(x + 3)(y + 3)(z + 3) > 72$, якщо $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $xyz = 3$.

3.28. Доведіть нерівність:

1) $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$;
2) $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)\left(1 + y + \frac{1}{y}\right) \geq 9$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

3.29. Маса однієї цукерки з білого шоколаду дорівнює m_1 г, а із чорного – m_2 г. Пакет містить 10 цукерок з білого шоколаду і 12 – із чорного. Оцініть (у г) масу M п'яти таких пакетів, якщо маса самого пакета 5 г і $24,5 < m_1 < 25,2$, $26 < m_2 < 26,5$.



Вправи для повторення

3.30. Виконайте дії:

1) $\frac{4c^2 - 4c + 1}{5c + 5} \cdot \frac{c + 1}{2c - 1}$; 2) $\frac{p - 2}{m^2 + 2m} : \frac{p - 2}{5m + 10}$.

3.31. Після того як змішали 6-відсотковий і 3-відсотковий розчини солі, отримали 300 г 4-відсоткового розчину. По скільки грамів кожного розчину змішали?

3.32. Обчисліть: $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

3.33. Побудуйте графік функції $y = \frac{12 - 6x}{x^2 - 2x}$.



Життєва математика

3.34. 1) Олена Семенівна придбала американський позашляховик, спідометр якого показує швидкість у милях за годину. Американська миля дорівнює 1609 м. Знайдіть швидкість позашляховика в кілометрах за годину в момент, коли спідометр показує 60 миль за годину. Відповідь округліть до десятих км/год.

2) Щоб спростити обчислення, Олена Семенівна для визначення швидкості в км/год вирішила помножити показники спідометра на число 1,6. Знайдіть абсолютну похибку (у км/год) такого обчислення, якщо спідометр показує 70 миль за годину.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

3.35. Чи є число 2 розв'язком рівняння:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| 1) $2x - 1 = 5$; | 2) $x^2 + x = 6$; |
| 3) $3x - 7 = -1$; | 4) $x^2 + x + 9 = 2x + 7$; |
| 5) $x^3 + x^2 + x = 14$; | 6) $\frac{x + 8}{x - 1} = 10$? |

3.36. Чи правильна нерівність $25 - x > 20$, якщо $x = -5$; 3; 5; 11?

3.37. До кожної нерівності доберіть два таких значення x , щоб для кожного з них вона була правильною:

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1) $x \geq 5$; | 2) $x < -2$; |
| 3) $x + 7 > 9$; | 4) $x - 3 \leq 0$; |
| 5) $2x \geq 9$; | 6) $-3x < -12$. |

3.38. Які із запропонованих виразів є додатними для всіх значень змінної, а які – невід'ємними:

- | | |
|------------------|-----------------------|
| 1) x^2 ; | 2) $(x - 3)^2 + 1$; |
| 3) $(x + 5)^2$; | 4) $(x + 7)^2 + 11$? |



Цікаві задачі – поміркуй окремо

3.39. (Українська математична олімпіада, 1962 р.) Знайдіть значення виразу $a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$, де a і b – корені рівняння $x^2 - x + q = 0$.

§ 4. Нерівності зі змінними.

Розв'язок нерівності

Розглянемо нерівність $2x + 1 > 11$. Це нерівність зі змінною. За одних значень змінної x вона перетворюється на правильну числову нерівність, а за інших – на неправильну. Справді, якщо замість x підставити, наприклад, число 8, то матимемо нерівність $2 \cdot 8 + 1 > 11$, що є правильною, якщо підставити число 4, то матимемо нерівність $2 \cdot 4 + 1 > 11$, що є неправильною. У такому разі кажуть, що число 8 є *розв'язком нерівності* $2x + 1 > 11$ (або число 8 *задовольняє нерівність* $2x + 1 > 11$), а число 4 – не є розв'язком цієї нерівності (або число 4 *не задовольняє нерівність* $2x + 1 > 11$).

Також розв'язками нерівності $2x + 1 > 11$ є, наприклад, числа 34; 5,5; $\sqrt{90}$; $7\frac{1}{8}$ тощо.

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.
Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Приклад. Розв'язати нерівності:

1) $\sqrt{x} > 0$; 2) $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 0$.

Розв'язання. 1) $\sqrt{x}$ набуває невід'ємних значень для всіх $x \geq 0$, причому $\sqrt{x} = 0$ тоді й тільки тоді, якщо $x = 0$. Отже, розв'язком нерівності є будь-яке додатне число, тобто $x > 0$.

2) Оскільки $x^2 \geq 0$ для будь-якого значення x , то $x^2 + 1 > 0$ для будь-якого x . Тому значення виразу $\frac{1}{x^2 + 1}$ також є додатним

для будь-якого x . Отже, нерівність $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 0$ є неправильною для кожного значення x , тобто не має розв'язків.

Відповідь: 1) $x > 0$; 2) нерівність не має розв'язків.



Наведіть приклад нерівності з однією змінною. ○ Що називають розв'язком нерівності з однією змінною? ○ Що означає розв'язати нерівність?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 4.1. (Усно.) Чи є розв'язком нерівності $x > 3$ число:

- 1) -2; 2) 5; 3) 2,7; 4) 0; 5) 3,01; 6) 17?

4.2. Чи є розв'язком нерівності $x < 7$ число:

- 1) 8; 2) -2; 3) 0; 4) 4,7; 5) 8,1; 6) 13?

4.3. Запишіть три будь-яких розв'язки нерівності $x \leq -2$.

4.4. Запишіть три будь-яких розв'язки нерівності $x \geq 4$.

2 4.5. Які із чисел є розв'язками нерівності $x^2 + 3x \leq 3 + x$:

- 1) 2; 2) 0; 3) -4;
4) 1; 5) 3; 6) -3?

4.6. Які із чисел є розв'язками нерівності $x^2 + 4x \geq 6 + 3x$:

- 1) 4; 2) 0; 3) -3;
4) 1; 5) 2; 6) -1?

4.7. Запишіть два будь-яких розв'язки нерівності $\sqrt{x-1} > 3$.

4.8. Запишіть два будь-яких розв'язки нерівності $\sqrt{x+2} < 7$.

4.9. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності $15\frac{1}{3} < x \leq 19$.

3 4.10. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $\frac{20}{x} < -8$.

4.11. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $-\frac{30}{x} < -7$.

4.12. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 > 0$; 2) $-x^2 < 0$; 3) $x^2 \geq 0$;
4) $x^2 \leq 0$; 5) $(x-1)^2 > 0$; 6) $(x-1)^2 \geq 0$;
7) $(x-1)^2 < 0$; 8) $(x-1)^2 \leq 0$; 9) $x^2 + 9 < 0$.

4.13. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x+2)^2 \geq 0$; 2) $(x+2)^2 > 0$; 3) $(x+2)^2 < 0$;
4) $(x+2)^2 \leq 0$; 5) $\frac{1}{x^2} + 13 < 0$; 6) $x^2 + 5 \geq 0$.

4 4.14. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x+2}{x+2} > 0,5$; 2) $\frac{x-3}{x-3} \leq 0,7$; 3) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \geq 0$;
4) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 > 0$; 5) $\frac{(x+3)^2}{x} > 0$; 6) $\frac{(x-1)^2}{x} \leq 0$.

4.15. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x-3}{x-3} > -2$; 2) $\frac{x+7}{x+7} < -1$; 3) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0$;
4) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 > 0$; 5) $\frac{(x-3)^2}{x} > 0$; 6) $\frac{(x+1)^2}{x} \leq 0$.



Вправи для повторення

4.16. Спростіть вираз:

1) $(3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 - 9$.

4.17. Доведіть тотожність:

$$\frac{x^2 + x}{(x - 1)^2} : \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) = \frac{x}{x - 1}.$$

4.18. Побудуйте графік рівняння $|x - y| = 3$.



Життєва математика

4.19. Діагональ екрана телевізора дорівнює 48 дюймів. Запишіть довжину діагоналі екрана в сантиметрах, якщо в одному дюймі 2,54 см. Результат округліть до цілого числа сантиметрів.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.20. Де на координатній прямій містяться числа, якщо вони:

- 1) більші за число 5; 2) менші від числа 3;
3) більші за число 5, але менші від числа 9?

4.21. Укажіть кілька значень змінної, які задовольняють нерівність:

- 1) $x < -2$; 2) $x > 3$; 3) $-2 \leq x \leq 3$; 4) $-2 < x < 3$.

4.22. Між якими цілими числами міститься число:

- 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{13}$; 4) $-\sqrt{3}$?

4.23. Укажіть елементи множини:

- 1) $A = \{4; 7; 10\}$; 2) $B = \{\triangle; \square; !\}$.

4.24. 1) Наведіть приклади скінченних множин та нескінченних множин.

2) Як називають множину дійсних розв'язків рівняння $|x| = -4$?

4.25. Назвіть спільні елементи множин $A = \{1; 3; 5; 7\}$ і $B = \{2; 3; 4; 5\}$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

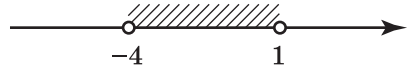
4.26. Першу половину шляху пішохід рухався зі швидкістю, на 25 % більшою від запланованої. На скільки відсотків меншою від запланованої може бути тепер його швидкість на другій половині шляху, щоб прийти до пункту призначення вчасно?

§ 5. Числові проміжки

1. Поняття про числовий проміжок

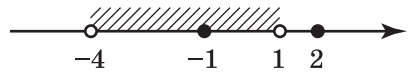
Множину розв'язків нерівності зручно записувати за допомогою числових проміжків.

Приклад 1. Розглянемо подвійну нерівність з однією змінною $-4 < x < 1$. Цю нерівність задовольняють усі числа, які більші за -4 і менші від 1 , тобто ті числа, що на координатній прямій містяться між числами -4 і 1 . Множину всіх чисел, що задовольняють нерівність $-4 < x < 1$, називають *числовим проміжком*, або просто *проміжком*, від -4 до 1 і позначають: $(-4; 1)$ (читають: «проміжок від -4 до 1 »). Щоб показати на координатній прямій множину всіх чисел, що належать проміжку $(-4; 1)$, його виділяють штриховкою, як показано на малюнку 5.1. При цьому точки -4 і 1 зображують «порожніми» або «виколотими».



Мал. 5.1

Число -1 задовольняє нерівність $-4 < x < 1$, а число 2 її не задовольняє. У такому разі кажуть, що число -1 належить проміжку $(-4; 1)$, а число 2 йому не належить (мал. 5.2). Отже, кожне число, що задовольняє нерівність $-4 < x < 1$, належить проміжку $(-4; 1)$, і, навпаки, кожне число, що належить проміжку $(-4; 1)$, задовольняє нерівність $-4 < x < 1$.



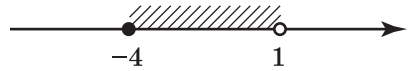
Мал. 5.2

Приклад 2. Подвійну нерівність $-4 \leq x \leq 1$ задовольняють не тільки всі числа, які більші за -4 і менші від 1 , а й самі числа -4 і 1 . Множину цих чисел позначають $[-4; 1]$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи -4 і 1 »). У такому разі на координатній прямій виділяють проміжок між числами -4 і 1 разом із цими числами (мал. 5.3).



Мал. 5.3

Приклад 3. Множину чисел, що задовольняє подвійну нерівність $-4 \leq x < 1$, позначають: $[-4; 1)$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи -4 »). Цей проміжок зображено на малюнку 5.4.



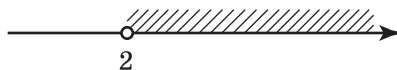
Мал. 5.4

Приклад 4. Множину чисел, що задовольняє подвійну нерівність $-4 < x \leq 1$, позначають: $(-4; 1]$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи 1 »). Цей проміжок зображено на малюнку 5.5.



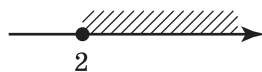
Мал. 5.5

Приклад 5. Нерівність $x > 2$ задовольняють усі числа, які більші за 2 , тобто ті числа, що на координатній прямій лежать праворуч від числа 2 . Множину цих чисел позначають $(2; +\infty)$ (читають: «проміжок від 2 до плюс нескінченності») і зображують променем, що виходить із «порожньої» точки з координатою 2 (мал. 5.6).



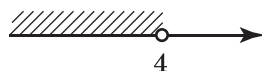
Мал. 5.6

Приклад 6. Нерівність $x \geq 2$ задовольняють усі числа, які більші за 2, і саме число 2. Множину цих чисел позначають $[2; +\infty)$ (читають: «проміжок від 2 до плюс нескінченності, включаючи 2») і зображують променем, що лежить праворуч від точки з координатою 2, включаючи цю точку (мал. 5.7).



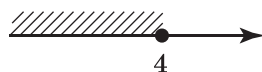
Мал. 5.7

Приклад 7. Множину чисел, що задовольняють умову $x < 4$, записують так: $(-\infty; 4)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до 4»). Множину зображено на малюнку 5.8.



Мал. 5.8

Приклад 8. Множину чисел, що задовольняють умову $x \leq 4$, записують так: $(-\infty; 4]$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до 4, включаючи 4»), її зображено на малюнку 5.9.



Мал. 5.9

Отже, якщо кінець проміжка включається у проміжок (наприклад, коли нерівність нестрога), то біля цього кінця записують квадратну дужку, в усіх інших випадках записують круглу дужку.



Множину всіх чисел зображують усією координатною прямою та позначають проміжком $(-\infty; +\infty)$. Множину, яка не містить жодного числа, позначають $\emptyset$ і називають *порожньою множиною*.

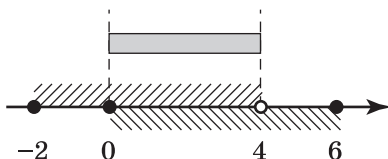
2. Операції над числовими проміжками

Над числовими проміжками можна виконувати певні дії (*операції*). Розглянемо дві з них: *перетин* та *об'єднання*.

Перетином числових проміжків називають множину, що містить усі числа, які належать кожному із цих проміжків.

Перетин записують за допомогою символа $\cap$.

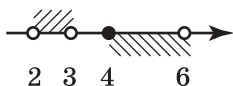
Приклад 9. $[-2; 4) \cap [0; 6] = [0; 4)$ (мал. 5.10).



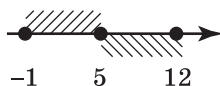
Мал. 5.10

Зауважимо, що перетин проміжків не завжди є проміжком. Це може бути і точка, і порожня множина.

Приклад 10. Проміжки $(2; 3)$ і $[4; 6)$ не мають спільних точок (мал. 5.11), тому їх перетином є порожня множина. Записати це можна так: $(2; 3) \cap [4; 6) = \emptyset$.



Мал. 5.11



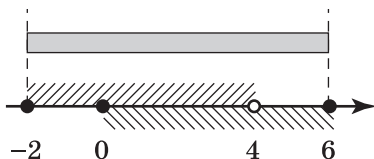
Мал. 5.12

Приклад 11. Проміжки $[-1; 5]$ і $[5; 12]$ мають лише одну спільну точку (мал. 5.12). Записують це так: $[-1; 5] \cap [5; 12] = \{5\}$.

Об'єднанням числових проміжків називають множину, що складається з усіх чисел, які належать хоча б одному із цих проміжків.

Об'єднання записують за допомогою символу $\cup$.

Приклад 12. $[-2; 4] \cup [0; 6] = [-2; 6]$ (мал. 5.13).



Мал. 5.13

Зауважимо, що об'єднання проміжків не завжди є проміжком. Наприклад, множина $(2; 3) \cup [4; 6]$ не є проміжком (мал. 5.11).

? Наведіть приклади числових проміжків різних видів, запишіть їх та зобразіть на координатній прямій. **○** Що називають перетином числових проміжків? **○** Що називають об'єднанням числових проміжків?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

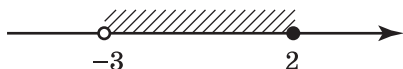
1 5.1. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $(-2; 1)$; | 2) $(-4; 2]$; | 3) $[1; 5)$; | 4) $[3; 7]$; |
| 5) $(-\infty; 3)$; | 6) $[4; +\infty)$; | 7) $(-\infty; 0]$; | 8) $(5; +\infty)$. |

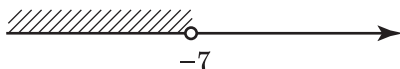
5.2. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

- | | | | |
|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1) $[4; 6)$; | 2) $(-1; 7)$; | 3) $[3; 4]$; | 4) $(0; 2]$; |
| 5) $(-3; +\infty)$; | 6) $(-\infty; 4]$; | 7) $[0; +\infty)$; | 8) $(-\infty; -1)$. |

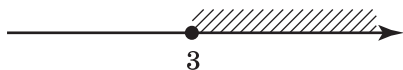
5.3. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 5.14–5.17.



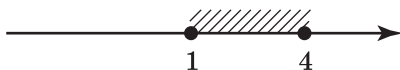
Мал. 5.14



Мал. 5.15

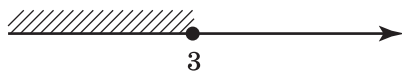


Мал. 5.16

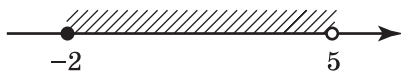


Мал. 5.17

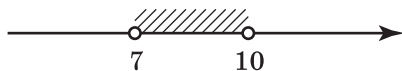
5.4. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 5.18–5.21.



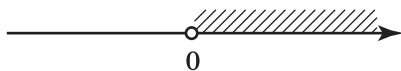
Мал. 5.18



Мал. 5.19



Мал. 5.20



Мал. 5.21

2 5.5. Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

- 1) $x > 3$; 2) $x \leq -8$; 3) $x \geq -1$;
 4) $x < 2$; 5) $1,8 \leq x < 2$; 6) $2,5 \leq x \leq 3\frac{1}{8}$;
 7) $3,9 < x < 4$; 8) $7 < x \leq 7,01$.

5.6. Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

- 1) $x \geq 5$; 2) $x < 4,5$;
 3) $1,8 \leq x < 5$; 4) $1,9 < x < 4$.

5.7. (Усно.) Чи належить проміжку $[-1,01; 1,02]$ число:

- 1) $-1,1$; 2) $0,9$; 3) $1,03$;
 4) $-1,11$; 5) $1,015$; 6) $-1,009$?

5.8. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку:

- 1) $(-2; 1)$; 2) $[-1,8; 2]$;
 3) $(3; 4)$; 4) $(-2,6; 1,6)$.

5.9. Які натуральні числа належать проміжку:

- 1) $(-0,1; 4,9]$; 2) $[1; \sqrt{5})$; 3) $(-3; 0,7]$; 4) $[2; 3,99)$?

5.10. Запишіть два додатних і два від'ємних числа, що належать проміжку:

- 1) $(-2; 7)$; 2) $[-1; 1]$.

5.11. Знайдіть найменше ціле число, що належить проміжку:

- 1) $(0; 8)$; 2) $(-5; 2)$; 3) $[4; 7)$; 4) $(0,5; +\infty)$.

5.12. Знайдіть найбільше ціле число, що належить проміжку:

- 1) $(-2; 9)$; 2) $(-\infty; 4,5)$; 3) $[0; 17,2]$; 4) $(-1; 0,99)$.

3 5.13. 1) Знайдіть найбільше і найменше натуральні числа, що належать проміжку $[\sqrt{5}; \sqrt{39})$.

2) Знайдіть добуток цих чисел, відтак дізнаєтеся, скільки медалей Паралімпійських ігор має українка Олена Юрковська.

5.14. Чи належить проміжку $(1,6; 4,5]$ число:

- 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{21}$?

5.15. Чи належить проміжку $[2,5; 6,1)$ число:

- 1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{15}$; 4) $\sqrt{39}$?

5.16. Зобразіть проміжки на координатній прямій та запишіть їх перетин:

- 1) $[-2; 3]$ і $[0; 4]$; 2) $[-5; 4]$ і $(-2; 1)$;
3) $(-\infty; 2)$ і $(-\infty; 3]$; 4) $(-\infty; 4)$ і $[0; +\infty)$;
5) $[2; 3]$ і $(2; 8)$; 6) $(-2; 1)$ і $(2; 5)$.

5.17. Зобразіть проміжки на координатній прямій та запишіть їх перетин:

- 1) $(-1; 8)$ і $(0; 9)$; 2) $(-2; 4]$ і $[1; 2)$;
3) $(-\infty; 1)$ і $(-2; 3)$; 4) $[1; 5)$ і $[6; +\infty)$.

5.18. Зобразіть проміжки на координатній прямій та запишіть їх об'єднання:

- 1) $(-3; 1)$ і $(0; 4]$; 2) $[0; 1)$ і $[-2; 1]$;
3) $[3; 8)$ і $[4; 5]$; 4) $(-\infty; 3)$ і $[2,8; 4)$;
5) $[1; 3)$ і $[3; 5]$; 6) $(0; 1]$ і $(2; +\infty)$.

5.19. Зобразіть проміжки на координатній прямій та запишіть їх об'єднання:

- 1) $[-2; 3)$ і $(2; 5]$; 2) $(2; 4)$ і $[2; 10)$;
3) $(-\infty; 0)$ і $[0; 1]$; 4) $(-\infty; 4)$ і $(3; +\infty)$.



Вправи для повторення

5.20. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{m^2 - 5}{m + \sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{m - 2\sqrt{mn} + n}$.

5.21. Доведіть нерівність $(x + 5)(x - 9) < (x - 2)^2$.

5.22. На перегоні 120 км завдовжки поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж зазвичай за розкладом, тому запізнився на 24 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

5.23. Знайдіть значення виразу $x + \frac{1}{x}$, якщо $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

5.24. Знайдіть корені лінійного рівняння:

- 1) $2x = 6$; 2) $6x = -12$; 3) $-4x = 160$;
4) $-5x = -20$; 5) $0x = 7$; 6) $0x = 0$.

5.25. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x - 3 = 3x + 7$; 2) $2(x - 3) = 7(x + 2) - 1$;
3) $2(x - 3) - (x + 2) = 1 - 3x$; 4) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 2}{3} = 2$.

5.26. Чи є рівносильними рівняння:

1) $-3x = 12$ і $x + 7 = 3$;

2) $2x = 18$ і $x + 1 = -8$?

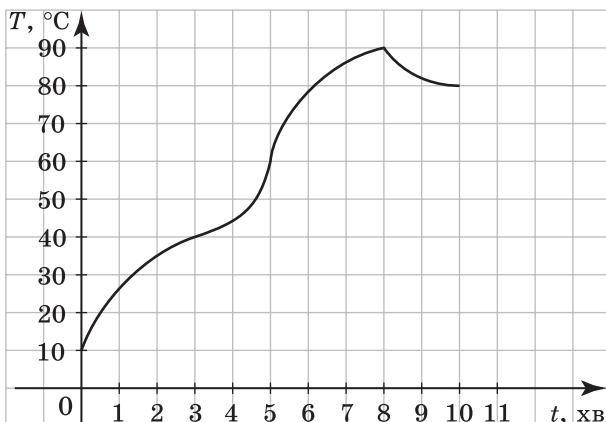


Життєва математика

5.27. На малюнку зображено графік процесу розігрівання двигуна легкового автомобіля. На осі абсцис відкладено час у хвиликах, що минув від запуску двигуна, на осі ординат – температуру двигуна у градусах Цельсія.

За графіком визначте:

- 1) на якій хвилині температура двигуна досягла значення 60°C ;
- 2) скільки хвилин двигун нагрівався від температури 40°C до температури 90°C ;
- 3) скільки хвилин двигун охолоджувався від температури 90°C до температури 80°C ;
- 4) на скільки градусів нагрівся двигун за перші три хвилини.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

5.28. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x - 14} = \frac{x^2 + x + 6}{3x^2 + 5x - 10}.$$

§ 6. Лінійні нерівності з однією змінною. Рівносильні нерівності

1. Лінійна нерівність з однією змінною та її розв'язування

Нерівності вигляду $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, де x – змінна, а a і b – деякі числа, називають **лінійними нерівностями з однією змінною**.

Якщо $a \neq 0$, то обидві частини нерівності можна поділити на a , врахувавши при цьому властивість числових нерівностей, тобто якщо $a > 0$, то знак нерівності залишаємо без змін; якщо $a < 0$, то знак нерівності змінюємо на протилежний.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

1) $2x \geq 18$; 2) $-3x > -15$.

Розв'язання. 1) Поділивши обидві частини нерівності на 2, отримаємо: $x \geq 9$. Отже, розв'язком нерівності є проміжок $[9; +\infty)$.

2) Поділивши обидві частини нерівності на -3 та змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, отримаємо: $x < 5$, тобто $x \in (-\infty; 5)$.

Відповідь: 1) $[9; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5)$.

Зауважимо, що відповідь можна було записати й так:

1) $x \geq 9$; 2) $x < 5$.

2. Рівносильні нерівності. Властивості нерівностей зі змінними

Нерівності, що мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Нерівності, що не мають розв'язків, також є *рівносильними*.

Для нерівностей зі змінними справджуються *властивості*, подібні до тих, що справджуються і для рівнянь:

- 1) якщо в будь-якій частині нерівності розкрити дужки або звести подібні доданки, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 2) якщо в нерівності перенести доданок з однієї її частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній; якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

3. Розв'язування нерівностей, що зводяться до лінійних

Щоб розв'язати рівняння, ми зводимо його до рівносильного йому простішого рівняння. Аналогічно, користуючись властивостями нерівностей, можна розв'язувати й нерівності, замінюючи їх простішими нерівностями, їм рівносильними.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{x+2}{2} - \frac{x+6}{3} \geq \frac{x}{6}$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини нерівності на найменший спільний знаменник дробів – число 6, далі спростимо її ліву частину та перенесемо доданки зі змінною в ліву частину нерівності, а без змінної – у праву.

$$\frac{6(x+2)}{2} - \frac{6(x+6)}{3} \geq \frac{6 \cdot x}{6};$$

$$3(x+2) - 2(x+6) \geq x;$$

$$3x + 6 - 2x - 12 \geq x;$$

$$3x - 2x - x \geq 12 - 6;$$

$$0x \geq 6.$$

Отримали нерівність, рівносильну початковій. Вона не має розв'язків, оскільки за будь-якого значення x ліва частина нерівності дорівнюватиме нулю, а нерівність $0 \geq 6$ є неправильною.

Відповідь: розв'язків немає.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(x+3)^2 - x^2 < 6x + 10$.

Розв'язання. Розкривши дужки, маємо:

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 < 6x + 10;$$

$$6x - 6x < 10 - 9;$$

$$0x < 1.$$

Остання нерівність рівносильна початковій і є правильною за будь-якого значення x , оскільки за будь-якого значення x її ліва частина дорівнюватиме нулю, а нерівність $0 < 1$ є правильною. Отже, розв'язком нерівності є будь-яке число, тобто множиною розв'язків є проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

Із прикладів 2 і 3 можна дійти висновку, що

нерівності вигляду $0x > b$, $0x \geq b$, $0x < b$, $0x \leq b$ або не мають розв'язків, або їх розв'язком є будь-яке число.

Приклад 4. Для будь-якого значення m розв'язати нерівність

$$mx - m^2 < x - 1, \text{ де } x - \text{змінна.}$$

Розв'язання. Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину нерівності, інші – у праву частину, щоб звести нерівність до вигляду лінійної:

$$mx - x < m^2 - 1;$$

$$(m-1)x < m^2 - 1.$$

Значення виразу $m-1$ для різних значень m може бути додатним, від'ємним або нулем, тому розглянемо кожен із цих випадків окремо:

$$1) m-1 > 0; \quad 2) m-1 = 0; \quad 3) m-1 < 0.$$

1) Якщо $m - 1 > 0$, тобто $m > 1$, то, поділивши ліву і праву частини нерівності на додатне число $m - 1$, матимемо:

$$x < \frac{m^2 - 1}{m - 1};$$

$$x < \frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1};$$

$$x < m + 1.$$

2) Якщо $m - 1 = 0$, тобто $m = 1$, отримаємо нерівність $0 \cdot x < 0$, яка розв'язків не має.

3) Якщо $m - 1 < 0$, тобто $m < 1$, то, поділивши ліву і праву частини нерівності на від'ємне число $m - 1$ і змінивши знак нерівності на протилежний, отримаємо:

$$x > \frac{m^2 - 1}{m - 1};$$

$$x > m + 1.$$

Відповідь: якщо $m < 1$, то $x > m + 1$; якщо $m = 1$, то розв'язків немає; якщо $m > 1$, то $x < m + 1$.

-  Які нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною?  Наведіть приклади таких нерівностей.  Які нерівності називають рівносильними?  Сформулюйте властивості нерівностей, які використовують для розв'язування нерівностей.  Що можна сказати про розв'язки нерівностей вигляду $0x > b$; $0x \geq b$; $0x < b$; $0x \leq b$?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 6.1. (Усно.) Які з нерівностей є лінійними:

1) $\frac{1}{3}x > -5$; 2) $2x^2 - 3 \geq 0$; 3) $-3x \leq 6$; 4) $\frac{1}{x} < 3$?

6.2. (Усно.) Чи рівносильні нерівності:

1) $2x - 7 > 4$ і $2x > 4 + 7$; 2) $3x > 9$ і $x < 3$?

6.3. Чи рівносильні нерівності:

1) $3x + 2 > 5$ і $3x > 5 + 2$; 2) $5x \leq 10$ і $x \leq 2$?

2 6.4. Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій:

1) $x + 7 \geq 3$; 2) $x - 5 < 2$;
3) $x + 9 \leq -17$; 4) $x - 7 > -8$.

6.5. Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій:

1) $x - 5 \leq 6$; 2) $x + 7 > -9$;
3) $x - 7 \geq 12$; 4) $x + 7 < -5$.

6.6. Знайдіть розв'язки нерівності:

1) $4x > 8$; 2) $8x \leq 72$; 3) $-9x \geq -63$; 4) $-x < 5$;
5) $5x \geq 11$; 6) $6x < 1,2$; 7) $-18x > -27$; 8) $-3x \leq 0$.

6.7. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $6x > 12$; 2) $7x < 42$; 3) $-x \geq -8$; 4) $-12x \leq 24$;
 5) $7x \leq 13$; 6) $4x > 1,6$; 7) $12x < -18$; 8) $-9x \geq 0$.

6.8. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{1}{3}x \geq -2$; 2) $\frac{2}{9}x < 10$; 3) $-\frac{1}{4}x \leq -6$; 4) $-\frac{3}{7}x > -21$.

6.9. Знайдіть розв'язки нерівності:

- 1) $\frac{1}{6}x < -3$; 2) $\frac{2}{3}x \geq 18$; 3) $-\frac{3}{8}x \leq -12$; 4) $-\frac{7}{6}x > 42$.

6.10. Розв'яжіть нерівність та вкажіть три будь-яких числа, що є її розв'язками:

- 1) $-3x < 12$; 2) $2x \geq 0$; 3) $-5x > -35$; 4) $4x \leq -13$.

6.11. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $0,2x \geq 8$; 2) $-0,7x < 1,4$; 3) $10x \leq -1$; 4) $-8x > 0$.

6.12. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $0,3x > 15$; 2) $-0,2x \leq 1,8$; 3) $100x \geq -2$; 4) $-5x < 0$.

6.13. Чи рівносильні нерівності:

- 1) $2x \geq 8$ і $-x \leq -2$; 2) $3x < 6$ і $x + 1 < 3$?

6.14. Чи рівносильні нерівності:

- 1) $5x \leq 5$ і $-x \geq -1$; 2) $2x > 8$ і $x - 1 < 5$?

6.15. За яких значень x функція $y = -4x$ набуває значень, які:

- 1) більші за -8 ; 2) менші від 12 ?

6.16. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $1 + 2x > 7$; 2) $3 - 5x \leq 2$; 3) $3x + 8 < 0$;
 4) $9 - 12x \geq 0$; 5) $6 + x < 3 - 2x$; 6) $4x + 19 \leq 5x - 2$.

6.17. Знайдіть розв'язки нерівності:

- 1) $1 + 6x \leq 7$; 2) $6x + 1 > -3$; 3) $3 - 2x \geq 0$;
 4) $6 - 15x < 0$; 5) $4 + x > 1 - 2x$; 6) $4x + 7 \leq 6x + 1$.

6.18. За яких значень x функція $y = 2x - 3$ набуває від'ємних значень?

6.19. За яких значень x функція $y = 5 - 2x$ набуває додатних значень?

6.20. Знайдіть розв'язки нерівності:

- 1) $4 - x > 3(2 + x)$; 2) $3(1 - x) \geq 2(2x - 2)$;
 3) $2(3 + x) + (4 - x) \leq 0$; 4) $-(2 - 3x) + 4(x + 6) < 1$.

6.21. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $4(1 + x) < x - 2$; 2) $2 + x \geq 6(2x - 1)$;
 3) $-(2x + 1) > 3(x + 2)$; 4) $5(x + 8) + 4(1 - x) \leq 0$.

6.22. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{x + 2}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$.

6.23. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{x-1}; \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{x+4}}.$$

6.24. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{3x}{4} - x < 2; \quad 2) \frac{5x}{3} + x \geq 16.$$

3 **6.25.** За яких значень a нерівність $ax < 4$ має ту саму множину розв'язків, що й нерівність:

$$1) x < \frac{4}{a}; \quad 2) x > \frac{4}{a}?$$

6.26. За яких значень b нерівність $bx \geq 7$ має ту саму множину розв'язків, що й нерівність:

$$1) x \geq \frac{7}{b}; \quad 2) x \leq \frac{7}{b}?$$

6.27. Складіть таку нерівність вигляду $ax > b$, щоб множиною її розв'язків був проміжок:

$$1) (3; +\infty); \quad 2) (-\infty; 1).$$

6.28. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності:

$$1) x(x+2) - x^2 > 4x - 7; \quad 2) (x+5)(x-5) \leq x^2 - 5x.$$

6.29. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності:

$$1) (x+1)^2 - x^2 \geq 6x - 9; \quad 2) (x-1)(x+2) < x^2 - 3x + 11.$$

6.30. Нехай x_0 – найбільший натуральний розв'язок нерівності $(x-3)^2 - (x+1)^2 > 2x - 43$. Знайдіть добуток $377x_0$, відтак дізнається рік заснування національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

6.31. Нехай x_0 – найменший натуральний розв'язок нерівності $(x-2)^2 - (x-1)^2 < x - 52$. Знайдіть добуток $90x_0$, відтак дізнається, якого року було прийнято «Конституцію прав і свобод війська Запорозького» Пилипа Орлика – першу конституцію у світовій історії.

6.32. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

$$1) \frac{x+3}{4} - \frac{x}{3} \leq 0; \quad 2) \frac{x+1}{2} - \frac{1-5x}{5} > x.$$

6.33. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

$$1) \frac{x+2}{7} - \frac{x}{5} \geq 0; \quad 2) \frac{x-1}{3} - \frac{1-4x}{2} < x.$$

6.34. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) 2(3x+1) - 3x > 3x; \quad 2) x + \frac{x}{2} \geq \frac{3x}{2} + 2; \\ 3) 4(x+1) \geq 2(x+2) + 2x; \quad 4) 3(x-1) - 2x < x - 3.$$

6.35. Розв'яжіть нерівність:

1) $3(2x + 1) - 6x \geq 5$;

2) $4(x + 1) - 3x > -(2 - x)$;

3) $x - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3} - 1$;

4) $6(x + 1) - 3(x + 2) \leq 3x$.

6.36. Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює 8 см. Якою має бути довжина другої сторони прямокутника, щоб його площа була меншою від 96 см^2 ?



6.37. За яких значень a коренем рівняння:

1) $4x - 7 = a$ є число додатне;

2) $5 + 2x = 3 - a$ є число від'ємне?

6.38. Чи існує таке значення a , за якого:

1) нерівність $ax > 2$ не має розв'язків;

2) розв'язком нерівності $(a - 3)x < 7$ є будь-яке число?

У разі ствердної відповіді вкажіть це значення a .

6.39. За яких значень b рівняння:

1) $x^2 + 6x - 2b = 0$ не має коренів;

2) $bx^2 - 4x - 1 = 0$ має два різних корені?

6.40. За яких значень a рівняння:

1) $x^2 + 8x - 4a = 0$ має два різних корені;

2) $ax^2 - 6x + 1 = 0$ не має коренів?

6.41. Два натуральних числа відносяться як $2 : 5$, а їх сума менша від числа 171. Якого найбільшого значення може набувати менше із цих чисел?

6.42. Два натуральних числа відносяться як $3 : 2$, а їх сума більша за 83. Якого найменшого значення може набувати більше із цих чисел?

6.43. Зал для хореографії має площу 510 м^2 . Третину зали пофарбовано у жовтий колір, а решту потрібно пофарбувати у блакитний. Витрати фарби становлять 120 г/м^2 , а банка фарби має масу 1 кг. Яку найменшу кількість банок із блакитною фарбою потрібно купити, щоб виконати таке завдання?



6.44. Резервуар місткістю 1 м^3 на три чверті заповнено водою. Яку найбільшу цілу кількість відер води можна долити в цей резервуар, якщо відро містить 12 л?



6.45. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a :

1) $ax > 3$;

2) $ax \geq 0$;

3) $ax < 0$;

4) $-ax < 5$.



Вправи для повторення

6.46. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8})$;

2) $\sqrt{5^2 \cdot 2^4}$;

3) $(\sqrt{10} - \sqrt{7})(\sqrt{10} + \sqrt{7})$.

6.47. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = 8, \\ 2x - y = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3y - x = 1, \\ 2x + 5y = 20. \end{cases}$$

6.48. Туристка пропливла 5 км на моторному човні проти течії річки, а назад повернулася на плоту. Знайдіть швидкість течії, якщо на плоту туристка пливла на 2 год довше, ніж на човні, а власна швидкість човна дорівнює 12 км/год.

6.49. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{a^2 - 4a + 4} + \frac{1}{a^2 - 4} \right) : \frac{2}{(a - 2)^2} - \frac{a}{a + 2}$$

не залежить від значення змінної.

6.50. Побудуйте графік функції: $y = \begin{cases} 8, & \text{якщо } x < 1, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 4, \\ x - 2, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$



Життєва математика

6.51. Родина із чотирьох осіб планує подорож із Києва до Львова або поїздом, або на власному авто. Квиток на поїзд на одну особу коштує 600 грн у вагоні-купе. Автомобіль витрачає 8 літрів пального на 100 кілометрів шляху, відстань по шосе між містами дорівнює 540 км, а ціна пального становить 55 грн за літр. Скільки коштуватиме родині найдешевший варіант такої подорожі?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

6.52. Знайдіть перетин проміжків:

$$\begin{array}{ll} 1) (-\infty; 5] \text{ і } [3; +\infty); & 2) (-\infty; 3] \text{ і } [5; +\infty); \\ 3) (-\infty; 3) \text{ і } (-\infty; 5]; & 4) [3; +\infty) \text{ і } (5; +\infty). \end{array}$$

6.53. Укажіть три значення x , які одночасно є розв'язками кожної з двох нерівностей:

$$\begin{array}{ll} 1) x \leq 2 \text{ і } x \geq -3; & 2) x > -5 \text{ і } x > 7; \\ 3) x < 0 \text{ і } x \geq -7; & 4) x \leq 2 \text{ і } x \leq 4. \end{array}$$



Цікаві задачі – поміркуй одначе

6.54. У чемпіонаті з баскетболу взяли участь 6 команд, кожна з яких зіграла по 4 зустрічі з кожною командою-учасницею. Нічийх у баскетболі не буває. Відомо, що п'ять команд мали відповідно 80 %, 60 %, 55 %, 40 % та 35 % перемог (від своєї загальної кількості ігор). Яке місце посіла шоста команда і який у неї відсоток перемог?

§ 7. Системи лінійних нерівностей з однією змінною, їх розв'язування

1. Поняття про систему лінійних нерівностей з однією змінною та її розв'язок

Розглянемо задачу. Велосипедистка за 2 год долає відстань, більшу ніж 24 км, а за 3 год – відстань, меншу ніж 39 км. Знайти швидкість велосипедистки.

Розв'яжемо її. Нехай швидкість велосипедистки дорівнює x км/год, тоді за 2 год вона долає $2x$ км, а за 3 год – $3x$ км. За умовою задачі $2x > 24$ і $3x < 39$.

Маємо знайти такі значення x , для яких буде правильною і нерівність $2x > 24$, і нерівність $3x < 39$, тобто знайдемо спільні розв'язки обох цих нерівностей. У такому разі кажуть, що потрібно *розв'язати систему нерівностей*, і об'єднують нерівності в систему:

$$\begin{cases} 2x > 24, \\ 3x < 39. \end{cases}$$

Оскільки обидві нерівності є лінійними, то маємо *систему лінійних нерівностей з однією змінною*.

Розв'язавши кожну з нерівностей системи, отримаємо: $\begin{cases} x > 12, \\ x < 13. \end{cases}$

Тобто значення x має задовольняти умову: $12 < x < 13$.

Отже, швидкість велосипедистки більша за 12 км/год, але менша від 13 км/год.

Число 12,6 задовольняє кожну з нерівностей системи

$$\begin{cases} 2x > 24, \\ 3x < 39. \end{cases}$$

Справді, кожна з нерівностей $2 \cdot 12,6 > 24$ та $3 \cdot 12,6 < 39$ є правильною числовою нерівністю. У такому разі кажуть, що число 12,6 є розв'язком цієї системи нерівностей.

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, за якого правильною є кожна з нерівностей системи.

Розв'язати систему – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

2. Розв'язування систем лінійних нерівностей з однією змінною

Щоб розв'язати систему нерівностей, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

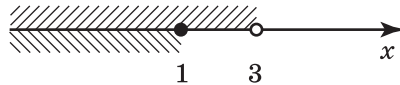
- 1) розв'язати кожну з нерівностей системи;
- 2) зобразити множину розв'язків кожної з нерівностей на координатній прямій;
- 3) знайти перетин цих множин, який і буде множиною розв'язків системи;
- 4) записати відповідь.

Приклад 1. Розв'язати систему нерівностей:
$$\begin{cases} 3x + 2 < 11, \\ 4x - 5 \leq -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Поступово замінюючи кожну з нерівностей системи її рівносильною простішою, матимемо:

$$\begin{cases} 3x + 2 < 11, \\ 4x - 5 \leq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < 9, \\ 4x \leq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Позначимо на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність $x < 3$, і множину чисел, які задовольняють нерівність $x \leq 1$ (мал. 7.1). Множиною розв'язків системи є перетин цих множин, тобто проміжок $(-\infty; 1]$.



Мал. 7.1

Відповідь: $(-\infty; 1]$.

Відповідь до системи можна записати й так: $x \leq 1$.

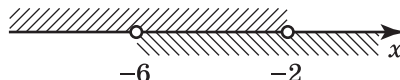
Приклад 2. Знайти всі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 - x(x + 4) > 5, \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{3} > -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо всі розв'язки системи:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x > 5, \\ 3x + 2x > -30; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x > 4, \\ 5x > -30; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ x > -6. \end{cases}$$

Маємо, що розв'язком системи є проміжок $(-6; -2)$ (мал. 7.2).



Мал. 7.2

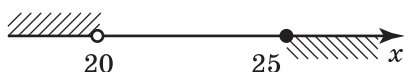
Тепер знайдемо всі цілі числа, що належать цьому проміжку. Ними будуть -5 ; -4 ; -3 . Отже, цілими розв'язками системи є числа -5 ; -4 ; -3 .

Відповідь: -5 ; -4 ; -3 .

Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} 0,2x - 5 \geq 0, \\ 0,3x - 6 < 0. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 0,2x - 5 \geq 0, \\ 0,3x - 6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,2x \geq 5, \\ 0,3x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 25, \\ x < 20. \end{cases}$

Зобразивши отримані розв'язки нерівностей системи на координатній прямій (мал. 7.3), бачимо, що спільних розв'язків вони не мають, тобто перетин проміжків є порожньою множиною. Отже, система розв'язків не має.



Мал. 7.3

Відповідь: розв'язків немає.

4. Розв'язування подвійних нерівностей

Розглянемо способи розв'язування подвійних нерівностей.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $5 < 2x - 7 \leq 9$.

Розв'язання. Перепишемо подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} 2x - 7 > 5, \\ 2x - 7 \leq 9. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} 2x > 12, \\ 2x \leq 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6, \\ x \leq 8; \end{cases} \quad \text{отже, } 6 < x \leq 8, \text{ тобто } x \in (6; 8].$$

Відповідь: $(6; 8]$.

Розв'язання можна подати і в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} 5 < 2x - 7 \leq 9 & \quad | + 7 \\ 12 < 2x \leq 16 & \quad | : 2 \\ 6 < x \leq 8. \end{aligned}$$

Відповідь можна записати ще й так: $6 < x \leq 8$.



Наведіть приклад системи лінійних нерівностей з однією змінною. Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною? Що означає розв'язати систему нерівностей з однією змінною?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 7.1. (Усно.) Чи є числа -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 розв'язками системи:

$$1) \begin{cases} x < 2, \\ x < 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 3, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq -2, \\ x > 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 7, \\ x > 8? \end{cases}$$

7.2. (Усно.) Чи є число 2 розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 2x > 3, \\ x < 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \geq 2, \\ 3x < 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 0, \\ 3x \geq 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x \geq -9, \\ 5x < 11? \end{cases}$$

7.3. Чи є число -1 розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ x < 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \leq 0, \\ x > -2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < -1, \\ x > 3? \end{cases}$$

2 7.4. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 4, \\ x > 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 4, \\ x < 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 4, \\ x < 8; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 4, \\ x > 8. \end{cases}$$

7.5. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 3, \\ x > 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 3, \\ x < 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 3, \\ x < 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 3, \\ x > 5. \end{cases}$$

7.6. Знайдіть розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} 3x > 6, \\ -4x > -12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x \leq 21, \\ -3x \geq -6; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 0,2x \geq 1, \\ 0,5x < 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{4}x < 2, \\ \frac{1}{3}x \leq 5. \end{cases}$$

7.7. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 5x < 15, \\ -4x < 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x < -5, \\ -7x > -28; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 0,1x > 3, \\ 0,2x \leq 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{3}x \leq 2, \\ \frac{1}{8}x < 5. \end{cases}$$

7.8. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x - 3 > 1, \\ x - 6 < 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 7 < -2, \\ x - 2 > 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + 2 \leq -7, \\ -2x \geq -14. \end{cases}$$

7.9. Розв'яжіть систему нерівностей та вкажіть два числа, що є її розв'язками:

$$1) \begin{cases} 3x + 1 > 5x, \\ 5,2 - 2x < 0,6x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1,5x + 1 > 3x - 2, \\ x - 2 < 4 - 2x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 9 - x < 6x + 2, \\ x + 8 < 11; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 4(x + 2) < 5x, \\ x - 3 > 4,2. \end{cases}$$

7.10. Розв'яжіть систему нерівностей та вкажіть два числа, що є її розв'язками:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x + 4 > 3x, \\ 1,4 - 0,2x > 0,5x; \end{cases} & 2) \begin{cases} 6x - 1 < 7x + 2, \\ x + 1,8 > 2; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 1,5x - 1 > 6,5x - 2, \\ x + 6 > 2 - 3x; \end{cases} & 4) \begin{cases} 3(x + 2) < 4x, \\ x - 2,7 > 3,3. \end{cases} \end{array}$$

7.11. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) 3 < 3x \leq 9; & 2) -1 \leq \frac{x}{2} \leq 4; \\ 3) 0 \leq x - 1 \leq 5; & 4) 11 < x + 7 < 13. \end{array}$$

7.12. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) 2 \leq 2x < 10; & 2) -2 < \frac{x}{5} \leq 1; \\ 3) 10 < x - 5 < 12; & 4) 7 \leq x + 1 \leq 8. \end{array}$$

7.13. Знайдіть усі цілі розв'язки подвійної нерівності:

$$1) -2 \leq 2x < 4; \quad 2) 1,3 < x - 2 \leq 2,7.$$

3 7.14. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2,6 + x > 5(x + 1) - 6, \\ 2(x - 0,4) - x < 3x - 0,5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1,2(3 - x) - 6 > 0,8x, \\ -2(1 - 4x) - x < 5x. \end{cases}$$

7.15. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2(x + 3) - 4 < x - 8, \\ 6x + 1 > 3(x + 1); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -(x - 2) - 3(x - 1) < 2x, \\ 12 - (x - 3) \leq 5x + 5. \end{cases}$$

7.16. За яких значень x кожна з функцій $y = 0,3x - 1,8$ і $y = 0,2x - 1,2$ набуває невід'ємних значень?

7.17. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{5} > \frac{x + 1}{6}, \\ 2(x + 1) + 5 > 3(x - 5) + 14; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{5x + 3}{2} \leq 3x + 1, \\ (x + 1)x - 2 \leq x(x - 3) + 6. \end{cases}$$

7.18. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{2} > \frac{x - 3}{3}, \\ 3(x + 1) - 5 < 2(x - 3) + 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{3x - 1}{4} \leq x - 2, \\ (x - 2)x - 5 \geq x(x + 1) - 29. \end{cases}$$

7.19. Знайдіть суму всіх цілих розв'язків системи нерівностей



$$\begin{cases} x(x - 2) > x^2 - 45, \\ \frac{x}{3} < \frac{2x}{5} - \frac{6}{5}, \end{cases}$$

відтак дізнається, скільки медалей здобула команда України на Паралімпійських іграх 2024 року в Парижі.

7.20. Знайдіть найменше ціле число, що є розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 5(2x - 1) + 3 > 2(x - 1) + 7x, \\ 6(1 - x) + 2 \geq 3(x + 1) - 7x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3x + 2}{2} \geq 2(2x + 1), \\ (x + 5)(x - 3) \geq x(x - 1) - 21. \end{cases}$$

7.21. Знайдіть найбільше ціле число, що є розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 3(2x - 2) + 7 > 4(x - 1) - 13, \\ 5(1 - x) + 3 \geq 2(x + 1) - 2x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{5x + 1}{3} \geq 4(2x + 1), \\ (x + 2)(x - 5) \geq x(x + 1) - 10. \end{cases}$$

7.22. Український борець греко-римського стилю  Жан Беленюк має унікальну колекцію нагород з міжнародних турнірів. Розв'яжіть систему

нерівностей $\begin{cases} x(x - 1) - (x - 1)^2 > 3 - x, \\ (2x - 9)(2x + 9) < (2x - 1)^2. \end{cases}$ Знайдіть

добуток $101x_0$, де x_0 – найбільший цілий розв'язок системи нерівностей, відтак дізнається, якого року Жан здобув свою найвищу нагороду – став олімпійським чемпіоном.



7.23. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі:

$$1) \sqrt{2x + 7} + \sqrt{1 - 5x}; \quad 2) \sqrt{0,3x - 6} + \frac{1}{\sqrt{4x - 8}}.$$

7.24. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{10 - 2x} + \sqrt{3x + 18}; \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{2x - 0,8}} + \sqrt{3x + 0,06}.$$

7.25. Знайдіть множину розв'язків подвійної нерівності:

$$1) 0 < \frac{x}{3} - 1 \leq 2; \quad 2) -2 < -\frac{x}{2} + 3 < 4;$$

$$3) -5 < \frac{2x + 1}{3} < -1; \quad 4) 0 \leq \frac{1 - 2x}{3} \leq 8.$$

7.26. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$1) -1 < \frac{x}{3} + 1 \leq 0; \quad 2) 3 < -\frac{x}{5} + 1 \leq 7;$$

$$3) 4 \leq \frac{3x - 1}{2} \leq 5; \quad 4) 2 < \frac{1 - 5x}{4} < 9.$$

4 7.27. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} 2(x-1) - 3(x-2) + x < 0, \\ 1,3x(x-2) - 0,4 < x(1,3x-3); \end{cases} \\
 2) & \begin{cases} 2,5x - 0,5(8-x) - 1,6 < x, \\ x + 2,1 > 1,5(2x-1) - 2x; \end{cases} \\
 3) & \begin{cases} 2-x > 2x(x-3) - x(2x-5), \\ 5-10x < 3x(2x-4) - x(6x-2); \end{cases} \\
 4) & \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 > \frac{5x}{6}, \\ x - \frac{7x}{8} < \frac{x}{8} + 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

7.28. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} 4(x-3) - (x+5) > 3(x-2), \\ 2(x+3) - 5(x-6) > 4(x-2); \end{cases} \\
 2) & \begin{cases} 6(x-1) - 3 < 2(3x-4), \\ x(x-2) > (x+3)(x-3) - 11. \end{cases}
 \end{aligned}$$

7.29. Знайдіть область визначення функції:

$$\begin{aligned}
 1) & y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{7-x}} + \frac{1}{x^2-25}; \\
 2) & y = \sqrt{2x-8} + \frac{x}{\sqrt{10-x}} + \frac{7}{\sqrt{0,2x-1}}.
 \end{aligned}$$

7.30. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі:

$$\begin{aligned}
 1) & \sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{6-x}} + \frac{1}{x^2-16}; \\
 2) & \sqrt{3x-6} + \frac{5}{\sqrt{8-x}} + \frac{x}{\sqrt{0,5x-1,5}}.
 \end{aligned}$$

7.31. Одна сторона трикутника дорівнює 4 см, а друга – 5 см. Якою завдовжки може бути третя сторона трикутника за умови, що його периметр менший від 15 см?

7.32. На одну машину навантажили 2 ящики з огірками по 24 кг кожен і 8 ящиків із помідорами. При цьому загальна маса була не більшою, ніж 260 кг. На другу машину навантажили 3 ящики із цибулею по 18 кг і 7 ящиків із помідорами – таких самих, як на першу машину. При цьому загальна маса була не меншою, ніж 230 кг.



- 1) Складіть систему нерівностей для визначення маси одного ящика з помідорами, позначивши її через x (у кг).
- 2) Знайдіть x , вважаючи, що x дорівнює цілому числу кілограмів.

7.33. Аліса купила записник за 80 грн і 5 ручок, заплативши за всю покупку менше, ніж 114 грн. Аліна купила скетчбук (*sketchbook*) для малювання за 72 грн і 4 такі самі ручки, як і Аліса, заплативши за всю покупку більше, ніж 92 грн.



1) Складіть систему нерівностей для визначення ціни однієї ручки, позначивши її через x (у грн).

2) Знайдіть x , вважаючи, що x дорівнює цілому числу гривень.



7.34. За яких значень a обидва корені рівняння

$$x^2 - (a + 1)x - (a + 2a^2) = 0$$

менші від числа 1?

7.35. За яких значень a обидва корені рівняння

$$x^2 - (2a + 1)x + (a^2 + a) = 0$$

більші за число 3?



Вправи для повторення

7.36. Відомо, що $a > b$. Порівняйте:

- 1) $a - 2$ і $b - 2$; 2) $2,1a$ і $2,1b$;
3) $-a$ і $-b$; 4) $-8a$ і $-8b$.

7.37. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $-5x \geq 15$; 2) $7 - x < 11 - 3x$.

7.38. Доведіть нерівність $x^2 - 8x + 19 > 0$.

7.39. Дано: $10 < x < 20$; $2 < y < 5$. Оцініть значення виразу:

- 1) $2x - y$; 2) $\frac{x}{y}$.

7.40. За яких значень m рівняння $mx^2 + 4x - 8 = 0$ не має розв'язків?



Життєва математика

7.41. Яринка та Яся разом можуть прополоти грядку за 24 хвилини, а Яся самостійно – за 40 хвилин. За скільки хвилин самостійно може прополоти цю грядку Яринка?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

7.42. (Національна олімпіада США, 1979 р.) Розв'яжіть рівняння $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_{14}^4 = 1599$ у цілих числах.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§ 1–7)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

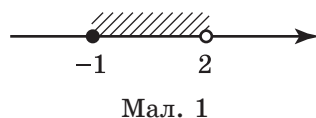


1. Яке із чисел є розв'язком нерівності $3x > 7$?

- А. -2 Б. 0 В. 5 Г. 2

2. Укажіть проміжок, зображений на малюнку 1.

- А. $[-1; 2]$ Б. $[-1; 2)$
В. $(-1; 2)$ Г. $(-1; 2]$



3. Яка з нерівностей є лінійною з однією змінною?

- А. $3x^2 > 7$ Б. $2 + 1 > 0$ В. $\frac{1}{2x+7} < 3$ Г. $-3x > 8$

4. Відомо, що $a > b$. Укажіть правильну нерівність.

- А. $\frac{a}{7} < \frac{b}{7}$ Б. $a + 3 < b + 3$ В. $-a > -b$ Г. $-2a < -2b$

5. Розв'яжіть нерівність $-3x \leq -15$.

- А. $[5; +\infty)$ Б. $(-\infty; 5]$ В. $[-5; +\infty)$ Г. $(-\infty; -5)$

6. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x - 2 < 7, \\ 2x \geq -4. \end{cases}$

- А. $[-2; 3)$ Б. $[-2; 9)$ В. $(-\infty; -2]$ Г. $(9; +\infty)$

7. Укажіть вираз, що набуває додатних значень за будь-якого значення x .

- А. $-x^2$ Б. x^2 В. $x^2 + 2$ Г. $(x + 2)^2$

8. Відомо, що $2 < a < 5$ і $1 < b < 3$. Оцініть значення виразу $4a - b$.

- А. $5 < 4a - b < 19$ Б. $7 < 4a - b < 17$
В. $-1 < 4a - b < 4$ Г. $9 < 4a + b < 23$

9. Укажіть число, що не належить проміжку $[2, 5; 3, 6)$.

- А. $\sqrt{7}$ Б. $\sqrt{14}$ В. $2\frac{1}{2}$ Г. $\sqrt{11}$

10. Відомо, що $1 < x < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{30}{5-2x}$.

- А. $3\frac{1}{3} < \frac{30}{5-2x} < 4\frac{2}{7}$ Б. $\frac{30}{5-2x} > 0$
В. $15 < \frac{30}{5-2x} < 30$ Г. $10 < \frac{30}{5-2x} < 30$

11. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{8-x}} + \frac{1}{x^2-9}.$$

- А. $[2; 8)$ Б. $[2; 3) \cup (3; 8]$ В. $[2; 3) \cup (3; 8)$ Г. $(2; 3) \cup (3; 8)$

12. За яких значень c рівняння $2x^2 + 4x - c = 0$ не має розв'язків?

- А. Таких значень c не існує Б. $c < -2$
В. $c \leq -2$ Г. $c > -2$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною всіх її розв'язків (А–Г).

Нерівність

Множина всіх розв'язків нерівності

1. $x(x + 2) - x^2 > 4x - 8$

А. $(-\infty; +\infty)$

2. $\frac{x+2}{6} - \frac{x}{4} < 0$

Б. $(-\infty; 4)$

В. $(-\infty; -4)$

3. $2(x + 3) - x > x$

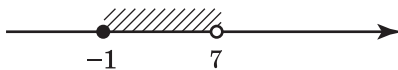
Г. $(4; +\infty)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–7

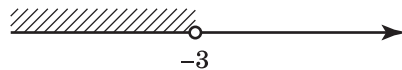
1. Чи є розв'язком нерівності $x + 2 > 7$ число:

- 1) 6; 2) -2; 3) 0; 4) 10?

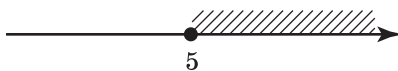
2. Запишіть проміжки, зображені на малюнках 1–4:



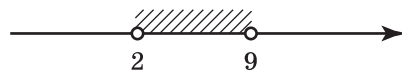
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

3. Які з нерівностей є лінійними з однією змінною:

- 1) $-2x^2 > 6$; 2) $-2x > 6$; 3) $2 + 3 < 6$; 4) $\frac{1}{-2x} > 6$?

4. Відомо, що $x > y$. Порівняйте:

- 1) $x + 2$ і $y + 2$; 2) $2x$ і $2y$;
3) $-x$ і $-y$; 4) $-4x$ і $-4y$.

5. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $-2x \geq 8$; 2) $3x - 4 > x + 8$.

6. Розв'яжіть систему нерівностей: $\begin{cases} x + 3 < 5, \\ 4x \geq -4. \end{cases}$

7. Дано: $5 < a < 10$ і $2 < b < 4$. Оцініть значення виразу:

- 1) $3a - b$; 2) $\frac{a}{b}$.

8. Доведіть нерівність: $a^2 + 6a + 10 > 0$.

- 4** 9. Знайдіть область визначення функції:

$$y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{7-x}} + \frac{1}{x^2-4}.$$

Додаткові завдання

- 4** 10. Доведіть нерівність $(a+1)(b+4)(a+b) \geq 16ab$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$.

11. За яких значень a рівняння $ax^2 - 2x - 8 = 0$ не має коренів?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

- 2** 1. Відомо, що $m < n$. Чи може різниця $m - n$ дорівнювати:

- 1) 2,7; 2) π ; 3) 0; 4) -3,8?

2. Доведіть нерівність:

- 1) $5(m-3) > 5m-16$; 2) $x(x+10)+2 > 10x$;
 3) $(a-7)(a+10) < (a+4)(a-1)$; 4) $p(p-6) < (p-3)^2$;
 5) $(m-2)^2 > -4m$; 6) $p+1 \leq \frac{(p+2)^2}{4}$.

- 3** 3. Які з нерівностей є правильними за будь-якого значення a :

- 1) $(2a+3)(2a-3) < 4a^2+2a$; 2) $(3a-2)(3a+2) < 49a^2+0,6$;
 3) $(3a-1)^2 > 3a(3a-2)$; 4) $7 > (3-a)(3+a)$?

4. Доведіть нерівність:

- 1) $(m+1)^2 \geq 4m$; 2) $(4b-1)^2 > -8b$;
 3) $\frac{a^2+1}{2} \geq a$; 4) $\frac{m}{m^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

5. Порівняйте число m з нулем, якщо:

- 1) $2m < 3m$; 2) $m > 5m$; 3) $-m < -3m$; 4) $-4m > -5m$.

- 4** 6. Доведіть нерівність:

- 1) $m^2 + n^2 - 2m - 4n + 5 \geq 0$; 2) $2x^2 - 10xy + 25y^2 \geq 0$.

7. Порівняйте вирази:

- 1) $a^3 - b^3$ і $ab(b-a)$, якщо $a \geq b$;
 2) $m^2 + n^2$ і $\frac{1}{2}$, якщо $m+n=1$.

8. Відстань від села до міста становить 20 км. Одна з велосипедисток проїхала із села в місто й повернулася назад зі сталою швидкістю. Друга велосипедистка їхала із села в місто зі швидкістю, на 1 км/год більшою за швидкість першої, а поверталася назад зі швидкістю, на 1 км/год меншою від швидкості першої. Котра з велосипедисток витратила менше часу на дорогу?

9. Порівняйте площу квадрата, сторона якого дорівнює 6 см, із площею довільного прямокутника, що має такий самий периметр, як у квадрата.

До § 2

- 1** 10. У яких нерівностях правильно перенесено доданок з однієї частини у другу:
 1) $m + 2 > 5$, 2) $p - 7 \leq 2$, 3) $9 > t - 7$, 4) $10 \leq a + 5$,
 $m > 5 + 2$; $p \leq 2 + 7$; $9 + 7 > t$; $10 - 5 \leq a$?
- 2** 11. Замініть «зірочку» знаком $>$ чи $<$ так, щоб твердження було правильним:
 1) якщо $p > -2$, то $-2 * p$; 2) якщо $2 < a$, $a < b$, то $2 * b$.
12. Порівняйте числа:
 1) $x + 5$ і $y + 5$, якщо $x < y$; 2) $m - 2$ і $p - 2$, якщо $p > m$;
 3) $-m$ і $-n$, якщо $m > n$; 4) $12a$ і $12b$, якщо $a \geq b$;
 5) $-3k$ і $-3p$, якщо $p < k$; 6) $\frac{c}{5}$ і $\frac{d}{5}$, якщо $d \geq c$.
- 3** 13. Відомо, що $a > b$. Розмістіть у порядку зростання числа: $a + 3$, $b - 3$, $a + 1$, a , $b - 1$, b .
14. Відомо, що $x > y > 0$. Порівняйте:
 1) $8x$ і $5y$; 2) $3x$ і y ; 3) $-3x$ і $-y$; 4) $-5x$ і $-2y$.
15. Оцініть значення виразу, якщо $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$:
 1) $-2\sqrt{3}$; 2) $3 + \sqrt{3}$; 3) $4 - 5\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$.
16. Відомо, що $a > 5$. Порівняйте з нулем значення виразу:
 1) $2a - 10$; 2) $35 - 7a$.
- 4** 17. Оцініть значення виразу $|x|$, якщо:
 1) $-3 < x < -1$; 2) $-7 < x < 1$.

До § 3

- 1** 18. Виконайте почленне додавання нерівностей:
 1) $x < 3$ і $y < -3$; 2) $a > 5$ і $b > 7$.
19. Виконайте почленне множення нерівностей:
 1) $m > 2$ і $n > 1$; 2) $0 < p < 3$ і $0 < q < 5$.
- 2** 20. Оцініть значення виразу:
 1) $ab + 2$, якщо $1 < a < 5$ і $2 < b < 7$;
 2) $p^2 - 3$, якщо $2 < p < 4$.
- 3** 21. Чи правильне твердження:
 1) якщо $x > 2$, то $x^2 > 4$; 2) якщо $x < 2$, то $x^2 < 4$;
 3) якщо $x > 2$, то $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$; 4) якщо $x < 2$, то $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$?

22. Оцініть площу S квадрата з периметром P см, якщо $36 < P < 40$.
23. Порівняйте, якщо можливо:
- 1) $3m + 2n$ і 12 , якщо $m > 3$, $n > 2$;
 - 2) $b - 3a$ і 0 , якщо $a > 8$, $b < 6$;
 - 3) $x - 3y$ і 1 , якщо $x < 8$, $y < 0$;
 - 4) $p - 4q$ і 9 , якщо $p < 8$, $q > 1$.
- 4** 24. Оцініть значення виразу:
- 1) $a^2 + 2a + 5$, якщо $0 < a < 1$;
 - 2) $x^2 - 4x$, якщо $1 < x < 2$;
 - 3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, якщо $10 < a < 20$, $5 < b < 10$;
 - 4) $\frac{1}{mn} - 7$, якщо $1 < m < 2$, $0,3 < n < 0,5$.
25. Порівняйте x та y , якщо $x > a^2 + b^2$, $y < 2ab$.
26. Оцініть площу S прямокутника з периметром P см і стороною a см, якщо $20 < P < 30$, $5 < a < 6$.
27. Доведіть нерівність:
- 1) $(x + 2y)\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$;
 - 2) $\left(\frac{1}{m^2} + pn\right)\left(\frac{4}{p^2} + mn\right)\left(\frac{9}{n^2} + pm\right) \geq 48$, якщо $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$.

До § 4

- 1** 28. Які із чисел -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є розв'язками нерівності:
- 1) $x < 1$; 2) $x \leq 1$; 3) $x > 1$; 4) $x \geq 1$?
- 2** 29. Запишіть три числа, які є розв'язками і нерівності $x \leq 5$, і нерівності $x > 3$.
30. Які із чисел -1 ; 0 ; 3 ; 5 ; 7 задовольняють нерівність:
- 1) $\frac{1}{x} + x > 2$; 2) $\sqrt{x + 2} < 3$?
- 3** 31. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності $1 < \frac{10}{x} \leq 5$.
- 4** 32. Які з розв'язків рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ є розв'язками нерівності $x^2 + 4x + 3 \leq 0$?

До § 5

- 1** 33. Запишіть будь-які три числа, що належать проміжку:
- 1) $(-4; 5)$; 2) $[-2; 7)$; 3) $[3; +\infty)$;
 - 4) $(-\infty; 7)$; 5) $[1; 17]$; 6) $(-\infty; -1)$;
 - 7) $(4; 9]$; 8) $(5; +\infty)$; 9) $[-10; -9]$.

- 2** 34. Знайдіть найменше і найбільше цілі числа, що належать проміжку:
 1) $(-7; 8)$; 2) $[-2; 3,8)$;
 3) $(-0,2; 4]$; 4) $(-2,99; 1,98)$.

3 35. Запишіть три числа проміжку $\left[-\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right]$.

36. Чи можна знайти найменше і найбільше числа, що належали б проміжку $[1,6; 1,8)$?

До § 6

- 1** 37. Розв'яжіть нерівність:
 1) $x - 3 \geq 0$; 2) $x + 5 < 0$; 3) $x + 2 > 0$; 4) $x - 6 < 0$.

- 2** 38. Розв'яжіть нерівність і вкажіть два будь-яких цілих числа, що є її розв'язками:
 1) $-4x > 12$; 2) $3x < 0$; 3) $-5x \leq -15$; 4) $2x \geq -7$.

39. Знайдіть множину розв'язків нерівності:
 1) $1 + 8x < 9$; 2) $4x - 7 > 0$;
 3) $2 + 6x \leq 5 + 7x$; 4) $4x + 7 \geq 6x + 1$;
 5) $3x \geq 5x + 1$; 6) $4 + 11x < 5 + 12x$.

40. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2x}{5} < 1$; 2) $\frac{x}{7} \geq 0$; 3) $\frac{4x}{3} > 2$;
 4) $\frac{5x}{8} \leq 0$; 5) $\frac{x+2}{20} \geq 1$; 6) $\frac{3-x}{2} \leq 1$.

41. За яких значень x значення виразу $2x + 3$ менше від відповідного значення виразу $4x - 7$?

42. За яких значень y сума дробів $\frac{y}{2}$ і $\frac{y}{3}$ більша за 10?

- 3** 43. Розв'яжіть нерівність:
 1) $6x^2 \geq 48 + 3x(2x + 4)$; 2) $(x + 6)(3x - 8) > 20 + 3(x^2 - 1)$;
 3) $\frac{x-2}{4} - \frac{x+1}{3} \leq \frac{5x}{12}$; 4) $x - 1 < \frac{3x-1}{3} + \frac{x+1}{2}$.

44. Знайдіть найменше ціле значення x , за якого значення дробу $\frac{3x+5}{2}$ менше від значення дробу $\frac{5x-7}{3}$.

45. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x+1) - 8}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x-5}}{x-7}$.

46. Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює 6 см. Якою має бути довжина другої сторони, щоб периметр прямокутника був більшим за 30 см?

47. Спортсмен-паралімпієць зробив 10 пострілів по мішені. За кожен влучний постріл йому нараховують 3 очки, а в разі промаху віднімають від результату 1 очко. Відомо, що паралімпієць набрав більше, ніж 17 очок. Якою може бути кількість його влучних пострілів?



48. За яких значень a рівняння:
- 1) $ax^2 + 2(a + 1)x + (a + 3) = 0$ не має коренів;
 - 2) $ax^2 - (2a + 1)x + (a + 2) = 0$ має два різних корені?
49. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a :
- 1) $5 + ax \geq a - 3x$; 2) $3(a - x) < 9 - ax$;
 - 3) $(a + 1)x > a^2 - 1$; 4) $(a^2 - 4)x \leq a - 2$.

До § 7

50. Чи є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 2x > 4, \\ 3x < 12 \end{cases}$ число:

1) 3; 2) 2,7; 3) 1,7; 4) -1,8; 5) 3,9; 6) 4?

51. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x + 5 \geq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 7 < 0, \\ x + 8 > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x \geq -4, \\ 2x < 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{8}x > 1, \\ \frac{1}{7}x \leq 1. \end{cases}$

52. Розв'яжіть систему нерівностей та вкажіть три числа, які є її розв'язками:

1) $\begin{cases} 3x + 2 > x + 4, \\ \frac{x}{3} < -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 2 \geq x - 1, \\ 3x - 1 < 1 - 2x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{2x - 1}{2} \leq 5, \\ \frac{x}{7} < 1. \end{cases}$

53. Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $4 \leq 8x < 24$; 2) $1 \leq \frac{x}{10} < 2$;

3) $0,1 < x + 1 < 1,1$; 4) $7,9 < x - 2 < 8,1$.

54. Знайдіть натуральні розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} \frac{2x + 3}{5} > \frac{3x + 4}{8}, \\ 3 - 2x > 5(x - 5); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(x - 1) > (x + 1)^2, \\ \frac{x}{4} + \frac{x}{3} > -7. \end{cases}$

55. За яких значень x :

1) значення двочлена $2x - 5$ належить проміжку $[-4; 2]$;

2) значення дробу $\frac{1 - 3x}{2}$ належить проміжку $[0; 4]$?

56. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 4x - 1 < 0, \\ -2 \leq 2x \leq 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -9 \leq -x \leq -5, \\ 5 \leq \frac{2x - 1}{3} \leq 10. \end{cases}$$

57. Сума натурального числа та подвоєного наступного за ним числа більша за 57. Сума цього самого числа і потроєного попереднього числа менша від 74. Знайдіть це натуральне число.

58. Знайдіть усі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 7, \\ x > 8, \\ x \leq 11; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x > 8, \\ 3x < 36, \\ -x < -5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - 7 > 0, \\ -x > -8, \\ 2x - 15 \geq 0. \end{cases}$$

4 59. За яких значень a система нерівностей має розв'язки:

$$1) \begin{cases} 3x > 15, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + a \geq 0, \\ 3x \leq -6? \end{cases}$$

60. Кількість одиниць деякого двоцифрового числа на 1 більша за кількість його десятків. Знайдіть це число, якщо воно більше за 45, але менше від 66.

***** 61. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 2, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 6, \\ x > a. \end{cases}$$

62. Знайдіть значення a , за яких один із коренів рівняння

$$x^2 + x + (a - a^2) = 0$$

менший від нуля, а другий – більший за 0,5.

63. Знайдіть, за яких значень a обидва корені квадратного рівняння $6x^2 + (5a + 2)x + (a^2 + a) = 0$ належать проміжку $[-4; 0]$.



Головне в розділі 1

ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ

$a > b$, якщо $a - b > 0$;

$a < b$, якщо $a - b < 0$;

$a = b$, якщо $a - b = 0$.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Властивість 1. Якщо $a > b$, то $b < a$;
якщо $a < b$, то $b > a$.

Властивість 2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$;
якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Властивість 3. Якщо $a > b$ і p – будь-яке число,
то $a + p > b + p$.

Наслідок. Якщо $a > b + m$, то $a - m > b$.

Якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності у другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Властивість 4. Якщо $a > b$ і $p > 0$, то $ap > bp$;
якщо $a > b$ і $p < 0$, то $ap < bp$.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність;

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Наслідок. Якщо $ab > 0$, тобто a і b – числа одного знака і $a > b$,
то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Властивість 5 (про почленне додавання нерівностей). Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Властивість 6 (про почленне множення нерівностей). Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac < bd$.

Наслідок. Якщо a і b – додатні числа і $a < b$, то $a^n < b^n$, де n – натуральне число.

НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННИМИ

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

ЧИСЛОВІ ПРОМІЖКИ

Перетином числових проміжків називають множину, що містить усі числа, які належать кожному із цих проміжків.

Об'єднанням числових проміжків називають множину, що складається з усіх чисел, які належать хоча б одному із цих проміжків.

ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. РІВНОСИЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Нерівності вигляду $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, де x – змінна, а a і b – деякі числа, називають **лінійними нерівностями з однією змінною**.

Нерівності, що мають одні й ті самі розв'язки, називають **рівносильними**. Нерівності, що не мають розв'язків, також є **рівносильними**.

Для нерівностей зі змінними справджуються **властивості**, подібні до тих, що справджуються і для рівнянь:

- 1) якщо в будь-якій частині нерівності розкрити дужки або звести подібні доданки, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 2) якщо в нерівності перенести доданок з однієї її частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній; якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Нерівності вигляду $0x > b$, $0x \geq b$, $0x < b$, $0x \leq b$ або не мають розв'язків, або їх розв'язком є будь-яке число.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, за якого правильною є кожна з нерівностей системи.

Розв'язати систему нерівностей – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕРІВНОСТЕЙ

Щоб розв'язати систему нерівностей, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) розв'язати кожную з нерівностей системи;
- 2) зобразити множину розв'язків кожною з нерівностей на координатній прямій;
- 3) знайти перетин цих множин, який і буде множиною розв'язків системи;
- 4) записати відповідь.

Фіскальна математика¹

Державний бюджет України – це план формування та використання фінансових ресурсів для забезпечення завдань і функцій держави, які вона здійснює через органи державної влади та місцевого самоврядування протягом бюджетного періоду. Основним джерелом формування держбюджету, зокрема наповнення його *дохідної частини*, є податки.

Податки – це обов’язкові платежі, які мають сплачувати фізичні та юридичні особи до державного бюджету. Розмір і терміни сплати податків установлюються законодавчо та періодично переглядаються. Розмір податкових нарахувань (*ставка податку*) може встановлюватися і у відсотках, і в абсолютній сумі. Найбільш вагомими для дохідної частини бюджету є *податок на додану вартість* (ПДВ) та *єдиний соціальний внесок* (ЄСВ). ПДВ сплачує покупець за ставкою 20 % від вартості товару (послуги), але облік та перерахування ПДВ до державного бюджету здійснює продавець (податковий агент). ЄСВ стягується з роботодавців за ставкою 22 % від фонду заробітної плати². Дохідна частина державного бюджету залежить також і від інших видів податку, зокрема податку на доходи фізичних осіб, акцизного податку, мита, податку на прибуток підприємств, транспортного та земельного податків тощо (знайдіть детальну інформацію про різні види податків в Україні самостійно).

Спробуйте самостійно розв’язати кілька задач, пов’язаних з оподаткуванням.

1. В Україні 2015 року оподаткуванню підлягали 15 888 автомобілів, а 2016 року – 138 249 автомобілів. Ставка транспортного податку на кожне авто становила 25 000 грн на рік. На скільки більше надходжень за рахунок транспортного податку отримав державний бюджет України 2016 року порівняно з 2015 роком?

2. Ставка податку на землю 2016 року становила 3,66 грн за 1 м², але в деяких населених пунктах цей податок може нараховуватися з певним коефіцієнтом, наприклад у курортній місцевості Карпат, уздовж узбереж Чорного й Азовського морів, у густонаселених обласних центрах тощо. На скільки більшим буде розмір земельного податку в Києві, ніж в Одесі, за земельну ділянку площею 250 м², якщо в Києві й Одесі для ставки земельного податку діють коефіцієнти підвищення: коефіцієнт 3 – для Києва і коефіцієнт 2 – для Одеси?

3. За використаний у садовому будиночку газ родина Василенків сплатила суму, яку зазначено в договорі з підприємством, що надає послуги з газопостачання. Розмір ПДВ при цьому склав 670 грн. Яку суму (без ПДВ) зазначено в договорі на газопостачання для садового будиночка цієї родини?

¹ Та, що має стосунок до податкової політики держави.

² Ставки податків указано станом на 2025 рік.

4. Родина Бойчуків за листопад 2025 року отримала від «Укртелекому» рахунок у розмірі 480 грн. Скільки коштів буде перераховано як ПДВ після сплати родинною цього рахунку?

5. Військовий збір 2025 року склав 5 % від заробітної плати. Усі троє членів деякої родини працюють і отримують заробітну плату. Заробітна плата батька становить 14 000 грн, матері – 15 000 грн, а сина – 11 000 грн.

1) Яку загальну суму військового збору сплатять члени цієї родини за місяць?

2) Яку загальну суму військового збору сплатить родина протягом усього 2025 року, якщо зарплата усіх членів родини за цей період не змінювалася?

6. Сплативши 18 % податку на доходи фізичних осіб та 5 % військового збору від своєї заробітної плати, охоронець супермаркету отримав 9240 грн.

1) Який розмір заробітної плати в охоронця?

2) Скільки ЄСВ на місяць платить власник цього супермаркету до державного бюджету за охоронців, якщо в нього працюють три охоронці та начальник охорони, заробітна плата якого в 1,5 раза більша за заробітну плату охоронця?

РОЗДІЛ 2

КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитесь з квадратичною функцією;
- дізнаєтесь, що таке нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції; найбільше та найменше значення функції;
- навчитесь виконувати перетворення графіків функції; будувати графік квадратичної функції; розв'язувати квадратні нерівності та системи двох рівнянь другого степеня з двома змінними.

§ 8. Функція. Область визначення, область значень і графік функції

1. Означення функції



У 7 класі ви почали вивчати одне з найважливіших математичних понять – поняття функції. Нагадаємо, що

функцією (або **функціональною залежністю**) називають таку залежність, за якої кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає єдине значення залежної змінної.

Незалежну змінну ще називають **аргументом**, а про залежну змінну кажуть, що вона є **функцією** від цього аргументу (або просто функцією). Наприклад, якщо $y = x^2 + 2x - 3$, то y є функцією від аргументу x .

Залежність змінної y від змінної x записують так: $y = f(x)$ (читають: « y дорівнює f від x »). Символом $f(x)$ позначають значення функції для значення аргументу, що дорівнює x .

Приклад 1. Розглянемо функцію $y = 5x + 2$. Можна записати, що

- $f(x) = 5x + 2$. Знайдемо, наприклад, значення функції для $x = -3$, тобто знайдемо $f(-3)$. Маємо: $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 2 = -13$. Знайдемо значення цієї функції в точках, що дорівнюють 0; a ; $b - 1$. Матимемо:
- $f(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2$;
- $f(a) = 5a + 2$;
- $f(b - 1) = 5(b - 1) + 2 = 5b - 3$.

Зауважимо, що в запису вигляду $y = f(x)$ замість f можна використовувати й інші букви: g , φ , ψ тощо.

2. Область визначення та область значень функції. Найбільше і найменше значення функції

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють **область значень функції**.

Найбільшим значенням функції називають найбільше число з області значень функції, а **найменшим значенням функції** – відповідно найменше таке число.

Область визначення функції $y = f(x)$ зазвичай позначають через $D(f)$, а область значень – через $E(f)$.

Якщо функцію задано формулою і не зазначено її область визначення, то вважатимемо, що ця область складається з усіх значень аргументу, за яких формула функції має зміст.

Приклад 2. Знайти область визначення функції:

$$1) f(x) = x^2 - 2x + 3; \quad 2) g(x) = \frac{1}{x - 8}.$$

Розв'язання. 1) Вираз $x^2 - 2x + 3$ має зміст за будь-якого значення x , тому областю визначення функції $f(x) = x^2 - 2x + 3$ є множина всіх чисел, тобто проміжок $(-\infty; +\infty)$.

2) Вираз $\frac{1}{x - 8}$ має зміст за будь-якого значення x , крім числа 8,

тому областю визначення функції $g(x) = \frac{1}{x - 8}$ є множина $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь: 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь можна записати ще й так:

$$1) D(f) = (-\infty; +\infty); \quad 2) D(g) = (-\infty; 8) \cup (8; +\infty).$$

Приклад 3. Знайти область визначення та область значень функції:

$$1) f(x) = 2 - x^2; \quad 2) g(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}.$$

Розв'язання. 1) Областю визначення функції $f(x) = 2 - x^2$ є проміжок $(-\infty; +\infty)$. Щоб знайти область значень функції, оцінимо вираз $2 - x^2$ для всіх значень x . Маємо:

$$x^2 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$-x^2 \leq 0 \quad | + 2$$

$$2 - x^2 \leq 2.$$

Отже, $f(x) \leq 2$ за будь-якого значення x , тобто областю значень функції $f(x) = 2 - x^2$ є проміжок $(-\infty; 2]$.

- 2) Область визначення функції $g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ складається з таких значень x , для яких вирази $x-2$ і $2-x$ одночасно набувають невід'ємних значень. Отже, щоб знайти ці значення, треба розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 2-x \geq 0; \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Очевидно, що розв'язком системи є $x = 2$. Отже, область визначення функції $g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ містить лише число 2. Щоб знайти область значень цієї функції, достатньо обчислити $g(2)$. Маємо: $g(2) = \sqrt{2-2} + \sqrt{2-2} = 0$.

Відповідь: 1) область визначення: $(-\infty; +\infty)$, область значень: $(-\infty; 2]$; 2) область визначення: число 2, область значень: число 0.

Відповідь можна записати й коротше:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 2]$;

2) $D(g) = \{2\}$; $E(g) = \{0\}$.

Зауважимо, що найбільшим значенням функції $f(x) = 2 - x^2$ є число 2, а найменшого значення в цієї функції не існує.

3. Графік функції



Нагадаємо, що

графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Приклад 4. Побудувати графік функції $f(x) = |x|$. За графіком знайти найбільше і найменше значення функції.

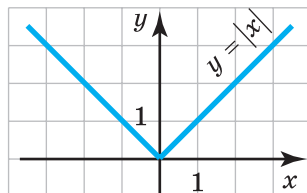
Розв'язання. Областю визначення функції $f(x) = |x|$ є множина всіх чисел. За означенням модуля числа маємо: $|x| = x$, якщо $x \geq 0$, і $|x| = -x$, якщо $x < 0$. Отже, функцію $f(x) = |x|$ можна записати так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Графік цієї функції на проміжку $[0; +\infty)$ збігається із графіком функції $y = x$, а на проміжку $(-\infty; 0]$ — із графіком функції $y = -x$.

Графік функції $f(x) = |x|$ зображено на малюнку 8.1. Очевидно, що найменшим значенням цієї функції є число 0, а найбільшого значення не існує.

Відповідь: найменше значення функції — 0, найбільшого не існує.



Мал. 8.1

А ще раніше...

Починаючи із XVII ст. функція є одним з основних математичних і загальнонаукових питань. Це поняття і донині відіграє значну роль у розумінні реального світу.

Ідея функціональної залежності прийшла з давнини. Її зміст можна знайти в перших математичних співвідношеннях між величинами, у перших правилах дій над числами, у перших формулах для знаходження площ та об'ємів. Так, вавилонські вчені ще 4–5 тисяч років тому експериментальним шляхом установили, що площа круга є функцією від його радіуса, й дізналися її наближену формулу: $S = 3r^2$.

Прикладами таблично заданих функцій є астрономічні таблиці вавилонян, античних греків та індійців, таблиці квадратів і кубів чисел, які також застосовували вавилоняни.

Починаючи лише з XVIII ст. у зв'язку із проникненням у математику ідеї змінних поняття функції стало застосовуватися цілком свідомо. У «Геометрії» Декарта і в роботах Ферма, Ньютона, Лейбніца поняття функції мало інтуїтивний характер і було пов'язане або з геометричним, або з механічним уявленням: ординати точок кривих – функції від абсцис, шлях і швидкість – функції від часу тощо.



Рене Декарт
(1596–1650)



П'єр Ферма
(1601–1665)



Ісаак Ньютон
(1643–1727)



Готфрід
Лейбніц
(1646–1716)

Чіткого уявлення поняття функції в XVII ст. ще не було, проте шлях до такого поняття проклав Рене Декарт. У своїй «Геометрії» 1637 р. він систематично розглядав лише ті криві, які можна було задати за допомогою рівнянь, притому переважно алгебраїчних. Так з'явилася можливість записувати загальні формули.

Термін *функція* (від латинського *functio* – вчинення, виконання) 1694 р. запровадив німецький математик Готфрід Лейбніц. Функціями він назвав абсциси, ординати та інші відрізки, пов'язані з точкою, що рухається вздовж певної лінії. Термін «функція від x » стали вживати Г. Лейбніц та Й. Бернуллі; починаючи з 1698 р. Г. Лейбніц запровадив у науковий обіг також терміни *змінна* і *константа*. Для позначення довільної функції від x Йоганн Бернуллі застосовував знак ϕ_x , називаючи ϕ характеристикою функції. Г. Лейбніц застосовував позначення x^1 , x^2 замість сучасних $f_1(x)$, $f_2(x)$, Л. Ейлер позначав функцію як $f:(x)$ замість сучасного $f(x)$, а Д'Аламбер писав так: fx або $f(x)$, тобто прийшов до сучасного позначення функції.

Явне означення поняття функції вперше дав 1718 р. один з учнів Г. Лейбніца, видатний швейцарський математик Йоганн Бернуллі: «Функцією змінної величини називають кількість, утворену будь-яким способом із цієї змінної величини та констант».

Остаточне означення функції сформулював у своїй праці «Введення в аналіз нескінченних» (1748 р.) видатний учень Йоганна Бернуллі Леонард Ейлер, який дещо змінив означення свого вчителя. Означив Л. Ейлер функцію так: «Функція змінної кількості є аналітичним виразом, який складено деяким чином із цієї кількості та чисел або сталих кількостей». Так розуміли функцію протягом майже всього XVIII ст.



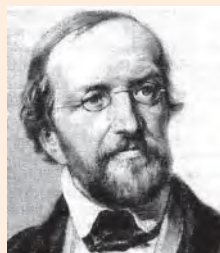
Йоганн
Бернуллі
(1667–1748)



Леонард
Ейлер
(1707–1783)



Бернард
Больцано
(1781–1848)



П'єр Густав
Діріхле
(1805–1859)

У XIX ст. ідеї Леонарда Ейлера набули подальшого розвитку. Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої запровадив у науковий обіг чеський математик Б. Больцано, а узагальнив – німецький математик П. Г. Діріхле. 1837 р. він так сформулював загальне означення поняття функції: « y є функцією змінної x (на відрізку $a \leq x \leq b$), якщо кожному значенню x (на цьому відрізку) відповідає цілком визначене значення y , причому неважливо, у який спосіб установлено цю відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею або просто словами».

Скорочене й осучаснене саме таке означення функції трапляється в більшості шкільних підручників, у тому числі й у цьому.



Що називають функцією? ○ Яку змінну називають незалежною змінною (аргументом), а яку – залежною? ○ Що називають областю визначення функції? ○ Що називають областю значень функції? ○ Що називають графіком функції?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

8.1. (Усно.) Функцію задано формулою $y = 3x - 7$. Назвіть її незалежну змінну; залежну змінну.

8.2. Знайдіть:

1) $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$, якщо $f(x) = 2x - 3$;

2) $g(0)$, $g(2)$, якщо $g(x) = x^2 + x$;

3) $\varphi(-2)$, $\varphi(3)$, якщо $\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

8.3. Знайдіть:

1) $g(1)$, $g(0)$, $g(-3)$, якщо $g(x) = -x + 1$;

2) $f(0)$, $f(-1)$, якщо $f(x) = x^2 - x$;

3) $\psi(3)$, $\psi(-1)$, якщо $\psi(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

2



8.4. Нехай $t(x) = x^2 - x + 9$. Знайдіть $t(-1) + t(0) + t(1)$, відтак дізнаєтеся, скільки медалей здобули паралімпійці України на зимових іграх 2022 року.



8.5. Нехай $g(x) = 2x^2 + 3$. Знайдіть $g(0) + g(1) + g(2)$, відтак дізнаєтеся, у якому віці Леся Українка написала підручник «Стародавня історія східних народів».



8.6. Дано: $f(x) = \sqrt{x} + x$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. Порівняйте:
1) $f(0)$ і $g(1)$; 2) $f(4)$ і $g(3)$.

8.7. Дано: $f(x) = x - \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Обчисліть:
1) $f(1) + g(3)$; 2) $f(9) - g(1)$.

8.8. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $f(x) = 5 - 3x$; 2) $g(x) = \frac{30}{x}$; 3) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$;
4) $g(x) = \sqrt{x} + 9$; 5) $f(x) = \frac{3}{x - 5}$; 6) $\psi(x) = \frac{7}{2x + 8}$.

8.9. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $g(x) = 3x + 1$; 2) $f(x) = -\frac{60}{x}$; 3) $t(x) = 7 - \sqrt{x}$;
4) $f(x) = x^2 - 3x - 19$; 5) $g(x) = \frac{x}{x + 3}$; 6) $\varphi(x) = \frac{9}{3x - 9}$.

8.10. Знайдіть значення x , за якого значення функції $y = \frac{1}{3}x - 5$ дорівнює:

- 1) 4; 2) -5; 3) 0; 4) -1.

8.11. За якого значення x значення функції $y = 7 - 3x$ дорівнює:

- 1) 1; 2) 7; 3) 0; 4) -5?

8.12. Побудуйте графік функції:

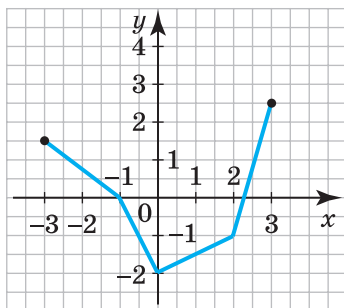
- 1) $y = 2x - 7$; 2) $y = 3$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = \sqrt{x}$.

8.13. Побудуйте графік функції:

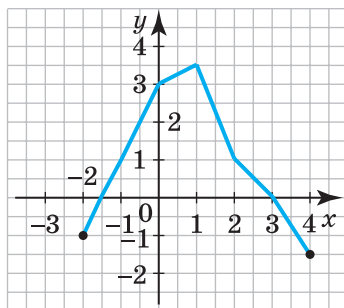
1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = -2$; 4) $y = x^2$.

8.14. На малюнку 8.2 побудовано графік функції $y = f(x)$, областю визначення якої є проміжок $[-3; 3]$. Знайдіть:

- 1) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$;
- 2) значення x , якщо $f(x) = -1$, $f(x) = 2,5$;
- 3) найбільше і найменше значення функції;
- 4) область значень функції.



Мал. 8.2



Мал. 8.3

8.15. На малюнку 8.3 побудовано графік функції $y = g(x)$, областю визначення якої є проміжок $[-2; 4]$. Знайдіть:

- 1) $g(-2)$, $g(0)$, $g(3)$;
- 2) значення x , якщо $g(x) = 1$, $g(x) = -1,5$;
- 3) найбільше і найменше значення функції;
- 4) область значень функції.

8.16. Побудуйте графік деякої функції, визначеної на проміжку $[-4; 4]$, найменшим значенням якої є -2 , а найбільшим 5 .

3 **8.17.** Чи проходить графік функції $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x - 1}$ через точку:

- 1) $A(0; 5)$; 2) $B(1; -2)$; 3) $C(2; 7)$; 4) $D(-1; -3)$?

8.18. Чи належить графіку функції $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x + 1}$ точка:

- 1) $A(2; 2)$; 2) $B(0; -5)$; 3) $C(-1; -7)$; 4) $D\left(1; \frac{1}{2}\right)$?

8.19. Знайдіть область визначення функції:

1) $g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$;

2) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$;

3) $p(x) = \frac{5}{x^2 - 3x}$;

4) $t(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{2x - 7}$;

5) $g(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 3}$;

6) $f(x) = \frac{x}{|x| - 1}$;

$$7) \varphi(x) = \frac{x}{|x| + 2};$$

$$8) t(x) = \frac{5}{|x - 2| - 3};$$

$$9) f(x) = \sqrt{3x - 6};$$

$$10) f(x) = \frac{10}{\sqrt{4x + 10}}.$$

8.20. Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \frac{3}{x^2 - 4};$$

$$2) g(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$3) \varphi(x) = \frac{4}{x^2 + 2x};$$

$$4) \psi(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{3x + 6};$$

$$5) p(x) = \frac{5}{x^2 - x - 2};$$

$$6) f(x) = \frac{2x}{|x| - 4};$$

$$7) g(x) = \frac{x}{|x| + 1};$$

$$8) f(x) = \frac{4}{|x + 1| - 2};$$

$$9) f(x) = \sqrt{2x + 6};$$

$$10) f(x) = \frac{8}{\sqrt{2x - 7}}.$$

8.21. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leq x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

Знайдіть $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.

8.22. Відомо, що $g(x) = kx + l$, причому $g(2) = -1$, $g(-4) = 17$. Знайдіть k і l .

8.23. Відомо, що $f(x) = kx + l$, причому $f(1) = -4$, $f(-2) = -13$. Знайдіть k і l .

4

8.24. Знайдіть область значень функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x} - 5;$$

$$2) g(x) = 3 - \sqrt{x};$$

$$3) t(x) = |x| + 2;$$

$$4) g(x) = |x| - 3;$$

$$5) f(x) = x^2 + 5;$$

$$6) \varphi(x) = 9 - x^4.$$

8.25. Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x - 2, & \text{якщо } x < -3, \\ 1, & \text{якщо } -3 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 1,5x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{6}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

8.26. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{якщо } x < -2, \\ 3, & \text{якщо } -2 \leq x < 3, \\ 6 - x, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$

8.27. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}; \quad 2) g(x) = \frac{6x + 12}{x^2 + 2x};$$

$$3) \varphi(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}; \quad 4) \psi(x) = \frac{|x| - 2}{|x| - 2}.$$

8.28. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}; \quad 2) g(x) = \frac{16 - 8x}{x^2 - 2x}.$$



Вправи для повторення

8.29. Обчисліть:

$$1) 6^8 : 6^5 : 36; \quad 2) (7^5 \cdot 49^2) : 7^{10}; \quad 3) 10^{-6} : 100^{-2}.$$

8.30. Число -3 є коренем рівняння $x^2 + 2x - c = 0$. Знайдіть c і другий корінь рівняння.

8.31. Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : \sqrt{\frac{b}{a}}.$

8.32. Скільки коренів рівняння $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ є розв'язками нерівності $x^2 - 4 < 0$?



Життєва математика

8.33. 2025 року податок на прибуток із заробітної плати становив 18 % – крім того, із заробітної плати утримували 5 % військового збору. У деякій компанії зарплата HR-менеджерки (Human Resources) становила 16 400 грн. Яку суму коштів отримувала менеджерка після сплати податку на прибуток та військового збору?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

8.34. Знайдіть нулі функції:

$$1) y = 2x - 6; \quad 2) y = 3x + 24; \quad 3) y = \frac{x + 1}{7}; \quad 4) y = \frac{7}{x + 1}.$$

8.35. Яка фігура є графіком функції:

$$\begin{array}{lll} 1) y = 4x; & 2) y = \frac{4}{x}; & 3) y = 3x - 7; \\ 4) y = x^2; & 5) y = -3; & 6) y = \sqrt{x} \end{array}$$

8.36. Побудуйте графік функції:

1) $y = -3x$;

2) $y = \frac{6}{x}$;

3) $y = 2$;

4) $y = -\frac{8}{x}$;

5) $y = x^2$;

6) $y = \sqrt{x}$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

8.37. Загадали деяке натуральне двоцифрове число. З правого боку до нього приписали таке саме число і від числа, що при цьому отримали, відняли квадрат числа, яке загадали. Потім цю різницю поділили на 4 % від квадрата числа, яке загадали, унаслідок чого неповна частка й остача виявилися рівними відповідно половині числа, яке загадали, та числу, яке загадали. Знайдіть, яке число загадали.

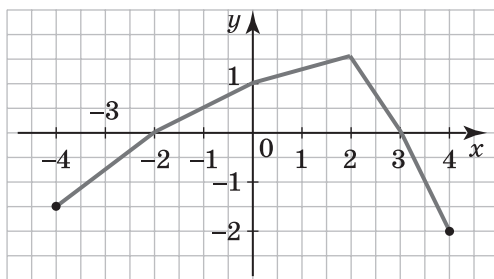
§ 9. Властивості функції

1. Нулі функції



Нагадаємо відоме з 7 класу поняття нулів функції.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 9.1. Якщо $x = -2$ або $x = 3$, то значення функції дорівнює нулю, тобто $f(-2) = f(3) = 0$. Такі значення аргументу називають *нулями функції*.



Мал. 9.1

Значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю, називають *нулем функції*.



Нулі функції є абсцисами точок перетину графіка функції з віссю абсцис, а ординати цих точок дорівнюють нулю, адже точки належать осі абсцис.

Тому, щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

Приклад 1. Знайти нулі функції $h(x) = x^2 - 2x - 8$.

- *Розв'язання.* Маємо рівняння: $x^2 - 2x - 8 = 0$, звідки $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.
- Отже, -2 і 4 – нулі функції.
- *Відповідь:* -2 ; 4 .

2. Перетин графіка функції з віссю ординат

Графік, зображений на малюнку 9.1, перетинає вісь абсцис у точках $(-2; 0)$ і $(3; 0)$.

Цей графік перетинає також і вісь ординат у точці $(0; 1)$. Абсциса цієї точки дорівнює нулю, адже точка належить осі ординат. Отже, ордината *точки перетину графіка функції* $y = f(x)$ *із віссю ординат* дорівнює числу $f(0)$, тобто значенню функції для значення аргумента, яке дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайти точки перетину графіка функції $h(x) = x^2 - 2x - 8$

- з осями координат.
- *Розв'язання.* Оскільки -2 і 4 – нулі функції $y = h(x)$, то її графік перетинає вісь абсцис у точках $(-2; 0)$ і $(4; 0)$.
- Оскільки $h(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8$, то графік функції $y = h(x)$ перетинає вісь ординат у точці $(0; -8)$.
- *Відповідь:* $(-2; 0)$, $(4; 0)$, $(0; -8)$.

3. Проміжки знакосталості функції

Нулі функції $y = f(x)$ (мал. 9.1) розбивають її область визначення – проміжок $[-4; 4]$ – на три проміжки: $[-4; -2)$, $(-2; 3)$ і $(3; 4]$. Для значень x із проміжку $(-2; 3)$ точки графіка лежать вище від осі абсцис, а для значень x із проміжків $[-4; -2)$ і $(3; 4]$ – нижче від осі абсцис. Отже, на проміжку $(-2; 3)$ функція набуває додатних значень, тобто $f(x) > 0$ для $x \in (-2; 3)$, а на кожному з проміжків $[-4; -2)$ і $(3; 4]$ – від'ємних значень, тобто $f(x) < 0$ для $x \in [-4; -2)$ або $x \in (3; 4]$.

Проміжок, на якому функція зберігає свій знак, називають *проміжком знакосталості функції*.

Проміжки $[-4; -2)$, $(-2; 3)$ і $(3; 4]$ є проміжками знакосталості функції $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 9.1.

4. Зростання та спадання функції

Розглянемо, як змінюється (збільшується чи зменшується) значення цієї функції зі зміною значення x від -4 до 4 .

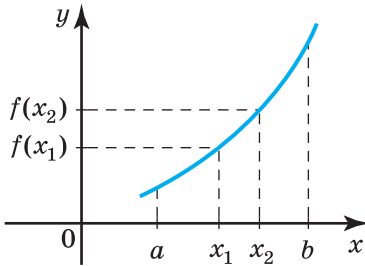
За графіком бачимо, що зі збільшенням значень x від -4 до 2 значення y збільшується (графік «прямує» вгору), а зі збільшенням значень x від 2 до 4 значення y зменшується (графік «прямує» вниз). Кажуть, що на проміжку $[-4; 2]$ функція *зростає* (або є *зростаючою*), а на проміжку $[2; 4]$ функція *спадає* (або є *спадною*).

Функцію називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

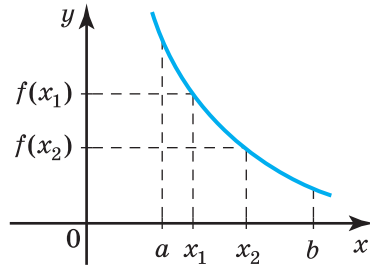
Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Отже, за означенням, функцію $y = f(x)$ називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 та x_2 із цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність: $f(x_2) > f(x_1)$.

На малюнку 9.2 зображено графік функції $y = f(x)$, яка зростає на проміжку $[a; b]$. При цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком зростання функції*.



Мал. 9.2



Мал. 9.3

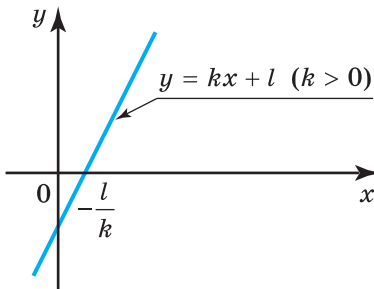
Так само, за означенням, функцію $y = f(x)$ називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 та x_2 із цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

На малюнку 9.3 зображено графік функції $y = f(x)$, яка спадає на проміжку $[a; b]$. При цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком спадання функції*.

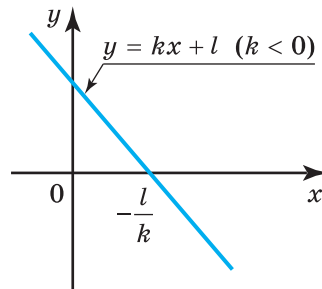
5. Властивості деяких елементарних функцій

З'ясуємо властивості деяких вивчених раніше функцій.

Приклад 3. Розглянемо властивості функції $y = kx + l$, де $k \neq 0$ та її графік (мал. 9.4 і 9.5).



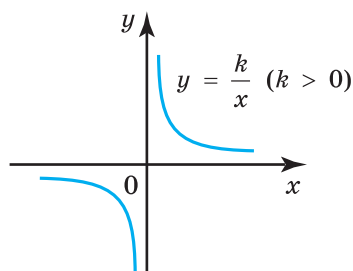
Мал. 9.4



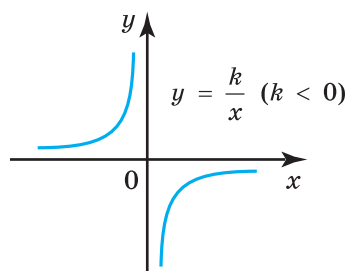
Мал. 9.5

- 1) Областю визначення та областю значень функції є множина всіх чисел.
- 2) Знайдемо нулі функції. Для цього розв'яжемо рівняння $kx + l = 0$, звідки $x = -\frac{l}{k}$ – єдиний нуль функції.
- 3) Знайдемо проміжки знакосталості функції.
Нехай $k > 0$. Розв'яжемо нерівність $kx + l > 0$, звідки $x > -\frac{l}{k}$. Отже, $y > 0$, коли $x > -\frac{l}{k}$.
Розв'яжемо нерівність $kx + l < 0$, звідки $x < -\frac{l}{k}$. Отже, $y < 0$, коли $x < -\frac{l}{k}$.
Нехай $k < 0$. Розв'яжемо нерівність $kx + l > 0$, звідки $x < -\frac{l}{k}$. Отже, $y > 0$, коли $x < -\frac{l}{k}$.
Розв'яжемо нерівність $kx + l < 0$, звідки $x > -\frac{l}{k}$. Отже, $y < 0$, коли $x > -\frac{l}{k}$.
- 4) Перевіримо функцію $f(x) = kx + l$ на зростання і спадання.
Нехай $k > 0$ і $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = k(x_2 - x_1) > 0$, адже $k > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$.
Отже, коли $k > 0$, функція $y = kx + l$ зростає на $(-\infty; +\infty)$.
Нехай $k < 0$ і $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = k(x_2 - x_1) < 0$, адже $k < 0$ і $x_2 - x_1 > 0$.
Отже, коли $k < 0$, функція $y = kx + l$ спадає на $(-\infty; +\infty)$.
- 5) Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Приклад 4. Розглянемо властивості функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$ (мал. 9.6 і 9.7).



Мал. 9.6

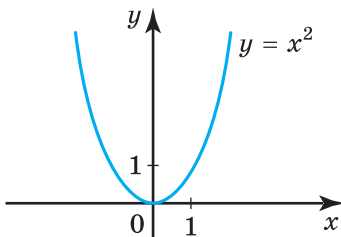


Мал. 9.7

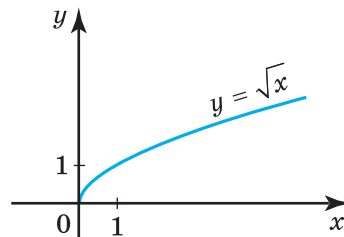
- 1) Областю визначення та областю значень функції є множина всіх чисел, крім нуля.
- 2) Оскільки рівняння $\frac{k}{x} = 0$, де $k \neq 0$, не має розв'язків, то функція $y = \frac{k}{x}$ нулів не має.
- 3) Нехай $k > 0$. Тоді $\frac{k}{x} > 0$, коли $x > 0$, і $\frac{k}{x} < 0$, коли $x < 0$. Отже, $y > 0$, коли $x > 0$, і $y < 0$, коли $x < 0$.
Нехай $k < 0$. Тоді $\frac{k}{x} > 0$, коли $x < 0$, і $\frac{k}{x} < 0$, коли $x > 0$. Отже, $y > 0$, коли $x < 0$, і $y < 0$, коли $x > 0$.
- 4) Якщо $k > 0$, то функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Якщо $k < 0$, то функція $y = \frac{k}{x}$ зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.
- 5) Найбільшого і найменшого значень у функції не існує.

Приклад 5. Розглянемо властивості функції $y = x^2$ (мал. 9.8).

- 1) Область визначення функції – множина всіх чисел. Область значень – проміжок $[0; +\infty)$.
- 2) Рівняння $x^2 = 0$ має єдиний розв'язок: $x = 0$. Отже, число 0 – єдиний нуль функції.
- 3) $x^2 > 0$, коли $x \neq 0$, тобто $y > 0$ для $x \in (-\infty; 0)$ або $x \in (0; +\infty)$. Зауважимо, що немає таких значень x , за яких $y < 0$, оскільки нерівність $x^2 < 0$ не має розв'язків.
- 4) Функція $y = x^2$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$.
- 5) Найменше значення функції дорівнює нулю, найбільшого – не існує.



Мал. 9.8



Мал. 9.9

Приклад 6. Розглянемо властивості функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 9.9).

- 1) Область визначення та область значень функції: $[0; +\infty)$.
- 2) Рівняння $\sqrt{x} = 0$ має єдиний розв'язок – число 0, яке є нулем функції.

- 3) $\sqrt{x} > 0$, коли $x > 0$, тобто $y > 0$, коли $x \in (0; +\infty)$. Немає таких значень x , щоб виконувалася нерівність $y < 0$, оскільки нерівність $\sqrt{x} < 0$ не має розв'язків.
- 4) Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$.
- 5) Найменше значення функції – число 0, найбільшого – не існує.

Систематизуємо властивості цих функцій у таблицю.

Властивості деяких елементарних функцій						
Функція Властивість	$y = kx + l$		$y = \frac{k}{x}$		$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$		
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$		$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		R	$[0; +\infty)$
Область значень	$(-\infty; +\infty)$		$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Нулі функції	$x = -\frac{l}{k}$		не існують		$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > 0$	$x < 0$	$x < 0$, $x > 0$	$x > 0$
Проміжки знакосталості, $y < 0$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < 0$	$x > 0$	–	–
Зростає на проміжку	R	–	–	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Спадає на проміжку	–	R	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	–	$(-\infty; 0]$	–
Найбільше значення функції, $y_{\max}$	–		–		–	–
Найменше значення функції, $y_{\min}$	–		–		0	0

- ? Що називають нулями функції? ○ Що називають проміжками знакосталості функції? ○ Яку функцію називають зростаючою на проміжку, а яку – спадною? ○ Використовуючи малюнок 9.1, поясніть, як за графіком функції знайти нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції. ○ Сформулюйте властивості функцій $y = kx + l$ ($k \neq 0$), $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 9.1. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 2x$; 2) $y = 2 - 5x$; 3) $y = x(x - 2)$; 4) $y = \frac{x}{x + 1}$.

9.2. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 3x$; 2) $y = 5x + 4$; 3) $y = x(x + 3)$; 4) $y = \frac{x - 1}{x}$.

9.3. (Усно.) Зростаючою чи спадною на своїй області визначення є функція:

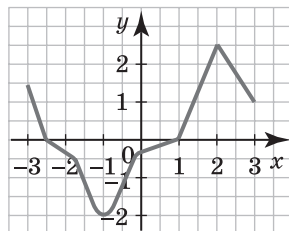
1) $y = 2x + 7$; 2) $y = -3x$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \frac{1}{3}x$?

9.4. Зростаючою чи спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$ є функція:

1) $y = -2x - 5$; 2) $y = \frac{4}{5}x$; 3) $y = -0,01x$; 4) $y = 5x + 13$?

2 9.5. Областю визначення функції $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 9.10, є проміжок $[-3; 3]$. За графіком знайдіть:

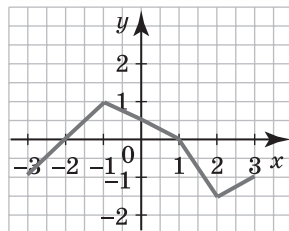
- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких вона набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки, на яких функція зростає, і проміжки, на яких вона спадає;
- 4) значення x , за якого функція набуває найбільшого значення, та найбільше значення функції; значення x , за якого функція набуває найменшого значення, та найменше значення функції.



Мал. 9.10

9.6. Областю визначення функції $y = g(x)$, графік якої зображено на малюнку 9.11, є проміжок $[-3; 3]$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких вона набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки, на яких функція зростає, і проміжки, на яких вона спадає;
- 4) значення x , за якого функція набуває найбільшого значення, та найбільше значення функції; значення x , за якого функція набуває найменшого значення, та найменше значення функції.



Мал. 9.11

9.7. Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

1) $y = 5(x^2 + 1)$; 2) $y = \sqrt{x - 2}$;
3) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 5}$.

9.8. Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

1) $y = 4(x^2 + 9)$; 2) $y = \sqrt{3 + x}$;
3) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 4}$.

9.9. Накресліть схематично графік функції $y = g(x)$, областю визначення якої є проміжок $[-3; 5]$, так, щоб:

- 1) нулем функції було число 2;
- 2) нулями функції були числа -1 і 4 ;
- 3) функція зростала на проміжку $[-3; 2]$ і спадала на проміжку $[2; 5]$.

9.10. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

- 1) $y = 2x - 4$;
- 2) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

9.11. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

- 1) $y = -3x + 6$;
- 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$.

3 **9.12.** Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину з осями координат графіка функції:

- 1) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$;
- 2) $y = \sqrt{x + 2}$;
- 3) $y = \frac{|x| - 1}{x + 1}$;
- 4) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}$.

9.13. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину з осями координат графіка функції:

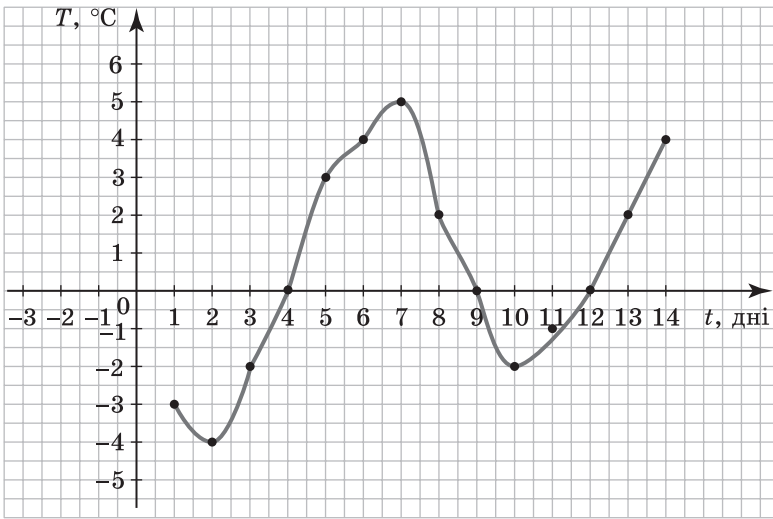
- 1) $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$;
- 2) $y = \sqrt{x + 9}$;
- 3) $y = \frac{|x| - 2}{x - 2}$;
- 4) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x}$.

9.14. На малюнку 9.12 зображено зміни температури повітря T ($^{\circ}\text{C}$) протягом перших тижнів березня. Значення температури, що спостерігалася щодня о 8:00, позначено точками і для точності сполучено плавною лінією. Використовуючи графік, дайте відповіді на запитання:



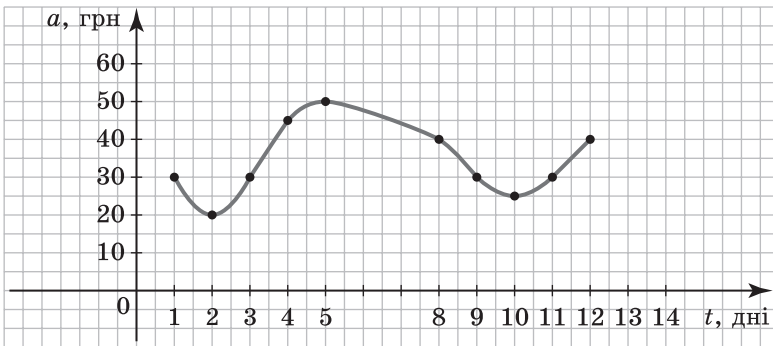
- 1) якою була температура повітря 3 березня; 8 березня;
- 2) у які дні температура була 0°C ; 2°C ;
- 3) у які дні температура була нижчою за 0°C ; у які – вищою;
- 4) якою була найвища температура повітря протягом цих двох тижнів; у який день вона спостерігалася;
- 5) якою була найнижча температура повітря протягом цих двох тижнів; у який день вона спостерігалася;
- 6) протягом яких днів температура повітря знижувалася, протягом яких – підвищувалася.

Придумайте ще кілька запитань за графіком, обмінюйтеся ними в парах або в групах і дайте на них відповіді.



Мал. 9.12

9.15. На малюнку 9.13 подано жирними точками ціну однієї акції банку «Чудовий» (у грн) на момент закриття біржових торгів у всі робочі дні з 1 до 12 вересня 2025 року. По горизонталі зазначено числа місяця, по вертикалі – ціну однієї акції у грн. Для наочності жирні точки на малюнку сполучено плавною лінією.



Мал. 9.13

Використовуючи графік, дайте відповіді на запитання:

- 1) якою була ціна акцій 4 вересня; 8 вересня;
- 2) у які дні ціна акцій була 30 грн за одну акцію;
- 3) якою була найвища ціна акцій у ці дні; у який день це було;
- 4) якою була найнижчою ціна акцій у ці дні; у який день це було;
- 5) протягом яких днів ціна акцій знижувалася; протягом яких підвищувалася.

Проектна діяльність. Знайдіть в інтернеті інформацію про динаміку цін на деякий товар (послугу) протягом певного часу. Побудуйте графік, що відповідає цим даним. Підготуйте запитання по графіку для однокласників / однокласниць.

9.16. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) y = \frac{6}{x}; \quad 2) y = -\frac{8}{x}.$$

9.17. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) y = \frac{4}{x}; \quad 2) y = -\frac{10}{x}.$$

4 9.18. Скільки нулів має функція:

$$1) f(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{|x| + 2}; \quad 2) g(x) = (x^2 - 4)\sqrt{|x| - 3}?$$

9.19. Скільки нулів має функція:

$$1) f(x) = x(x^2 - 9)\sqrt{|x| - 4}; \quad 2) g(x) = (x^2 - 9)\sqrt{|x| + 2}?$$

9.20. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 2x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x > 2; \end{cases} \quad 2) g(x) = x + |x|.$$

9.21. Побудуйте графік функції та сформулюйте її властивості:

$$1) g(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ -1,5x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x > 2; \end{cases} \quad 2) f(x) = x - |x|.$$



Вправи для повторення

9.22. Порівняйте числа:

$$1) 2\sqrt{3} \text{ і } \sqrt{13}; \quad 2) 3\sqrt{2} \text{ і } 2\sqrt{3}; \quad 3) 3\sqrt{7} \text{ і } 8.$$

9.23. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{2-x}{10} + \frac{3-x}{5} < \frac{5x-3}{4}; \quad 2) 3 < \frac{1-2x}{3} \leq 7.$$

9.24. Із Херсона до Житомира виїхали одночасно дві автівки. Одна з них рухалася зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж друга, а тому прибула в Житомир на 1 год раніше. Знайдіть швидкість кожної автівки, якщо відстань між містами становить 560 км.

9.25. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 - 5x + c = 0$ задовольняють умову $3x_1 = 2x_2$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт c .



Життєва математика

9.26. На рахунку мобільного телефона Богдана було 82 грн. Перебуваючи за кордоном, хлопець скористався роумінгом. Після розмови з Оленкою на його рахунку залишилося 71 грн 50 коп. Скільки хвилин тривала розмова, якщо вартість однієї хвилини розмови в роумінгу становить 1 грн 50 коп.?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 9.27.** 1) Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 2x$, $y = 2x - 3$ та $y = 2x + 4$.
 2) Чи паралельні ці графіки?
 3) Як із графіка функції $y = 2x$ отримати графік функції $y = 2x - 3$?
 4) Як із графіка функції $y = 2x$ отримати графік функції $y = 2x + 4$?



Цікаві задачі – поміркуй окремо

9.28. Порівняйте дроби $\frac{222\ 221}{333\ 332}$ і $\frac{444\ 443}{666\ 663}$.

§ 10. Найпростіші перетворення графіків функцій

Раніше ви будували лише графіки функцій вигляду $y = kx + l$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ та $y = |x|$.

Розглянемо деякі перетворення графіка функції $y = f(x)$, що значно збільшить перелік функцій, графіки яких ми зможемо будувати.

1. Побудова графіка функції $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$

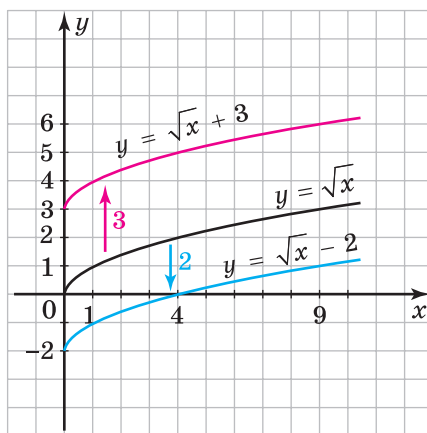
Приклад 1. Побудувати в одній системі координат графіки функцій

$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 2$ та $y = \sqrt{x} + 3$.

Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної із цих функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x} - 2$	-2	-1	0	1	2
$y = \sqrt{x} + 3$	3	4	5	6	7

З таблиці зрозуміло, що для одного й того самого значення x значення функції $y = \sqrt{x} - 2$ на 2 менше, а значення функції $y = \sqrt{x} + 3$ на 3 більше за відповідне значення функції $y = \sqrt{x}$. Тому графік функції $y = \sqrt{x} - 2$ можна побудувати шляхом перенесення кожної точки графіка функції $y = \sqrt{x}$ вздовж осі y на 2 одиниці вниз, а графік функції $y = \sqrt{x} + 3$ – шляхом перенесення кожної точки графіка функції $y = \sqrt{x}$ вздовж осі y на 3 одиниці вгору (мал. 10.1).



Мал. 10.1

Отже,

для побудови графіка функції $y = f(x) + n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць угору; для побудови графіка функції $y = f(x) - n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць униз.

Зауваження. Замість перенесення графіка функції вгору (униз), можна перенести вісь x на ту саму відстань у протилежному напрямку.

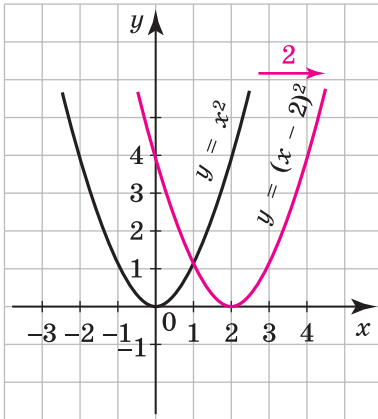
2. Побудова графіка функції $y = f(x \pm t)$, де $t > 0$

Приклад 2. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = (x - 2)^2$.

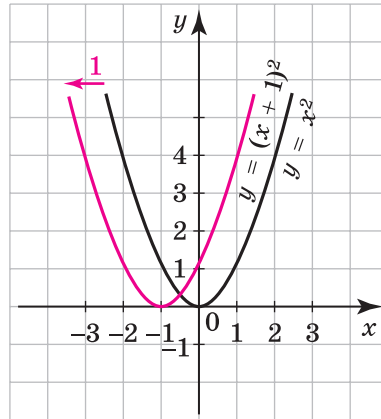
Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної із цих функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = (x - 2)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4

- Для кожного $x = x_0$ значення функції $y = (x - 2)^2$ дорівнює значенню функції $y = x^2$ для $x = x_0 - 2$. У таблиці цю відповідність показано стрілками для значень функцій $y = (x - 2)^2$ для $x = -1; 0; 1; 2; 3; 4$ та $y = x^2$ відповідно для $x = -3; -2; -1; 0; 1; 2$.
- Отже, якщо всі точки графіка функції $y = x^2$ перенести вздовж осі x на 2 одиниці вправо, то отримаємо графік функції $y = (x - 2)^2$ (мал. 10.2).



Мал. 10.2



Мал. 10.3

Приклад 3. Побудувати в одній системі координат графіки функцій

$y = x^2$ та $y = (x + 1)^2$.

Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної із цих функцій для кількох значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = (x + 1)^2$	4	1	0	1	4	9	16

Міркуючи, як у прикладі 2, дійдемо висновку, що графік функції $y = (x + 1)^2$ можна отримати, перенісши графік функції $y = x^2$ вздовж осі x на 1 одиницю вліво (мал. 10.3).

Отже,

для побудови графіка функції $y = f(x - t)$, де $t > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на t одиниць вправо; для побудови графіка функції $y = f(x + t)$, де $t > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на t одиниць вліво.

Зауваження. Замість перенесення графіка функції вліво (або вправо) можна перенести вісь y на ту саму відстань у протилежному напрямку.

3. Побудова графіка функції $y = -f(x)$

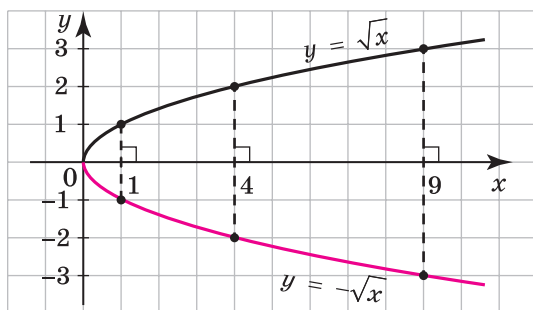
Приклад 4. Побудувати в одній системі координат графіки функцій

$y = \sqrt{x}$ та $y = -\sqrt{x}$.

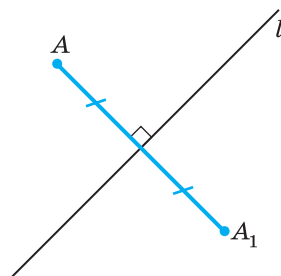
Розв'язання. Складемо таблицю значень цих функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = -\sqrt{x}$	0	-1	-2	-3	-4

З таблиці бачимо, що значення функції $y = -\sqrt{x}$ для одних і тих самих значень x протилежні відповідним значенням функції $y = \sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображено на малюнку 10.4.



Мал. 10.4



Мал. 10.5

Якщо провести відрізки, що сполучають точки графіків функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = -\sqrt{x}$ для одного і того самого значення x (на мал. 10.4 їх показано пунктиром для $x = 1$, $x = 4$ та $x = 9$), то вісь x для цих відрізків буде серединним перпендикуляром. У такому разі кажуть, що графіки *симетричні* відносно осі x .

Точки A і A_1 називають *симетричними* відносно прямої l , якщо пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка AA_1 (мал. 10.5).

Отже,

графіки функцій $y = -f(x)$ і $y = f(x)$ симетричні відносно осі x .

4. Побудова графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$

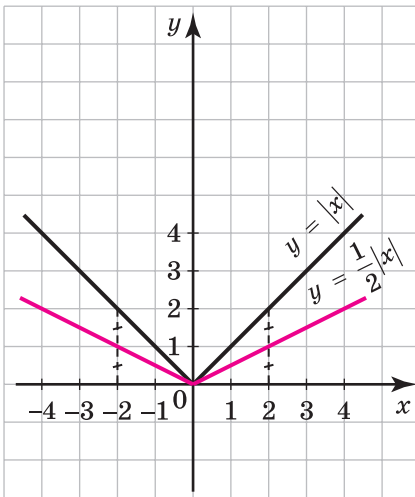
Приклад 5. Побудувати в одній системі координат графіки функцій

$y = |x|$, $y = \frac{1}{2}|x|$ та $y = 2|x|$.

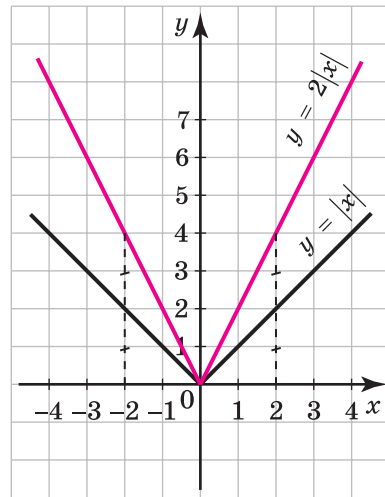
Розв'язання. Складемо таблицю значень кожної із цих функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x $	3	2	1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2} x $	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y = 2 x $	6	4	2	0	2	4	6

Для будь-якого значення x значення функції $y = \frac{1}{2}|x|$ удвічі менше від відповідного значення функції $y = |x|$, а значення функції $y = 2|x|$ удвічі більше за відповідне значення функції $y = |x|$. Тому графік функції $y = \frac{1}{2}|x|$ можна отримати, стиснувши графік функції $y = |x|$ у 2 рази до осі x (мал. 10.6), а графік функції $y = 2|x|$ – розтягнувши графік функції $y = |x|$ у 2 рази від осі x (мал. 10.7).



Мал. 10.6



Мал. 10.7

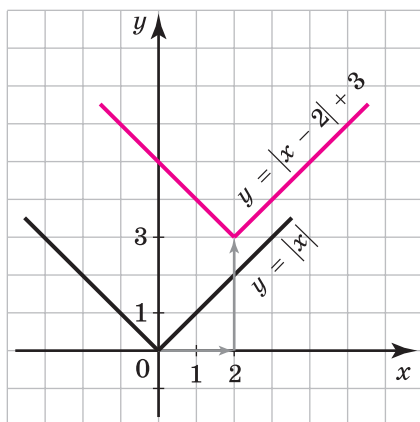
Отже,

для побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$, достатньо графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його до осі x у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$.

Виконуючи послідовно два й більше перетворень, можна будувати графіки функцій $y = f(x + m) + n$, $y = -kf(x)$, де $k > 0$, та інших.

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = |x - 2| + 3$.

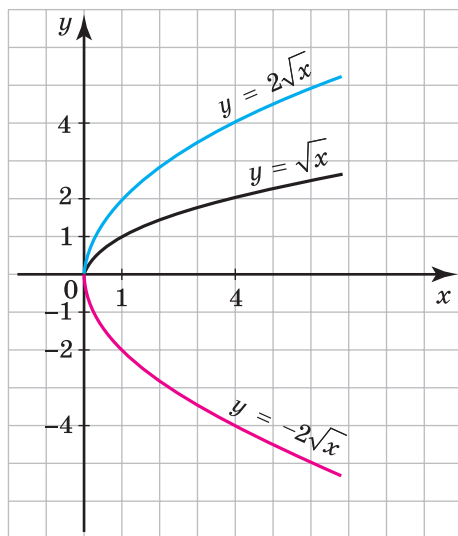
Розв'язання. Графік функції $y = |x - 2| + 3$ можна отримати, перенісши графік функції $y = |x|$ уздовж осі x на 2 одиниці вправо, а потім уздовж осі y на 3 одиниці вгору. Графік зображено на малюнку 10.8.



Мал. 10.8

Приклад 7. Побудувати графік функції $y = -2\sqrt{x}$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. Далі, розтягнувши його у 2 рази від осі x , отримаємо графік функції $y = 2\sqrt{x}$. Графік функції $y = -2\sqrt{x}$ є симетричним графіку функції $y = 2\sqrt{x}$ відносно осі x . Побудову зображено на малюнку 10.9.



Мал. 10.9



5. Побудова графіка функції $y = |f(x)|$

За означенням модуля числа маємо:

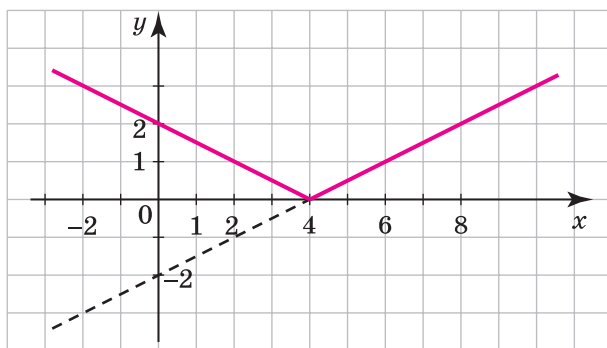
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отже, для тих значень x , за яких $f(x) \geq 0$, відповідні значення функцій $y = f(x)$ та $y = |f(x)|$ між собою рівні, а тому за таких значень x графіки цих функцій збігаються. Для тих значень x , за яких $f(x) < 0$, відповідні значення функцій $y = f(x)$ та $y = |f(x)|$ є протилежними числами, тому для таких значень x графіки цих функцій є симетричними відносно осі x .

Для побудови графіка функції $y = |f(x)|$ достатньо побудувати графік функції $y = f(x)$ і ту його частину, яка лежить нижче від осі x , симетрично відобразити відносно цієї осі.

Приклад 8. Побудувати графік функції $y = |0,5x - 2|$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = 0,5x - 2$. Далі ту частину графіка, яка лежить нижче від осі x , симетрично відображаємо відносно цієї осі. Графік зображено на малюнку 10.10.



Мал. 10.10

? Як, користуючись графіком функції $y = f(x)$, побудувати графіки функцій $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$; $y = f(x \pm m)$, де $m > 0$; $y = -f(x)$; $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

10.1. (Усно.) Які перетворення графіка функції $y = x^2$ треба виконати, щоб отримати графік функції:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $y = x^2 + 2$; | 2) $y = x^2 - 3$; |
| 3) $y = (x - 2)^2$; | 4) $y = (x + 1)^2$; |
| 5) $y = -x^2$; | 6) $y = 2x^2$? |

2 10.2. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = -x$, $y = -x + 3$ та $y = -x - 2$;

2) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x - 2}$ та $y = \sqrt{x + 3}$.

10.3. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = x$, $y = x + 2$ та $y = x - 3$;

2) $y = |x|$, $y = |x - 1|$ та $y = |x + 3|$.

10.4. На малюнку 10.11 зображено графік функції $y = x^3$. Перенесіть його в зошит і в тій самій системі координат побудуйте олівцями різного кольору графіки функцій:

1) $y = x^3 + 1$;

2) $y = x^3 - 2$;

3) $y = (x - 3)^3$;

4) $y = (x + 2)^3$.

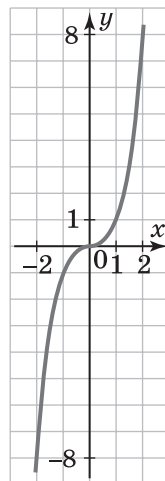
10.5. На малюнку 10.11 зображено графік функції $y = x^3$. Перенесіть його в зошит і в тій самій системі координат побудуйте олівцями різного кольору графіки функцій:

1) $y = x^3 + 3$;

2) $y = x^3 - 1$;

3) $y = (x - 2)^3$;

4) $y = (x + 1)^3$.



Мал. 10.11

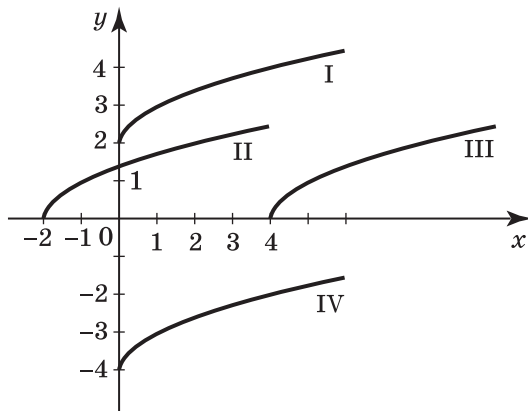
10.6. (Усно.) Який із графіків на малюнку 10.12 відповідає функції:

1) $y = \sqrt{x - 4}$;

2) $y = \sqrt{x + 2}$;

3) $y = \sqrt{x} - 4$;

4) $y = \sqrt{x} + 2$?



Мал. 10.12

3 10.7. Побудуйте графік функції:

1) $y = (x - 1)^2 + 3$;

2) $y = 4 - x^2$;

3) $y = (x + 2)^2 - 5$;

4) $y = (x + 3)^2 + 1$;

5) $y = -3 + (x - 2)^2$;

6) $y = -x^2 - 1$.

10.8. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x - 2} + 1$; 2) $y = 2 - \sqrt{x}$;
 3) $y = -2 + \sqrt{x + 1}$; 4) $y = \sqrt{x + 4} + 2$;
 5) $y = \sqrt{x - 1} - 3$; 6) $y = -\sqrt{x} - 1$.

10.9. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 3|x|$; 2) $y = -4|x|$;
 3) $y = \frac{1}{3}|x|$; 4) $y = -0,5|x|$.

10.10. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 3x^2$; 2) $y = -2x^2$;
 3) $y = 0,25x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

10.11. (Усно.) Який із графіків на малюнку 10.13 відповідає функції:

- 1) $y = -2x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$;
 3) $y = -\frac{1}{2}x^2$; 4) $y = 2x^2$?

10.12. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{6}{x} - 1$; 2) $y = \frac{6}{x - 1}$.

10.13. Побудуйте графік функції:

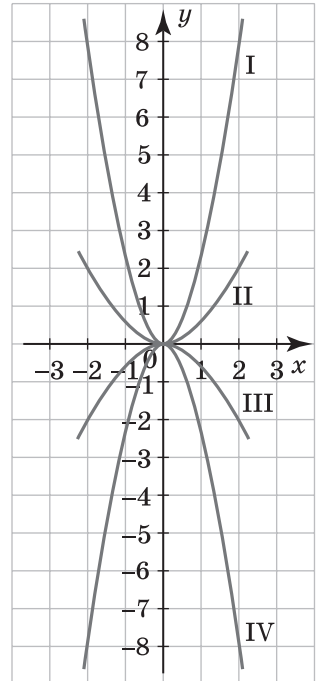
- 1) $y = 1 + \frac{8}{x}$; 2) $y = \frac{8}{x + 1}$.

10.14. Дано параболу $y = x^2$. Напишіть рівняння параболу, яку можна отримати з даної перенесенням:

- 1) на 3 одиниці вгору;
 2) на 4 одиниці вниз;
 3) на 2 одиниці вліво;
 4) на 5 одиниць управо;
 5) на 2 одиниці вправо і на 3 одиниці вгору;
 6) на 1 одиницю вліво і на 4 одиниці вгору;
 7) на 3 одиниці вправо і на 1 одиницю вниз;
 8) на 5 одиниць уліво і на 5 одиниць униз.

10.15. Побудуйте графік функції $y = (x + 1)^2 - 4$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
 2) область значень функції;
 3) значення x , за яких функція набуває від'ємних значень;
 4) проміжок зростання функції.



Мал. 10.13

10.16. Побудуйте графік функції $y = (x - 2)^2 - 1$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) область значень функції;
- 3) значення x , за яких функція набуває додатних значень;
- 4) проміжок спадання функції.



10.17. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $1 + \frac{5}{x} = \sqrt{x - 1}$;



2) $|x - 1| = (x + 1)^2$.

10.18. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x + 1} = \frac{9}{x} - 1$;



2) $(x - 2)^2 = |x + 4|$.

10.19. Побудуйте графік функції $y = \frac{x + 4}{x - 2}$.

10.20. Побудуйте графік функції $y = \frac{x + 5}{x + 1}$.



10.21. 1) Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 4|$.

2) Використовуючи графік, знайдіть усі значення a , за яких рівняння $|x^2 - 4| = a$ має рівно три корені.



Вправи для повторення

10.22. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 - x - 10$;

3) $-x^2 - 2x + 8$; 4) $-3x^2 + x + 2$.

10.23. Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} (x + 4)(x - 4) - (x - 3)(x + 1) < -3, \\ \frac{2x - 5}{9} \geq -1. \end{cases}$$

10.24. x_1 та x_2 – корені рівняння $x^2 - 6x + 3 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.



Життєва математика

10.25. Автомобіль, рухаючись на момент початку відліку часу зі швидкістю $v_0 = 28$ м/с, почав гальмувати зі сталим прискоренням $a = 7$ м/с². Через t секунд після початку гальмування він

подолав відстань $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Визначте час, за який від початку гальмування автомобіль подолав 42 м.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.26. Виділіть квадрат двочлена із квадратного тричлена:

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1) $x^2 - 4x + 3$; | 2) $x^2 + 2x$; |
| 3) $-x^2 - 2x - 1$; | 4) $x^2 + 6x - 2$. |

10.27. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 2x = 0$; | 2) $4x^2 - 36 = 0$; |
| 3) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; | 4) $3x^2 + 2x - 5 = 0$. |

10.28. Для функції $f(x) = x^2 + 4x - 5$ знайдіть:

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) $f(-2)$; | 2) $f(-1)$; |
| 3) $f(0)$; | 4) $f(1)$. |

10.29. Закінчіть речення:

- 1) «Графіком функції $y = x^2$ є ...».
- 2) «Гілки параболи $y = x^2$ спрямовані ...».
- 3) «Функція $y = x^2$ спадає на проміжку ...».
- 4) «Функція $y = x^2$ зростає на проміжку ...».



Цікаві задачі – поміркуй одначе

10.30. Відомо, що $x - \frac{1}{x} = 1$. Знайдіть значення виразу:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1) $x^3 - \frac{1}{x^3}$; | 2) $x^4 + \frac{1}{x^4}$. |
|----------------------------|----------------------------|

§ 11. Функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Її графік і властивості

1. Означення квадратичної функції

Однією з найважливіших функцій у курсі математики є *квадратична функція*.

Функцію вигляду $y = ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають **квадратичною функцією**.

Математичні моделі багатьох реальних процесів у різноманітних сферах діяльності людини є квадратичними функціями. Насамперед це стосується науки, зокрема фізики та економіки, а також техніки.

Приклад 1. Тіло рухається з прискоренням a м/с² і до початку відліку часу t с пройшло шлях s_0 м, маючи в цей момент швидкість v_0 м/с. Тоді залежність відстані s (у метрах), яку пододало тіло, від часу t (у секундах) під час рівноприскореного руху задають формулою:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0t + s_0.$$

Наприклад, якщо $a = 6$, $v_0 = 2$, $s_0 = 10$, то $s = 3t^2 + 2t + 10$.

Приклад 2. Залежність між площею використаних земель і валовим прибутком з розрахунку на 10 га сільськогосподарських угідь у деякому фермерському господарстві задається функцією $y \approx -1,5x^2 + 9x + 9$, де x – площа сільськогосподарських угідь (у га), y – валовий прибуток (у тис. грн) на 10 га сільськогосподарських угідь. З якої площі господарство матиме найбільший валовий прибуток на 10 га сільськогосподарських угідь? Яким буде цей прибуток?

Розв’язання. У формулі функції виділимо повний квадрат:

$$-1,5x^2 + 9x + 9 = -1,5(x^2 - 6x - 6) = -1,5(x^2 - 6x + 9 - 9 - 6) = -1,5((x - 3)^2 - 15) = 22,5 - 1,5(x - 3)^2, \text{ тому } y \approx 22,5 - 1,5(x - 3)^2.$$

Вираз, який ми отримали, набуватиме найбільшого значення для $x = 3$. Отже, господарство матиме найбільший прибуток із площі розміром 3 га.

Цей прибуток є значенням функції $y = 22,5 - 1,5(x - 3)^2$ для $x = 3$, тобто $y = y(3) = 22,5 - 1,5(3 - 3)^2 = 22,5$ (тис. грн). Отже, найбільший прибуток складе 22,5 тис. грн.

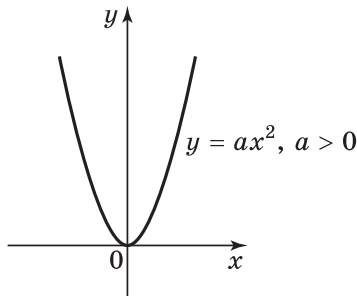
Відповідь: 3 га; 22,5 тис. грн.

2. Графік і властивості функції $y = ax^2$

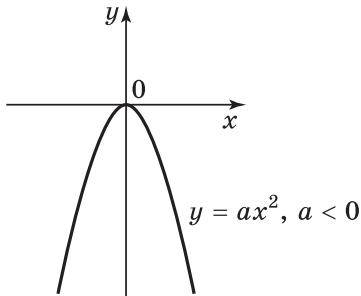
Розглянемо графік і властивості квадратичної функції. Почнемо з її часткового випадку.

Нехай у формулі квадратичної функції $b = c = 0$, тоді маємо функцію $y = ax^2$.

Графіком функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$, є парабола з вершиною в початку координат, гілки якої спрямовані вгору, якщо $a > 0$ (мал. 11.1), і вниз, якщо $a < 0$ (мал. 11.2). Значення $y = 0$ є для функції $y = ax^2$ найменшим, якщо $a > 0$, та найбільшим, якщо $a < 0$.



Мал. 11.1



Мал. 11.2

Систематизуємо властивості у вигляді таблиці.

Властивості функції $y = ax^2, a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Графік	парабола з вершиною $(0; 0)$	
Напрямок гілок	угору	униз
Нулі функції	$x = 0$	
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	–
Проміжки знакосталості, $y < 0$	–	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$
Найбільше значення функції	–	0
Найменше значення функції	0	–

3. Побудова графіка функції $y = ax^2 + bx + c$

Тепер розглянемо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Виділимо у тричлені $ax^2 + bx + c$ квадрат двочлена:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= a \left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
 \end{aligned}$$

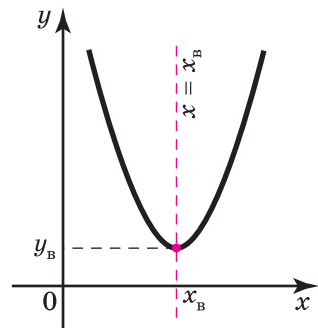
$$\text{Отже, } y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$$\text{Позначимо } x_B = -\frac{b}{2a}, y_B = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$$\text{Тоді } y = a(x - x_B)^2 + y_B.$$

Отже, графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = ax^2$ за допомогою двох перетворень – перенесень уздовж координатних осей.

Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці $(x_B; y_B)$, де $x_B = -\frac{b}{2a}$, $y_B = \frac{4ac - b^2}{4a}$ (мал. 11.3).



Мал. 11.3

Якщо $a > 0$, гілки параболи спрямовані вгору, якщо $a < 0$ – униз. Гілки параболи симетричні відносно прямої $x = x_B$. У цьому разі кажуть, що пряма $x = x_B$ є *віссю симетрії* параболи (мал. 11.3).

Зауважимо, що абсцису x_B вершини параболи зручно знаходити за формулою $x_B = -\frac{b}{2a}$, а ординату y_B – підставивши знайдене значення

абсциси у формулу $y = ax^2 + bx + c$, тобто $y_B = y(x_B)$.

Будуючи графік функції $f(x) = ax^2 + bx + c$, слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) знайти координати вершини параболи $x_B = -\frac{b}{2a}$, $y_B = f(x_B)$ і позначити її на координатній площині;
- 2) побудувати ще кілька точок параболи і стільки ж точок, симетричних їм відносно прямої $x = x_B$;
- 3) сполучити отримані точки плавною лінією.

4. Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$

Систематизуємо властивості у вигляді таблиці.

Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	
Область значень	$[y_B; +\infty)$	$(-\infty; y_B]$
Графік	парабола з вершиною $(x_B; y_B)$	
Напрямок гілок	угору	униз
Нулі функції	корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	
Зростає на проміжку	$[x_B; +\infty)$	$(-\infty; x_B]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; x_B]$	$[x_B; +\infty)$
Найбільше значення функції	–	y_B
Найменше значення функції	y_B	–

Приклад 3. Побудувати графік функції $f(x) = x^2 - 4x - 5$ та описати її властивості.

Розв'язання. Графіком функції є парабола, гілки якої спрямовані вгору. Знайдемо координати її вершини:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2, \quad y_B = f(x_B) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9.$$

Отже, точка $(2; -9)$ – вершина параболи, позначимо її на координатній площині. Тоді пряма $x = 2$ є віссю симетрії параболи.

Складемо таблицю значень функції для кількох точок параболи, симетричних відносно її осі симетрії (завдяки симетрії графіка ординати в кожній парі симетричних точок будуть однаковими).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

Позначимо вершину параболи і точки з таблиці на координатній площині. Сполучимо їх плавною лінією та отримаємо графік функції $f(x) = x^2 - 4x - 5$ (мал. 11.4).

Опишемо властивості цієї функції:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

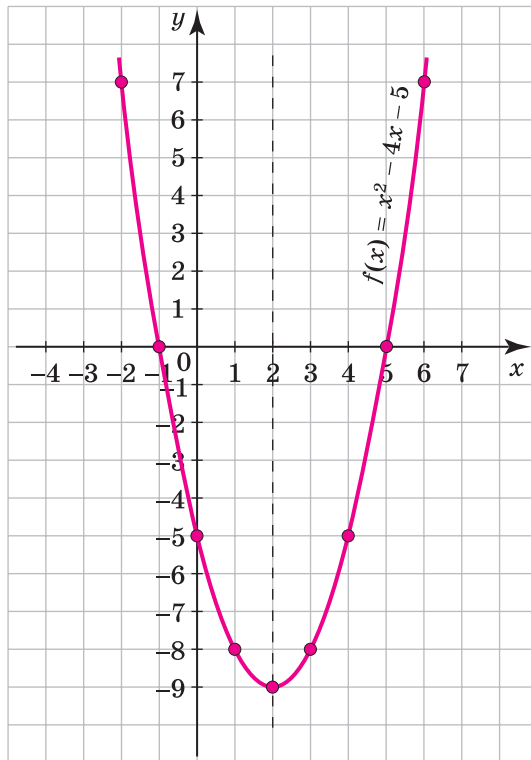
2) $E(f) = [-9; +\infty)$;

3) нулі функції: $x = -1$ і $x = 5$;

4) $y > 0$, якщо $x < -1$ або $x > 5$; $y < 0$, якщо $-1 < x < 5$;

5) функція зростає на проміжку $[2; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; 2]$;

6) найменше значення функції: $y_{\min} = -9$.



Мал. 11.4

5. Задачі, пов'язані з графіком квадратичної функції

Приклад 4. Вершиною параболи $y = ax^2 + 8x + c$ є точка $A(-2; 4)$.

Знайти a і c .

Розв'язання. Оскільки $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$, а за умовою $x_{\text{в}} = -2$, то $-2 = -\frac{8}{2a}$, звідки $a = 2$. Оскільки графік функції проходить через точку $A(-2; 4)$, то, підставивши координати точки у формулу функції, одержимо правильну рівність:

$$4 = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + c, \text{ звідки } c = 12.$$

Відповідь: $a = 2, c = 12$.



Яку функцію називають квадратичною? Сформулюйте властивості функції $y = ax^2$. Що є графіком квадратичної функції? Як його будують? Сформулюйте властивості функції $y = ax^2 + bx + c$.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

11.1. (Усно.) Яка з функцій є квадратичною:

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1) $y = -2x^2$; | 2) $y = -2x + 5$; |
| 3) $y = 5x^2 - 3x$; | 4) $y = \frac{1}{3x^2 - 2x + 5}$; |
| 5) $y = 3x^3 - 2x^2 + 5$; | 6) $y = 2x^2 + 3x - 9$? |

11.2. Випишіть функції, що є квадратичними:

- | | |
|--|--------------------------|
| 1) $y = 4x - 7$; | 2) $y = 4x^2 - 7x + 5$; |
| 3) $y = 3x^2$; | 4) $y = 2x^3 - 3x + 5$; |
| 5) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{7}$; | 6) $y = 9x^2 - 7$. |

11.3. Графіком якої з наведених функцій є парабола? Укажіть напрямки її гілок.

- | | | |
|---------------------------|---------------------|-------------------------|
| 1) $y = \frac{6}{x}$; | 2) $y = 6x^2 - 7$; | 3) $y = 6x - 7$; |
| 4) $y = -6x^2 + 5x + 5$; | 5) $y = 0,01x^2$; | 6) $y = -0,2x^2 - 5x$. |

11.4. Чи належить графіку функції $y = x^2 - 3x$ точка:

- | | | | |
|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| 1) $A(0; 0)$; | 2) $B(1; 2)$; | 3) $C(2; -3)$; | 4) $D(-1; 4)$? |
|----------------|----------------|-----------------|-----------------|

11.5. Чи належить графіку функції $y = x^2 + x$ точка:

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| 1) $A(0; 1)$; | 2) $B(2; 6)$; | 3) $C(1; 2)$; | 4) $D(-1; 1)$? |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|

11.6. Покажіть схематично, як розташовується в координатній площині графік функції:

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1) $y = 10x^2$; | 2) $y = -15x^2$. |
|------------------|-------------------|

11.7. Покажіть схематично, як розташовується в координатній площині графік функції:

- | | |
|------------------|-----------------|
| 1) $y = -7x^2$; | 2) $y = 5x^2$. |
|------------------|-----------------|

- 2** 11.8. Дано функцію $f(x) = \frac{1}{5}x^2$. 1) Заповніть у зошиті таблицю:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
$f(x)$						

- 2) побудуйте графік функції;
 3) знайдіть за графіком $f(-1,5)$, $f(2,5)$, $f(4,5)$;
 4) знайдіть за графіком такі значення x , що $f(x) = 1$, $f(x) = 3,5$;
 5) знайдіть проміжок зростання і проміжок спадання функції.

- 11.9. Дано функцію $g(x) = \frac{1}{4}x^2$. 1) Заповніть у зошиті таблицю:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$g(x)$					

- 2) побудуйте графік функції;
 3) знайдіть за графіком $g(-2,5)$, $g(1,5)$, $g(3,5)$;
 4) знайдіть за графіком такі значення x , що $g(x) = 1$, $g(x) = 2,5$;
 5) знайдіть проміжок зростання і проміжок спадання функції.

- 11.10. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = -2x^2$ із прямою:

- 1) $y = -8$; 2) $y = 10$;
 3) $y = 4x$; 4) $y = -6x$.

- 11.11. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 5x^2$ із прямою:

- 1) $y = 20$; 2) $y = -5$;
 3) $y = 10x$; 4) $y = -5x$.

- 11.12. Визначте напрямок гілок, знайдіть координати вершини та побудуйте схематично графік квадратичної функції:

- 1) $y = x^2 - 8x + 7$; 2) $y = -x^2 + 2x - 3$;
 3) $y = 0,2x^2 - 0,4x + 2$; 4) $y = -2x^2 + 6x - 3$.

- 11.13. Визначте напрямок гілок, знайдіть координати вершини та побудуйте схематично графік квадратичної функції:

- 1) $y = 3x^2 - 12x + 7$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

- 11.14. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка квадратичної функції з осями координат:

- 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = 2x^2 - x - 3$;
 3) $y = -x^2 + 8x + 9$; 4) $y = -3x^2 - 5x + 2$.

- 11.15. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка квадратичної функції з осями координат:

- 1) $y = x^2 + 4x - 5$; 2) $y = -5x^2 - 6x - 1$.

- 11.16. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = -x^2 + 6x$;
 3) $y = x^2 + 4x + 5$; 4) $y = -x^2 + 2x + 3$.

11.17. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 + 4x$; 2) $y = -x^2 + 2x$;
 3) $y = x^2 + 2x + 3$; 4) $y = -x^2 + 4x - 3$.

3 **11.18.** Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 2x - 3$. За графіком знайдіть:

- 1) $f(1)$, $f(-2,5)$, $f(1,5)$;
 2) значення x , за яких $f(x) = 5$, $f(x) = -4$, $f(x) = -2$;
 3) нулі функції;
 4) розв'язки нерівностей: $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$;
 5) найбільше та найменше значення функції;
 6) область значень функції;
 7) проміжки зростання та проміжки спадання функції.

11.19. Побудуйте графік функції $g(x) = -x^2 + 6x - 5$. За графіком знайдіть:

- 1) $g(1)$, $g(2,5)$, $g(4,5)$;
 2) значення x , за яких $g(x) = 4$, $g(x) = -5$, $g(x) = 2$;
 3) нулі функції;
 4) розв'язки нерівностей: $g(x) > 0$, $g(x) \leq 0$;
 5) найбільше та найменше значення функції;
 6) область значень функції;
 7) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

11.20. Графіком квадратичної функції є парабола з вершиною в початку координат, яка проходить через точку $A\left(-2; \frac{1}{3}\right)$. Задайте цю функцію формулою.**11.21.** Побудуйте графік квадратичної функції та за графіком знайдіть область значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $y = -4x^2 + 8x$; 2) $y = 2x^2 - 8x + 6$;
 3) $y = (x - 1)(x - 5)$; 4) $y = 2(x + 1)(x - 3)$.

11.22. Побудуйте графік квадратичної функції та за графіком знайдіть область значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $y = 2x^2 - 6x$; 2) $y = -3x^2 + 12x - 9$.

11.23. Графік функції $y = ax^2 + 2x + 3$ проходить через точку $B(1; -5)$. Знайдіть коефіцієнт a .**11.24.** Графік функції $y = 2x^2 + bx + 5$ проходить через точку $A(1; 9)$. Знайдіть коефіцієнт b .**11.25.** За яких значень b віссю симетрії параболи $y = x^2 + bx + c$ є пряма:

- 1) $x = -1$; 2) $x = 5$?

Чи впливає на відповідь значення коефіцієнта c ?

11.26. За якого значення a віссю симетрії параболи $y = ax^2 - 6x + 7$ є пряма $x = -1$?

11.27. Знайдіть такі точки параболи:

- 1) $y = x^2 - 6x + 10$, у яких абсциса дорівнює ординаті;
- 2) $y = x^2 - 7x + 8$, у яких абсциса й ордината – протилежні числа.

11.28. Знайдіть такі точки параболи:

- 1) $y = x^2 - 5x$, у яких абсциса дорівнює ординаті;
- 2) $y = x^2 + 2x - 10$, у яких абсциса й ордината – протилежні числа.

11.29. Доведіть, що всі точки параболи:

- 1) $y = x^2 - 2x + 3$ лежать вище від осі x ;
- 2) $y = -x^2 - 4x - 5$ лежать нижче від осі x .

11.30. Знайдіть точки перетину параболи $y = 2x^2 - 7x + 13$ з прямою $y = 2x + 3$.

11.31. Знайдіть точки перетину параболи $y = 5x^2 - 7x - 3$ з прямою $y = -x - 4$.

11.32. Тіло, що падає на землю, за t с долає відстань s м, де $s = \frac{gt^2}{2}$,



$g \approx 10$ м/с². Через який час тіло досягне поверхні землі, якщо в початковий момент воно перебуває на висоті 560 м?



11.33. З лука випущено стрілу вертикально вгору з початковою швидкістю 50 м/с. Залежність відстані s (у метрах) від стріли до землі від часу польоту t (у секундах) задається формулою $s = 50t - 5t^2$. Побудуйте схематично графік цієї залежності та за ним знайдіть:

- 1) якої найбільшої висоти сягне стріла;
- 2) проміжок часу, протягом якого вона летіла вгору, та проміжок часу, протягом якого вона падала вниз;
- 3) через скільки секунд після пуску стріла впала на землю.

11.34. М'яч підкинуто вертикально вгору з початковою швидкістю 15 м/с. Залежність відстані h (у метрах) від м'яча до землі від часу польоту t (у секундах) задається формулою $h = 15t - 5t^2$. Побудуйте схематично графік цієї залежності та за ним знайдіть:



- 1) якої найбільшої висоти сягне м'яч;
- 2) проміжок часу, протягом якого він рухався вгору, та проміжок часу, протягом якого він падав вниз;
- 3) через скільки секунд після підкидання м'яч упав на землю.

11.35. За яких значень b і c точка $N(5; 7)$ є вершиною параболи $y = x^2 + bx + c$?

11.36. За яких значень a і c точка $M(-3; -13)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + 12x + c$?

11.37. Точка $M(3; -2)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + bx + c$, яка перетинає вісь ординат у точці $N(0; 7)$. Знайдіть значення коефіцієнтів a , b і c .

11.38. У боковій стінці високого циліндричного бака біля самого дна закріплено кран. Після його відкриття вода починає витікати з бака, при цьому висота стовпа води в ньому, що виражена в метрах, змінюється за законом $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, де t – час у секундах, що минув з моменту відкриття крана, $H_0 = 5$ м – початкова висота стовпа води, $k = \frac{1}{50}$ – відношення площ поперечного перерізу крана і бака, $g \approx 10$ м/с² – прискорення вільного падіння. Через скільки секунд після відкриття крана:

- 1) висота стовпа води в баку буде 1,25 м;
- 2) вода з бака повністю витече?

11.39. У боковій стінці високого циліндричного бака біля самого дна закріплено кран. Після його відкриття вода починає витікати з бака, при цьому висота стовпа води в ньому, що виражена в метрах, змінюється за законом $H(t) = at^2 + bt + H_0$, де $H_0 = 8$ м – початковий рівень води, $a = \frac{1}{50}$ м/хв², $b = -\frac{4}{5}$ м/хв – сталі для цього бака. Через скільки секунд після відкриття крана:

- 1) висота стовпа води в баку буде 4,5 м;
- 2) вода з бака повністю витече?

11.40. За якого значення c найбільше значення функції $y = -x^2 + 6x + c$ дорівнює 16?

11.41. За якого значення c найменше значення функції $y = x^2 - 4x + c$ дорівнює 4?

11.42. За яких значень c функція $y = x^2 + 8x + c$ для всіх значень x набуває лише додатних значень?

11.43. За яких значень c функція $y = -x^2 + 2x + c$ для всіх значень x набуває лише від'ємних значень?



11.44. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 6|x| + 5$;
- 2) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

11.45. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 4|x| + 3$;
- 2) $y = |x^2 - 4x + 3|$.



Вправи для повторення

11.46. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x + 2}$;
- 2) $y = \sqrt{x} + 2$.

11.47. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

- 1) $f(x) = 3x^2$ і $g(x) = -6x$;
- 2) $\varphi(x) = x^2 + x$ і $\psi(x) = 2$.

11.48. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{3 + x}{3x^2 + 2x - 5};$$

$$2) y = \sqrt{x - 5}.$$

11.49. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = \frac{6}{x}$ та $y = x + 1$. Накресліть графіки цих функцій і позначте на них знайдені точки.

11.50. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x + 3} = \frac{4}{x} - 2$.

11.51. Знайдіть нулі функції:

$$1) f(x) = (x - 1)(x + 2)\sqrt{|x| - 3};$$

$$2) g(x) = x(x - 3)\sqrt{|x| - 2}.$$



Життєва математика

11.52. В одній із секцій національного мультипредметного тесту (НМТ) із математики, який відбувся 2024 року, взяло участь 20 206 осіб. Завдання № 21 правильно розв'язали лише 5,1 % від кількості учасників. Скільки учасників НМТ правильно розв'язали завдання № 21?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.53. Які із чисел $-2, -1, 0, 1, 2$ є розв'язками нерівності:

$$1) x^2 + 2x - 3 > 0;$$

$$2) x^2 + x - 2 \leq 0;$$

$$3) x^2 + x \geq 0;$$

$$4) x^2 - 3x < 0?$$

11.54. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$2) -2x^2 + 3x + 5 = 0;$$

$$3) x^2 + 18x = 0;$$

$$4) 4x^2 - 9 = 0.$$



Цікаві задачі – поміркуй одначе

11.55. На яке натуральне число слід поділити число 180, щоб остача від ділення становила 25 % від частки?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§ 8–11)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



1. Дано $f(x) = x^2 - x$. Знайдіть $f(-1)$.

А. -2

Б. 0

В. 2

Г. 1

2. Щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, треба графік функції $y = x^2$ перенести на 2 одиниці...

А. вліво

Б. вгору

В. вниз

Г. вправо

3. Укажіть функцію, що є квадратичною:

А. $y = -2x^2 + 3x + 7$

Б. $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$

В. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Г. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

2 4. Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 4x$.

А. 0

Б. 4

В. 0; -4

Г. 0; 4

5. Укажіть значення x , за якого значення функції $y = 2x + 5$ дорівнюватиме 7.

А. 7

Б. -1

В. 1

Г. 0

6. Не виконуючи побудови, знайдіть усі точки перетину графіків функцій $y = -3x^2$ та $y = 9x$.

А. (0; 0)

Б. (0; 0), (-3; -27)

В. (0; 0), (-3; 0)

Г. (0; 0), (3; 27)

3 7. Побудуйте схематично графік функції $y = -x^2 + 2x - 3$ та вкажіть область значень цієї функції.

А. $(-\infty; -2)$

Б. $[-2; +\infty)$

В. $(-\infty; -2]$

Г. $(-\infty; 2]$

8. Побудуйте схематично графік функції $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ та вкажіть проміжок зростання цієї функції.

А. $(-\infty; 4]$

Б. $[-8; +\infty)$

В. $[-4; +\infty)$

Г. $[4; +\infty)$

9. Укажіть область визначення функції $y = \frac{5}{|x-1|-3}$.

А. $(-\infty; -2) \cup (-2; 4) \cup (4; +\infty)$

Б. $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

В. $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

Г. $(-\infty; +\infty)$

4 10. Укажіть область значень функції $y = 4 - \frac{1}{2}|x|$.

А. $(-\infty; 4)$

Б. $[4; +\infty)$

В. $(-\infty; 4]$

Г. $(-\infty; +\infty)$

11. За яких значень a і c точка $M(-1; 4)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + 2x + c$?

А. $a = 1, c = 3$

Б. $a = 1, c = 5$

В. $a = 1, c = -5$

Г. $a = -1, c = 7$

12. Скільки нулів має функція $y = \frac{(x^2 - 9)\sqrt{|x| - 4}}{x}$?

А. 1

Б. 2

В. 3

Г. 4

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. Установіть відповідність між функцією (1–3) та областю її визначення (А–Г).

Функція

Область визначення функції

1. $y = \frac{15}{1-x^2}$

А. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

2. $y = \frac{4}{x^2 - 2x - 3}$

Б. $(-1; +\infty)$

В. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Г. $(-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 8–11

1. Для функції $f(x) = x^2 + x$ знайдіть:

- 1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(-3)$.

2. Як із графіка функції $y = x^2$ отримати графік функції:

- 1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = (x + 5)^2$?

3. Які з функцій є квадратичними:

- 1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = \frac{1}{x^2 - 4x}$;
3) $y = x^3 + x + 3$; 4) $y = x^2 + x + 3$?

4. Знайдіть нулі функції:

- 1) $y = -2x + 7$; 2) $y = x^2 - 5x + 6$.

5. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x-3}$; 2) $y = \sqrt{x} - 3$.

6. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = -4x^2$ та $y = 2x$.

7. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{15x}{2x^2 + 3x - 5}$;

2) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{8-2x}}$.

8. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x - 3$. За графіком знайдіть:

- 1) область значень функції;
2) проміжок зростання і проміжок спадання функції.

9. За яких значень b і c точка $A(2; -1)$ є вершиною параболи $y = 2x^2 + bx + c$?

Додаткові завдання

4 10. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2} = \frac{6}{x} + 1$ графічно.

11. Скільки нулів має функція $f(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{|x| - 2}$?

§ 12. Квадратна нерівність

1. Означення квадратної нерівності

Нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають **квадратними нерівностями** (або **нерівностями другого степеня з однією змінною**).

Наприклад, квадратними є нерівності: $2x^2 + 3x - 5 > 0$, $4x^2 - 8 \geq 0$, $7x^2 - 9x < 0$, $x^2 - 9x + 17 \leq 0$.

Розв'язки квадратних нерівностей можна розглядати як проміжки, на яких квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних (для нерівності $ax^2 + bx + c > 0$), невід'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c \geq 0$), від'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c < 0$) і недодатних (для нерівності $ax^2 + bx + c \leq 0$) значень. Отже, щоб розв'язати квадратну нерівність, достатньо знайти відповідні проміжки знакосталості квадратичної функції.

2. Розв'язування квадратних нерівностей у разі, коли рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різних корені

Розглянемо спочатку приклади нерівностей, для яких графік функції $y = ax^2 + bx + c$ двічі перетинає вісь абсцис, тобто у разі, коли дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ є додатним числом.

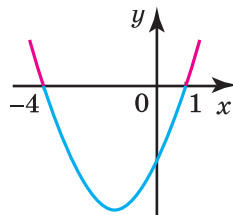
Приклад 1. Розв'язати нерівність $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = x^2 + 3x - 4$. Графіком її є парабола, гілки якої спрямовані вгору. З'ясуємо, чи перетинає парабола вісь x . Для цього розв'яжемо рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$, тобто знайдемо нулі функції. Маємо: $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами 1 і -4. Будуємо схематично графік функції $y = x^2 + 3x - 4$, знаючи її нулі та напрямок гілок (мал. 12.1).

За графіком з'ясуємо, що функція набуває від'ємних значень, коли $x \in (-4; 1)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 < 0$ є проміжок $(-4; 1)$.

Відповідь: $(-4; 1)$.



Мал. 12.1

Приклад 2. Розв'язати нерівність: 1) $x^2 + 3x - 4 \leq 0$;

2) $x^2 + 3x - 4 > 0$; 3) $x^2 + 3x - 4 \geq 0$.

Розв'язання. Розглянемо схематичне зображення графіка функції $y = x^2 + 3x - 4$ (мал. 12.1).

1) Нерівність $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ задовольняють ті самі значення x , що й нерівність $x^2 + 3x - 4 < 0$, а також числа -4 і 1 – нулі функції, тобто ті значення аргументу, за яких значення функції $y = x^2 + 3x - 4$ дорівнює нулю. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ є проміжок $[-4; 1]$.

2) З малюнка 12.1 бачимо, що функція $y = x^2 + 3x - 4$ набуває додатних значень, якщо $x \in (-\infty; -4)$ або $x \in (1; +\infty)$. Множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 > 0$ є об'єднання цих проміжків, тобто $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

3) Нерівність $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ задовольняють ті самі значення x , що й нерівність $x^2 + 3x - 4 > 0$, включаючи нулі функції $y = x^2 + 3x - 4$, тобто числа -4 і 1 . Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ є $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Відповідь: 1) $[-4; 1]$;

2) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$;

3) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

3. Схема розв'язування квадратної нерівності

Зауважимо, що для запропонованого способу розв'язування ані положення вершини параболи, ані розташування параболи відносно осі y не мають значення. Важливо лише знати абсциси точок перетину параболи з віссю x (нулі функції) і напрямок гілок параболи (угору чи вниз).

Отже, для розв'язування квадратних нерівностей слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (якщо вони існують);
- 2) якщо нерівність має строгий знак ($>$ чи $<$), то корені квадратного тричлена позначаємо на осі x «виколотими» точками (вони виключатимуться із множини розв'язків нерівності); якщо знак нерівності нестрогий ($\geq$ чи $\leq$), то корені квадратного тричлена позначаємо зафарбованими точками (вони включатимуться до множини розв'язків нерівності);
- 3) схематично зображуємо графік функції $y = ax^2 + bx + c$, урахувавши напрямок гілок параболи та точки її перетину з віссю x (якщо вони існують);
- 4) знаходимо на осі x проміжки, на яких функція $y = ax^2 + bx + c$ задовольняє цю нерівність;
- 5) записуємо відповідь.

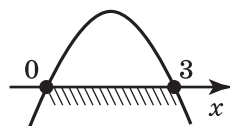
Приклад 3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{3x - x^2}$.

Розв'язання. Областю визначення цієї функції є розв'язки нерівності $3x - x^2 \geq 0$.

1) Коренями квадратного тричлена $3x - x^2$ є числа 0 і 3.

2) Зображуємо корені на осі x зафарбованими точками, оскільки знак нерівності є нестрогим.

3) Схематично зображуємо графік функції $y = 3x - x^2$. Це парабола, що перетинає вісь x у точках 0 і 3, гілки якої спрямовані униз (мал. 12.2).



Мал. 12.2

4) Нерівність справджується для $x \in [0; 3]$.

Відповідь: $[0; 3]$.

4. Розв'язування квадратних нерівностей у разі, якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один корінь

Далі розглянемо приклади нерівностей, для яких графік функції $y = ax^2 + bx + c$ дотикається до осі абсцис, тобто у разі, якщо дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнює 0.

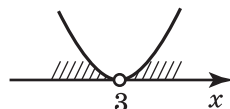
Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 6x + 9 > 0$.

Розв'язання. 1) Коренем квадратного тричлена $x^2 - 6x + 9$ є число 3.

2) Позначаємо точку 3 на осі x «виколотою», бо знак нерівності – строгий.

3) Схематично зображуємо графік функції $y = x^2 - 6x + 9$ (мал. 12.3). Це парабола з вершиною на осі x , її гілки спрямовані вгору. З віссю x вона має лише одну спільну точку – точку 3 (кажуть, що парабола дотикається до осі x).

4) За малюнком 12.3 робимо висновок, що функція набуває додатних значень за будь-якого значення x , крім числа 3. Отже, множиною розв'язків нерівності є $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.



Мал. 12.3

Відповідь: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

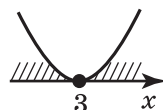
Зауважимо, що відповідного висновку можна було дійти і записавши нерівність у вигляді $(x - 3)^2 > 0$.

Приклад 5. Розв'язати нерівності:

1) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$; 2) $x^2 - 6x + 9 < 0$;

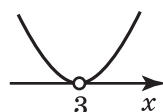
3) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$.

Розв'язання. 1) Нерівність $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ задовольняють ті самі числа, що й нерівність $x^2 - 6x + 9 > 0$, а також число 3 – нуль функції (мал. 12.4). Тому множиною розв'язків нерівності $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ є множина всіх дійсних чисел, тобто $(-\infty; +\infty)$.



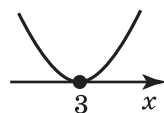
Мал. 12.4

2) З малюнка 12.5 бачимо, що жодна точка з точок параболи не лежить нижче від осі x , а тому нерівність $x^2 - 6x + 9 < 0$ розв'язків не має.



Мал. 12.5

- 3) Жодна з точок параболи не лежить нижче від осі x , проте точка з абсцисою 3 належить цій осі, а тому задовольняє нерівність (мал. 12.6). Отже, єдиним розв'язком нерівності $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ є число 3.



Мал. 12.6

Відповідь: 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) немає розв'язків; 3) $x = 3$.

Зауважимо, що ці відповіді можна було отримати, подавши ліві частини нерівностей у вигляді $(x - 3)^2$.

5. Розв'язування квадратних нерівностей у разі, якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має розв'язків

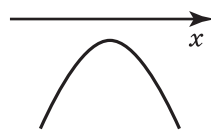
Наостанок розглянемо приклади нерівностей, для яких графік функції $y = ax^2 + bx + c$ не перетинає вісь абсцис, тобто якщо дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ є від'ємним числом.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $-x^2 + 2x - 7 < 0$.

- Розв'язання. Рівняння $-x^2 + 2x - 7 = 0$ коренів не має, адже $D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = -24 < 0$. Отже, парабола $y = -x^2 + 2x - 7$ вісь x не перетинає, а її гілки спрямовані униз (мал. 12.7).

- Оскільки всі точки параболи лежать нижче від осі x , то множиною розв'язків нерівності $-x^2 + 2x - 7 < 0$ є множина всіх дійсних чисел, тобто $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.



Мал. 12.7

Приклад 7. Розв'язати нерівність $-x^2 + 2x - 7 \geq 0$.

- Розв'язання. З малюнка 12.7 бачимо, що жодна з точок параболи не лежить вище від осі x і не належить цій осі, тому нерівність $-x^2 + 2x - 7 \geq 0$ не має розв'язків.

Відповідь: немає розв'язків.

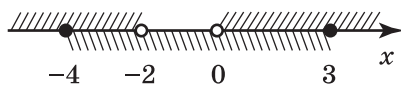
6. Розв'язування систем, що містять квадратні нерівності

Приклад 8. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ x^2 + x - 12 \leq 0. \end{cases}$$

- Розв'язання. Розв'язком системи нерівностей є спільні розв'язки нерівностей системи. Отже, щоб знайти розв'язки системи, треба розв'язати кожену нерівність окремо і знайти їх спільні розв'язки. Множиною розв'язків нерівності $x^2 + 2x > 0$ є $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ (розв'яжіть цю нерівність самостійно). Множиною розв'язків нерівності $x^2 + x - 12 \leq 0$ є $[-4; 3]$ (розв'яжіть цю нерівність самостійно). Зобразимо на координатній прямій отримані множини розв'язків не-

- рівностей (мал. 12.8). Множиною розв'язків системи буде перетин множин розв'язків нерівностей, тобто $[-4; -2) \cup (0; 3]$.



Мал. 12.8

Відповідь: $[-4; -2) \cup (0; 3]$.



Які нерівності називають квадратними? Як розв'язати квадратну нерівність?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 12.1. (Усно.) Які з нерівностей є квадратними:

- 1) $2x + 3 > 0$; 2) $3x^2 - 7x - 5 \geq 0$; 3) $\frac{1}{x^2 - 5x} < 0$;
 4) $9x^2 - 3x^3 \leq 0$; 5) $x^2 + 7x < 0$; 6) $x^2 + 9 \geq 0$?

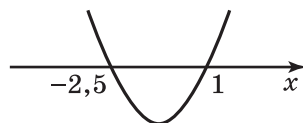
12.2. Які із чисел -3 ; 0 ; 2 є розв'язками квадратної нерівності:

- 1) $x^2 - x > 0$; 2) $x^2 - x + 2 > 0$; 3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$?

12.3. Які із чисел -2 ; 0 ; 1 є розв'язками квадратної нерівності:

- 1) $x^2 + x > 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 < 0$; 3) $3x^2 - x + 2 > 0$?

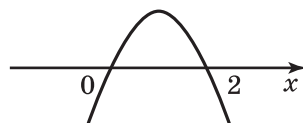
12.4. На малюнку 12.9 схематично зображено графік функції $y = 2x^2 + 3x - 5$. Використовуючи графік, запишіть розв'язки нерівності:



Мал. 12.9

- 1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$; 2) $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$;
 3) $2x^2 + 3x - 5 < 0$; 4) $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$.

12.5. На малюнку 12.10 схематично зображено графік функції $y = -x^2 + 2x$. Використовуючи графік, запишіть розв'язки нерівності:



Мал. 12.10

- 1) $-x^2 + 2x < 0$; 2) $-x^2 + 2x \leq 0$;
 3) $-x^2 + 2x > 0$; 4) $-x^2 + 2x \geq 0$.

2 12.6. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 3x \geq 0$; 2) $x^2 + 5x < 0$;
 3) $-x^2 + 8x \leq 0$; 4) $-x^2 - 7x > 0$.

12.7. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 6x < 0$; 2) $x^2 + 2x \geq 0$;
 3) $-x^2 + 7x > 0$; 4) $-x^2 - x \leq 0$.

12.8. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 16 \leq 0$; 2) $x^2 - 4 > 0$;
 3) $-x^2 + 1 \geq 0$; 4) $25 - x^2 < 0$.

12.9. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 36 > 0$; 2) $x^2 - 100 \leq 0$;
3) $-x^2 + 64 < 0$; 4) $9 - x^2 \geq 0$.

12.10. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $x^2 - 3x - 40 \geq 0$; 2) $x^2 - 8x + 15 < 0$;
3) $-x^2 + 6x + 7 \leq 0$; 4) $-x^2 - 5x - 4 > 0$.

12.11. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $x^2 - 7x + 12 \leq 0$; 2) $x^2 - 2x - 24 > 0$;
3) $-x^2 - x + 6 \geq 0$; 4) $-x^2 + 3x + 10 < 0$.

12.12. Знайдіть, за яких значень x квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - 5x - 6$ набуває додатних значень;
2) $x^2 + x - 12$ набуває від'ємних значень.

12.13. Знайдіть, за яких значень x квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - x - 2$ набуває від'ємних значень;
2) $x^2 + 2x - 8$ набуває додатних значень.

12.14. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 < 4$; 2) $x^2 \geq 100$; 3) $x^2 \leq 7x$; 4) $-x^2 > -3x$.

12.15. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 > 9$; 2) $x^2 \leq 1$; 3) $x^2 \geq 4x$; 4) $-x^2 < -5x$.

12.16. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 + 2x - 7 > 0$; 2) $x^2 - x - 3 \leq 0$.

12.17. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 4x - 3 < 0$; 2) $x^2 + x - 5 \geq 0$.

12.18. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{12 - x - x^2}}$.

12.19. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{3 - x^2 + 2x}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$.

12.20. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$; 2) $25 - 20x + 4x^2 < 0$;
3) $9x^2 - 6x + 1 > 0$; 4) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$;
5) $-x^2 - 2x - 1 < 0$; 6) $10x - x^2 - 25 \geq 0$;
7) $-25x^2 + 30x - 9 \leq 0$; 8) $-49x^2 - 70x - 25 > 0$.

12.21. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $x^2 + 8x + 16 < 0$; 2) $25x^2 - 10x + 1 \geq 0$;
3) $9 - 6x + x^2 \leq 0$; 4) $100x^2 - 120x + 36 > 0$;
5) $2x - x^2 - 1 \geq 0$; 6) $-64x^2 - 112x - 49 \leq 0$;
7) $-36x^2 + 60x - 25 > 0$; 8) $-x^2 + 16x - 64 < 0$.

12.22. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності:

- 1) $2x^2 - 5x + 2 < 0$; 2) $9x - 2x^2 - 4 \geq 0$.

12.23. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності:

1) $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$;

2) $4 - 11x - 3x^2 > 0$.

12.24. Національний університет «Острозька академія» – один з найдавніших навчальних закладів Європи і перший – створений в Україні – заснований у 1576 р. Від самого початку свого існування академія була надзвичайно прогресивною. Знайдіть суму всіх цілих розв'язків нерівності $19x + 51 - 10x^2 \geq 0$, відтак дізнаєтеся, скільки іноземних мов вивчали перші студенти цієї академії.



12.25. 2025 року в Канаді відбулися «Ігри нескорених» (*Invictus Games*), у яких брали участь спортсмени з України. Розв'яжіть нерівність $49x - 5x^2 - 72 \geq 0$. Добуток найменшого і найбільшого натуральних розв'язків нерівності підкажуть вам, скільки медалей спортсмени України здобули в зимових видах цих змагань.



12.26. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + x + 7 \geq 0$;

2) $x^2 - 2x + 5 < 0$;

3) $-x^2 - 2x - 9 \leq 0$;

4) $-3x^2 + 4x - 5 > 0$.

12.27. Розв'яжіть нерівність:

1) $6x^2 + x + 1 > 0$;

2) $x^2 - 3x + 7 \leq 0$;

3) $-x^2 + 4x - 9 < 0$;

4) $-x^2 - 2x - 5 \geq 0$.

12.28. Доведіть, що за будь-якого значення x справджується нерівність:

1) $3x^2 - x + 1 > 0$;

2) $6x < x^2 + 10$.

12.29. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $4x^2 + 11x - 20 < 0$;

2) $-3x^2 + 11x + 34 \geq 0$.

12.30. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $-3x^2 - 11x + 14 \geq 0$;

2) $12x^2 + 16x - 3 < 0$.

12.31. Розв'яжіть нерівність:

1) $2x^2 - 3x \leq 2(x - 1)$;

2) $4x(x + 2) > 5$;

3) $x(x - 8) > (2x - 1)^2$;

4) $3x(x - 2) + 1 > (x - 1)^2$.

12.32. Розв'яжіть нерівність:

1) $4x(x - 1) \leq 3$;

2) $(x + 2)^2 < 2x(x + 3) + 5$.

12.33. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{x - 2}$;

2) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 2}$.

12.34. Мотоциклістка, що рухається по мосту зі швидкістю $v_0 = 54$ км/год, виїжджає з нього і одразу після виїзду починає розганятися зі сталим прискоренням $a = 8$ км/год². Відстань від мотоциклістки до міста, що вимірюється в кілометрах, визначається формулою $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Оператор мобільного зв'язку гарантує стабільний зв'язок на відстані не далі, ніж 28 км від міста. Протягом якого часу мотоциклістка матиме стабільний мобільний зв'язок (відповідь дайте у хвилинах)?

12.35. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \geq 0, \\ 2x - 6 > 0. \end{cases}$$

12.36. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2x^2 + 5x - 18 \geq 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - 10x - 24 < 0, \\ 2x - 16 \geq 0. \end{cases}$$

4 **12.37.** Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ 0 \leq x < 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0, \\ x^2 + x - 6 \leq 0. \end{cases}$$

12.38. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ -1 < x < 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 \geq 0, \\ x^2 - 9 \leq 0. \end{cases}$$

12.39. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2 - 8x + 15}{(x - 4)^2} \leq 0; \quad 2) \frac{x^2 + x - 2}{|x - 2|} > 0.$$

12.40. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі

$$\sqrt{x^2 - 9} + \frac{1}{\sqrt{4 + 3x - x^2}}.$$

12.41. Знайдіть область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}} + \sqrt{8x - x^2 - 15}.$$

✳ **12.42.** За яких значень a не має коренів рівняння:

$$1) x^2 - (a - 2)x + 4 = 0; \quad 2) (a + 1)x^2 + 5ax + 3a = 0?$$

12.43. За яких значень a рівняння має два різних корені:

$$1) x^2 - ax + (2a - 3) = 0; \\ 2) ax^2 + (3a - 2)x + a = 0?$$

12.44. За яких значень a рівняння:

$$1) x^2 - (a + 1)x + 9 = 0 \text{ не має коренів;} \\ 2) ax^2 + (2a - 1)x + a = 0 \text{ має два різних корені?}$$

12.45. За яких значень m розв'язком нерівності є будь-яке число:

1) $x^2 - (m + 2)x + (8m + 1) > 0$; 2) $mx^2 - 4x + m + 3 < 0$?



Вправи для повторення

12.46. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 2x + 8$. За графіком знайдіть:

- 1) область значень функції;
2) проміжок зростання функції.

12.47. Доведіть, що $26x^2 - 10x + 2xy + y^2 + 2 > 0$ за будь-яких значень x та y .

12.48. Одним з коренів рівняння $x^3 - 2x^2 - x + a = 0$ є число -1 . Знайдіть решту коренів цього рівняння.



Життєва математика

12.49. Бабусі Мар'яні призначено ліки, діючу речовину яких треба вживати по 0,5 г 3 рази на добу протягом 14 днів. Одна упаковка ліків містить 10 пігулок по 0,25 г діючої речовини в кожній пігулці. Якої найменшої кількості упаковок цих ліків вистачить на весь курс лікування?



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

12.50. Чи є пара чисел $(-1; 2)$ розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 4x - 5y = -14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - x = 7, \\ 4x + 5y = 5? \end{cases}$

12.51. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

1) $\begin{cases} 2x + 7y = -3, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 5y = -16, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

12.52. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x + 7y = -5, \\ 3x - 4y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y = -19, \\ 7x - y = -3. \end{cases}$

12.53. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 5x - 2y = -18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 5y = 11, \\ 3x + 5y = -1. \end{cases}$



Цікаві задачі – поміркуй одначе

12.54. Відомо, що числа a , b і $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ є раціональними. Чи можна стверджувати, що числа $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ теж раціональні?

§ 13. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними

1. Система рівнянь із двома змінними та її розв'язок



У 7 класі ви розв'язували системи двох лінійних рівнянь із двома змінними, тобто системи, у яких обидва рівняння мають вигляд $ax + by = c$, де a, b, c – числа, x та y – змінні. Наприклад, такою є система

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 2x - y = 11. \end{cases}$$

Нагадаємо, що *розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають таку пару значень змінних, за яких кожне з рівнянь системи перетворюється на правильну числову рівність.*

Так, розв'язком наведеної вище системи є пара чисел $(5; -1)$, тобто $x = 5$, $y = -1$. Справді: $5 + 3 \cdot (-1) = 2$ і $2 \cdot 5 - (-1) = 11$ – правильні числові рівності.

2. Поняття степеня рівняння з двома змінними

Рівняння $ax + by = c$ за умови, коли хоча б один з коефіцієнтів a чи b відмінний від нуля, називають *рівнянням першого степеня з двома змінними*. Це рівняння можна замінити рівносильним йому рівнянням $ax + by - c = 0$, ліва частина якого – многочлен стандартного вигляду першого степеня з двома змінними, а права – дорівнює нулю.

У такий спосіб можна визначити степінь будь-якого рівняння з двома змінними (та й взагалі з більшою кількістю змінних). Для цього достатньо замінити рівняння рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого – многочлен стандартного вигляду, а права – число нуль. Степінь многочлена і буде *степенем рівняння*.

Так, наприклад, $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ – рівняння другого степеня, рівняння $(x^2 + y)^2 = x^4 + 3y^2 + 7$ рівносильне рівнянню $2x^2y - 2y^2 - 7 = 0$ і, отже, є рівнянням третього степеня.

Розглянемо системи рівнянь, у яких одне або обидва рівняння є рівняннями другого степеня з двома змінними, та способи розв'язування таких систем.

3. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними графічно

Системи рівнянь другого степеня з двома змінними графічно розв'язують так само, як і системи двох лінійних рівнянь із двома змінними.

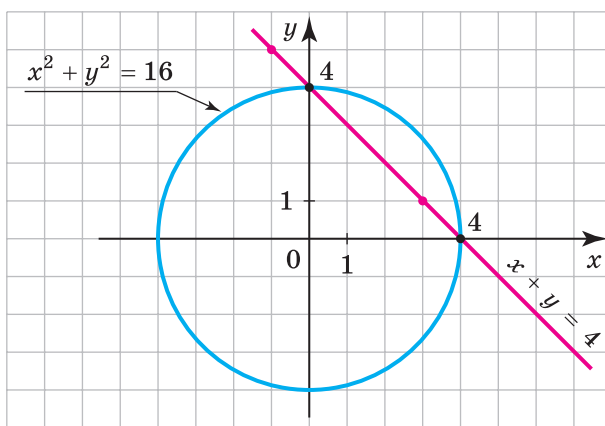
Нагадаємо послідовність кроків для розв'язування системи рівнянь графічно:

- 1) побудувати графіки рівнянь в одній координатній площині;
- 2) знайти координати їхніх точок перетину або впевнитися, що графіки рівнянь спільних точок не мають;
- 3) якщо координати точок перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язки системи знайти наближено;
- 4) записати відповідь.

На відміну від лінійних рівнянь, графіком яких є пряма, графіки рівнянь другого степеня є досить різними. Так, наприклад, графіком рівняння $y = x^2$ (або рівносильного йому рівняння $y - x^2 = 0$) є парабола, графіком рівняння $y = \frac{6}{x}$ (або рівносильного йому рівняння $xy = 6$) є гіпербола, а графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло.

Приклад 1. Розв'язати графічно систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 4. \end{cases}$

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки рівнянь $x^2 + y^2 = 16$ та $x + y = 4$. Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 16$ є коло із центром у початку координат і радіусом 4. Графіком рівняння $x + y = 4$ є пряма, що проходить через точки $(-1; 5)$ і $(3; 1)$. Графіки зображено на малюнку 13.1, вони мають дві спільні точки $(0; 4)$ і $(4; 0)$. Перевіркою впевнюємося, що ці пари чисел є розв'язками системи.



Мал. 13.1

Відповідь: $(0; 4), (4; 0)$.

4. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними способом підстановки

Якщо в системі рівнянь із двома змінними одне з рівнянь є рівнянням першого степеня, то таку систему завжди можна розв'язати спосо-

бом підстановки. Нагадаємо послідовність кроків для розв'язування системи рівнянь цим способом:

- 1) виразити в рівнянні першого степеня одну змінну через іншу;
- 2) підставити отриманий вираз у друге рівняння системи замість відповідної змінної;
- 3) розв'язати отримане рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідні значення другої змінної;
- 5) записати відповідь.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Виразимо з другого рівняння змінну x через змінну y :
 $x = 5 - 3y$. Підставимо в перше рівняння замість x вираз $5 - 3y$ та отримаємо рівняння зі змінною y : $3y^2 - (5 - 3y)y = -1$.

Після спрощення матимемо рівняння $6y^2 - 5y + 1 = 0$, корені якого

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{3}.$$

За формулою $x = 5 - 3y$ знаходимо значення x , що відповідають знайденим значенням y :

$$x_1 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}, \quad x_2 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

Отже, система має два розв'язки:

$$x_1 = 3\frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{2} \quad \text{та} \quad x_2 = 4, \quad y_2 = \frac{1}{3}.$$

Оформити розв'язання в зошиті можна так:

$$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 3y^2 - xy = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 3y^2 - (5 - 3y)y = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 6y^2 - 5y + 1 = 0; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} D = 1, \\ y_1 = 0,5, \quad y_2 = \frac{1}{3} \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} y = 0,5, \\ x = 5 - 3 \cdot 0,5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3}, \\ x = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3,5, \\ y = 0,5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $(3,5; 0,5), \left(4; \frac{1}{3}\right)$.

5. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними способом додавання

Як і для систем двох лінійних рівнянь із двома змінними, цей спосіб використовують, зокрема, коли в результаті почленного додавання рівнянь системи отримуємо рівняння з однією змінною.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + xy = 20, \\ x - xy = -10. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо почленно обидва рівняння системи, матимемо: $2x = 10$, тобто $x = 5$.

Підставивши знайдене значення x , наприклад, у перше рівняння, отримаємо:

$5 + 5y = 20$, тобто $y = 3$. Отже, $x = 5$, $y = 3$.

Оформити розв'язання в зошиті можна так:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x + xy = 20, \\ x - xy = -10; \end{array} \right. + \\ \hline 2x = 10, \\ x = 5. \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ 5 + 5y = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ 5y = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$

Відповідь: (5; 3).

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 21, \\ x + xy = 9. \end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо друге рівняння на -2 . Маємо:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 21, \\ -2x - 2xy = -18. \end{cases}$$

Додамо почленно рівняння системи, отримаємо: $x^2 - 2x = 3$. Маємо рівняння: $x^2 - 2x - 3 = 0$, корені якого: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Знайдемо відповідні значення y , підставивши ці значення x у друге рівняння початкової системи:

1) нехай $x = -1$, тоді $-1 - y = 9$, тобто $y = -10$;

2) нехай $x = 3$, тоді $3 + 3y = 9$, тобто $y = 2$.

Відповідь: $(-1; -10)$, $(3; 2)$.

6. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними за допомогою заміни змінних

Деякі системи рівнянь другого степеня (а також системи, що містять рівняння вищих степенів) зручно розв'язувати, використовуючи заміну змінних.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

Розв'язання. Уведемо заміну: $x + y = u$, $xy = v$. Матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u + v = 11, \\ uv = 30. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему способом підстановки (зробіть це самостійно), отримаємо $u_1 = 5$, $v_1 = 6$ або $u_2 = 6$, $v_2 = 5$.

Повертаємося до змінних x та y :

1) якщо $\begin{cases} u = 5, \\ v = 6, \end{cases}$ то $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, матимемо:

$$x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 2;$$

2) якщо $\begin{cases} u = 6, \\ v = 5, \end{cases}$ то $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5. \end{cases}$

Отримаємо ще дві пари чисел: $x_3 = 5$, $y_3 = 1$; $x_4 = 1$, $y_4 = 5$.

Відповідь: (2; 3), (3; 2), (5; 1), (1; 5).

А ще раніше...

Ще в давньовавилонських текстах, які датовані III–II тисячоліттями до н. е., траплялося чимало задач, що зводилися до систем рівнянь другого степеня. Ось одна з них.

Задача. Площі двох своїх квадратів я склав і отримав $25\frac{5}{12}$. Сторона другого складає $\frac{2}{3}$ від сторони першого і ще 5. Знайти сторони цих квадратів.

Система рівнянь до задачі в сучасних записах матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12}, \\ y = \frac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

Для її розв'язування автор підносить до квадрата ліву й праву частини другого рівняння:

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25$$

та підставляє знайдене значення виразу y^2 в перше рівняння і зводить подібні доданки:

$$1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}.$$

Далі автор розв'язує це рівняння, знаходить x , а потім y .

Діофант, не маючи позначень для кількох невідомих, під час розв'язування задачі обирав невідому величину так, щоб звести розв'язування системи до розв'язування єдиного рівняння.

Задача. Записати два числа, коли відомо, що їх сума дорівнює 20, а сума їх квадратів – 208.

Сучасні математики звели б цю задачу до системи

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 + y^2 = 208. \end{cases}$$

Проте Діофант обирав невідомою величиною половину різниці шуканих чисел та отримував (у сучасних позначеннях) систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = z, \\ \frac{1}{2}(x + y) = 10. \end{cases}$$

Спочатку додаючи ці рівняння, а потім віднімаючи перше від другого, Діофант отримував: $x = z + 10$, $y = 10 - z$ і підставляв знайдені вирази у друге рівняння початкової системи:

$$x^2 + y^2 = (z + 10)^2 + (10 - z)^2 = 2z^2 + 200,$$

щоб отримати рівняння з однією змінною: $2z^2 + 200 = 208$, звідки $z = 2$. (Діофант розглядав лише невід'ємні числа, тому корінь $z = -2$ не розглянув).

Тоді $x = 2 + 10 = 12$, $y = 10 - 2 = 8$.

У XVII–XVIII ст. прийоми розв'язування систем лінійних рівнянь у загальному вигляді за допомогою методу виключення невідомих розглядали математики П'єр Ферма, Ісаак Ньютон, Готфрід Лейбніц, Леонард Ейлер, Етьєн Безу, Ж.-Л. Лагранж та інші.

Завдяки методу координат, який запропонували в XVII ст. П. Ферма і Р. Декарт, стало можливим розв'язувати системи рівнянь графічно.



Поясніть на прикладах, що називають степенем рівняння з двома змінними. ○ Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними графічно? ○ Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними способом підстановки? Способом додавання?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

13.1. Чи є пара чисел $x = 2$, $y = 1$ розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x + y = 4? \end{cases}$

13.2. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} 2x^2 + y = -1, \\ x + y = -2 \end{cases}$ пара чисел:

1) $(1; -3);$

2) $(0; -1)?$

12 13.3. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4$. За допомогою графіка розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = x + 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = 3x; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = x - 6. \end{cases}$$

13.4. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 1$. За допомогою графіка розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x + 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

13.5. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = 4, \\ y = 4x; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$$

13.6. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - x = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = 6, \\ y = 6x; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

13.7. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x = 4y, \\ y^2 + x + 3 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y = 0, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

13.8. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = -2x, \\ x^2 + y - 3 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 4y - 5, \\ y^2 + x = 0. \end{cases}$$

13.9. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y - x = 1, \\ xy = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y + 2x = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

13.10. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} y - x = 2, \\ xy = 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 2, \\ y^2 - x^2 = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y - 3x = 1, \\ x^2 + y^2 = 53. \end{cases}$$

13.11. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x - y^2 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y = 1, \\ -x^2 + 4y = 19. \end{cases}$$

13.12. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y + x^2 = 10, \\ y - x^2 = -8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y^2 + x = 2, \\ -y^2 + 2x = 7. \end{cases}$$

13.13. 1) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y = 7 \end{cases}$ трьома способами:

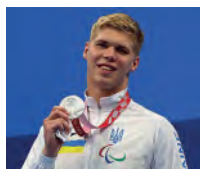


графічним, способом підстановки і способом додавання.

2) Який спосіб вам сподобався найбільше?

3) Нехай $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ – пари розв'язків системи. Знайдіть значення виразу $\frac{x_1 + y_1 + x_2 + y_2}{2}$,

відтак дізнаєтеся, скільки медалей здобув українець Андрій Трусов на літніх Паралімпійських іграх 2024 року.



Андрій Трусов

13.14. 1) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y - x = 8, \\ x^2 - y = -2 \end{cases}$ трьома способами:



графічним, способом підстановки і способом додавання.

2) Який спосіб вам сподобався найбільше?

3) Нехай $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ – пари розв'язків системи. Знайдіть значення виразу $x_1 y_1 + x_2 y_2 + 8$, відтак дізнаєтеся, у якому віці українська біофізикиня Ольга Броварець стала докторкою наук.



Ольга Броварець

13.15. Розв'яжіть графічно систему:

$$1) \begin{cases} x^2 + 4x - y = 0, \\ x + y + 4 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + 2. \end{cases}$$

13.16. Розв'яжіть графічно систему:

$$1) \begin{cases} x^2 + 6x - y = 0, \\ x + y + 6 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 + 3. \end{cases}$$

13.17. Накресліть схематично графіки рівнянь системи і встановіть кількість її розв'язків:

$$1) \begin{cases} xy = -4, \\ y - x^2 = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = 1. \end{cases}$$

13.18. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4y^2 + xy = 22, \\ x + 5y = 13; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + \frac{y}{2} = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y = 6, \\ x^2 + xy + y^2 = 12; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - y = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}. \end{cases}$$

13.19. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3y^2 - xy = 2, \\ x - 2y = 1; \end{cases} & 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{x}{3} + y = 3; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 - xy - y^2 = 11; \end{cases} & 4) \begin{cases} x + y = 5, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}. \end{cases} \end{array}$$

13.20. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину:

- 1) прямої $x + y = 5$ і параболи $y = x^2 - 7$;
- 2) кола $x^2 + y^2 = 34$ і гіперболи $xy = 15$.

13.21. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x + xy = 5, \\ x - xy = 2; \end{cases} & 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x^2 - y^2 = -21; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 2y^2 + xy = 36, \\ y^2 + xy = 20; \end{cases} & 4) \begin{cases} x^2 - xy = -4, \\ 3x^2 - 2xy = -7. \end{cases} \end{array}$$

13.22. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y + xy = 3, \\ y - xy = -2; \end{cases} & 2) \begin{cases} 3y^2 + x^2 = 13, \\ 3y^2 - x^2 = 11; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 3x^2 - xy = 10, \\ x^2 - xy = 2; \end{cases} & 4) \begin{cases} xy + 2y^2 = -1, \\ 3xy + y^2 = -8. \end{cases} \end{array}$$

4

13.23. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 2xy - x = 10, \\ 2xy - y = 9; \end{cases} & 2) \begin{cases} 2x - xy - y = 13, \\ x + xy - 2y = 2. \end{cases} \end{array}$$

13.24. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3xy + x = 8, \\ 3xy + y = 7; \end{cases} & 2) \begin{cases} x + xy + 2y = -9, \\ 2x - xy - y = -2. \end{cases} \end{array}$$

13.25. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6; \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x - y = 1; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0, \\ (x - y)^2 + 3(x - y) - 4 = 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} \frac{x - 2y}{x + y} - \frac{x + y}{x - 2y} = \frac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3. \end{cases} \end{array}$$

13.26. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 = 0, \\ (x + y)^2 - 2(x + y) - 3 = 0. \end{cases}$$

 **13.27.** За якого значення a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a \end{cases}$ має:

- 1) єдиний розв'язок; 2) рівно три розв'язки?



Вправи для повторення

13.28. Розв'яжіть нерівність $-3,4 \leq \frac{1 - 2x}{5} \leq 4,8$.

13.29. Теплохід проплив 24 км за течією річки на 2 год швидше, ніж 60 км проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість теплохода дорівнює 22 км/год.

13.30. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}$.



Життєва математика

13.31. Приватне підприємство «Котигорошко» виробляє дитячі іграшки і продає їх за ціною $p = 500$ грн за одиницю. Змінні витрати на виробництво одиниці продукції становлять $v = 300$ грн, а сталі витрати підприємства становлять $f = 700\,000$ грн на місяць. Місячний операційний прибуток підприємства (у гривнях) обчислюється за формулою $\pi(q) = q(p - v) - f$. Визначте найменший місячний обсяг виробництва q (одиниць продукції), за якого місячний операційний прибуток підприємства становитиме не менше ніж 300 000 грн.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

13.32. Розв'яжіть задачі за допомогою системи рівнянь.

- 1) Два зошити й один олівець коштують разом 24 грн, а один зошит і два олівці – 21 грн. Скільки коштує один зошит і скільки – один олівець?
- 2) Човен за 1,5 год руху за течією річки і 2 год руху проти течії долає 62 км, а за 3 год руху в стоячій воді й 1 год руху проти течії – 70 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

13.33. (Київська математична олімпіада, 1989 р.) Нехай a, b, c – додатні числа. Доведіть, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

§ 14. Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель текстових і прикладних задач

1. Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

Нагадаємо, що в 7 класі ви розв'язували текстові задачі за допомогою систем лінійних рівнянь у такій послідовності, яку можна застосовувати і для розв'язування складніших задач, а саме:

- 1) позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x та y);
- 2) за умовою задачі скласти систему рівнянь;
- 3) розв'язати одержану систему;
- 4) проаналізувати знайдені значення змінних на відповідність умові задачі, дати відповідь на запитання задачі;
- 5) записати відповідь.

Розглянемо один з найпростіших прикладів, де система рівнянь із двома змінними є математичною моделлю текстової задачі.

Приклад 1. Сума двох чисел дорівнює 8, а добуток – 15. Знайти ці числа.

Розв'язання. Позначимо невідомі числа через x та y . Тоді $x + y = 8$; $xy = 15$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язавши систему (зробіть це самостійно), матимемо $x = 3$, $y = 5$ або $x = 5$, $y = 3$.

Отже, числа, які ми шукали, це 3 і 5.

Відповідь: 3 і 5.

Зауважимо, що цю задачу, як і деякі наступні в цьому параграфі, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною.

2. Розв'язування прикладних задач, математичними моделями яких є система рівнянь із двома змінними

Система рівнянь із двома змінними може бути математичною моделлю прикладної задачі. Нагадаємо, що прикладні задачі – це задачі,

що містять нематематичні поняття, але можуть бути розв'язані методами математики.

Пригадаємо, що прикладну задачу доцільно розв'язувати в такій послідовності:

- 1) формулюємо задачу мовою математики, тобто складаємо математичну модель задачі;
- 2) розв'язуємо математичну задачу, що утворилася;
- 3) аналізуємо відповідь і формулюємо її мовою початкової задачі.

Приклад 2. Площа земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 60 м^2 . Якщо довжину цієї ділянки зменшити на 1 м , а ширину збільшити на 2 м , то отримаємо земельну ділянку з площею 72 м^2 . Знайти довжину огорожі початкової ділянки.

Розв'язання. Нехай довжина початкової ділянки дорівнює $x \text{ м}$, а ширина — $y \text{ м}$. Тоді за умовою $xy = 60$. Після зменшення довжини на 1 м вона дорівнюватиме $(x - 1) \text{ м}$, а після збільшення ширини на 2 м вона дорівнюватиме $(y + 2) \text{ м}$. За умовою $(x - 1)(y + 2) = 72$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ (x - 1)(y + 2) = 72. \end{cases}$$

Покажемо один зі способів розв'язування цієї системи:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ xy + 2x - y - 2 = 72. \end{cases}$$

Оскільки з першого рівняння системи відомо, що $xy = 60$, то у друге рівняння замість xy можна підставити число 60 . Матимемо:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ 60 + 2x - y - 2 = 72; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 60, \\ y = 2x - 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x(2x - 14) = 60, \\ y = 2x - 14. \end{cases}$$

Після спрощення першого рівняння системи матимемо: $x^2 - 7x - 30 = 0$, звідки $x_1 = 10$, $x_2 = -3$. Число -3 не задовольняє умову задачі, оскільки довжина ділянки не може бути від'ємною. Отже, довжина початкової ділянки дорівнює 10 м , тоді можна знайти ширину: $2 \cdot 10 - 14 = 6 \text{ (м)}$. Знайдемо довжину огорожі:

$$P = 2(6 + 10) = 32 \text{ (м)}.$$

Відповідь: 32 м .

Приклад 3. З пункту А вийшов пішохід. Через 50 хв після цього звідти в тому самому напрямку виїхала велосипедистка, яка наздогнала пішохода на відстані 6 км від пункту А. Знайти швидкість пішохода і швидкість велосипедистки, якщо вона за 1 год долає на 1 км більше, ніж пішохід за 2 год .

Розв'язання. Нехай $x \text{ км/год}$ — швидкість пішохода, $y \text{ км/год}$ — велосипедистки. Тоді пішохід подолав 6 км за $\frac{6}{x} \text{ год}$, а велосипедист-

ка – за $\frac{6}{y}$ год. За умовою пішохід був у дорозі на 50 хв $= \frac{5}{6}$ год більше, ніж велосипедистка. Тому $\frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}$.

Велосипедистка за 1 год долає y км, а пішохід за 2 год – $2x$ км. За умовою $y - 2x = 1$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}, \\ y - 2x = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши її (зробіть це самостійно) та врахувавши, що за змістом задачі $x > 0$ і $y > 0$, матимемо $x = 4$, $y = 9$.

Відповідь: швидкість пішохода 4 км/год, велосипедистки – 9 км/год.

 Сформулюйте послідовність дій для розв'язування текстових та прикладних задач за допомогою систем рівнянь.  Поясніть, як за допомогою системи рівнянь розв'язано приклади 1–3.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 14.1. (Усно.) Нехай x та y – деякі числа, різниця яких дорівнює числу 5, а добуток – числу 6. Яка система рівнянь відповідає умові задачі:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 6, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5? \end{cases}$

2 14.2. Сума двох чисел дорівнює -3 , а добуток дорівнює -28 . Знайдіть ці числа.

14.3. Добуток двох чисел дорівнює -12 , а сума дорівнює 1. Знайдіть ці числа.

14.4. Різниця двох чисел дорівнює 3, а різниця квадратів більшого і меншого чисел дорівнює -21 . Знайдіть ці числа.

14.5. Різниця двох натуральних чисел дорівнює 2, а сума квадратів дорівнює 52. Знайдіть ці числа.

14.6. Периметр земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 100 м, а її площа – 600 м^2 . Знайдіть сторони земельної ділянки.



14.7. Сума двох сусідніх сторін прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть ці сторони, якщо площа прямокутника дорівнює 80 см^2 .

14.8. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 17 см. Знайдіть катети, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 13 см.

14.9. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть катети цього трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 10 см.

-  **14.10.** Сума двох чисел дорівнює 15, а різниця чисел, взаємно обернених з ними, дорівнює 0,1. Знайдіть ці числа.
- 14.11.** Різниця двох чисел дорівнює 3, а сума обернених до них чисел дорівнює 0,5. Знайдіть ці числа.
-  **14.12.** Видатна українська художниця-живописець Тетяна Нилівна Яблонська народилася в лютому 1917 р. Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму своїх цифр і у 3 рази більше за добуток своїх цифр, відтак дізнаєтеся день її народження.
-  **14.13.** Знайдіть двоцифрове число, яке в 1,5 раза більше за добуток своїх цифр і в 4 рази більше за їх суму, відтак дізнаєтеся, скільки медалей виборола Україна на Всесвітній гімназії 2022 року.
-  **14.14.** Кожен із двох принтерів має надрукувати текстовий файл обсягом 120 сторінок. Перший принтер за одну хвилину друкує на 2 сторінки менше, ніж другий, і тому пропрацював на 3 хв довше. Скільки сторінок за хвилину друкує кожен принтер?
-  **14.15.** Під час зимових канікул Яна та Олег мали розв'язати по 60 задач. Яна щодня розв'язувала на 1 задачу більше, ніж Олег, а тому впоралася із завданням на 2 дні раніше за Олега. Скільки задач щодня розв'язував кожен із друзів?
-  **14.16.** Маємо два шматки кабелю різних видів. Маса першого шматка дорівнює 65 кг; другий, довжина якого на 3 м більша за перший і маса кожного метра якого на 2 кг більша за масу кожного метра першого шматка, має масу 120 кг. Знайдіть довжини цих шматків.
-  **14.17.** У кінотеатрі було 320 місць, розташованих однаковими рядами. Після того як кількість місць у кожному ряду збільшили на 4 і додали ще один ряд, місць стало 420. Скільки стало рядів у кінотеатрі, якщо їх було більше, ніж 15?
-  **14.18.** Два автомобілі виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному і зустрілися через годину. Після цього вони, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Один з них прибув у місто B на 35 хв пізніше, ніж другий у місто A . Знайдіть швидкість кожного з автомобілів, якщо відстань між містами 140 км.
-  **14.19.** Двоє велосипедистів виїхали назустріч одне одному з Києва і Боярки, перебуваючи на відстані 30 км. Через годину вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рух з тією самою швидкістю. Велосипедист прибув у Боярку на 50 хв пізніше, ніж велосипедистка у Київ. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.
-  **14.20.** Із села Яблунівка в село Грушівка, відстань між якими 9 км, вийшов пішохід. Через 30 хв із села Грушівка йому назустріч виїхав велосипедист, який зустрівся з пішоходом через 30 хв після свого виїзду. Знайдіть швидкість пішохода і швидкість велосипедиста, якщо пішохід долає відстань між селами на 2 год 15 хв повільніше, ніж велосипедист.

14.21. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см. Якщо одну з його сторін збільшити на 9 см, а другу залишити без змін, то діагональ збільшиться на 7 см. Знайдіть периметр початкового прямокутника.

14.22. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см. Якщо один з його катетів збільшити на 4 см, а другий залишити без змін, то гіпотенуза нового трикутника дорівнюватиме 15 см. Знайдіть площу початкового трикутника.

4



14.23. Два крани, якщо їх відкрити одночасно, можуть наповнити басейн за 2 год. За скільки годин можна наповнити басейн через кожен кран окремо, якщо через один з них третина басейну наповнюється на 1,5 год повільніше, ніж шоста частина басейну через другий?

14.24. Батько й син, працюючи разом, виконують певне завдання за 6 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен з них,

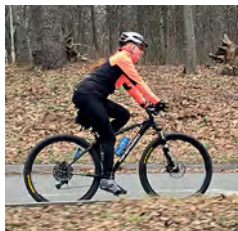


працюючи окремо, якщо сину для виконання $\frac{4}{5}$ завдання треба на 8 днів більше, ніж батькові для виконання $\frac{2}{5}$ завдання?

14.25. З пунктів A і B , відстань між якими 10 км, одночасно назустріч один одному вийшли два пішоходи. Через 1 год їм залишилося пройти до зустрічі 1 км. Якби один з пішоходів вийшов на 15 хв раніше, то зустріч відбулася б на середині шляху. Знайдіть швидкість кожного пішохода.



14.26. Із двох міст, відстань між якими 72 км, назустріч одна одній вирушили дві велосипедистки і зустрілися на середині шляху, причому одна з них виїхала на 1 год раніше за другу. Якби велосипедистки виїхали одночасно, то вони зустрілися б через 2 год 24 хв. Знайдіть швидкості велосипедисток.



14.27. Моторний човен проплив 33 км за течією річки і повернув назад за 3 год 20 хв. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки, якщо відомо, що 11 км за течією і 6 км проти течії він долає за 50 хв.



14.28. Із двох пунктів A і B , відстань між якими 18 км, одночасно виїхали назустріч одне одному велосипедист і велосипедистка. Велосипедист, що виїхав з пункту A , прибув до пункту B через 24 хв після зустрічі, а велосипедистка прибула до пункту A через 54 хв після зустрічі. Знайдіть швидкості велосипедистів.



Вправи для повторення

14.29. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 5x \geq 0$;

2) $x^2 - 2x - 15 < 0$.

14.30. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = 9, \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$$

14.31. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 2}$.

14.32. Обчисліть $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2$.



Життєва математика

14.33. У будинку, де мешкають першокласниця Наталка і старшокласник Сергій, 9 поверхів і кілька під'їздів. На кожному поверсі по 4 квартири. Наталка проживає у квартирі № 91, а Сергій – у квартирі № 170. У якому під'їзді та на якому поверсі проживає кожен з учнів?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

14.34. Спростіть вираз:

$$2026 \cdot (2027^9 + 2027^8 + 2027^7 + \dots + 2027^2 + 2028) + 1.$$

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§ 12–14)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Яка з нерівностей є квадратною?

А. $2x^2 - 3x^3 \geq 0$

Б. $7x^2 - 9x + 12 \leq 0$

В. $\frac{1}{3x^2 - 2x + 7} < 0$

Г. $2x - 9 > 0$

2. Укажіть число, що є розв'язком нерівності $x^2 - 2x - 3 < 0$.

А. -2

Б. 2

В. 4

Г. -1

3. Укажіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - y^2 = 15. \end{cases}$

А. $(1; 4)$

Б. $(5; 0)$

В. $(-4; 1)$

Г. $(4; 1)$

2 4. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2x \leq 0$.

А. $[-2; 0]$

Б. $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

В. $(-2; 0)$

Г. $[0; 2]$

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

А. $(-1; -3)$

Б. $(3; 1)$

В. $(3; 1), (-1; -3)$

Г. $(1; 3), (-3; -1)$

6. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а його площа – 54 см². Знайдіть менший катет трикутника.

А. 8 см Б. 12 см В. 10 см Г. 9 см

- 3 7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x+1}$.

А. $[-3; -1) \cup (-1; 2]$ Б. $(-\infty; +\infty)$
В. $(-3; -1) \cup (-1; 2)$ Г. $[-3; 2]$

8. Із двох пунктів, відстань між якими 6 км, одночасно назустріч один одному вирушили два пішоходи і зустрілися через 1 год 12 хв. Знайдіть швидкість того пішохода, котрий ішов швидше, якщо на весь шлях він витратив на 1 год менше, ніж другий.

А. 2 км/год Б. 2,5 км/год В. 3 км/год Г. 4 км/год

9. Не виконуючи побудови, знайдіть усі точки перетину прямої $x + y = 3$ і параболи $y = x^2 + 1$.

А. (1; 2) Б. (1; 2), (-2; 5) В. (-1; 4), (2; 1) Г. (2; 1), (5; -2)

- 4 10. Укажіть усі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x - 2xy = 6, \\ y - 2xy = 3. \end{cases}$

А. (2; -1), (1,5; -1,5) Б. (-1; 2), (-1,5; 1,5)
В. Система не має розв'язків Г. (2; -1)

11. Знайдіть усі значення a , за яких рівняння $x^2 + (2 - a)x + 9 = 0$ має два різних корені.

А. (-4; 8) Б. $(-\infty; -4] \cup [8; +\infty)$
В. $(-\infty; -8) \cup (4; +\infty)$ Г. $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$

12. Майстер і учень, працюючи разом, виконують деяку роботу за 6 год. Працюючи самостійно, майстер виконує $\frac{1}{5}$ частини роботи на

3 год швидше, ніж учень $\frac{1}{3}$ частину роботи. За скільки годин виконає роботу учень, якщо працюватиме самостійно?

А. 9 год Б. 10 год В. 12 год Г. 15 год

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв'язків (А–Г).

Нерівність

Множина розв'язків нерівності

1. $(x + 1)^2 - 5x \geq 1$

А. $(-\infty; +\infty)$

2. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

Б. $(-\infty; 3] \cup (3; +\infty)$

3. $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 7 < 0$

В. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

Г. Нерівність не має розв'язків

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 12–14

1 1. Які з нерівностей є квадратними:

- 1) $x^2 + x^3 - 3 \geq 0$;
- 2) $x^2 + 3x - 3 \geq 0$;
- 3) $4x - x^2 < 0$;
- 4) $\frac{1}{4x - x^2} < 0$?

2. Які із чисел -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 є розв'язками нерівності $x^2 - x - 2 \geq 0$?

3. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ пара чисел:

- 1) $(4; 0)$;
- 2) $(1; 3)$?

2 4. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 3x < 0$;
- 2) $x^2 - 7x - 30 \geq 0$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

6. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а його площа $- 35$ см². Знайдіть сторони прямокутника.

3 7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{8 - x^2 + 2x}}{x - 1}$.

8. Із двох пунктів, відстань між якими 24 км, вирушили одночасно назустріч одне одному велосипедистка і пішохід та зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо велосипедистка витратила на весь шлях на 3 год менше, ніж пішохід.

4 9. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3xy - x = 5, \\ 3xy - y = 4. \end{cases}$

Додаткові завдання

4 10. Знайдіть, за яких значень a не має коренів рівняння $x^2 + (a - 3)x + 4 = 0$.

11. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати завдання за 12 год. За скільки годин може виконати завдання кожен робітник, працюючи окремо, якщо одному з них для виконання чверті завдання потрібно на 5 год менше, ніж другому для виконання третини завдання?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 8

1

1. Знайдіть:

- 1) $f(1)$, $f(2)$, $f(-4)$, якщо $f(x) = x^2 - 1$;
2) $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$, якщо $g(x) = x^3 + 8$.

2

2. Укажіть таке значення x (якщо воно існує), за якого значення функції $g(x) = \frac{6}{x}$ дорівнює:

- 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) -100.

3. Чи належить графіку функції $y = 5x - 7$ точка:

- 1) $A(5; -18)$; 2) $B(0; -7)$; 3) $C(-1; -12)$; 4) $D(1; 2)$?

4. Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x^2 + 1}$, де $-3 \leq x \leq 3$, попередньо заповнивши в зошиті таблицю значень:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

3

5. Наведіть приклад функції, областю визначення якої є:

- 1) множина всіх чисел;
2) множина всіх чисел, крім числа 3;
3) множина всіх чисел, крім чисел 2 і 9;
4) множина всіх чисел, не менших від числа 5.

6. Тіло рухалося прямолінійно. Залежність відстані s (у км), яку воно пододало, від часу t (у год) задано так:

$$s(t) = \begin{cases} 4t, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2; \\ 8, & \text{якщо } 2 < t < 3; \\ 3t - 1, & \text{якщо } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Знайдіть $s(1)$, $s(2)$, $s(2,5)$, $s(3)$, $s(4)$.

7. Чи належить області значень функції $y = x^2 + 2x$ число:

- 1) 0; 2) -3; 3) -1; 4) 8?

4

8. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $f(x) = \frac{3}{2|x| + x^2}$; 2) $g(x) = \frac{7x}{2 - \frac{1}{x}}$; 3) $\varphi(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$;
4) $g(x) = \frac{7}{1 - \frac{1}{|x|}}$; 5) $\psi(x) = \frac{3}{1 + \frac{1}{|x|}}$; 6) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{x-5}$;
7) $\varphi(x) = \sqrt{-x^2}$; 8) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x - 1}$; 9) $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$.

9. Знайдіть область значень функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x};$$

$$2) g(x) = \sqrt{-(x-1)^2};$$

$$3) \varphi(x) = \sqrt{4-x^2};$$

$$4) g(x) = \frac{1}{x^2+1};$$

$$5) t(x) = \sqrt{x^2+9} - 5;$$

$$6) f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}.$$

10. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

$$1) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2};$$

$$2) g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}.$$

До § 9

11. Зростаючою чи спадною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є функція:

$$1) y = \frac{8}{x};$$

$$2) y = -\frac{6}{x};$$

$$3) y = -\frac{0,01}{x};$$

$$4) y = \frac{7,51}{x}?$$

12. Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину графіка функції з осями координат:

$$1) f(x) = 2x - 4;$$

$$2) g(x) = \frac{1}{3}x - 6;$$

$$3) \varphi(x) = x^2 - 2x - 3;$$

$$4) \psi(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

13. Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

$$1) y = \frac{x-1}{x^2+2x-3};$$

$$2) y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2};$$

$$3) y = x\sqrt{x-10}.$$

14. Знайдіть проміжок, на якому функція $f(x) = 3x + 6$ набуває:

1) додатних значень;

2) від'ємних значень.

15. Побудуйте графік функції та вкажіть її властивості:

$$1) g(x) = \frac{8}{|x|};$$

$$2) f(x) = 2|x| - 6.$$

До § 10

16. Як із графіка функції $y = |x|$ отримати графік функції:

$$1) y = |x| + 4;$$

$$2) y = |x| - 3;$$

$$3) y = |x+2|;$$

$$4) y = |x-3|;$$

$$5) y = -|x|;$$

$$6) y = 3|x|?$$

17. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

$$1) y = 2x, y = 2x - 3, y = 2x + 3;$$

$$2) y = x^2, y = (x-2)^2, y = (x+2)^2.$$

3 18. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = |x - 1| + 2$; 2) $y = 3 - |x|$; 3) $y = |x + 2| - 1$;
 4) $y = -|x| - 1$; 5) $y = -4 + |x - 2|$; 6) $y = |x + 1| + 3$.

19. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; 3) $y = -3\sqrt{x}$; 4) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

4 20. Побудуйте графік функції $y = \frac{12}{x + 3} - 4$. За графіком знайдіть:

- 1) область значень функції;
- 2) нулі функції;
- 3) проміжки зростання функції;
- 4) проміжки спадання функції;
- 5) значення x , за яких функція набуває додатних значень;
- 6) значення x , за яких функція набуває від'ємних значень.



21. 1) Побудуйте графік функції $y = \|x - 1| - 2|$.

2) Використовуючи графік, знайдіть такі значення a , за яких рівняння $\|x - 1| - 2| = a$ має рівно три корені.

До § 11

1 22. Угору чи вниз спрямовані гілки параболи:

- 1) $y = 3x^2 - 2x + 7$; 2) $y = -x^2 + 5x + 9$;
 3) $y = -5x^2$; 4) $y = 0,01x^2 + 5$?

2 23. Чи належить графіку функції $y = 20x^2$ точка:

- 1) $A(\sqrt{2}; 40)$; 2) $B(-0,1; 2)$; 3) $C(-\sqrt{5}; -100)$; 4) $D\left(\frac{1}{2}; 5\right)$?

24. Знайдіть координати вершини параболи:

- 1) $y = x^2 + 2x - 7$; 2) $y = -3x^2 + 9x + 4$.

25. Знайдіть нулі квадратичної функції:

- 1) $y = x^2 + 4x + 3$; 2) $y = -2x^2 - 3x - 1$;
 3) $y = x^2 + 2x - 8$; 4) $y = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

26. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = 2x - x^2$;
 3) $y = x^2 - 2x + 3$; 4) $y = -x^2 + 6x - 8$.

3 27. Побудуйте графік функції $f(x) = 2x^2 + 4x$. За графіком знайдіть:

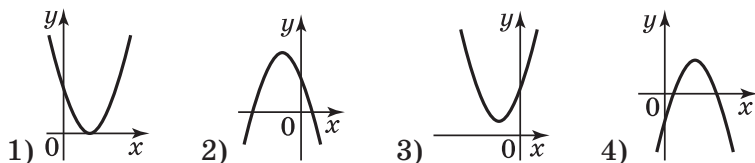
- 1) $f(1)$, $f(-0,5)$, $f(-2,5)$;
- 2) значення x , за яких $f(x) = 6$, $f(x) = -2$, $f(x) = 2$;
- 3) нулі функції;
- 4) розв'язки нерівностей $f(x) < 0$ і $f(x) > 0$;
- 5) найбільше і найменше значення функції;
- 6) область значень функції;
- 7) проміжок зростання і проміжок спадання функції.

28. Графіку функції $y = -2x^2 + 3x + c$ належить точка $A(-1; 4)$. Знайдіть коефіцієнт c .
29. За якого значення a вісь симетрії параболи $y = ax^2 + 8x + 1$ проходить через точку $A(2; -3)$?
30. Знайдіть область значень функції:
- 1) $y = \frac{1}{2}x^2$, якщо $x \in [-2; 4]$;
 - 2) $y = -\frac{1}{3}x^2$, якщо $x \in [-9; 3]$.
31. На параболі $y = x^2 - 3x$ знайдіть такі точки, у яких різниця ординати й абсциси дорівнює 5.
32. За яких p і q графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $A(-2; 22)$ і $B(1; 4)$?

4 33. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} -x^2, & \text{якщо } x < -2, \\ 2x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ x^2, & \text{якщо } x > 2; \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x}.$$

34. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 - 4x + 3 = \frac{12}{x}$.
35. Знайдіть найбільше значення функції $y = -2x^2 + 6x - 5$, областю визначення якої є проміжок:
- 1) $[0; 2]$; 2) $[2; 4]$.
36. На малюнку 1 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Використовуючи малюнок, для кожного з випадків (1–4) укажіть знаки коефіцієнтів a , b , c та дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

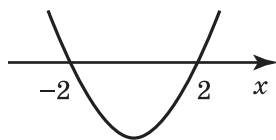


Мал. 1

37. D – дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:
- 1) $a > 0, b > 0, c > 0, D > 0$; 2) $a < 0, c = 0, -\frac{b}{2a} > 0, D > 0$;
 - 3) $a < 0, -\frac{b}{2a} < 0, D = 0$; 4) $a > 0, b < 0, D < 0$.
38. За яких значень a функція $y = (a - 1)x^2 + 2x + 7$ набуває додатних значень для будь-якого значення x ?

До § 12

- 1** 39. На малюнку 2 схематично зображено графік функції $y = x^2 - 4$. Використовуючи малюнок, запишіть розв'язки нерівності:



Мал. 2

- 1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 4 \geq 0$;
3) $x^2 - 4 < 0$; 4) $x^2 - 4 \leq 0$.
- 2** 40. Розв'яжіть нерівність:
1) $x^2 + 7x > 0$; 2) $-x^2 - 5x \leq 0$;
3) $x^2 - 1 < 0$; 4) $-x^2 + 16 \geq 0$.
41. Знайдіть множину розв'язків нерівності:
1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$; 2) $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$.
42. Розв'яжіть нерівність:
1) $x^2 > 0,04$; 2) $-x^2 \leq -\frac{9}{25}$;
3) $3x^2 \geq x$; 4) $-5x^2 < 2x$.

- 3** 43. Знайдіть множину розв'язків нерівності:
1) $x^2 - 2x - 9 \geq 0$; 2) $x^2 - 11 + 4x < 0$;
3) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$; 4) $6x + x^2 + 9 \geq 0$;
5) $-x^2 - 8x - 16 < 0$; 6) $x^2 + x + 9 \geq 0$.

44. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x^2 - 1}{4} > 5 + x$; 2) $(x - 4)(x - 5) \leq 2$;
3) $6x^2 - 14x + 12 \geq (x - 3)^2$; 4) $\frac{x^2 - 4}{3} < \frac{x - 2}{2}$.

45. Одна сторона прямокутника на 2 см менша від другої. Якої довжини може бути ця сторона, якщо площа прямокутника менша від 35 см^2 ?

46. За яких додатних значень x справджується нерівність $x^2 \leq 4x + 21$?

47. Знайдіть розв'язки нерівності $0,8x^2 + x - 0,3 \leq 0$, що належать проміжку $\left[-2; -\frac{4}{3}\right]$.

- 4** 48. За яких значень c множиною розв'язків нерівності $x^2 - 10x + c < 0$ є проміжок: 1) $(2; 8)$; 2) $(1; 9)$?

49. Запишіть подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей і розв'яжіть її: 1) $1 < x^2 \leq 4$; 2) $0 < x^2 + x \leq 6$.

- *** 50. За яких значень a розв'язком нерівності $x^2 - (a^2 - 2a - 3)x + a^2 + 2 < 0$ є проміжок $(2; 3)$?

51. За яких значень m графіки функцій $y = mx^2 - x$ та $y = mx + 1 - 2m$ не мають спільних точок?
52. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 2(a - 1)x - (9a + 5) = 0$ відносно змінної x .
53. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність (де x – змінна):
 1) $x^2 + x(2 + a) + 2a < 0$;
 2) $x^2 - x(a - 3) - (2a^2 + 6a) \geq 0$.
54. Для кожного значення m розв'яжіть систему нерівностей, де x – змінна:
 1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x < m; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 0, \\ x \geq m. \end{cases}$

До § 13

- 1** 55. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$ пара чисел:
 1) (3; 0); 2) (4; 1); 3) (-4; -1); 4) (-1; -4)?
- 2** 56. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
 1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x = 3. \end{cases}$
57. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:
 1) $\begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + y - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x = 5, \\ xy = 18. \end{cases}$
- 3** 58. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
 1) $\begin{cases} y = 2(x - 1)^2 + 3, \\ xy = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4, \\ y = -x^2 + 6x - 8. \end{cases}$
59. Розв'яжіть систему рівнянь:
 1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$
60. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:
 1) $\begin{cases} 5y^2 + x^2 = 29, \\ 2y^2 + x^2 = 17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y = 5, \\ 5x^2 + 3y = 39; \end{cases}$
 3) $\begin{cases} 3x^2 + xy = 10, \\ 2x^2 + 5xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1, \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 0. \end{cases}$

4 61. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = |x - 3|, \\ \frac{1}{4}xy - 1 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = |x| - 1, \\ y - x^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

62. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} xy - x - 2y = 7, \\ 3xy - x - 3y = 13; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = -2. \end{cases}$$

63. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 11, \\ \frac{x}{y}(x + y) = 24; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x + 3y}{x - y} - \frac{x - y}{x + 3y} = \frac{24}{5}, \\ 5x + 8y = 18. \end{cases}$$

До § 14

- 2** 64. Різниця двох чисел дорівнює 3, а добуток дорівнює 10. Знайдіть ці числа.
65. Сума двох чисел дорівнює 12, а різниця їх квадратів – 24. Знайдіть ці числа.
66. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їх сума дорівнює 12 см, а площа трикутника дорівнює 16 см².
- 3** 67. Добуток двох чисел дорівнює 20, а сума першого числа і потроєного другого дорівнює 19. Знайдіть ці числа.
68. Діагональ прямокутника дорівнює 15 см, а його площа – 108 см². Знайдіть сторони прямокутника.
69. Сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює 41 см², а площа трикутника – 10 см². Знайдіть катети трикутника.
70. Сума квадратів цифр двоцифрового числа дорівнює 34. Якщо до цього числа додати 18, то отримаємо число, що записано тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайдіть це число.
71. Площа прямокутника дорівнює 40 см². Якщо одну з його сторін збільшити на 2 см, а другу – на 1 см, то матимемо прямокутник із площею 60 см². Знайдіть периметр початкового прямокутника.
72. З міста А до міста В, відстань між якими 240 км, одночасно виїхали дві автівки. Через 2 год виявилось, що перша проїхала на 20 км більше, ніж друга. Знайдіть швидкість кожної автівки, якщо на весь шлях перша витрачає на 20 хв менше, ніж друга.
73. У кілька однакових кошиків розклали порівну 24 кг малини. Якби в кожен кошик поклали на 1 кг малини більше, то 2 кошики виявилися б зайвими. Скільки було кошиків?

74. (Задача Маклорена.) Кілька осіб пообідали разом і мали заплатити за обід 175 шилінгів. З'ясувалося, що у двох не було із собою коштів, тому інші заплатили на 10 шилінгів більше, ніж мали заплатити. Скільки осіб пообідало разом?
- 4** 75. Яке двоцифрове число на 4 менше від суми квадратів його цифр і на 5 більше за їх подвоєний добуток?
76. Периметр ділянки прямокутної форми дорівнює 360 м. Якщо довжину ділянки зменшити на 20 м, а ширину – на 30 м, то площа ділянки зменшиться вдвічі. Знайдіть розміри ділянки, якщо її довжина більша за ширину.
77. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати певне завдання за 12 год. Якщо спочатку половину роботи виконає перша бригада, а потім друга її завершить, то всю роботу буде виконано за 25 год. За скільки годин може виконати завдання кожна бригада, працюючи самостійно?
78. Майстриня-склодув мала виготовити 200 скляних новорічних іграшок. Перші два дні вона виконувала денну норму, а потім щодня виготовляла на 4 іграшки більше, ніж передбачено нормою. Тому вже за день до кінця терміну виготовила 208 скляних іграшок. Скільки іграшок щодня мала виготовляти майстриня за нормою?





Головне в розділі 2

ФУНКЦІЯ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ І ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Функцією (або **функціональною залежністю**) називають таку залежність, за якої кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає єдине значення залежної змінної.

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють **область значень функції**.

Найбільшим значенням функції називають найбільше число з області значень функції, а **найменшим значенням функції** – відповідно найменше таке число.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

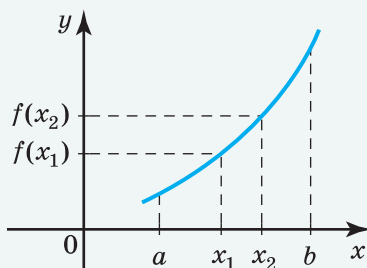
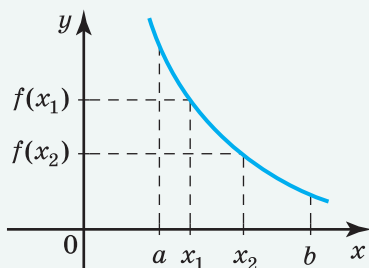
ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ

Значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю, називають **нулем функції**.

Проміжок, на якому функція зберігає свій знак, називають **проміжком знакосталості функції**.

Функцію називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.



НАЙПРОСТІШІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Побудова графіка функції $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$.

Для побудови графіка функції $y = f(x) + n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць угору;

для побудови графіка функції $y = f(x) - n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць униз.

Побудова графіка функції $y = f(x \pm t)$, де $t > 0$.

Для побудови графіка функції $y = f(x - t)$, де $t > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на t одиниць управо;

для побудови графіка функції $y = f(x + t)$, де $t > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на t одиниць уліво.

Побудова графіка функції $y = -f(x)$.

Графіки функцій $y = -f(x)$ та $y = f(x)$ симетричні відносно осі x .

Побудова графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$.

Для побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$, достатньо графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його до осі x у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$.

ФУНКЦІЯ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

ІІ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

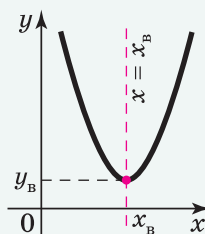
Функцію вигляду $y = ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають **квадратичною функцією**.

Будуючи графік функції $f(x) = ax^2 + bx + c$, слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) знайти координати вершини параболи $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$, $y_{\text{в}} = f(x_{\text{в}})$ і позначити її на координатній площині;

2) побудувати ще кілька точок параболи і стільки ж точок, симетричних їм відносно прямої $x = x_{\text{в}}$;

3) сполучити отримані точки плавною лінією.



КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ

Нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають **квадратними нерівностями** (або **нерівностями другого степеня з однією змінною**).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Для розв'язування квадратних нерівностей слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (якщо вони існують);

2) якщо нерівність має строгий знак ($>$ або $<$), то корені квадратного тричлена позначаємо на осі x «виколотими» точками (вони виключатимуться із множини розв'язків нерівності); якщо знак нерівності нестрогий ($\geq$ або $\leq$), то корені квадратного

тричлена позначаємо зафарбованими точками (вони включатимуться до множини розв'язків нерівності);

- 3) зображуємо графік функції $y = ax^2 + bx + c$ схематично, урахувавши напрямки гілок параболи та точки її перетину з віссю x (якщо вони існують);
- 4) знаходимо на осі x проміжки, на яких функція $y = ax^2 + bx + c$ задовольняє дану нерівність;
- 5) записуємо відповідь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Графічний метод

Для розв'язування систем рівнянь графічно слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) побудувати графіки рівнянь в одній координатній площині;
- 2) знайти координати їхніх точок перетину або впевнитися, що графіки рівнянь спільних точок не мають;
- 3) якщо координати точок перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язки системи знайти наближено;
- 4) записати відповідь.

Метод підстановки

Для розв'язування систем рівнянь способом підстановки слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) виразити в рівнянні першого степеня одну змінну через іншу;
- 2) підставити отриманий вираз у друге рівняння системи замість відповідної змінної;
- 3) розв'язати отримане рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідні значення другої змінної;
- 5) записати відповідь.

СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕКСТОВИХ І ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Розв'язувати текстові задачі за допомогою систем рівнянь можна в такій послідовності:

- 1) позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x та y);
- 2) за умовою задачі скласти систему рівнянь;
- 3) розв'язати одержану систему;
- 4) проаналізувати знайдені значення змінних на відповідність умові задачі, дати відповідь на запитання задачі;
- 5) записати відповідь.

РОЗДІЛ 3

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитесь** із числовою послідовністю, арифметичною та геометричною прогресіями; формулами n -го члена арифметичної та геометричної прогресій, суми n перших членів цих прогресій, суми нескінченної прогресії;
- **навчитесь** розв'язувати вправи та прикладні задачі, пов'язані з арифметичною та геометричною прогресіями; записувати періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного.

§ 15. Числові послідовності

1. Поняття про числову послідовність

Приклад 1. Запишемо в порядку зростання натуральні парні числа:

2; 4; 6; 8; 10; ...

Маємо *послідовність* парних натуральних чисел. На першому місці в ній записано число 2, на другому – число 4, на п'ятому – 10. Якщо продовжити записувати парні натуральні числа далі, то, наприклад, на десятому місці буде число 20, на сотому – число 200. Узагалі, для будь-якого натурального числа n можна вказати натуральне парне число, що стоїть на n -му місці. Таким числом буде число $2n$.

Числа, які утворюють послідовність, називають відповідно першим, другим, третім, четвертим тощо *членами послідовності*. Члени послідовності прийнято позначати буквами з індексами, які відповідають порядковому номеру члена послідовності. Наприклад: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ (читають « a перше, a друге, a третє, a четверте» тощо). У нашому прикладі $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, \dots$. Член послідовності з номером n , або, як кажуть, n -й член послідовності, позначають a_n . Саму послідовність прийнято позначати (a_n) .

Розглянемо два сусідніх члени послідовності з номерами k і $k + 1$, а саме a_k і a_{k+1} . Член a_{k+1} називають *наступним* за a_k , а член a_k – *попереднім* до a_{k+1} .

2. Формула n -го члена послідовності

Оскільки в послідовності парних натуральних чисел на n -му місці стоїть число $2n$, то можна записати, що $a_n = 2n$. Отримали *формулу n -го члена послідовності парних натуральних чисел*.

Ця послідовність містить нескінченну кількість членів, тому таку послідовність називають *нескінченною*. Записуючи нескінченну послідовність, після кількох її перших членів ставлять трикрапку. Якщо послідовність містить скінченну кількість членів, то її називають *скінченною*.

Приклад 2. Послідовність двоцифрових натуральних чисел 10; 11; 12; ...; 98; 99 є скінченною. Вона містить 90 членів і може бути задана формулою n -го члена: $a_n = n + 9$.

Якщо ми знаємо формулу n -го члена послідовності, то можемо знайти будь-який її член.

Приклад 3. Послідовність задано формулою $b_n = n^2 - n$. Знайдемо кілька її членів: $b_1 = 1^2 - 1 = 0$ – перший, $b_7 = 7^2 - 7 = 42$ – сьомий, $b_{20} = 20^2 - 20 = 380$ – двадцятий, $b_{100} = 100^2 - 100 = 9900$ – сотий.

3. Способи задання послідовності

Формула n -го члена є досить зручним, але не єдиним способом задання послідовності.

Приклад 4. Скінченну послідовність можна задати *переліком її членів*. Наприклад, (c_n) : 1; 8; 17; 9.

Приклад 5. Послідовність можна задати *описом її членів*. Наприклад, послідовність натуральних чисел, які є дільниками числа 18 і які записано в порядку зростання: 1; 2; 3; 6; 9; 18, можна назвати послідовністю натуральних дільників числа 18.

Приклад 6. Скінченну послідовність можна задати у *вигляді таблиці*. Наприклад:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	4	3	1	0	-2	-5	-10

4. Рекурентний спосіб задання послідовності

Послідовність можна задавати, указавши перший або кілька перших членів послідовності, а потім – формулу, за якою можна знаходити інші члени послідовності через попередні. Таку формулу називають *рекурентною*, а спосіб задання послідовності – *рекурентним*.

Приклад 7. Нехай перший член послідовності (x_n) дорівнює 2, а кожен наступний дорівнює квадрату попереднього, тобто $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$. Тоді за відомим першим членом можна знайти другий: $x_2 = x_1^2 = 2^2 = 4$, за відомим другим можна знайти третій: $x_3 = x_2^2 = 4^2 = 16$ і так само далі. Матимемо послідовність: 2; 4; 16; 256; 65 536; ...

Приклад 8. Знайдемо третій, четвертий та п'ятий члени послідовності (y_n) , заданої рекурентно: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$.

Матимемо: $y_3 = 2y_2 + y_1 = 2 \cdot (-3) + 2 = -4$;
 $y_4 = 2y_3 + y_2 = 2 \cdot (-4) + (-3) = -11$;
 $y_5 = 2y_4 + y_3 = 2 \cdot (-11) + (-4) = -26$.

Послідовності, які ми розглянули вище, є *числовими послідовностями*, оскільки складаються із чисел. Іноді розглядають послідовності, членами яких є вирази, функції тощо. Надалі будемо розглядати лише числові послідовності.

А ще раніше...

Математики досить давно почали вивчати числові послідовності.

Поняття числової послідовності виникло і закріпилося набагато раніше, ніж вчення про функції. Ось такі нескінченні числові послідовності прийшли до нас із давнини:

- 1) 1, 2, 3, 4, 5, ... – послідовність натуральних чисел;
- 2) 2, 4, 6, 8, 10, ... – послідовність парних натуральних чисел;
- 3) 1, 3, 5, 7, 9, ... – послідовність непарних натуральних чисел;
- 4) 1, 4, 9, 16, 25, ... – послідовність квадратів натуральних чисел;
- 5) 2, 3, 5, 7, 11, ... – послідовність простих чисел;
- 6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ – послідовність чисел, обернених до натуральних.

Для всіх цих послідовностей, крім п'ятої, можна записати формулу n -го члена. Для послідовності простих чисел формула n -го члена була невідомою давнім математикам... Невідома вона і донині!

Однією з найвідоміших є числова послідовність, яку називають *послідовністю Фібоначчі*, на честь італійця *Леона́рдо Пізанського (Фібоначчі)* (бл. 1170 – бл. 1228). Він першим розглянув послідовність чисел, перші два члени якої – одиниці й кожен член якої, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144 ...

Лише через кілька століть було знайдено формулу n -го члена послідовності Фібоначчі:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$



Наведіть приклад числової послідовності. Назвіть три перших члени цієї послідовності. Наведіть приклад числової послідовності, заданої формулою n -го члена. Як ще можна задавати числову послідовність? Яку послідовність називають нескінченною, а яку – скінченною?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

15.1. (Усно.) Дано послідовність: 2; 4; 7; 10; 15.

- 1) Скільки членів має ця послідовність?
- 2) Назвіть перший та останній члени цієї послідовності.
- 3) Який номер члена послідовності, що дорівнює 10?
- 4) Який член послідовності є наступним за членом послідовності, що дорівнює 4?
- 5) Який член послідовності попередній до члена послідовності, що дорівнює 15?

15.2. Послідовність задано формулою $a_n = 5n - 1$. Знайдіть перший, п'ятий та сьомий члени цієї послідовності.

15.3. Послідовність задано формулою $b_n = 4n + 3$. Знайдіть перший, четвертий та восьмий члени цієї послідовності.

15.4. Запишіть чотири перших члени послідовності:

- 1) непарних натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
- 2) кубів натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
- 3) одноцифрових натуральних чисел, узятих у порядку спадання.

15.5. Випишіть п'ять перших членів послідовності:

- 1) квадратів натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
- 2) двоцифрових натуральних чисел, узятих у порядку спадання.

2 15.6. Знайдіть чотири перших члени послідовності (x_n) , яку задано формулою:

$$1) x_n = 4n^2 - 17; \quad 2) x_n = \frac{n^2}{n+1};$$

$$3) x_n = \frac{2n-17}{n+3}; \quad 4) x_n = \frac{n^3}{2^n}.$$

15.7. Знайдіть три перших члени послідовності (y_n) , яку задано формулою:

$$1) y_n = 2n^2 + 3; \quad 2) y_n = \frac{n^2 - 1}{n};$$

$$3) y_n = \frac{4n-5}{n+1}; \quad 4) y_n = \frac{3^n}{n^2}.$$

15.8. 1) Послідовність задано формулою $b_n = 4n + 25$. Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює 65.



2) Знайдений номер укаже довжину (у метрах) найбільшої витинанки авторства відомої майстрині Тетяни Кузьмич (Кашуби), що представлена в Музеї історії міста Києва.



15.9. Послідовність задано формулою $a_n = 5 - 3n$. Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює -46 .

15.10. 1) Задайте таблицю п'ять перших членів послідовності натуральних чисел, які кратні числу 3.

2) Знайдіть номер члена цієї послідовності, що дорівнює 12.

3 15.11. Послідовність задано формулою $y_n = 2n^2 - 18n + 7$. Які із чисел є членами цієї послідовності:

- 1) 7; 2) -29 ; 3) 50; 4) 79?

Для чисел, що є членами послідовності, укажіть їхні номери.

15.12. Послідовність задано формулою $x_n = n^2 - 4n + 9$. Які із чисел є членами цієї послідовності:

- 1) 69; 2) 68; 3) 5; 4) 6?

Для чисел, що є членами послідовності, укажіть їхні номери.

15.13. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (c_n) , яку задано рекурентно:

- 1) $c_1 = 8, c_{n+1} = c_n - 5$;
- 2) $c_1 = -3, c_{n+1} = 2c_n + 3$;
- 3) $c_1 = -2, c_2 = 3, c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$;
- 4) $c_1 = 0, c_2 = -5, c_{n+2} = \frac{c_{n+1}}{c_n + 1}$.

15.14. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (y_n) , яку задано рекурентно:

- 1) $y_1 = 5, y_{n+1} = 2y_n - 7$;
- 2) $y_1 = 16, y_2 = 1, y_{n+2} = \frac{y_n}{2y_{n+1}}$.

4 **15.15.** Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою n -го члена:

- 1) $a_n = 26 - n^2$;
- 2) $b_n = -2n^2 + 16n$;
- 3) $c_n = (-1)^n$;
- 4) $y_n = -n^2 + 5n$.

15.16. Знайдіть найменший член послідовності, заданої формулою n -го члена:

- 1) $x_n = 2n^2 - 3$;
- 2) $a_n = n^2 - 8n - 5$.

15.17. Доведіть, що послідовність (p_n) , у якій $p_n = 2n^2 + 6n - 5$, не містить найбільшого члена, а послідовність (t_n) , у якій $t_n = -n^2 - 4n$, не містить найменшого члена.



Вправи для повторення

15.18. Товар коштував 150 грн. Через деякий час він подорожчав до 165 грн. На скільки відсотків підвищилася ціна товару?

15.19. Обчисліть $\frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 3} + \frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} + 3}$.

15.20. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$



Життєва математика

15.21. До встановлення лічильників родина Заліщуків за користування водою щомісяця сплачувала 1120 грн. Після встановлення двох лічильників (на холодну і на гарячу воду) щомісячна плата за воду зменшилася до 700 грн. Один лічильник води коштує 740 грн, а його встановлення – 240 грн. Через яку найменшу кількість місяців економія на сплаті за воду перевищить витрати на придбання та встановлення лічильників, якщо тарифи на воду не змінюватимуться?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 15.22. 1) Запишіть числову послідовність, що містить десять членів, у якої перший член дорівнює 2, а кожен наступний – на 3 більший за попередній.
2) Запишіть формулу n -го члена цієї послідовності.
- 15.23. Знайдіть закономірність і продовжте ряд чисел, записавши чотири наступних числа ряду:
1) 42, 45, 48, 51, ...; 2) 6, 1, -4, -9, ...;
3) 15, 0, -15, -30, ...; 4) -13, -9, -5, -1,



Цікаві задачі – поміркуй одначе

15.24. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$$

§ 16. Арифметична прогресія, її властивості. Формула n -го члена арифметичної прогресії

1. Означення арифметичної прогресії

Розглянемо числову послідовність, перший член якої дорівнює 4, а кожен наступний, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до числа 3:

$$4; \overbrace{7}^{+3}; \overbrace{10}^{+3}; \overbrace{13}^{+3}; \overbrace{16}^{+3}; \overbrace{19}^{+3}; \dots$$

Таку послідовність називають *арифметичною прогресією*.

Послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до одного й того самого числа, називають *арифметичною прогресією*.

Це число називають *різницею арифметичної прогресії* і позначають буквою d (від початкової літери латинського слова *differentia* – різниця). Тому, якщо (a_n) – арифметична прогресія, то справджуються рівності: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $a_4 = a_3 + d$,

Отже, для будь-якого натурального n справджується рівність:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Тоді

$$d = a_{n+1} - a_n,$$

тобто

різницю арифметичної прогресії можна знайти, якщо від будь-якого члена прогресії, починаючи з другого, відняти попередній.

2. Формула n -го члена арифметичної прогресії та її застосування

Нехай перший член арифметичної прогресії дорівнює a_1 , а її різниця дорівнює d . Тоді:

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.$$

Помічаємо, що в кожній з отриманих формул коефіцієнт біля різниці d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, для якої записано цю формулу. Справді, щоб знайти a_n , маючи a_1 і d , треба $n - 1$ разів додати до a_1 число d , тобто до a_1 додати $(n - 1)d$. Маємо:

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Отримали формулу n -го члена арифметичної прогресії.

Розглянемо кілька вправ на застосування цієї формули.

Приклад 1. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 32,8$, $d = -0,4$. Знайти двадцятий член цієї послідовності.

Розв'язання. $a_{20} = a_1 + d(20 - 1) = a_1 + 19d = 32,8 + 19(-0,4) = 25,2$.

Відповідь: 25,2.

Приклад 2. Чи належить арифметичній прогресії 7; 10; 13; ... число:

1) 82; 2) 102?

Розв'язання. У цій прогресії $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, тоді $d = a_2 - a_1 = 3$. Складемо формулу n -го члена цієї прогресії:

$a_n = 7 + 3(n - 1) = 3n + 4$, тобто $a_n = 3n + 4$.

1) Припустимо, що число 82 є членом прогресії (a_n) . Тоді існує таке натуральне число n , що $a_n = 82$, тобто $3n + 4 = 82$. Маємо рівняння:

$$3n + 4 = 82,$$

$$3n = 78,$$

$$n = 26.$$

Отже, число 82 є двадцять шостим членом арифметичної прогресії, тобто $a_{26} = 82$.

2) Міркуючи в той самий спосіб, маємо: $3n + 4 = 102$,

$$3n = 98,$$

$$n = 32\frac{2}{3}.$$

Число $32\frac{2}{3}$ не є натуральним, тому арифметична прогресія числа 102 не містить.

Відповідь: 1) так; 2) ні.

Приклад 3. Кубики складено рядами так, що у верхньому ряду 4 кубики, а в кожному ряду, що нижче, – на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому. Відомо, що в шостому ряду 14 кубиків. Скільки кубиків у третьому ряду?

Розв’язання. Оскільки в кожному нижньому ряду на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому, то числа, що дорівнюють кількості кубиків у рядах, утворюють арифметичну прогресію.

У цій прогресії $a_1 = 4$, $a_6 = 14$, отже, нам треба знайти a_3 .

Знайдемо спочатку різницю d цієї прогресії. Оскільки за формулою n -го члена $a_6 = a_1 + 5d$, маємо рівняння:

$$14 = 4 + 5d,$$

$$5d = 10,$$

$$d = 2.$$

Тепер, знаючи значення d , знайдемо a_3 :

$$a_3 = a_1 + 2d = 4 + 2 \cdot 2 = 8.$$

Отже, у третьому ряду 8 кубиків.

Зауважимо, що знайти d можна було і не використовуючи рівняння, наприклад виразивши d з формули 6-го члена прогресії. Справді, оскільки $a_6 = a_1 + 5d$, то

$$d = \frac{a_6 - a_1}{5} = \frac{14 - 4}{5} = 2.$$

Відповідь: 8 кубиків.

3. Властивості арифметичної прогресії

Доведемо деякі важливі властивості арифметичної прогресії.

1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ де } n \in N, n \geq 2.$$

Доведення. Для доведення використаємо формулу n -го члена арифметичної прогресії, тоді

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} &= \frac{a_1 + d((n-1) - 1) + a_1 + d((n+1) - 1)}{2} = \\ &= \frac{2a_1 + d(n-1-1+n)}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n-1)}{2} = \\ &= \frac{2a_1}{2} + \frac{2d(n-1)}{2} = a_1 + d(n-1) = a_n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

За однією з версій, саме із цією властивістю арифметичної прогресії і пов’язано її назву.

2. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ де } n \in N, k \in N, k < n, n \geq 2.$$

Властивість доводиться аналогічно до попередньої властивості.

3. Якщо k, l, p і s – натуральні числа і $k + l = p + s$, то

$$a_k + a_l = a_p + a_s.$$

Доведення. Використаємо формулу n -го члена, тоді:

$$a_k + a_l = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(l-1) = 2a_1 + d(k+l-2);$$

$$a_p + a_s = a_1 + d(p-1) + a_1 + d(s-1) = 2a_1 + d(p+s-2).$$

Але $k + l = p + s$, тому $2a_1 + d(k+l-2) = 2a_1 + d(p+s-2)$, тобто $a_k + a_l = a_p + a_s$. ■

4. Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою $a_n = dn + b$, де b і d – деякі числа.

Доведення. За формулою n -го члена маємо:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = dn + (a_1 - d).$$

Позначивши $a_1 - d = b$, матимемо: $a_n = dn + b$. ■

5. Послідовність (a_n) , яку задано формулою вигляду $a_n = dn + b$, де b і d – деякі числа, є арифметичною прогресією.

Доведення. Знайдемо різницю $(n+1)$ -го і n -го членів цієї послідовності: $a_{n+1} - a_n = d(n+1) + b - (dn + b) = dn + d + b - dn - b = d$.

Отримали, що для будь-якого n справджується рівність $a_{n+1} = a_n + d$. Отже, послідовність (a_n) є арифметичною прогресією, різниця якої дорівнює d . ■

А ще раніше...

Перші уявлення про арифметичну прогресію з'явилися ще до нашої ери. У давньоєгипетському папірусі Ахмеса (II тис. до н. е.) є така задача: «Нехай тобі сказано: поділи 10 мір ячменю між десятима людьми так, щоб кожен отримав на $\frac{1}{8}$ міри більше, ніж сусід». Розв'язання задачі зводиться до знаходження десяти членів арифметичної прогресії: $a, a + \frac{1}{8}, a + \frac{2}{8}, \dots, a + \frac{9}{8}$, сума яких дорівнює 10.

Задачі на арифметичні прогресії є і в давньоєгипетському трактаті «Математика в дев'яти книгах».

Перші задачі про арифметичні прогресії, що дійшли до нас, пов'язані з діяльністю людини (розподіл продуктів, спадщини тощо).

Давні греки теорію арифметичної прогресії асоціювали з так званою неперервною арифметичною пропорцією:

$$a - b = b - c.$$

Якщо числа a , b і c поєднані між собою такою властивістю, то вони утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює $\frac{c - a}{2}$.

Так, прогресію розглядали як продовження арифметичної пропорції, а тому назву *арифметична* було перенесено з пропорції на прогресію. Це одна з версій, чому ця прогресія отримала саме таку назву.

-  Яку послідовність називають арифметичною прогресією?  Яке число називають різницею арифметичної прогресії?  Як можна знайти різницю арифметичної прогресії?  Запишіть формулу n -го члена арифметичної прогресії.  Сформулюйте і доведіть властивості арифметичної прогресії.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 16.1. Які з послідовностей є арифметичними прогресіями? Укажіть для них перший член і різницю.
- | | |
|--------------------|------------------|
| 1) 2; 5; 8; 11; | 2) 4; 4; 4; 4; |
| 3) 0; 1; 5; 10; | 4) 4; -4; 4; -4; |
| 5) -5; -4; -3; -2; | 6) 0; 1; 0; 2. |

- 16.2. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

- натуральних чисел: 1; 2; 3; 4; 5; ...;
- квадратів натуральних чисел: 1; 4; 9; 16; 25; ...;
- непарних натуральних чисел: 1; 3; 5; 7; 9; ...;
- правильних дробів із чисельником 1: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; ...?

- 2** 16.3. Запишіть п'ять перших членів арифметичної прогресії (a_n) , різниця якої дорівнює d :

- $a_1 = 5$, $d = 4$;
- $a_1 = 4,7$, $d = -0,7$.

- 16.4. Запишіть чотири перших члени арифметичної прогресії (a_n) , різниця якої дорівнює d :

- $a_1 = 4$, $d = -2$;
- $a_1 = 3,8$, $d = 0,2$.

- 16.5. Знайдіть три наступних члени арифметичної прогресії 4,2; 3,8; 3,4;

- 16.6. Знайдіть чотири наступних члени арифметичної прогресії 5,7; 6,1; 6,5;

16.7. 1) В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 = 13$, $a_2 = 33$. Знайдіть a_{34} .



2) Обчисліть значення виразу $3a_{34}$, відтак дізнаєтеся, якого року збірна України з футболу віком до 20 років стала чемпіоном світу.

16.8. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

1) a_7 , якщо $a_1 = 3$, $d = -8$; 2) a_{12} , якщо $a_1 = 2,7$, $d = 0,4$.

16.9. В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 = -15$, $d = 3,7$. Знайдіть:

1) a_2 ; 2) a_5 ; 3) a_{10} ; 4) a_{101} .

16.10. Знайдіть різницю, десятий і вісімнадцятий члени арифметичної прогресії:

1) $1; \frac{1}{2}; 0; \dots$; 2) $0; 1,5; 3; \dots$.

16.11. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_2 = 8$, $d = -5$; 2) $a_{10} = 7$, $d = 4$.

16.12. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_2 = -7$, $d = 4$; 2) $a_8 = 5$, $d = -2$.

16.13. Знайдіть різницю арифметичної прогресії, у якої перший член дорівнює 8, а одинадцятий – 33.

16.14. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = -5$, $a_9 = 7$.

16.15. Тіло за першу секунду пододало 5 м, а за кожну наступну – на 2 м більше, ніж за попередню. Скільки метрів пододало тіло за шосту секунду; за десятю секунду?



16.16. Учень прочитав книжку за 10 днів. Першого дня він прочитав 40 сторінок, а кожного наступного дня читав на 3 сторінки менше, ніж попереднього. Скільки сторінок учень прочитав за третій день; за останній день?



16.17. Між числами 3 і 7 вставте:

1) одне число; 2) два числа; 3) три числа
таких, щоб вони разом із заданими утворювали арифметичну прогресію.

16.18. Між числами 15 і 30 вставте чотири таких числа, щоб вони разом із заданими утворювали арифметичну прогресію.

16.19. Знайдіть формулу n -го члена арифметичної прогресії:

1) $2x, 5x, 8x, \dots$; 2) $\frac{m-1}{m}, 1, \frac{m+1}{m}, \dots$.

16.20. Знайдіть перший член та різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_{18} = 5$, $a_{19} = 3$; 2) $a_4 = 11$, $a_{20} = 43$.

16.21. Знайдіть перший член та різницю арифметичної прогресії (c_n) , якщо:

1) $c_{17} = 3$, $c_{18} = 6$; 2) $c_8 = -22$, $c_{14} = -40$.

16.22. Таксі «Найкраще» обслуговує клієнтів за таким тарифом: замовлення (подача таксі) – 50 грн, вартість проїзду – 8 грн за розпочатий кілометр.



- 1) Складіть формулу, за якою можна обчислити загальну вартість проїзду C (у грн) залежно від відстані s (у км), яку проїхав пасажир.
- 2) Чи буде ця залежність арифметичною прогресією, якщо s є натуральним числом?
- 3) Знайдіть C , якщо $s = 12$ км.
- 4) Знайдіть s , якщо $C = 170$ грн.

16.23. Брокерська фірма «Вереснева» здає кімнату подобово на таких умовах: плата за укладення договору (бронювання кімнати) – 800 грн (одноразово), вартість добової оренди – 600 грн за кожну розпочату добу.



- 1) Складіть формулу, за якою можна обчислити загальну плату за оренду C (у грн) залежно від кількості днів n , на які орендовано кімнату.
- 2) Чи буде ця залежність арифметичною прогресією, якщо n є натуральним числом?
- 3) Знайдіть C , якщо $n = 5$ км.
- 4) Знайдіть n , якщо $C = 5600$ грн.

16.24. Чи містить арифметична прогресія 5; 8; 11; ... число:

- 1) 92;
- 2) 112?

16.25. В арифметичній прогресії (x_n) $x_1 = 12$, $d = -2,5$. Чи є членом цієї прогресії число:

- 1) -7;
- 2) -23?

16.26. Знайдіть номер першого від'ємного члена арифметичної прогресії (y_n) , у якої $y_1 = 12$, $d = -0,4$.

16.27. Знайдіть номер першого додатного члена арифметичної прогресії -5; -4,8; -4,6;

16.28. Арифметичну прогресію задано формулою $a_n = 5n - 7$. Знайдіть:

- 1) різницю прогресії;
- 2) суму $a_5 + a_6 + a_7$.

16.29. За яких значень x числа $x^2 + 2$, $4x - 2$, x є послідовними членами арифметичної прогресії?

16.30. За яких значень y числа $y + 3$, $2y + 3$, $y^2 - 1$ є послідовними членами арифметичної прогресії?



16.31. За якого значення m числа $m^2 - 4$, m , $2m + 3$ і $4m^2 + 5$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

16.32. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

- 1) $a_5 + a_{19}$, якщо $a_1 + a_{23} = -37$;
- 2) a_{17} , якщо $a_{10} + a_{24} = 5$.

16.33. Послідовність (b_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

- 1) $b_9 + b_{11}$, якщо $b_1 + b_{19} = -25$; 2) $b_7 + b_{13}$, якщо $b_{10} = 2,7$.

16.34. Доведіть, що якщо числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ утворюють арифметичну прогресію, то числа a^2 , b^2 і c^2 також утворюють арифметичну прогресію.

16.35. Доведіть, що якщо числа a^2 , b^2 і c^2 утворюють арифметичну прогресію, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ також утворюють арифметичну прогресію.



Вправи для повторення

16.36. Спростіть вираз:

- 1) $-4p^2t \cdot (-0,5p^3t^4)$; 2) $\frac{39p^3}{5a} : 13p^7a^5$.

16.37. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$; 2) $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$.

16.38. Чи кратне значення виразу $8^6 - 4^7$ числу 6?

16.39. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{10 - 9x - x^2} + \frac{x + 1}{x^2 - 3x}.$$



Життєва математика

16.40. Для транспортування 40 тонн вантажу на відстань 1200 км можна скористатися послугами однієї з трьох компаній-перевізників. Вартість перевезення і вантажопідйомність автомобілів у кожного перевізника подано в таблиці. Скільки доведеться заплатити за найдешевше перевезення вказаного вантажу?

Перевізник	Вартість перевезення одним автомобілем (грн на 100 км)	Вантажопідйомність автомобілів (тонн)
А	800	3,5
Б	1000	5
В	2300	12



Цікаві задачі – поміркуй одначе

16.41. Доведіть нерівність $(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) + 1 \geq 0$.

§ 17. Сума n перших членів арифметичної прогресії

1. Формули для обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії

Розглянемо n перших членів арифметичної прогресії (a_n) : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Позначимо через S_n їх суму:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Знайдемо формулу для обчислення цієї суми. Запишемо цю суму двічі, розмістивши в першому випадку доданки в порядку зростання номерів, а у другому – в порядку спадання:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n;$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Тепер ці рівності додамо почленно, матимемо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). (*)$$

Але за властивістю 3 з попереднього параграфа: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-1} + a_2$, тобто кожна сума в дужках у рівності (*) дорівнює $a_1 + a_n$, оскільки $1 + n = 2 + n - 1 = 3 + n - 2 = \dots = n - 1 + 2$. Тоді у правій частині рівності (*) маємо n доданків, кожен з яких дорівнює $a_1 + a_n$. Отже,

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n).$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на 2, отримаємо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad (1)$$

Якщо у формулі (1) за формулою n -го члена a_n замінити виразом $a_1 + d(n - 1)$, матимемо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n,$$

тобто

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n. \quad (2)$$

Маємо ще одну формулу для обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії, якою зручно користуватися, коли відомо перший член і різницю прогресії.

2. Застосування формул суми n перших членів арифметичної прогресії для розв'язування вправ

Застосуємо формули (1) і (2) для розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайти суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії 4; 7; 10;

Розв'язання. 1-й спосіб. Оскільки $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, то $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$ і $a_{30} = a_1 + 29d = 4 + 29 \cdot 3 = 91$. Тоді за формулою (1):

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{4 + 91}{2} \cdot 30 = 1425.$$

2-й спосіб. Оскільки $a_1 = 4$ і легко з'ясувати, що $d = 3$, можемо використати формулу (2):

$$S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 4 + 29 \cdot 3}{2} \cdot 30 = 1425.$$

Відповідь: 1425.

Приклад 2. Знайти суму вісімнадцяти перших членів послідовності (a_n) , заданої формулою $a_n = -2n + 7$.

Розв'язання. Оскільки послідовність задано формулою $a_n = dn + b$, де $d = -2$, $b = 7$, то вона є арифметичною прогресією (за властивістю 5 попереднього параграфа).

Маємо: $a_1 = -2 \cdot 1 + 7 = 5$, $a_{18} = -2 \cdot 18 + 7 = -29$.

Знайдемо S_{18} :

$$S_{18} = \frac{a_1 + a_{18}}{2} \cdot 18 = \frac{5 + (-29)}{2} \cdot 18 = -216.$$

Відповідь: -216.

Приклад 3. Знайти суму всіх натуральних чисел, які кратні числу 7 та не перевищують 999.

Розв'язання. Натуральні числа, що кратні числу 7, утворюють арифметичну прогресію: 7; 14; 21; 28; ... , яку можна задати формулою $a_n = 7n$.

Знайдемо, скільки членів цієї прогресії не перевищують числа 999.

Для цього розв'яжемо нерівність $7n \leq 999$ і отримаємо, що $n \leq 142\frac{5}{7}$.

Отже, 142 члени прогресії не перевищують числа 999. Знайдемо їхню суму, тобто S_{142} .

Маємо: $a_1 = 7$, $a_{142} = 7 \cdot 142 = 994$. Тоді

$$S_{142} = \frac{7 + 994}{2} \cdot 142 = 71\,071.$$

Відповідь: 71 071.

Приклад 4. З двох точок, відстань між якими 100 м, одночасно назустріч один одному починають рухатися два об'єкти. Перший рухається рівномірно зі швидкістю 9 м/с, а другий за першу секунду проходить 7 м, а за кожну наступну – на 2 м більше, ніж за попередню. Через скільки секунд вони зустрінуться?

Розв'язання. Нехай об'єкти зустрінуться через n секунд. Перший за цей час подолає $9n$ м. Відстані, що подолає другий об'єкт за першу, другу, третю і наступні секунди, утворюють арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 7$, $d = 2$. Тоді за n секунд другий об'єкт подолає відстань S_n , яку можна обчислити за формулою:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 7 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (7 + (n-1)) \cdot n = (n+6)n = n^2 + 6n.$$

За умовою $9n + (n^2 + 6n) = 100$, тоді $n^2 + 15n - 100 = 0$, звідки $n_1 = 5$, $n_2 = -20$. Другий корінь не відповідає змісту задачі. Отже, $n = 5$, тобто зустріч відбудеться через 5 секунд.

Відповідь: 5 секунд.

А ще раніше...

Уже в V ст. до н. е. греки знали кілька прогресій та їхні суми, зокрема:

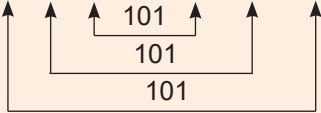
$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$2) 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1);$$

$$3) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \text{ та інші.}$$

З обчисленням суми арифметичної прогресії пов'язана цікава історія, що трапилася з видатним німецьким математиком *Карлом Гауссом* (1777–1855), який, ще навчаючись у школі, виявляв надзвичайні математичні здібності. Одного разу вчитель запропонував учням знайти суму ста перших натуральних чисел. Маленький Гаусс розв'язав цю задачу за мить. Він помітив, що значення сум $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ... однакові, а кількість таких сум дорівнює 50:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$$



Запишіть формули, за якими обчислюють суму n перших членів арифметичної прогресії.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 17.1. Знайдіть S_8 – суму восьми перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 5$, $a_8 = 10$.
- 17.2. Знайдіть S_{10} – суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 7$, $a_{10} = 15$.
- 2** 17.3. Знайдіть суму вісімнадцяти перших членів арифметичної прогресії (c_n) , якщо $c_1 = 17$, $d = -2$.
- 17.4. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 15$, $d = -3$.

17.5. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії:

- 1) 2; -1; -4; ...; 2) 5; 6,5; 8;

17.6. Знайдіть суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії:

- 1) 5; 8; 11; ...; 2) 0; -2,5; -5;

17.7. Знайдіть суму шістдесяти перших членів арифметичної прогресії (x_n) , якщо $x_n = -5n + 17$.

17.8. Знайдіть суму вісімдесяти перших членів арифметичної прогресії (y_n) , якщо $y_n = 3n - 19$.

17.9. Знайдіть суму:

- 1) сорока перших натуральних чисел;
2) натуральних чисел від 1 до 70.

17.10. Знайдіть суму дев'ятнадцяти перших натуральних чисел.

17.11. Дрова складено так, що в нижньому ряду лежить 15 колод, а в кожному наступному на одну колоду менше, ніж у попередньому. Скільки всього колод у дванадцяти рядах?



17.12. В одному із секторів стадіону 14 рядів, причому в першому ряду 5 місць, а в кожному наступному на одне місце більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць у цьому секторі?



17.13. Знайдіть суму:

- 1) усіх натуральних чисел від 125 до 317 включно;
2) усіх натуральних чисел, які кратні числу 5 і не більші за число 350;
3) усіх натуральних чисел, які кратні числу 9 і не перевищують числа 470;
4) усіх двоцифрових натуральних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

17.14. Знайдіть суму:

- 1) усіх натуральних чисел, які кратні числу 7 і не перевищують числа 420;
2) усіх трицифрових натуральних чисел, які при діленні на 4 дають в остачі 1.

17.15. Знайдіть суму восьми перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

- 1) $a_1 = 5$, $a_5 = -7$; 2) $a_5 = 13$, $a_9 = 19$.

17.16. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (x_n) , якщо:

- 1) $x_1 = 4$, $x_6 = -31$; 2) $x_3 = 13$, $x_7 = 23$.

17.17. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо сума перших п'ятнадцяти членів цієї прогресії дорівнює 375, а різниця прогресії дорівнює 3.

17.18. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 7$, а сума восьми її перших членів дорівнює 168.

17.19. Знайдіть суму додатних членів арифметичної прогресії 19; 17; 15;

17.20. Знайдіть суму від'ємних членів арифметичної прогресії -23; -20; -17;

17.21. Скільки треба взяти перших членів арифметичної прогресії 4; 6; 8; ..., щоб їх сума дорівнювала 270?

17.22. Запорізька атомна електростанція є найбільшою в Європі та третьою за розмірами у світі. Знайдіть суму перших 100 членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_2 + a_{99} = 120$, відтак дізнаєтеся, якою є загальна електрична потужність цієї станції (у МВт).



17.23. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з двадцятого до сорокового включно, якщо перший член прогресії дорівнює 8, а різниця прогресії дорівнює -0,6.

17.24. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії 2; 5; 8; ... з десятого до двадцятого включно.

17.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $6 + 10 + 14 + \dots + (4x - 2) = 448$;

2) $33 + 30 + 27 + \dots + x = 195$.

17.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $7 + 11 + 15 + \dots + (4x - 1) = 297$;

2) $11 + 8 + 5 + \dots + x = -221$.

17.27. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 + a_5 = 16$, $a_3 a_4 = 88$.



17.28. З пункту A виїхала вантажівка, яка рухалася зі швидкістю 40 км/год. Одночасно в тому самому напрямку з пункту B вирушив легковик, який за першу годину проїхав 50 км, а кожної наступної години долав на 5 км більше, ніж за попередню. Через скільки годин легковик наздожене вантажівку, якщо відстань між пунктами A і B дорівнює 135 км?



17.29. Зарплата менеджерки супермаркета у перший місяць роботи становила 12 000 грн. Надалі її зарплата щомісяця підвищувалася на 1000 грн, порівняно з попереднім місяцем. Із нарахованої зарплати сплачувалися податки: 18 % – податок на доходи фізичних осіб та 5 % військового збору. Яку загальну суму (на руки) отримала менеджерка за пів року роботи після сплати податків?



Вправи для повторення

17.30. Між якими двома послідовними цілими числами міститься число:

1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $-\sqrt{17}$?

17.31. Розв'яжіть нерівність $6x - 40 > (3x - 8)(3x + 8)$.

17.32. Розв'яжіть рівняння $(2x^2 - 1)(x^2 + 3) = x^2(x^2 + 7)$.

17.33. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^3 + 3x^2}{x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}.$$



Життєва математика

17.34. До електромережі підключено прилади, загальний опір яких становить $R_1 = 90$ Ом. Паралельно з ними передбачено підключити ще й електрообігрівач. Визначте найменш можливий опір R_2 цього електрообігрівача, якщо відомо, що при паралельному з'єднанні двох провідників з опорами R_1 Ом і R_2 Ом їхній загальний опір обчислюють за формулою $R_{\text{заг}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функціонування електромережі її загальний опір має бути не менше, ніж 9 Ом.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

17.35. Запишіть скінченну послідовність, що складається із шести членів, у якої перший член дорівнює 1, а кожен наступний утричі більший за попередній.

17.36. Знайдіть закономірність і продовжте ряд чисел, записавши чотири наступних числа:

- 1) 3; 6; 12; 24; ...;
- 2) 64; 32; 16; 8; ...;
- 3) 1; -3; 9; -27; ...;
- 4) 25 000; -2500; 250; -25;



Цікаві задачі – поміркуй одначе

17.37. (Задача Стенфордського університету.) Знайдіть усі значення m , за яких рівняння $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ має чотири корені, які є послідовними членами арифметичної прогресії.

§ 18. Геометрична прогресія, її властивості. Формула n -го члена геометричної прогресії

1. Означення геометричної прогресії

Розглянемо числову послідовність, перший член якої дорівнює 3, а кожен наступний, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на 2:

$$3; \overbrace{6}^{\cdot 2}; \overbrace{12}^{\cdot 2}; \overbrace{24}^{\cdot 2}; \overbrace{48}^{\cdot 2}; \overbrace{96}^{\cdot 2}; \dots$$

Таку послідовність називають *геометричною прогресією*.

Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожне з яких, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число.

Це число називають знаменником геометричної прогресії і позначають буквою q (від першої літери французького слова *quotient* – частка). Тому, якщо (b_n) – геометрична прогресія, справджуються рівності:

$$b_2 = b_1 q; \quad b_3 = b_2 q; \quad b_4 = b_3 q; \quad \dots$$

Отже, для будь-якого натурального n матимемо:

$$b_{n+1} = b_n q.$$

Тоді

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

тобто

знаменник геометричної прогресії можна знайти, якщо будь-який член прогресії, починаючи з другого, поділити на попередній.

Зауважимо, що оскільки члени геометричної прогресії відмінні від нуля, то і знаменник q не може дорівнювати нулю, тобто $q \neq 0$.

Якщо $q = 1$, то геометрична прогресія складатиметься з однакових чисел. Наприклад, якщо $b_1 = -5$ і $q = 1$, то матимемо геометричну прогресію:

$$-5; -5; -5; -5; -5; \dots$$

Зауважимо, що отриману послідовність можна також вважати і арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює -5 , а різниця дорівнює 0 .

2. Формула n -го члена геометричної прогресії та її застосування

Нехай перший член геометричної прогресії дорівнює b_1 , а знаменник дорівнює q . Тоді

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 q; \\ b_3 &= b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2; \\ b_4 &= b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3; \\ b_5 &= b_4 q = (b_1 q^3) q = b_1 q^4 \text{ і т. д.} \end{aligned}$$

Помічаємо, що в кожній з отриманих формул показник степеня числа q на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, для якого записано цю формулу. Справді, щоб знайти b_n , маючи b_1 і q , треба $n - 1$ разів помножити b_1 на q , тобто b_1 помножити на q^{n-1} . Маємо:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Отримали формулу n -го члена геометричної прогресії.

Розглянемо кілька прикладів на застосування цієї формули.

Приклад 1. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_1 = -27$,

$q = \frac{1}{3}$. Знайти b_6 .

Розв'язання. $b_6 = b_1 q^{6-1} = b_1 q^5 = -27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{1}{9}$.

Відповідь: $b_6 = -\frac{1}{9}$.

Приклад 2. Знайти знаменник q геометричної прогресії (b_n) , якщо

$b_5 = 4$, $b_7 = 36$.

Розв'язання.

1-й спосіб. Маємо $b_5 = b_1 q^4$, $b_7 = b_1 q^6$. Тоді $\frac{b_7}{b_5} = \frac{b_1 q^6}{b_1 q^4} = q^2$.

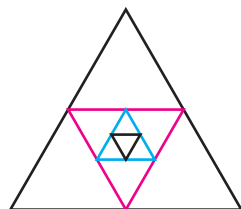
Але $\frac{b_7}{b_5} = \frac{36}{4} = 9$, тобто $q^2 = 9$, отже, $q = 3$ або $q = -3$.

2-й спосіб. ... $\overset{\cdot q}{b_5}$; $\overset{\cdot q}{b_6}$; b_7 ; ...

Оскільки $b_7 = b_6 q = (b_5 q) q = b_5 q^2$, то $q^2 = \frac{b_7}{b_5} = \frac{36}{4} = 9$; отже, $q = 3$ або $q = -3$.

Відповідь: $q = 3$ або $q = -3$.

Приклад 3. Дано рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює 8 см. Середини його сторін є вершинами другого трикутника, а середини сторін другого є вершинами третього і так само далі (мал. 18.1). Знайти площу п'ятого трикутника, побудованого в такий само спосіб.



Мал. 18.1

Розв'язання. Нехай $S_1, S_2, S_3, \dots$ – площі першого, другого, третього і далі трикутників. Знайдемо S_1 :

$$S_1 = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки сторони кожного наступного трикутника є середніми лініями попереднього, то довжина сторони кожного наступного трикутника буде вдвічі меншою від довжини сторони попереднього. Тоді сторона другого трикутника дорівнює 4 см, а його площа

$$S_2 = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Сторона третього трикутника дорівнює 2 см,}$$

$$\text{тоді } S_3 = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Очевидно, що } S_3 \text{ в 4 рази менша від } S_2,$$

а S_2 у 4 рази менша від S_1 , тобто дійдемо висновку, що площа кожного наступного трикутника в 4 рази менша від площі попереднього, тому знайдені числові значення площ S_1 ; S_2 ; S_3 ; ... є послідовними членами геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{4}$, перший член якої дорівнює $16\sqrt{3}$. Тоді числове значення площі п'ятого трикутника є відповідно п'ятим членом цієї прогресії. Тому

$$S_5 = S_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-1} = 16\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{\sqrt{3}}{16} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{16} \text{ см}^2$.

3. Властивості геометричної прогресії

Доведемо деякі важливі властивості геометричної прогресії.

1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ де } n \in N, n \geq 2.$$

Доведення. Скористаємося формулою n -го члена геометричної прогресії. Тоді:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 q^{(n-1)-1} \cdot b_1 q^{(n+1)-1} = b_1^2 q^{n-2+n} = b_1^2 q^{2n-2} = (b_1 q^{n-1})^2 = b_n^2. \quad \blacksquare$$

Якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, тобто кожен член геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів.

За однією з версій саме із цією властивістю геометричної прогресії і пов'язано її назву.

2. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \text{ де } n \in N, k \in N, k < n.$$

Властивість доводиться аналогічно попередній властивості.

3. Якщо k, l, p і s – натуральні числа і $k + l = p + s$, то

$$b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_s.$$

Доведення. Скористаємося формулою n -го члена геометричної прогресії:

$$b_k \cdot b_l = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{l-1} = b_1^2 q^{(k+l)-2};$$

$$b_p \cdot b_s = b_1 q^{p-1} \cdot b_1 q^{s-1} = b_1^2 q^{(p+s)-2}.$$

Але $k + l = p + s$, тому $b_1^2 q^{(k+l)-2} = b_1^2 q^{(p+s)-2}$.

Отже, $b_k b_l = b_p b_s$. ■

А ще раніше...

У папірусі Ахмеса, який ми вже неодноразово згадували, є задача, у якій треба знайти суму n членів геометричної прогресії, а саме: «У семи людей є по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, з кожного колоска можна виростити по сім мір зерна. Якими є числа цього ряду та їх сума?».

У своїй праці «Псаммит» Архімед уперше порівняв арифметичну і геометричну прогресії:

1; 2; 3; 4; 5; ...

10; 10²; 10³; 10⁴; 10⁵; ...

та помітив, що, наприклад $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$, тобто під час множення членів такої геометричної прогресії досить додати відповідні члени арифметичної прогресії і отриману суму записати показником числа 10.

Для давніх греків геометрична прогресія, як і арифметична, була пов'язана з так званою неперервною геометричною пропорцією: $a : b = b : c$, у якій числа

a, b і c утворюють геометричну прогресію зі знаменником $\sqrt{\frac{c}{a}}$. Цим зв'язком і пояснюється одна з версій назви прогресії – *геометрична*.



Яку послідовність називають геометричною прогресією? Яке число називають знаменником геометричної прогресії? Чи може знаменник геометричної прогресії дорівнювати нулю; одиниці? Як можна знайти знаменник геометричної прогресії? Запишіть формулу n -го члена геометричної прогресії. Сформулюйте і доведіть властивості геометричної прогресії.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

18.1. Які з послідовностей є геометричними прогресіями? Укажіть для них перший член і знаменник.

1) 3; 6; 12; 2) 7; 7; 7; 3) 1; 2; 3;

4) 8; -8; 8; 5) 9; 3; 1; 6) 2; 4; 6.

18.2. Чи є геометричною прогресією послідовність:

1) натуральних чисел: 1; 2; 3; 4; 5; ...;

2) натуральних степенів числа 2: 2; 4; 8; 16; 32; ...;

3) натуральних степенів числа -5: -5; 25; -125; 625; ...;

4) кубів натуральних чисел: 1; 8; 27; 64; 125; ...?

2

18.3. Знайдіть чотири перших члени геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо:

1) $b_1 = 10$, $q = 2$; 2) $b_1 = -20$, $q = 0,1$;

3) $b_1 = -5$, $q = -3$; 4) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$.

18.4. Знайдіть п'ять перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо:

1) $b_1 = 125, q = -\frac{1}{5}$; 2) $b_1 = 0,5, q = 10$.

18.5. (x_n) – геометрична прогресія, $x_1 = \frac{1}{32}, q = -2$. Знайдіть:

1) x_2 ; 2) x_5 ; 3) x_8 ; 4) x_k .

18.6. (y_n) – геометрична прогресія, $y_1 = 81, q = -\frac{1}{3}$. Знайдіть:

1) y_2 ; 2) y_4 ; 3) y_7 ; 4) y_k .

18.7. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) b_6 , якщо $b_1 = 1, q = 2$; 2) b_5 , якщо $b_1 = 125, q = -\frac{1}{5}$;

3) b_7 , якщо $b_1 = 64, q = \frac{1}{2}$; 4) b_4 , якщо $b_1 = \sqrt{2}, q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

18.8. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) b_5 , якщо $b_1 = 2, q = -1$; 2) b_4 , якщо $b_1 = -128, q = \frac{1}{2}$;

3) b_7 , якщо $b_1 = 64, q = -\frac{1}{4}$; 4) b_3 , якщо $b_1 = 3, q = -\sqrt{2}$.

18.9. Знайдіть шостий та n -й члени геометричної прогресії:

1) 10 000; 1000; 100; ...;

2) 3; -6; 12;

18.10. Знайдіть п'ятий та n -й члени геометричної прогресії:

1) 20; 5; 1,25; ...;

2) 4; -8; 16;

18.11. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_4 = 40, q = 2$;

2) $b_3 = 27, q = -3$.

18.12. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_3 = 100, q = -2$;

2) $b_4 = 64, q = 4$.

18.13. 1) (b_n) – геометрична прогресія, у якій $b_2 = 6, q = 2$. Знайдіть b_4 .



2) Знайдіть, чому дорівнює $83b_4$, відтак дізнаєтеся, якого року на Олімпійських іграх уперше прозвучав гімн України.

18.14. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть b_7 , якщо $b_6 = 4, b_8 = 9$.

18.15. Матеріальна точка за першу секунду пододала 5 м, а за кожну наступну – утричі більшу за попередню відстань. Скільки метрів пододала матеріальна точка за четверту секунду?

18.16. Ламана складається з п'яти ланок. Перша з них дорівнює 48 см, а кожна наступна вдвічі коротша від попередньої. Яка довжина п'ятої (найкоротшої) ланки?

3 **18.17.** Доведіть, що послідовність (x_n) , задана формулою $x_n = 3 \cdot 4^n$, є геометричною прогресією. Знайдіть її перший член і знаменник.

18.18. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , у якої:

- 1) $b_7 = 12$, $b_9 = 48$; 2) $b_8 = 9$, $b_{11} = 243$;
3) $b_{16} = 16$, $b_{18} = 9$; 4) $b_{30} = 1$, $b_{33} = -1$.

18.19. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , у якої:

- 1) $b_{10} = 11$, $b_{12} = 99$;
2) $b_{10} = 27$, $b_{13} = 1$.

18.20. Запишіть геометричну прогресію з п'яти членів, у якої третій член дорівнює 10, а знаменник дорівнює -2 .

18.21. Запишіть геометричну прогресію із шести членів, четвертий член якої дорівнює 80, а знаменник дорівнює -4 .

18.22. Послідовність (x_n) – геометрична прогресія. Знайдіть x_5 , якщо $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{8}$.

18.23. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть b_1 , якщо $b_4 = -1$, $b_6 = -100$.

18.24. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

- 1) c_1 , якщо $c_3 = 10$, $c_5 = \frac{1}{10}$; 2) c_6 , якщо $c_1 = 2$, $c_3 = 8$.

18.25. Під мікроскопом розглядають 5 клітин, які розмножуються поділом навпіл щохвилини. Скільки утвориться клітин через одну хвилину; через три хвилини; через шість хвилин?

18.26. У перший тиждень після відкриття піцерії «Найкраща» в ній зробили замовлення 500 клієнтів. Надалі кількість замовлень збільшувалася у 1,2 раза щотижня, і такий приріст тривав наступні 3 тижні.

- 1) Скільки клієнтів зробило замовлення у четвертий тиждень?
2) Чи можна стверджувати, що в разі збереження такої тенденції через 2 місяці (тобто на 9-й тиждень) після відкриття, піцерія обслуговуватиме понад 1500 клієнтів щотижня?

18.27. У чемпіонаті України із шахів були встановлені грошові призи для учасників, які посіли перші вісім місць. Чемпіон отримував 100 000 грн. Кожен наступний призер, починаючи з 2-го місця, отримував 90 % від суми призу, яку отримав учасник, що посідав місце на одну позицію вище.

- 1) Який приз отримав учасник, який посів 4-те місце?
2) Чи отримав учасник, який посів 8-ме місце, приз, більший за 50 000 грн?

4 18.28. Між числами 1 і 64 вставте:

- 1) одне число; 2) два числа

таких, щоб вони разом з даними утворили геометричну прогресію.

18.29. Геометрична прогресія (b_n) складається з п'яти членів: $\frac{1}{2}$, x_2 , x_3 , 4 , x_5 . Знайдіть x_2 , x_3 , x_5 .

18.30. За якого значення x числа $x + 3$, $2x$ і $5x - 4$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

18.31. За якого значення y числа y , $2y + 3$ і $4y + 3$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

18.32. Доведіть, що коли числа a , b і c є послідовними членами геометричної прогресії, то справджується рівність:

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

18.33. Для деяких чисел x , y , z , жодне з яких не дорівнює нулю, справджується рівність:

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2.$$

Доведіть, що x , y , z – послідовні члени геометричної прогресії.

18.34. Дано квадрат зі стороною 16 см. Середини його сторін є вершинами другого квадрата, а середини сторін другого квадрата є вершинами третього і так само далі. Знайдіть площу шостого квадрата, побудованого в такий спосіб.



Вправи для повторення

18.35. Обчисліть:

- 1) 2^7 ;
2) 4^6 ;
3) $3^5 - 1$;
4) $(3 - 1)^5$.

18.36. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

- 1) $a_2 + a_4 = 14$, $a_6 + a_9 = 32$;
2) $a_2 + a_6 = 4$, $a_4 a_3 = 6$.

18.37. Доведіть, що значення виразу $\frac{a+3}{2a+2} - \frac{a+1}{2a-2} + \frac{2}{a^2-1}$ не залежить від значення змінної.

18.38. Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $5x^2 + 7x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$.

18.39. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$.



Життєва математика

18.40. Після дощу рівень води в колодязі може підвищитися. Тарас вимірює час t падіння невеликих камінчиків у колодязь і розраховує відстань до води за формулою $h = 5t^2$, де h – відстань у метрах до води, t – час падіння в секундах. В один із днів час падіння камінців становив 0,9 с, а після кількох дощових днів – 0,8 с. На скільки метрів піднявся рівень води в колодязі за ці дні?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

18.41. Знайдіть:

- | | |
|---------------------|--------------------|
| 1) 7 % від 10 000; | 2) 9 % від 20 000; |
| 3) 11 % від 15 000; | 4) 12 % від 8000. |

18.42. Вкладниця відкрила в банку депозитний рахунок на 40 000 грн під 15 % річних.

- 1) Скільки відсоткових коштів матиме вкладниця через рік?
- 2) Якою буде сума на рахунку вкладниці через рік?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

18.43. Про послідовність (a_n) відомо, що $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$. Знайдіть формулу n -го члена цієї послідовності.



§ 19. Формула складних відсотків

1. Задача нарахування відсоткових коштів

Бухгалтерам та працівникам банків часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки. Розглянемо задачу про нарахування *відсоткових коштів*. З економічної точки зору відсоткові кошти можна вважати винагородою, яку сплачує особа чи установа (позичальник) за користування протягом певного часу певною сумою коштів, отриманих від іншої особи чи установи (кредитора). Розмір цієї винагороди залежить від суми позики та терміну користування нею.

Приклад 1. Вкладник відкрив у банку депозит у розмірі 10 000 грн під 11 % річних (тобто банк зобов'язується виплатити відсоткові кошти в розмірі 11 % на рік від початкової суми вкладу). Скільки відсоткових коштів отримає вкладник через рік?

Розв'язання. 11 % = 0,11, тому вкладник отримає $0,11 \cdot 10\,000 = 1100$ (грн) відсоткових коштів.

Відповідь: 1100 грн.

2. Формула складних відсотків

Якщо вкладник вирішив тримати кошти в банку більше ніж один рік, не додаючи нових коштів і не забираючи з банку вкладених кош-

тів, то обчислити суму коштів на рахунку вкладника через кілька років можна за допомогою *формули складних відсотків*.

Нехай вкладник поклав до банку A_0 грн під p % річних, A_0 ще називають *початковим капіталом*. Через рік банк нарахує вкладнику $\frac{A_0 p}{100}$ грн відсоткових коштів. Тому на рахунку вкладника через рік

буде $A_0 + \frac{A_0 p}{100} = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ грн – *нарощений капітал*. Позначимо

$A_1 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. За другий рік вкладнику буде нараховано $\frac{A_1 p}{100}$ грн

відсоткових коштів (адже тепер банк нараховує p % річних від числа A_1) і його вклад дорівнюватиме:

$$A_1 + \frac{A_1 p}{100} = A_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Міркуючи аналогічно та застосовуючи формулу n -го члена геометричної прогресії (b_n), де $b_1 = A_0$ і $q = 1 + \frac{p}{100}$, дійдемо висновку, що через n років нарощений капітал становитиме:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ грн.}$$

Отже,

початковий капітал A_0 , внесений до банку під p % річних, через n років стане нарощеним капіталом A_n , розмір якого обчислюється за формулою:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

яку називають *формулою складних відсотків*.

3. Застосування формули складних відсотків під час розв'язування задач

Приклад 2. Вкладниця відкрила в банку депозит на 5000 грн під 12 % річних. Скільки коштів буде на рахунку вкладниці через 3 роки? Скільки відсоткових коштів отримає вкладниця через 3 роки?

Розв'язання. $A_0 = 5000$, $p = 12$ %, $n = 3$. Тоді

$$A_3 = 5000 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^3 = 7024,64 \text{ (грн).}$$

Відсоткові кошти можна знайти як різницю $A_3 - A_0$.

Отже, $A_3 - A_0 = 7024,64 - 5000 = 2024,64$ (грн).

Відповідь: 7024,64 грн, 2024,64 грн.

За формулою складних відсотків можна також розв'язувати й інші задачі, не пов'язані з нарощенням капіталу.

Приклад 3. Населення деякого міста становить 30 000 мешканців.

Щорічно кількість населення зменшується на 0,2 %. Яким буде населення цього міста через 10 років?

Розв'язання. Оскільки населення міста щороку зменшується на однаковий відсоток, і це відсоток від кількості населення кожного попереднього року, а не від початкової кількості мешканців, то можна скористатися формулою складних відсотків.

Маємо, що $A_0 = 30\,000$, $p = -0,2$ (оскільки населення зменшується, то $p < 0$), $n = 10$. Тоді:

$$A_{10} = 30\,000 \left(1 - \frac{0,2}{100}\right)^{10} \approx 29\,405 \text{ (мешк.)}.$$

Відповідь: 29 405 мешканців.



Що таке відсоткові кошти? ○ Запишіть формулу складних відсотків.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

3 19.1. Вкладник поклав на депозитний рахунок 100 000 грн під 11 % річних.

1) Скільки коштів буде на цьому рахунку через 3 роки; через 5 років?

2) Скільки відсоткових коштів матиме вкладник через 3 роки; через 5 років?

19.2. Вкладниця відкрила в банку депозитний рахунок на 200 000 грн під 12 % річних.

1) Якою буде сума на рахунку через 2 роки; через 4 роки?

2) Скільки відсоткових коштів отримає вкладниця за 2 роки; за 4 роки?

19.3. Вкладник відкрив депозит на 80 000 грн під 9 % річних. Складіть формулу для обчислення відсоткових коштів вкладника через n років. Обчисліть за цією формулою відсоткові кошти, якщо: $n = 2$; $n = 3$.

19.4. Яку мінімальну суму коштів треба покласти в банк під 12 % річних, щоб через 2 роки мати на рахунку більше, ніж 100 000 грн? Відповідь округліть до тисяч гривень.

4 19.5. Яку суму треба внести на депозит під 10 % річних, щоб одержати через 2 роки прибуток у розмірі 12 180 грн?

19.6. Яку суму треба внести на депозит під 5 % річних, щоб одержати через 2 роки прибуток у розмірі 8200 грн?

19.7. Товар коштує 2000 грн. Щомісяця ціна товару знижується на 3 %. Якою буде ціна товару через:

- 1) 3 місяці;
- 2) пів року?

Відповідь округліть до сотих гривні.

19.8. Населення міста становить 50 000 осіб і щороку зменшується на 1 %. Якою буде кількість населення міста через:

- 1) 5 років;
- 2) 10 років?

19.9. Який відсоток річних має нараховувати банк, щоб через три роки початковий розмір вкладу збільшився в $1\frac{91}{125}$ раза?



Вправи для повторення

19.10. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$x(x - 2) + 3x \geq 2x(x + 1) - 6?$$

19.11. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = 3. \end{cases}$$



Життєва математика

19.12. Волонтерська організація збирає кошти для закупівлі пластмаси, яка використовується для друку необхідних виробів на 3D-принтері. За місяць вдалося зібрати 51 000 грн волонтерських коштів. На ринку є такі пропозиції:

Продавець	Ціна за 1 кг пластмаси, грн	Особливі умови
1	270	Немає
2	300	Знижка 15 % у разі купівлі більше ніж 10 кг
3	320	Знижка 20 % у разі купівлі більше ніж 15 кг

Як краще розпорядитися зібраними коштами?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

19.13. (Національна олімпіада Румунії, 1981 р.) Розв'яжіть рівняння $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ у цілих числах.

§ 20. Сума n перших членів геометричної прогресії

1. Формули для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії

Розглянемо n перших членів геометричної прогресії (b_n) : $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$. Позначимо через S_n їхню суму:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n.$$

Знайдемо формулу для обчислення цієї суми. Маємо (враховуючи формулу n -го члена геометричної прогресії):

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q :

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Віднімемо почленно від цієї рівності попередню:

$$\begin{aligned} S_nq - S_n &= (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n) - \\ &- (b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}) = b_1q^n - b_1 = b_1(q^n - 1). \end{aligned}$$

Отже, $S_nq - S_n = b_1(q^n - 1)$ і $S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1)$.

Якщо $q \neq 1$, то отримаємо формулу суми n перших членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}. \quad (1)$$

Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії дорівнюють першому члену і тоді $S_n = nb_1$.

Зауважимо, що отриману формулу (1) можна записати й у такому вигляді:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Оскільки $b_n = b_1q^{n-1}$, то отриману формулу (1) суми n перших членів геометричної прогресії можна подати й у іншому вигляді. Справді,

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1q^{n-1}q - b_1}{q - 1} = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}.$$

Отже,

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}. \quad (2)$$

Маємо ще одну формулу для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії, якою зручно користуватися, якщо відомо перший та n -й члени прогресії та її знаменник.

2. Застосування формул суми n перших членів геометричної прогресії для розв'язування вправ

Застосуємо ці формули для розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайти суму перших семи членів геометричної прогресії 2; -6; 18;

Розв'язання. 1-й спосіб. За умовою: $b_1 = 2$, $b_2 = -6$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3$.

Тоді за формулою (1):

$$S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{2((-3)^7 - 1)}{-3 - 1} = \frac{2 \cdot (-2188)}{-4} = 1094.$$

2-й спосіб. Відомо, що $b_1 = 2$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3$, тоді

$$b_7 = b_1 q^6 = 2 \cdot (-3)^6 = 1458.$$

$$\text{За формулою (2): } S_7 = \frac{b_7 q - b_1}{q - 1} = \frac{1458 \cdot (-3) - 2}{-3 - 1} = 1094.$$

Відповідь: 1094.

Приклад 2. Знайти суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_2 = 8$, $b_4 = 32$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3 = (b_1 q) q^2 = b_2 q^2$, то $q^2 = \frac{b_4}{b_2} = \frac{32}{8} = 4$,

отже, $q = 2$ або $q = -2$.

Тоді існують дві прогресії, що задовольняють умову задачі:

$$1) \text{ якщо } q = 2, \text{ то } b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{2} = 4 \text{ і } S_6 = \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1} = 252;$$

$$2) \text{ якщо } q = -2, \text{ то } b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{-2} = -4 \text{ і } S_6 = \frac{-4((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = 84.$$

Відповідь: 252 або 84.

Приклад 3. Скоротити дріб $\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{x^6 - 1}$.

Розв'язання. Доданки в чисельнику дробу є послідовними членами геометричної прогресії 1, x , x^2 , x^3 , x^4 , x^5 , перший член якої дорівнює 1, а знаменник дорівнює x . З умови випливає, що $x \neq 1$.

Знайдемо суму всіх шести членів цієї прогресії за формулою (1) та скоротимо поданий в умові дріб:

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{x^6 - 1} = \frac{\frac{1 \cdot (x^6 - 1)}{x - 1}}{x^6 - 1} = \frac{1}{x - 1}.$$

Відповідь: $\frac{1}{x - 1}$.

А ще раніше...

Стародавня індійська задача-легенда розповідає, що винахідник шахів Сета попросив у індійського царя Шерама за свій винахід стільки зерен, скільки їх буде, якщо покласти на першу клітинку шахівниці одну зернину, на другу – дві, на третю – чотири, на четверту – вісім і далі у той самий спосіб, доки не заповняться всі клітинки шахівниці.

Цар здивувався, що винахідник забажав так мало, і запропонував своїм математикам обчислити кількість зернин, які повинен йому віддати. Подиву царя не було меж, коли він почув, що ця кількість дорівнює числу

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Щоб зібрати таку кількість зернин, треба було засіяти і зібрати врожай пшениці з площі, яка у 2000 разів більша за площу Землі. Для зберігання такого врожаю знадобилася б комора, яка за ширини 10 м і висоти 4 м мала б довжину 300 000 000 км, тобто удвічі більшу за відстань від Землі до Сонця.



Запишіть формули, за якими обчислюють суму n перших членів геометричної прогресії.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 20.1. Знайдіть S_5 – суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 1$, $q = 2$.
- 20.2. Знайдіть S_4 – суму чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 1$, $q = 3$.
- 2** 20.3. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$;	2) $b_1 = -17$, $q = -2$;
3) $b_1 = 32$, $q = -\frac{1}{2}$;	4) $b_1 = 5\sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$.
- 20.4. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{2}$;	2) $b_1 = 5$, $q = -2$;
3) $b_1 = 27$, $q = -\frac{1}{3}$;	4) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$.
- 20.5. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії:

1) 16; -8; 4; ...;	2) 1,5; 3; 6; ...;
3) 4; 4 ² ; 4 ³ ; ...;	4) $\sqrt{3}$; 3; 3 $\sqrt{3}$;
- 20.6. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії:

1) 1,5; 6; 24; ...;	2) -4; 2; -1; ...;
3) 2; 2 ² ; 2 ³ ; ...;	4) 2; $\sqrt{2}$; 1;

20.7. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

- 1) S_7 , якщо $b_1 = 2$, $q = -3$; 2) S_8 , якщо $b_1 = -1$, $q = 4$.

20.8. Використовуючи формулу (2) із цього параграфа, обчисліть суму чисел, що є послідовними членами геометричної прогресії:

- 1) $1 + 3 + 9 + \dots + 729$; 2) $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots + 2$.

20.9. Використовуючи формулу (2) із цього параграфа, обчисліть суму чисел, що є послідовними членами геометричної прогресії:

- 1) $2 + 4 + 8 + \dots + 128$; 2) $\frac{1}{5} + 1 + 5 + \dots + 625$.

20.10. На п'яти ділянках висаджено смородину. На першій ділянці  16 кущів, а на кожній наступній у 1,5 раза більше, ніж на попередній. Скільки всього кущів смородини висаджено на п'яти ділянках?

20.11. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює 12,5 см, а кожна наступна – у 1,2 раза довша за попередню. Знайдіть периметр чотирикутника.

20.12. Аріна розмістила на *YouTube* цікавий ролик. Першого дня ролик отримав 40 лайків. Протягом наступних 3 днів кількість лайків щодня збільшувалася у 2,5 раза, порівняно з попереднім днем. 

- 1) Скільки лайків отримав ролик на четвертий день?
2) Скільки всього лайків ролик Аріни зібрав за перші чотири дні?

3 **20.13.** Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n) , у якої:

- 1) $b_2 = 6$, $q = 2$; 2) $b_3 = 8$, $q = -4$.

20.14. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n) , у якої:

- 1) $b_2 = 8$, $q = 4$; 2) $b_3 = 27$, $q = -3$.

20.15. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

- 1) S_8 , якщо $b_3 = \frac{1}{4}$, $b_4 = \frac{1}{8}$; 2) S_5 , якщо $b_1 = 5$, $b_3 = 45$, $q > 0$;
3) S_4 , якщо $b_2 = 8$, $b_4 = 2$, $q < 0$;
4) S_7 , якщо $b_1 = 5$, $b_4 = 40$.

20.16. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

- 1) S_7 , якщо $b_2 = \frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$;
2) S_8 , якщо $b_1 = 9$, $b_3 = 36$, $q > 0$;
3) S_4 , якщо $b_2 = 25$, $b_4 = 1$, $q < 0$;
4) S_6 , якщо $b_1 = 1$, $b_4 = 27$.

20.17. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , у якої:

- 1) $q = 2$, $S_6 = 315$; 2) $q = -\frac{2}{3}$, $S_4 = 13$.

20.18. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , у якої:

1) $q = -2$, $S_6 = -63$;

2) $q = \frac{1}{3}$, $S_5 = 121$.

20.19. Скоротіть дріб:

1) $\frac{1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8}{x^{10} - 1}$;

2) $\frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5}{x^6 - 1}$.

20.20. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_2 = 125$, $b_4 = 5$. Знайдіть S_5 .

20.21. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія, $c_3 = 27$, $c_5 = 3$. Знайдіть S_6 .

20.22. (З книжки Я. І. Перельмана «Жива математика», 1967 р.)



Один чоловік запропонував багатію таку угоду: чоловік щодня протягом місяця сплачуватиме багатію по 100 000 карбованців, а багатій сплачуватиме цьому чоловікові: першого дня – 1 копійку, другого – 2 копійки, третього – 4 копійки, четвертого – 8 копійок і далі в той самий спосіб. Угода діятиме рівно 30 днів. Багатій погодився. Хто з них виграє за такої угоди? Візьміть до уваги, що 1 карбованець = 100 копійок.

20.23. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія, $c_5 - c_3 = 144$, $c_4 - c_2 = 48$. Знайдіть S_6 .

20.24. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_6 - b_4 = 48$, $b_3 - b_5 = 24$. Знайдіть S_5 .

20.25. Друзі Марічка та Павло, кожен окремо, зареєстрували ФОП.



Марічка першого місяця отримала прибуток 60 000 грн, а кожного наступного місяця – на 5 % більше, ніж попереднього. Павло першого місяця також отримав прибуток 60 000 грн, а кожного наступного місяця – на 5000 грн більше, ніж попереднього.

1) Хто з друзів отримав більший загальний прибуток за пів року; на скільки? (Відповідь округліть до тисяч гривень.)

2) Як зміниться відповідь на перше запитання, якщо в перший місяць кожен із підприємців отримав прибуток 100 000 грн?

3) Зробіть висновки.

20.26. Знайдіть кількість членів геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_1 = 15$, $q = 2$, $S_n = 945$;

2) $b_1 = 2$, $b_n = 128$, $S_n = 254$;

3) $q = 3$, $b_n = 486$, $S_n = 726$.



Вправи для повторення

20.27. Розв'яжіть нерівність:

1) $5(x - 2) \leq x + 26$;

2) $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

20.28. Знайдіть суму всіх від'ємних членів прогресії $-4,8; -4,4; -4; \dots$.

20.29. Обчисліть:

$$\left(\frac{\sqrt{7} + 3}{\sqrt{7} - 3} - \frac{\sqrt{7} - 3}{\sqrt{7} + 3} \right)^2.$$

20.30. Вкладниця внесла до банку на два різних рахунки кошти на загальну суму 60 000 грн. За першим із них банк нараховує 10 % річних, а за другим – 7 %. Через рік вкладниця отримала 4800 грн прибутку. Яку суму коштів вона внесла на кожен з рахунків?

20.31. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a - 20}{(a - 5)^2} : \left(\frac{a}{a^2 - 25} - \frac{a - 8}{a^2 - 10a + 25} \right)$$

є додатним, якщо $a < -5$.

20.32. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{y}{2x} - \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ y^2 - 5xy + 2x^2 = 32. \end{cases}$$



Життєва математика

20.33. У трьох салонах мобільного зв'язку однаковий смартфон у кредит продають на різних умовах. Умови кредиту подано в таблиці.

Салон	Ціна смартфона, грн	Початковий внесок (у % від ціни)	Строк кредиту (місяців)	Сума щомісячного платежу, грн
Альфа	5000	15	12	400
Бета	5240	10	6	850
Гамма	4750	20	12	380

Визначте, у якому із салонів придбання смартфона в кредит є найвигіднішим, та обчисліть остаточну суму, у яку обійдеться купівля.



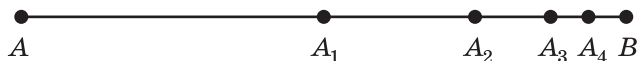
Цікаві задачі – поміркуй одначе

20.34. З пункту A до пункту B виїхав мотоцикліст. Через 2 год в тому самому напрямку виїхав легковик, який прибув до пункту B одночасно з мотоциклістом. Якби мотоцикліст і легковик одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B , то вони зустрілися б через 1 год 20 хв. За який час кожен з них долає шлях від A до B ?

§ 21. Нескінченна геометрична прогресія та її сума

1. Поняття про суму нескінченної геометричної прогресії

Нехай довжина відрізка AB дорівнює 2 одиниці. A_1 – середина відрізка AB , A_2 – середина відрізка A_1B , A_3 – середина відрізка A_2B і так само далі (мал. 21.1).



Мал. 21.1

Довжини відрізків AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , ... утворюють нескінченну геометричну прогресію:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$$

Перший член цієї прогресії дорівнює 1, а знаменник дорівнює $\frac{1}{2}$.

Якщо кількість відрізків, які утворилися в такий спосіб, збільшувати до нескінченності, то сума їхніх довжин буде як завгодно близько наближатися до довжини відрізка AB , тобто до числа 2. У такому разі число 2 називають *сумою нескінченної геометричної прогресії* $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$

і записують:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2.$$

2. Формула для обчислення суми нескінченної геометричної прогресії при $|q| < 1$

Знайдемо формулу для обчислення суми нескінченної геометричної прогресії $b_1; b_1q; b_1q^2; b_1q^3; \dots$ зі знаменником q , де $|q| < 1$. За відомою формулою знайдемо суму її n перших членів:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Перетворивши вираз у правій частині цієї формули, матимемо:

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1q^n}{q - 1} - \frac{b_1}{q - 1} = \frac{b_1}{1 - q} + \frac{b_1}{q - 1} \cdot q^n.$$

$$\text{Отже, } S_n = \frac{b_1}{1 - q} + \frac{b_1}{q - 1} \cdot q^n.$$

В останній формулі значення дробу $\frac{b_1}{1 - q}$ є сталим, а значення ви-

разу $\frac{b_1}{q - 1} \cdot q^n$ – змінним, яке залежить від n . Оскільки $|q| < 1$, то за

необмеженого збільшення n множник q^n наближатиметься до нуля, а тому наближатиметься до нуля і добуток $\frac{b_1}{q-1} \cdot q^n$. Тоді сума S_n за необмеженого збільшення n наближатиметься до числа $\frac{b_1}{1-q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ називають *сумою нескінченної геометричної прогресії* (b_n) зі знаменником q , де $|q| < 1$. Позначивши цю суму через S , отримаємо формулу:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Зауважимо, що коли $|q| \geq 1$, то для суми n перших членів геометричної прогресії за необмеженого збільшення n неможливо вказати жодного числа, до якого вона наближається. Отже, суму нескінченної геометричної прогресії можна знайти лише, коли $|q| < 1$.

3. Застосування формули для обчислення суми нескінченної геометричної прогресії для розв'язування вправ

Розглянемо кілька вправ на застосування цієї формули.

Приклад 1. Знайти суму нескінченної геометричної прогресії 18; -6; 2;

Розв'язання. $b_1 = 18$, $b_2 = -6$, тому $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$. Умова $|q| < 1$ виконується. Отже,

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{18}{1 + \frac{1}{3}} = 13,5.$$

Відповідь: 13,5.

Приклад 2. Другий член нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q , де $|q| < 1$, дорівнює 4, а сума прогресії дорівнює 16. Знайти перший член та знаменник прогресії.

Розв'язання. За умовою $b_2 = 4$, $S = 16$. Виразимо b_2 і S через b_1 і q , отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_1 q = 4, \\ \frac{b_1}{1-q} = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{4}{q}, \\ \frac{4}{q(1-q)} = 16. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи і знайдемо значення q :

$$4 = 16q(1 - q); 4q^2 - 4q + 1 = 0; q = 0,5. \text{ Тоді } b_1 = \frac{4}{0,5} = 8.$$

Відповідь: $b_1 = 8, q = 0,5$.

4. Перетворення нескінченних десяткових періодичних дробів на звичайні

Формула суми нескінченної геометричної прогресії допомагає перетворити нескінченні десяткові періодичні дробі на звичайні.

Приклад 3. Записати нескінченний десятковий періодичний дріб $0,(4)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Оскільки $0,(4) = 0,4444\dots$, запишемо цей нескінченний періодичний дріб у вигляді суми розрядних доданків:

$$0,(4) = 0,4 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + \dots$$

Доданки $0,4; 0,04; 0,004; 0,0004; \dots$ є членами нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $0,4$, а знаменник

$$q = \frac{0,04}{0,4} = 0,1 \text{ задовольняє умову } |q| < 1. \text{ За формулою суми нескінченної}$$

$$\text{геометричної прогресії матимемо: } S = \frac{0,4}{1 - 0,1} = \frac{0,4}{0,9} = \frac{4}{9}. \text{ Отже, } 0,(4) = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Відповідь: } 0,(4) = \frac{4}{9}.$$

Перевірити правильність отриманої відповіді можна, поділивши 4 на 9 . Справді, $4 : 9 = 0,444\dots$.

Приклад 4. Записати нескінченний десятковий періодичний дріб $2,4(18)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. $2,4(18) = 2,4181818\dots$ Подамо це число у вигляді суми розрядних доданків:

$$2,4(18) = 2,4 + 0,018 + 0,00018 + 0,0000018 + \dots$$

Доданки $0,018; 0,00018; 0,0000018\dots$ є членами нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $0,018$, а знаменник

$$q = \frac{0,00018}{0,018} = 0,01 \text{ задовольняє умову } |q| < 1. \text{ Знайдемо суму цієї про-}$$

$$\text{гресії: } S = \frac{0,018}{1 - 0,01} = \frac{0,018}{0,99} = \frac{18}{990} = \frac{1}{55}.$$

$$\text{Тоді } 2,4(18) = 2,4 + \frac{1}{55} = 2\frac{2}{5} + \frac{1}{55} = 2\frac{23}{55}.$$

$$\text{Відповідь: } 2,4(18) = 2\frac{23}{55}.$$



За якою формулою знаходять суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q , де $|q| < 1$?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

21.1. Знайдіть S – суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$1) b_1 = 4, q = 0,5; \quad 2) b_1 = 1, q = \frac{2}{3}.$$

21.2. Знайдіть S – суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$1) b_1 = 8, q = \frac{1}{2}; \quad 2) b_1 = 1, q = 0,75.$$

2

21.3. Перевірте, що знаменник q нескінченної геометричної прогресії задовольняє умову $|q| < 1$, і знайдіть суму цієї прогресії:

$$\begin{array}{ll} 1) 7; 1; \frac{1}{7}; \dots; & 2) -1; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{16}; \dots; \\ 3) 0,5; -0,05; 0,005; \dots; & 4) -10; 4; -1,6; \dots \end{array}$$

21.4. Перевірте, що знаменник q нескінченної геометричної прогресії задовольняє умову $|q| < 1$, і знайдіть суму цієї прогресії:

$$\begin{array}{ll} 1) 5; 1; \frac{1}{5}; \dots; & 2) -1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \dots; \\ 3) 0,3; -0,03; 0,003; \dots; & 4) -16; 2; -0,25; \dots \end{array}$$

21.5. (Задача Архімеда.) Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

21.6. Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, якщо відомо її суму S та знаменник q :

$$\begin{array}{l} 1) S = 16, q = 0,5; \\ 2) S = 27, q = -\frac{1}{3}. \end{array}$$

21.7. Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 8, а знаменник дорівнює $\frac{1}{4}$.

21.8. Знайдіть знаменник q , де $|q| < 1$, нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$1) S = 10, b_1 = 5; \quad 2) S = 9, b_1 = 15.$$

21.9. Знайдіть знаменник q , де $|q| < 1$, нескінченної геометричної прогресії, якщо її перший член дорівнює 12, а сума дорівнює 14.

21.10. На промені OP від точки O послідовно відкладено відрізки. Довжина першого з них дорівнює 12 см, а довжина кожного наступного дорівнює $\frac{1}{4}$ від довжини попереднього. Обчисліть суму довжин усіх відрізків, якщо їх відкладати нескінченну кількість разів.

3 **21.11.** Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

$$1) 5\sqrt{2}; 5; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \dots; \quad 2) \frac{1}{4-2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2+\sqrt{2}}; \dots$$

21.12. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

$$1) 3\sqrt{3}; 3; \sqrt{3}; \dots; \quad 2) 1 + \sqrt{5}; \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}; \frac{1 + \sqrt{5}}{5}; \dots$$

21.13. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$1) b_3 = 20, q = \frac{1}{2}; \quad 2) b_4 = 1, q = -\frac{1}{3}.$$

21.14. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо:

$$1) b_5 = 1, q = \frac{1}{3}; \quad 2) b_2 = -10, q = -\frac{2}{3}.$$

21.15. Знайдіть суму, якщо $|x| < 1$:

$$1) 1 + x + x^2 + x^3 + \dots; \\ 2) x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots$$

21.16. Запишіть нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:

$$1) 0,(3); \quad 2) 0,(15); \quad 3) 3,1111\dots; \\ 4) 7,393939\dots; \quad 5) 0,6(3); \quad 6) 7,(25).$$

21.17. Запишіть нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:

$$1) 0,(7); \quad 2) 0,(18); \\ 3) 5,2222\dots; \quad 4) 4,424242\dots; \\ 5) 0,5(4); \quad 6) 4,(28).$$

21.18. Послідовність (b_n) – нескінченна геометрична прогресія. Знайдіть:

$$1) b_5, \text{ якщо } S = 13,5, q = \frac{1}{3}; \quad 2) b_2, \text{ якщо } S = 49, b_1 = 56.$$

21.19. Послідовність (b_n) – нескінченна геометрична прогресія. Знайдіть:

$$1) b_3, \text{ якщо } S = 25, b_1 = 20; \quad 2) b_4, \text{ якщо } S = 81, q = -\frac{2}{3}.$$

4 21.20. Другий член нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q , де $|q| < 1$, дорівнює 24, а сума прогресії дорівнює 108. Знайдіть четвертий член цієї прогресії.

21.21. Другий член нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q , де $|q| < 1$, дорівнює 36, а сума прогресії дорівнює 144. Знайдіть п'ятий член цієї прогресії.

21.22. У рівносторонній трикутник вписано другий трикутник, вершинами якого є середини сторін першого. У другий трикутник у той самий спосіб вписано третій, і далі в такій само послідовності. Знайдіть суму периметрів усіх трикутників, якщо сторона першого дорівнює a см.

21.23. У квадрат, сторона якого дорівнює s см, вписано другий квадрат так, що його вершини є серединами сторін першого. У другий квадрат у той самий спосіб вписано третій квадрат, і далі в такій само послідовності. Знайдіть суму площ усіх таких квадратів.

21.24. Запишіть у вигляді звичайного дробу нескінченний періодичний десятковий дріб:

- 1) 3,27(3); 2) 6,40(30).

21.25. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

- 1) 4,57(6); 2) 5,03(06).

21.26. Розв'яжіть рівняння, якщо $|x| < 1$:

1) $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$;

2) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{13}{6} - 3x$.



Вправи для повторення

21.27. Знайдіть п'ятий член і суму перших тридцяти членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = -5$, $a_2 = -1$.

21.28. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні числу 11 і не перевищують числа 990.

21.29. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 2x - 3$. За графіком знайдіть:
1) область значень функції; 2) проміжок зростання функції.

21.30. Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою n -го члена: $x_n = -2n^2 + 8n + 17$.



Життєва математика

21.31. Із 50 000 мешканців міста Вишневого 65 % не цікавляться футболом. Серед футбольних уболівальників 85 % дивилося фінал Ліги чемпіонів по телевізору. Скільки жителів міста дивилися цей матч по телевізору?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

21.32. Знайдіть найбільше значення функції $y = \frac{20x^2}{x^4 + 100}$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4 (§§ 15–21)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Послідовність задано формулою $x_n = 3n - 7$. Знайдіть x_7 .
 А. 7 Б. 14 В. -7 Г. 28
2. Укажіть послідовність, що є арифметичною прогресією.
 А. 2; 4; 6 Б. 2; 4; 5 В. 0; 1; 8 Г. 1; 3; 9
3. Укажіть послідовність, що є геометричною прогресією.
 А. 0; 1; 8 Б. 4; 5; 6 В. 1; 2; 4 Г. -2; -3; -4
- 2** 4. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 7$, $a_2 = 4$.
 А. -130 Б. -65 В. -100 Г. 65
5. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 3$, $q = -2$.
 А. 24 Б. -96 В. -48 Г. 48
6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії: 18; -9; 4,5; ...
 А. 12 Б. 27 В. -12 Г. 36
- 3** 7. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 14,5$, $d = -2,5$. Укажіть число, яке є членом цієї прогресії.
 А. -21 Б. -22 В. -23 Г. -24
8. Знайдіть суму натуральних чисел, які кратні числу 8 і не перевищують числа 400.
 А. 20 400 Б. 10 600 В. 10 200 Г. 9800
9. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть S_6 , якщо $b_2 = 2$, $b_4 = 8$ і $q < 0$.
 А. -21 Б. 21 В. 63 Г. -63
- 4** 10. Знайдіть найменший член послідовності $x_n = n^2 - 6n - 8$.
 А. -16 Б. -17 В. -18 Г. Такого члена не існує
11. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть $a_4 + a_{18}$, якщо $a_{11} = -8$.
 А. Знайти неможливо Б. -4 В. -16 Г. 16

12. За яких значень x числа $x - 2$, $x + 1$ і $5x + 1$ є послідовними членами геометричної прогресії?

- А. 3 Б. -3 В. $0,25$, -3 Г. $-0,25$, 3

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. Установіть відповідність між нескінченним періодичним десятковим дробом (1–3) та звичайним дробом (А–Г), який йому дорівнює.

Нескінченний періодичний
десятковий дріб

Звичайний дріб

1. $0,222\dots$

А. $\frac{19}{90}$

2. $0,(21)$

Б. $\frac{11}{90}$

3. $0,2(1)$

В. $\frac{2}{9}$

Г. $\frac{7}{33}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 15–21

1. Послідовність задано формулою $x_n = 4n + 5$. Знайдіть:

- 1) x_{10} ; 2) x_{25} .

2. Які з послідовностей є арифметичними прогресіями:

- 1) $3; 1; 2$; 2) $4; 2; 0$; 3) $1; 3; 9$; 4) $1; 11; 21$?

3. Які з послідовностей є геометричними прогресіями:

- 1) $7; -14; 28$; 2) $5; 6; 7$; 3) $4; 2; 1$; 4) $3; 1; 0$?

4. Знайдіть сьомий член і суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 5$, $a_2 = 8$.

5. Знайдіть шостий член і суму восьми перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -1$, $q = 2$.

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії: $12; -6; 3; \dots$

7. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 18,5$, $d = -1,5$. Чи є членом цієї прогресії число:

- 1) $2,5$; 2) 5 ?

8. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні числу 6 і не перевищують числа 540.

- 4 9. За яких значень x числа $x - 1$, $x + 2$ і $5x + 6$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

Додаткові завдання

- 3 10. Вкладниця відкрила в банку депозитний рахунок на 100 000 грн під 10 % річних.
 1) Якою буде сума на рахунок через 2 роки?
 2) Скільки відсоткових коштів отримає вкладниця за 2 роки?
- 4 11. Знайдіть найбільший член послідовності $y_n = -n^2 + 4n - 5$.
12. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть a_{15} , якщо $a_8 + a_{22} = 7$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 15

- 1 1. Послідовність задано формулою $a_n = 7n - 19$. Знайдіть:
 1) a_1 ; 2) a_5 ; 3) a_{100} ; 4) a_{1000} .
- 2 2. Запишіть п'ять перших членів послідовності натуральних двоцифрових чисел, які:
 1) при діленні на 7 дають в остачі 1;
 2) при діленні на 6 дають в остачі 5.
- 3 3. Знайдіть кількість додатних членів послідовності $a_n = 15 - 2n$.
4. Знайдіть перший від'ємний член послідовності $x_n = 7 - \frac{1}{3}n$.
5. Знайдіть найменший член послідовності $b_n = 4n - 5$.
- 4 6. Підберіть одну з можливих формул n -го члена послідовності:
 1) 1; 3; 5; 7; 9; ...; 2) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots$
 3) 1; 4; 9; 16; 25; ...; 4) 2; 4; 8; 16; 32; ...;
 5) -1; 1; -1; 1; -1; ...; 6) 1; 3; 1; 3; 1; ...
7. Послідовність задано формулою $a_n = n^2 - 4n - 7$. Скільки членів, що не перевищують числа -2, містить ця послідовність?

До § 16

- 1 8. Чи є арифметичною прогресією послідовність натуральних чисел, кратних числу 5?
- 2 9. Знайдіть різницю та шостий член арифметичної прогресії: 2,7; 2,4; 2,1; ...
10. Послідовність (x_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:
 1) x_1 , якщо $x_{12} = -8$, $d = -3$;
 2) d , якщо $x_1 = 0$, $x_9 = -28$.

11. Знайдіть формулу n -го члена арифметичної прогресії:

1) $-5; -2; 1; \dots$; 2) $7; 7\frac{1}{4}; 7\frac{1}{2}; \dots$.

12. Ламана складається з восьми ланок. Довжина першої ланки дорівнює 12 см, а кожна наступна на 0,5 см коротша від попередньої. Знайдіть довжину третьої ланки; восьмої ланки.

3 13. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Доведіть, що:

1) $a_{10} = a_3 + 7d$; 2) $a_7 + a_3 = a_1 + a_9$.

14. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

1) a_{10} , якщо $a_1 = 8$, $a_5 = 2$;
2) a_{100} , якщо $a_{40} = -20$, $d = -3$.

15. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія: $8; 7,7; 7,4; \dots$?

16. Знайдіть найбільший від'ємний член арифметичної прогресії (a_n) , у якої $a_1 = -8,9$, $d = 0,2$.

4 17. Периметр трикутника дорівнює 39 см, причому довжини його сторін утворюють арифметичну прогресію. Чи можна знайти довжину хоча б однієї з них?

18. Кути деякого трикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що один з них дорівнює 60° .

19. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 7. Знайдіть другий і третій її члени, якщо вони є квадратами двох послідовних натуральних чисел.

20. Доведіть, що коли a , b і c – три послідовних члени арифметичної прогресії, то:

1) $c^2 = (a + 2b)^2 - 8ab$; 2) $\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 = b^2 - ac$.

До § 17

1 21. Знайдіть S_{100} – суму ста перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 2$, $a_{100} = 198$.

2 22. Знайдіть суму п'ятдесяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 5$, $a_2 = 7,5$.

23. Знайдіть суму всіх цілих від'ємних чисел від -20 до -1 .

24. Довжини сторін шестикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть периметр шестикутника, якщо найкоротша його сторона дорівнює 10 см, а найдовша – 20 см.

3 25. Знайдіть суму перших тридцяти членів арифметичної прогресії (y_n) з різницею d , якщо:

1) $y_{30} = 15$, $d = 2$; 2) $y_7 = 5$, $d = -3$.

26. Різниця арифметичної прогресії (a_n) дорівнює d . Знайдіть:

1) d , якщо $a_1 = 4$, $S_{10} = 175$; 2) a_1 , якщо $d = 5$, $S_8 = 196$.

27. Яся взяла в бібліотеці роман обсягом 324 сторінки. Першого дня вона прочитала 20 сторінок, а кожного наступного дня читала на 4 сторінки більше, ніж попереднього. За скільки днів Яся прочитала роман?
- 4** 28. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо сума перших десяти її членів дорівнює 170, а сума перших двадцяти її членів – 540.
29. В арифметичній прогресії (a_n) :
 1) $a_3 + a_7 = 18$. Знайдіть S_9 ; 2) $a_{11} = 5$. Знайдіть S_{21} .
30. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, менших від числа 100 і не кратних числу 4.
31. Спростіть вираз:
 1) $\frac{p \cdot p^2 \cdot \dots \cdot p^n}{p \cdot p^3 \cdot \dots \cdot p^{2n-1}}$; 2) $\frac{c^2 \cdot c^4 \cdot c^6 \cdot \dots \cdot c^{2n}}{c \cdot c^2 \cdot c^3 \cdot \dots \cdot c^n}$.

До § 18

- 1** 32. Чи є геометричною прогресією послідовність натуральних степенів числа a ($a \neq 0$): $a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$?
- 2** 33. Відомо два перших члени геометричної прогресії: 0,5 і 1,5. Знайдіть наступні за ними чотири члени.
34. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:
 1) $b_3 = 8, b_4 = 32$; 2) $b_4 = 2, b_6 = 18$ і $q > 0$.
35. Довжини трьох відрізків утворюють геометричну прогресію. Знайдіть середній за розміром відрізок, якщо менший із відрізків дорівнює 1 см, а більший – 9 см.
- 3** 36. Запишіть перші п'ять членів геометричної прогресії, у якій третій і четвертий члени відповідно дорівнюють 8 і –16.
37. Серед членів геометричної прогресії (b_n) є і додатні, і від'ємні члени, $b_2 = 8, b_4 = 72$. Знайдіть b_1 .
38. Членами геометричної прогресії (c_n) є лише додатні числа, $c_4 = 125, c_6 = 5$. Знайдіть c_8 і c_9 .
39. Між числами 27 і 12 уставте таке від'ємне число, щоб воно разом із ними утворювало геометричну прогресію.
- 4** 40. Число 768 є членом геометричної прогресії: 3; 6; 12; Знайдіть його номер.
41. За якого значення x числа $x - 1, 3 - 3x$ і $4x + 1$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.
42. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:
 1) $b_1 + b_3 = 6, b_2 + b_4 = 12$; 2) $b_4 - b_2 = 18, b_5 - b_3 = 36$.
43. Чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника утворювати геометричну прогресію? Якщо так, укажіть знаменник такої прогресії.

До § 19

- 3** 44. Вкладниця відкрила в банку депозитний рахунок на 150 000 грн під 14 %.
- 1) Скільки коштів буде на цьому рахунку через 2 роки; через 4 роки? (Відповідь округліть до десятків гривень.)
 - 2) Скільки відсоткових коштів матиме вкладниця через 2 роки; через 4 роки? (Відповідь округліть до десятків гривень.)
45. Яку мінімальну суму коштів треба покласти в банк під 10 %, щоб через три роки мати 15 000 грн відсоткових коштів? (Відповідь округліть до десятків гривень.)
- 4** 46. У перший день пандемії у місті захворіло 10 000 осіб. А потім щотижня кількість хворих зменшувалася на 10 %. Скільки було хворих через:
- 1) 3 тижні? 2) 5 тижнів?

До § 20

- 1** 47. Знайдіть суму трьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 8$, $q = -2$.
- 2** 48. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:
- 1) S_4 , якщо $b_1 = -2$, $q = 10$; 2) S_5 , якщо $b_1 = -60$, $q = 2$;
 - 3) S_6 , якщо $b_1 = 0,1$, $q = -3$; 4) S_7 , якщо $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$.
49. Використовуючи формулу суми геометричної прогресії $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$, подайте у вигляді дробу вираз:
- 1) $1 + p + p^2 + \dots + p^8$, де $p \neq 1$;
 - 2) $c^8 + c^7 + \dots + c^3$, де $c \neq 1$.
- 3** 50. На площині побудовано п'ять квадратів. Сторона першого дорівнює 3 см, а сторона кожного наступного вдвічі більша за сторону попереднього. Знайдіть суму площ цих квадратів.
51. Доведіть, що послідовність (x_n), яку задано формулою $x_n = 0,2 \cdot 5^{n-1}$, є геометричною прогресією. Знайдіть суму шести перших членів цієї прогресії.
52. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює 1, а п'ятий – дорівнює 81, якщо відомо, що її члени з парними номерами – від'ємні.
- 4** 53. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, у якої $b_5 + b_4 = 72$, $b_4 - b_2 = 18$. Знайдіть S_8 .
54. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 14, а сума їхніх квадратів дорівнює 84. Знайдіть суму восьми перших членів цієї прогресії.
55. Знайдіть перший член, знаменник і кількість членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_5 - b_1 = 45$, $b_3 + b_1 = 15$, $S_n = -63$.

56. Знайдіть геометричну прогресію, яка складається із шести членів, якщо сума її членів з непарними номерами дорівнює 273, а сума членів з парними номерами – 1092.
57. (Задача про поширення чуток із книжки Я. І. Перельмана «Жива математика», 1967 р.) У невеличке містечко, населення якого становить 50 тисяч осіб, о 8 годині ранку прибув мешканець столиці й привіз цікаву новину. О 8 год 15 хв він розповів цю новину трьом своїм знайомим, після чого ще через 15 хв кожен з них розповів новину трьом тим своїм знайомим, котрі про неї не знали. Після цього кожен з дев'яти мешканців міста, що дізналися про цю новину, розповів її трьом своїм знайомим і так само далі. О котрій годині (приблизно) про цю новину дізнаються всі мешканці міста?

До § 21

- 1** 58. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (x_n) , якщо:
- 1) $x_1 = 1$, $q = \frac{1}{8}$; 2) $x_1 = 4$, $q = \frac{5}{6}$.
- 2** 59. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо:
- 1) $b_1 = 8$, $b_2 = 1$; 2) $b_1 = -1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$;
 3) $b_1 = 4$, $b_2 = -2$; 4) $b_1 = -4$, $b_2 = 1$.
60. Послідовність (b_n) – нескінченна геометрична прогресія, у якій $|q| < 1$. Знайдіть:
- 1) b_1 , якщо $S = 7$, $q = -\frac{1}{7}$;
 2) q , якщо $S = 12$, $b_1 = 8$.
61. Тіло проходить за першу секунду 100 м, а за кожну наступну – чверть попередньої відстані. Чи зможе тіло подолати відстань 130 м, якщо рух триватиме нескінченно довго?
- 3** 62. (Задача П. Ферма.) Доведіть, що
- $$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \dots = \frac{7}{4}.$$
63. Чи може сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q , де $|q| < 1$, бути меншою від її першого члена?
64. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , де $|q| < 1$, якщо $b_3 = 8$, $b_4 = -4$.
65. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:
- 1) 0,(57); 2) 0,2(4); 3) 4,(17); 4) 5,1(3).
- 4** 66. Послідовність (b_n) – нескінченна геометрична прогресія, $b_1 = 9$, $q = \frac{1}{3}$. Знайдіть суму її членів:
- 1) з непарними номерами; 2) з парними номерами.

67. У нескінченній геометричній прогресії перший член дорівнює 15, а знаменник дорівнює $\frac{1}{4}$. Знайдіть суму квадратів усіх її членів.
68. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , у якій $|q| < 1$, якщо:
 1) $b_2 = 36$, $b_4 = 4$; 2) $b_4 b_6 = 1$, $b_3 + b_5 = 17$.
69. Сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q , де $|q| < 1$, дорівнює 9, а сума квадратів її членів – 40,5. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.
70. *Задача П. Ферма.* S – сума нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , де $|q| < 1$. Доведіть, що $\frac{S}{S - b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.



Головне в розділі 3

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до одного й того самого числа.

ФОРМУЛА n -ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ де } n \in N, n \geq 2.$$

2. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ де } n \in N, k \in N, k < n, n \geq 2.$$

3. Якщо k, l, p і s – натуральні числа і $k + l = p + s$, то

$$a_k + a_l = a_p + a_s.$$

4. Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою $a_n = dn + b$, де b і d – деякі числа.

5. Послідовність a_n , яку задано формулою вигляду $a_n = dn + b$, де b і d – деякі числа, є арифметичною прогресією.

СУМА n ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{або} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожне з яких, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число.

ФОРМУЛА n -ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

ВЛАСТИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ де } n = 2, 3, 4, 5, \dots$$

2. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \text{ де } n \in N, k \in N, k < n.$$

3. Якщо k, l, p і s – натуральні числа і $k + l = p + s$, то

$$b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_s.$$

ФОРМУЛА СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

Початковий капітал A_0 , внесений до банку під p % річних, через n років стане нарощеним капіталом A_n , розмір якого обчислюється за формулою:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n,$$

яку називають *формулою складних відсотків*.

СУМА n ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{або} \quad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$$

СУМА НЕСКІНЧЕННОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ де } |q| < 1$$

Жінки в науці: Як хвилі океану допомагають вивчати математику

Щороку 11 лютого у світі за підтримки ЮНЕСКО відзначається **Міжнародний день жінок і дівчат в науці** (*International Day of Women and Girls in Science*). Його мета – сприяти повноцінному та рівному доступу жінок і дівчат до участі в наукових дослідженнях.

За даними Інституту статистики ЮНЕСКО, лише близько 33 % науковців у світі – жінки. Проте в Україні ситуація значно краща: серед наших науковців 46 % – жінки. Це дає змогу Україні посідати почесне 12-те місце за кількістю жінок-учених у рейтингу серед 41 країни світу.

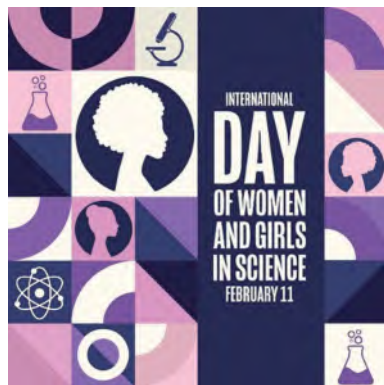
На знак підтримки та заохочення молодих науковиць 2018 року в Україні запровадили премію, яка є частиною глобальної Програми L'ORÉAL-ЮНЕСКО «Для жінок у науці». Вона присуджується молодим жінкам, які професійно займаються дослідженнями в галузі STEM (наука, технології, інжиніринг, математика) та активно розвивають українську науку.

Лауреаткою II української премії L'ORÉAL-ЮНЕСКО «Для жінок у науці» стала **Катерина Валеріївна Терлецька**. Вона – українська науковиця, математикиня, доктор фізико-математичних наук у галузі механіки.

Катерина Валеріївна досліджує внутрішні хвилі океану та вивчає роль океану у зміні клімату. Це дуже важливий напрям досліджень, що поєднує глибокі математичні знання з актуальними екологічними проблемами. Її наукові інтереси охоплюють нелінійні хвилі та стратифіковані течії. Вона є авторкою понад 100 наукових праць.

Крім власних досліджень, пані Терлецька активно працює з обдарованою молоддю. Вона завідувачка лабораторії математичних наук НЦ МАН України та курирує напрям математики в Малій академії наук. Її мета – розвивати в учнів / учениць нестандартне мислення та поглиблювати їхній інтерес до математики.

Досвід Катерини Валеріївни не обмежується Україною. Вона неодноразово брала участь у європейських наукових конференціях, а також працювала в Кореї та Китаї, що свідчить про її міжнародне визнання та співпрацю. Зараз Катерина Терлецька працює старшим науковим співробітником відділу моделювання морських та річкових систем Інституту проблем математичних машин і систем НАН України.



Катерина
Терлецька

РОЗДІЛ 4

ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитесь** з комбінаторними правилами суми і добутку; поняттями випадкової, вірогідної, неможливої подій;
- **навчитесь** обчислювати відносну частоту та ймовірність випадкової події; обчислювати числові характеристики вибірки; подавати статистичні дані у вигляді таблиць, діаграм, графіків.

§ 22. Комбінаторні задачі. Комбінаторні правила суми і добутку

1. Комбінаторика

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає питання вибору та розташування елементів деякої скінченної множини відповідно до заданих умов.

Розглянемо приклади задач з комбінаторики.

2. Комбінаторне правило суми

Приклад 1. Скількома способами легкоатлетка, збираючись на тренування, може обрати собі пару спортивного взуття, маючи 5 пар кросівок і 2 пари кедів?

Очевидно, що вибрати одну з пар взуття, кросівки або кеди, можна $5 + 2 = 7$ способами.

Узагальнюючи, отримаємо *комбінаторне правило суми*:

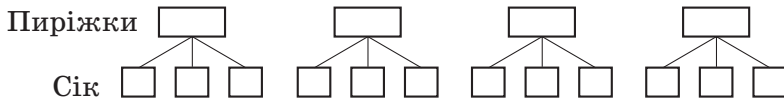
Якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами, а елемент B (незалежно від вибору елемента A) – k_2 способами, то вибрати A або B можна $k_1 + k_2$ способами.

Це правило поширюється на три і більше елементів.

3. Комбінаторне правило добутку

Приклад 2. У меню шкільної їдальні є на вибір 4 види пиріжків і 3 види соку. Скільки різних варіантів вибору сніданку з одного пиріжка і однієї склянки соку є в учня цієї школи?

Пиріжок учень може вибрати 4 способами і до кожного пиріжка обрати сік 3 способами (мал. 22.1). Отже, учень має $4 \cdot 3 = 12$ варіантів вибору сніданку.



Мал. 22.1

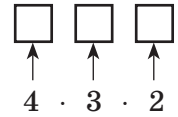
Узагальнюючи, приходимо до комбінаторного правила добутку:

якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами і після кожного такого вибору (незалежно від вибору елемента A) інший елемент B можна вибрати k_2 способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати $k_1 \cdot k_2$ способами.

Це правило також поширюється на три і більше елементів.

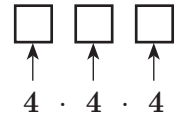
Приклад 3. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються?

Розв'язання. 1) Маємо 4 способи для сотень числа (мал. 22.2). Після того як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 3 способи, міркуючи далі, для одиниць – 2 способи. Отже, маємо: 4 способи, i після кожного з них – 3 способи, i після кожного з них – 2 способи. За правилом добутку маємо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ числа.



Мал. 22.2

2) Якщо цифри в числі повторюються, то кожне з трьох місць можна заповнити 4 способами (мал. 22.3), і тоді таких чисел буде $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.



Мал. 22.3

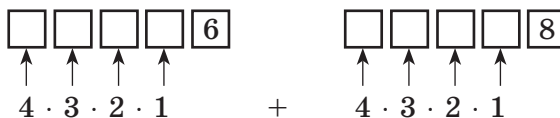
Відповідь: 1) 24 числа; 2) 64 числа.

Зауважимо, що, не користуючись комбінаторними правилами, подібні задачі ми могли б розв'язувати лише шляхом переліку всіх чисел, які задовольняють умову, а таке розв'язання є, безумовно, дуже громіздким.

4. Використання правил суми і добутку для розв'язування задач

Приклад 4. Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 5, 6, 7, 8, 9, якщо в числі цифри не повторюються?

Розв'язання. Парне п'ятицифрове число можна отримати, якщо останньою його цифрою буде 6 або 8. Чисел, у яких останньою цифрою є 6, буде $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (мал. 22.4), а тих, у яких останньою цифрою є 8, – також 24. За комбінаторним правилом суми всього парних чисел буде $24 + 24 = 48$.



Мал. 22.4

Відповідь: 48.

Приклад 5. Абетка племені АБАБ містить лише дві літери, «а» і «б».

- Скільки слів у мові цього племені складаються: 1) з двох букв;
- 2) з трьох букв?

Розв'язання. 1) аа, ба, аб, бб (усього чотири слова); 2) ааа, ааб, аба, абб, ббб, бба, баб, баа (усього вісім слів).

Зауважимо, що знайдена кількість слів узгоджується з комбінаторним правилом добутку. Оскільки на кожне місце є два «претенденти» – «а» і «б», то слів, що містять дві літери, має бути $2 \cdot 2 = 4$, а три літери – $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Приклад 6. У футбольній команді з 11 гравців треба вибрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

- *Розв'язання.* Капітаном можна обрати будь-кого з 11 гравців. Після цього його заступником – будь-кого з 10 гравців, що залишилися.
- Так (за правилом добутку), є $11 \cdot 10 = 110$ різних способів.

Приклад 7. У країні Дивосвіт 10 міст, кожні два з яких сполучено авіалінією. Скільки авіаліній у цій країні?

- *Розв'язання.* Оскільки кожна авіалінія сполучає два міста, то першим з них може бути будь-яке з 10 міст, а другим – будь-яке з 9, що залишилися. Отже, кількість таких авіаліній становить $10 \cdot 9 = 90$.
- Однак при цьому кожна з авіаліній враховано двічі. Тому всього їх буде $90 : 2 = 45$.

Комбінаторні задачі нерозривно пов'язані із задачами теорії ймовірностей, ще однієї галузі математики, яку ми розглянемо в наступних параграфах підручника.

А ще раніше...

Щось близьке до комбінаторики вперше згадано в китайських рукописах XIII–XII ст. до н. е. Деякі комбінаторні задачі розв'язували і в Давній Греції. Зокрема, Арістоксен із Тарента (IV ст. до н. е.), учень Арістотеля, перелічив різні комбінації довгих і коротких складів у віршових розмірах. А Папп Олександрійський у IV ст. н. е. з'ясував кількість пар і трійок, які можна скласти з трьох елементів, що можуть повторюватися. Деякі елементи комбінаторики були відомі і в Індії у II ст. до н. е. Індійці вміли обчислювати числа, які зараз відомі нам як коефіцієнти формули бінома Ньютона. Пізніше, у VIII ст. н. е., араби знайшли й саму цю формулу, отже, і її коефіцієнти, які нині обчислюють за допомогою комбінаторних формул або «трикутника Паскаля».

Сучасного вигляду згадані комбінаторні формули набули завдяки середньовічному вченому Леві бен Гершону (XIV ст.) та французькому математику П'єру Ерігону (XVII ст.).

У III ст. н. е. сирійський філософ Порфирій для класифікації понять склав особливу схему, яка отримала назву «дерево Порфирія». Зараз подібні дерева використовуються для розв'язування певних задач комбінаторики в різноманітних галузях знань. Деякі раніше невідомі комбінаторні задачі розглянув Леонардо Пізанський (Фібоначчі) у своїй праці «Liber Abaci» (1202 р.), зокрема, про знаходження кількості гир, за допомогою яких можна відміряти вагу, що є цілим

числом від 1 до 40 фунтів. Із часів грецьких математиків було відомо дві послідовності, кожен член яких отримували за певним правилом із попередніх, – арифметична і геометрична прогресії. Натомість в одній із задач Фібоначчі вперше використав формулу задання члена послідовності через два попередніх, яку назвали рекурентною. Надалі метод рекурентних формул став одним із найпотужніших для розв'язування комбінаторних задач.

Хоч як дивно, розвитку комбінаторики значною мірою посприяли азартні ігри, які набули неабиякої популярності в XVI ст. Зокрема, у той час питання визначення різноманітних комбінацій у грі в кості прискіпливо розглядали такі відомі італійські математики, як Джироламо Кардано, Нікколо Тарталья та ін. А найповніше це питання дослідив Галілео Галілей у XVII ст.

Сучасні комбінаторні задачі високого рівня пов'язані з об'єктами в інших галузях математики: визначниками, скінченними геометріями, групами, математичною логікою тощо.



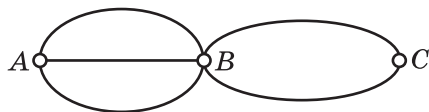
Що вивчає комбінаторика? ○ Сформулюйте комбінаторні правила суми і добутку.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

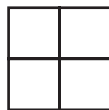
- 1** 22.1. На тарілці лежить 5 яблук і 8 слив. Скількома способами з тарілки можна взяти:
 - 1) один фрукт;
 - 2) одне яблуко й одну сливу?
- 22.2. У класі 10 юнаків і 15 дівчат. Скількома способами можна вибрати:
 - 1) учня із цього класу;
 - 2) пару учнів – юнака і дівчину?
- 22.3. Костюм складається з блузки та спідниці. Скільки різних костюмів можна скласти з 5 видів блузок і 4 видів спідниць?
- 22.4. У магазині є 7 видів ручок і 5 видів зошитів. Скількома способами можна обрати комплект з однієї ручки й одного зошита?
- 2** 22.5. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти за допомогою цифр 5, 6, 7, 8, якщо цифри в числі не повторюються?
- 22.6. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, якщо цифри в числі не повторюються?
- 22.7. Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного й одного приголосного звуків у слові «студент»?
- 22.8. Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного й одного приголосного звуків у слові «функція»?
- 22.9. Скількома способами можна вишикувати в ряд 6 учнів?
- 22.10. 10 учасниць шахового турніру грають у залі за 5 столиками. Скількома способами можна розмістити шахісток за столами, якщо учасниці всіх партій і колір фігур, якими вони грають, відомі?

- 22.11. Із села A до села B ведуть 3 дороги, а з села B до села C – 2 дороги (мал. 22.5). Скількома способами поштар може пройти від села A до села C ?



Мал. 22.5

- 22.12. Кожну клітинку квадратної таблиці 2×2 (мал. 22.6) можна пофарбувати в зелений або червоний колір. Скільки є різних варіантів розфарбування цієї таблиці?



Мал. 22.6

- 3** 22.13. Скількома способами з 5 членів президії зборів можна вибрати голову зборів і секретаря?
- 22.14. У секції легкої атлетики тренуються 8 спортсменів. Скількома способами між ними можна розподілити етапи естафети 4 по 100 м (тобто кожен із чотирьох атлетів, що бере участь в естафеті, має пробігти один з етапів: перший, або другий, або третій, або четвертий)?
- 22.15. Гральний кубик підкидають двічі. Скільки різних пар чисел можна при цьому отримати?
- 22.16. Монету підкидають тричі. Скільки різних послідовностей випадання аверсу та реверсу¹ можна при цьому отримати?
- 22.17. Скільки різних трицифрових чисел, у запису яких є тільки непарні цифри, можна скласти, якщо:
- 1) цифри в числі не повторюються;
 - 2) цифри в числі можуть повторюватися?
- 22.18. Скільки різних двоцифрових чисел, у запису яких є цифри 1, 2, 3, 4, 5, можна скласти, якщо цифри в числі:
- 1) не повторюються;
 - 2) можуть повторюватися?
- 22.19. Скількома способами можна скласти ряд з 2 білих кульок, чорної, червоної і зеленої, якщо білі кульки мають розташовуватися з обох кінців ряду?
- 22.20. Скількома способами на книжковій полиці можна розставити підручники із шести різних предметів так, щоб підручник з алгебри був крайнім ліворуч?
- 4** 22.21. Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо в кожному числі цифри не повторюються?

¹Аверс (просторічна назва – «орел», або «герб») – лицьовий бік монети; реверс (просторічна назва – «решка») – бік монети, на якому зазвичай розміщується номінал монети.

- 22.22.** Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 2, 4, 8, якщо цифри в числі не повторюються?
- 22.23.** Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 2, 3, 5, 7, 12?
- 22.24.** У турнірі «Кубок Васюків» грало 10 шахістів, кожен з яких зіграв партію з кожним із суперників. Скільки партій було зіграно в цьому турнірі?
- 22.25.** У змаганнях паралімпійців з футболу взяли участь 16 команд, кожна з яких провела по дві зустрічі з кожною іншою командою. Скільки матчів відбулося у цих змаганнях?
- 22.26.** Скільки різних непарних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри в числі не повторюються?
- 22.27.** Скільки різних парних трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються?



Вправи для повторення

- 22.28.** Спростіть вираз:
 1) $-4x(3x + 9) + 1,5x(8x - 2)$; 2) $(x - 2)^2 - (x + 1)(x - 1)$.
- 22.29.** Знайдіть координати точок параболи $y = 2x - x^2$, у яких сума абсциси й ординати дорівнює 2.
- 22.30.** Розв'яжіть рівняння:
 1) $2x^3 + 3x^2 - 5x = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.
- 22.31.** Побудуйте графік рівняння $|x - y| = 3$.



Життєва математика

- 22.32.** Майстер спорту з легкої атлетики під час тренування пробіг 400 м за 50 секунд. Знайдіть його середню швидкість на дистанції. Відповідь подайте в кілометрах за годину.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 22.33.** (Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру», 2016 рік.) У класі 20 учнів. Усі сидять за партами по двоє. Рівно третина хлопців сидить із дівчатами, і рівно половина дівчат сидить із хлопцями. Скільки хлопців у класі?

§ 23. Випадкова подія.

Частота та ймовірність випадкової події

1. Випадкові досліди. Випадкові події

Будь-яка точна наука вивчає не самі явища, що відбуваються в природі, а їх математичні моделі. У математичних задачах часто

розглядаються явища, які, залежно від певних умов, можуть або відбутися, або не відбутися. Такі *явища* називають *випадковими*.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ.

Нехай проводиться певний дослід (експеримент, спостереження, випробування тощо), результат якого передбачити неможливо. Такі *досліди* в теорії ймовірностей називають *випадковими*. При цьому доцільно проводити лише такі дослід, які можна повторити, хоча б теоретично, за однакових умов довільну кількість разів.

Випадковими дослідом є, наприклад, підкидання монети чи грального кубика, купівля лотерейного квитка, стрільба по мішені тощо.

Отже,

випадковий дослід – це дослід (експеримент, спостереження, випробування), результат якого залежить від випадку і який можна повторити багато разів за однакових умов.

Результатом випадкового дослід є *випадкова подія*.

Випадкова подія – це подія, яка за однакових умов може відбутися, а може й не відбутися.

Прикладами випадкових подій є «випадіння одиниці під час підкидання грального кубика», «випадіння аверсу під час підкидання монети», «виграш 10 грн під час купівлі лотерейного квитка» та ін. Такі події, як «закипання води під час її нагрівання до 100 °C» або «зменшення довжини дроту під час його охолодження» не можна назвати випадковими, бо вони є закономірними.

Випадкові події зазвичай позначають великими латинськими літерами: $A, B, C, D, \dots$

2. Вірогідна подія. Неможлива подія

Приклад 1. У ящику є лише білі й чорні кульки. З нього навмання виймають одну кульку. Які з подій A, B, C, D при цьому можуть відбутися:

- A – вийнято білу кульку; B – вийнято чорну кульку;
- C – вийнято зелену кульку; D – вийнято кульку?

Розв’язання. Оскільки з ящика можна вийняти лише те, що в ньому є, то вийняти білу або чорну кульку можна, а зелену – ні. Можна також стверджувати, що будь-який предмет, який навмання виймають з ящика, буде кулькою, оскільки там немає нічого, окрім кульок. Отже, події A і B можуть відбутися (а можуть і не відбутися); подія C не може відбутися, а подія D обов’язково відбудеться.

Відповідь: A, B, D .

Подію, яка за даних умов обов'язково відбудеться, називають **вірогідною**.

Подію, яка за даних умов ніколи не відбудеться, називають **неможливою**.

У прикладі 1 події A і B – випадкові, D – вірогідна подія, C – неможлива подія.

3. Частота події. Відносна частота події

Приклад 2. Нехай проводиться деякий випадковий дослід, наприклад паралімпійка робить постріли по мішені. Нас цікавить, як математично оцінити її шанси влучити в мішень за однакових незмінних умов.

Щоб це з'ясувати, розглянемо поняття *частоти події* та *відносної частоти події*.

Якщо за незмінних умов проведено n випадкових дослідів і в $n(A)$ випадків подія A відбулася, то число $n(A)$ називають **частотою події A** , а відношення $\frac{n(A)}{n}$ – **відносною частотою події A** .

Приклад 3. Дослід полягає в підкиданні кубика 150 разів поспіль. Нехай випадкова подія A – випадіння шістки. Під час дослідів ця подія відбулася 24 рази. Число 24 є частотою події A , а відношення $\frac{24}{150} = \frac{4}{25} = 0,16$ є відносною частотою події A .

4. Статистична ймовірність події

Відносна частота події зміниться, якщо зміниться кількість дослідів або буде проведено іншу серію дослідів за тих самих умов.

Приклад 4. Різні вчені в різні роки проводили дослід, який полягав у багаторазовому підкиданні монети, та розглядали подію A – випадіння аверсу. Результати цих дослідів систематизовано в таблицю в порядку зростання кількості дослідів.

№ з/п	Дослідник	Роки життя	Кількість підкидань монети, n	Кількість випадіння аверсу, $n(A)$	Відносна частота, $\frac{n(A)}{n}$
1	Жорж де Бюффон	1707–1788	4040	2048	0,5069
2	Де Морган	1806–1871	4092	2048	0,5005
3	Вільям Феллер	1906–1970	10 000	4979	0,4979

№ з/п	Дослідник	Роки життя	Кількість підкидань монети, n	Кількість випадіння аверсу, $n(A)$	Відносна частота, $\frac{n(A)}{n}$
4	Карл Пірсон	1857–1936	12 000	6019	0,5016
5	Вільям Стенлі Джевонс	1835–1882	20 480	10 379	0,5068
6	Карл Пірсон	1857–1936	24 000	12 012	0,5005
7	Всеволод Романовський	1879–1954	80 640	40 151	0,4979

Зрозуміло, що монети в дослідях різних учених були різними, але сам дослід і подію, яку вони розглядали, можна вважати однаковими. Ці досліді, проведені різними вченими в різні епохи в різних країнах, дають приблизно однаковий результат: відносна частота події A близька до числа 0,5. У цьому випадку число 0,5 називають *статистичною ймовірністю події*.

Якщо під час проведення досить великої кількості випадкових дослідів значення відносної частоти випадкової події A є близьким до деякого певного числа, то це число називають *статистичною ймовірністю події A* .

Ймовірність прийнято позначати латинською літерою p (перша літера французького слова *probabilite* та латинського *probabilitas*, що перекладається як «можливість», «ймовірність»). Отже, для прикладу 4 можна записати: $p(A) = 0,5$, або $p = 0,5$.

5. Знаходження ймовірності випадкової події як результату випадкового досліді

Доходимо висновку, що

ймовірність випадкової події можна знайти з досить великою точністю, якщо випадковий досліді проводити велику кількість разів. Що більше проведено досліді, то ближчим є значення відносної частоти випадкової події до ймовірності цієї події.

Повернімося до питання, сформульованого у прикладі 2, тобто до математичної оцінки шансів стрільця влучити в мішень. Тепер зрозуміло, що таку математичну оцінку дає ймовірність. Для того щоб оцінити ймовірність влучення стрільцем у мішень (подія A), необхідно, щоб він зробив достатньо велику кількість пострілів (в однакових умовах). Тоді відносну частоту події A можна буде вважати ймовірністю влучення стрільця в мішень. Нехай, наприклад, протягом певного періоду зроблено 1000 пострілів, з яких 781 виявився влучним. Тоді

відносну частоту $\frac{781}{1000} = 0,781$ можна вважати ймовірністю влучення цього стрільця в цю мішень.

Якщо відома ймовірність події A , то можна приблизно оцінити, скільки разів подія A відбудеться, якщо зробити певну кількість дослідів.

Приклад 5. Ймовірність влучення стрільчині в мішень дорівнює 0,781. Скільки приблизно влучних пострілів зробить стрільчиня в серії з 50 пострілів?

Розв'язання. Нехай у серії з 50 пострілів влучили x разів. Тоді $\frac{x}{50}$ — відносна частота влучних пострілів. Якщо вважати, що відносна частота влучень приблизно дорівнює ймовірності, то $\frac{x}{50} \approx 0,781$, тобто $x \approx 39$.

Відповідь: 39 влучних пострілів.



Теорію ймовірностей нерідко називають «ученням про випадкове». На багатьох прикладах можна впевнитися в тому, що масові випадкові явища теж мають свої закономірності, знання про які можна успішно використовувати в практичній діяльності людини.

Ще в давні часи люди помітили, що кілька мисливців, кинувши списи одночасно, можуть вразити звіра з більшою ймовірністю, ніж один мисливець. Цей висновок не був науковим, а ґрунтувався на спостереженнях і досвіді.

Як наука теорія ймовірностей почала формуватися в XVII ст. На її розвиток вплинули тогочасні нагальні потреби науки і практики, зокрема в справі страхування, яке поширювалося завдяки бурхливому розвитку торговельних зв'язків та подорожей. Зручною моделлю для розв'язування задач і аналізу понять теорії ймовірностей були для вчених азартні ігри. Про це зазначав Гюйгенс у своїй книзі «Про розрахунки в азартній грі» (1657 р.), яка стала першою у світі книгою з питань теорії ймовірностей. Подальшому розвитку теорії ймовірностей (XVII–XVIII ст.) сприяли праці Блеза Паскаля, Даніеля Бернуллі, Жана ле Рона д'Аламбера, Томаса Сімпсона, П'єра Ферма, Томаса Байєса та ін.

Важливий внесок у теорію ймовірностей зробив швейцарський математик Якоб Бернуллі (1654–1705): він довів закон великих чисел у найпростішому випадку незалежних випробувань у книзі «Аналітична теорія ймовірностей».

1718 р. англійський математик Абрахам де Муавр (1667–1754) опублікував книгу «Вчення про випадки», у якій дослідив закономірності, що часто можна спостерігати у випадкових явищах.

Уперше основи теорії ймовірностей виклав французький математик П'єр-Сімон Лаплас (1749–1827).

У подальшому теорія ймовірностей набула розвитку завдяки працям француза Сімеона-Дені Пуассона (1781–1840), а також Пафнутія Чебишова (1821–1894), Андрія Маркова (1856–1922) та Олександра Ляпунова (1857–1918).

Свій внесок у розвиток теорії ймовірностей зробили й українські математики: Борис Гнеденко (1912–1996), Йосип Гіхман (1918–1985), Анатолій Скороход (1930–2011), Михайло Ядренко (1932–2004).



Що вивчає теорія ймовірностей? ○ Що таке випадковий дослід? ○ Що таке випадкова подія? ○ Яку подію називають вірогідною, а яку – неможливою? ○ Що називають частотою і що – відносною частотою події? ○ Що називають статистичною ймовірністю події?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

23.1. (Усно.) Які з подій є випадковими:

- 1) при підкиданні грального кубика випаде 6 очок;
- 2) за температури 0°C вода замерзне;
- 3) придбавши лотерейний квиток, виграють 200 грн;
- 4) наступним днем після 1 березня буде 2 березня;
- 5) прізвище навмання вибраного дев'ятикласника починатиметься з букви «А»;
- 6) довжина кола радіуса 5 см дорівнюватиме 10π см?

23.2. (Усно.) Які з подій вірогідні, а які – неможливі:

- 1) сонце зійде на сході;
- 2) при підкиданні грального кубика випаде кількість очок, що кратна числу 11;
- 3) навмання вибране трицифрове число, складене із цифр 7, 8, 9, виявиться більшим за 600;
- 4) двоцифрове число, складене із цифр 1 і 2, буде кратним числу 10;
- 5) випаде білий сніг;
- 6) кількість днів навмання вибраного місяця буде більшою за 31?

23.3. Які з подій випадкові, вірогідні, неможливі:

- 1) виграти партію в шахи у суперника свого рівня;
- 2) крокодил буде літати;
- 3) при підкиданні двох гральних кубиків з'являться очки, сума яких більша за 12;
- 4) запізнення поїзда Харків – Львів;
- 5) 5 травня наступного року буде сонячно;
- 6) наступним днем після п'ятниці буде субота;
- 7) наступним днем після понеділка буде неділя;
- 8) днем народження людини, яку зустріли, буде 30 червня;
- 9) днем народження людини, яку зустріли, буде 31 червня;
- 10) вийняти зелену кульку з коробки із зеленими і чорними кульками?

23.4. (Усно.) Наведіть по два приклади вірогідної, неможливої, випадкової події.

2

23.5. Випадковий дослід полягав у підкиданні грального кубика, проведеному 200 разів. Результати дослідів занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту випадання кожного окремого числа.

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадіння числа	33	32	35	34	36	30
Відносна частота випадіння числа						

23.6. Було виконано п'ять серій по 50 підкидань монети в кожній. Результати дослідів занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній із серій.

Серія	1	2	3	4	5
Випадання аверсу (подія A)	23	26	24	25	28
Відносна частота події A					

23.7. Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного дослідів вкажіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової події.

№ з/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Виймання навмання кульки з коробки з білими і чорними кульками			
2	Відривання листка у відривному календарі			
3	Виймання навмання карти з колоди карт			
4	Складання двоцифрового числа із цифр 3 і 4			

23.8. Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного дослідів вкажіть приклад вірогідної, неможливої і випадкової події.

№ з/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Витягування навмання цукерки з коробки із цукерками з білого і чорного шоколаду			
2	Складання двоцифрового числа із цифр 8 і 9			
3	Визначення дати народження деякої людини			
4	Визначення кількості днів навмання вибраного року			

23.9. Відомо, що в партії зі 1000 батарейок зазвичай є 3 браковані. Яка ймовірність придбати браковану батарейку з такої партії?

23.10. У заводській партії, що налічує 10 000 деталей, 15 є бракованими. Яка ймовірність того, що взята навмання з партії деталь виявиться бракованою?

23.11. Проектна діяльність. 1) Кожен зі здобувачів освіти класу має провести серію із 30 підкидань монети.

2) Складіть зведену таблицю випадання аверсу (подія A) за зразком № 23.8.

3) Обчисліть відносну частоту події A .

4) Зробіть висновки.

3 **23.12. (Усно.)** Стрілець виконав два постріли по мішені: один раз влучив, а другий – ні. Чи можна стверджувати, що для цього стрільця ймовірність влучення в мішень за таких умов дорівнює 0,5? Чому?

23.13. Щоб з'ясувати, з яким кольором волосся жителів у місті найбільше, а з яким – найменше, дослідники розійшлися по різних частинах міста й записували колір волосся кожного зустрічного мешканця. Результати цього дослідження було занесено в таблицю.

Колір волосся	шатени	блондини	брюнети	руді
Кількість людей	423	238	222	87

Оцініть (із точністю до сотих) ймовірність того, що обраний навмання житель міста:

1) шатен; 2) брюнет;

3) не блондин; 4) не рудий.

23.14. В умовах попередньої задачі оцініть (із точністю до сотих) ймовірність того, що обраний навмання житель міста:

1) рудий; 2) блондин;

3) не шатен; 4) не брюнет.

23.15. Троє друзів прийшли в комп'ютерний клуб і здали свої капелюхи. Коли вони розходилися по домівках, раптово вимкнулося світло і кожен узяв капелюх навмання. Які з наступних подій випадкові, неможливі, вірогідні:

1) кожен узяв свій капелюх;

2) кожен вийшов з капелюхом;

3) усі надягли чужі капелюхи;

4) двоє надягли чужі капелюхи, а один – свій;

5) один надягнув чужий капелюх, а двоє – свої?

23.16. Проектна діяльність. Візьміть деякий текст українською мовою, виберіть у ньому будь-яких п'ять рядків поспіль. Обчисліть відносну частоту в цих рядках кожної з букв «а» і «й» та порівняйте їх.

23.17. Проектна діяльність. Візьміть деякий текст українською мовою, виберіть у ньому будь-які десять рядків поспіль. Обчисліть відносну частоту в цих рядках кожної з букв «р» і «ф» та порівняйте їх.

23.18. (Усно.) На основі задач 23.16–23.17 дайте відповідь на запитання: чому на клавіатурах комп'ютерів букви «а» та «р» розташовані ближче до центра, а букви «й» та «ф» – ближче до краю.

23.19. Було перевірено 1000 деталей, з яких 5 виявилися бракованими.

- 1) Скільки приблизно бракованих деталей буде в партії з 1800 деталей?
- 2) Скільки приблизно деталей було в партії, якщо серед них виявлено 12 бракованих?

23.20. Серед 200 опитаних жителів міста 198 мають мобільний телефон.

- 1) Скільки приблизно мобільних телефонів буде в 500 опитаних жителів цього міста?
- 2) Скільки приблизно було опитано жителів міста, якщо серед них тих, які мали мобільний телефон, виявилось 693?



23.21. Відомо, що деякий баскетболіст зі штрафного кидка влучає в кошик з імовірністю, більшою за 0,8, але меншою від 0,83. Скільки приблизно штрафних кидків він виконав під час тренування, якщо серед них припустився 4 промахів?

23.22. Відомо, що стрільчиня влучає в мішень з імовірністю, більшою за 0,89, але меншою від 0,9. Скільки приблизно пострілів вона виконала під час тренування, якщо серед них сталося 6 промахів?



Вправи для повторення

23.23. Виконайте дію:

$$1) \frac{6a + 7}{2a - 1} + \frac{4a + 8}{1 - 2a}; \quad 2) 32p^3n^2 \cdot \frac{n^7}{8p^6}.$$

23.24. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь $x^2 + y^2 = 16$ і $x - y = 4$. Накресліть графіки цих рівнянь і позначте знайдені точки.

23.25. Розв'яжіть нерівність

$$15x + (4x + 1)(3x - 8) > (4x - 5)(4x + 5) + 27.$$

23.26. Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $5x^2 + 7x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть $x_1^3x_2 + x_2^3x_1$.

23.27. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$.



Життєва математика

23.28. 2025 року діяли такі тарифи на електроенергію для споживачів, які користуються електроопаленням:

Обсяг споживання	Тариф (грн за 1 кВт · год, із ПДВ)
– За обсяг, спожитий до 2000 кВт · год електроенергії на місяць	2,64
– За обсяг, спожитий понад 2000 кВт · год	4,32

Лічильник електроенергії на 1 листопада показував 12 615 кіловат-годин, а на 1 грудня – 14 675 кіловат-годин. Скільки треба заплатити за електроенергію за листопад? Відповідь подайте у гривнях.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

23.29. (Задача Ейлера.) Знайдіть число, четвертий степінь якого, поділений на половину цього числа і збільшений на 14,25, дорівнюватиме 100.

§ 24. Класичне означення ймовірності

1. Класичне означення ймовірності

Проводити численні досліди для визначення статистичної ймовірності події досить важко, а іноді – неможливо. Проте в багатьох прикладних задачах імовірність можна визначити, використовуючи *класичне означення ймовірності*.

Розглянемо приклад.

Приклад 1. У ящику лежать дві кульки: біла і чорна. З нього навмання виймають одну кульку.

Розглянемо події:

A – вийнято білу кульку;

B – вийнято чорну кульку;

C – вийнято червону кульку;

D – вийнято кульку.

Як відомо з попереднього параграфа, подія C – неможлива, подія D – вірогідна, а події A і B – випадкові.

Оскільки білих і чорних кульок у ящику порівну, то можливість витягнути чорну кульку є такою ж, як і білу. У ящику немає інших кульок, тож якщо дослід із витягуванням кульки проводити багаторазово, щоразу повертаючи кульку в ящик, можна дійти висновку, що приблизно в половині випадків буде витягнуто білу кульку, а в іншій половині – чорну.

За таких умов число 0,5 (половина) – це статистична ймовірність випадкової події «вийняти білу кульку».

Цю ймовірність можна отримати, якщо кількість білих кульок, тобто 1, поділити на кількість усіх кульок ($1 + 1 = 2$).

Отже, сформулюємо *класичне означення ймовірності*:

ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню кількості випадків, що сприяють появі події A , до кількості всіх можливих випадків.

У вигляді формули це означення можна записати так:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість усіх можливих випадків, m – кількість випадків, що сприяють появі події A .

Іноді ймовірність подають у відсотках, тоді $p(A) = 50 \%$.

2. Ймовірність вірогідної, неможливої, випадкової події

Повертаючись до прикладу 1, можна легко знайти ймовірності подій B , C і D . Отже,

$$p(B) = \frac{1}{2} = 0,5; \quad p(C) = \frac{0}{2} = 0; \quad p(D) = \frac{2}{2} = 1.$$

Отже, доходимо важливого висновку:

ймовірність вірогідної події дорівнює 1, ймовірність неможливої події дорівнює 0; ймовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1.

3. Рівноймовірні події

Ймовірності подій A і B у цьому випробуванні однакові, бо $p(A) = p(B) = 0,5$. Такі події називають *рівноймовірними*.

Рівноймовірні події – події, ймовірність яких однакова в даному випробуванні.

Також прикладами рівноймовірних подій є події: «випадання 1 при підкиданні грального кубика» і «випадання 6 при підкиданні грального кубика». Ймовірність кожної із цих подій дорівнює $\frac{1}{6}$.

4. Застосування формули для обчислення ймовірності до розв'язування задач

Розглянемо ще приклади.

Приклад 2. Із 30 учнів класу 12 мають з алгебри оцінки високого рівня. Яка ймовірність того, що навмання вибраний учень класу матиме з алгебри оцінку високого рівня?

Розв'язання. Маємо: $n = 30$, $m = 12$, $p = \frac{m}{n} = \frac{12}{30} = 0,4$.

Відповідь: 0,4.

Приклад 3. Одночасно підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума очок, які випадуть:

- 1) дорівнює 6; 2) менша ніж 5?

Розв'язання. Складемо таблицю суми очок, які можуть випасти на двох гральних кубиках під час їх одночасного підкидання. $n = 36$ – кількість усіх можливих подій.

II \ I	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- 1) Маємо 5 випадків, коли сума очок на обох кубиках дорівнює 6,

тому $m = 5$ і $p = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

- 2) Маємо 6 випадків, коли сума очок на обох кубиках менша ніж 5.

Тому $m = 6$ і $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Відповідь: 1) $\frac{5}{36}$; 2) $\frac{1}{6}$.

Приклад 4. У коробці 20 чорних кульок, 25 зелених, а решта – білі.

Скільки білих кульок у коробці, якщо ймовірність витягнути білу кульку:

- 1) дорівнює $\frac{1}{4}$; 2) менша ніж $\frac{1}{5}$?

Розв'язання. Нехай у коробці x білих кульок. Тоді

$$n = 20 + 25 + x = 45 + x \text{ і } m = x.$$

Отже, ймовірність витягнути білу кульку дорівнює $\frac{x}{45 + x}$.

- 1) За умовою $\frac{x}{45 + x} = \frac{1}{4}$, тоді $4x = 45 + x$; тобто $x = 15$.

- 2) За умовою $\frac{x}{45 + x} < \frac{1}{5}$. Щоб розв'язати нерівність, помножимо її обидві частини на додатне число $5(45 + x)$. Маємо: $5x < 45 + x$, звідки $x < 11,25$.

Отже, якщо ймовірність витягнути білу кульку менша, ніж $\frac{1}{5}$, то в коробці не більше, ніж 11 білих кульок.

Відповідь: 1) 15; 2) не більше ніж 11.

Приклад 5. Власник мобільного телефона забув дві останні цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайти ймовірність того, що він отримає доступ до телефона з першої спроби.

Розв'язання. Двома останніми цифрами PIN-коду можуть бути такі комбінації: 00, 01, 02, 03, ..., 97, 98, 99. Всього їх 100. Але серед них є 10 комбінацій, у яких цифри однакові: 00, 11, 22, ..., 88, 99. Оскільки власник телефона пам'ятає, що всі цифри різні, то він вибиратиме із 90 комбінацій ($100 - 10 = 90$). Отже, $n = 90$. Знаходимо ймовірність того, що власник отримає доступ до телефона з першої спроби, тобто $m = 1$.

$$\text{Тоді } p = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{90}.$$

 Як знайти ймовірність випадкової події A ?  Яка ймовірність у вірогідної події? У неможливої події?  У яких межах може змінюватися ймовірність випадкової події?  Які події називають рівноймовірними в такому випробуванні?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 24.1. Наведіть приклад:
 - 1) рівноймовірних подій;
 - 2) подій, які не є рівноймовірними в такому випробуванні.
- 2** 24.2. Яка ймовірність того, що:
 - 1) наступним днем після 30 березня буде 1 квітня;
 - 2) наступним днем після понеділка буде вівторок?
- 24.3. Яка ймовірність того, що:
 - 1) наступним днем після 30 квітня буде 1 травня;
 - 2) наступним днем після середи буде вівторок?
- 24.4. На запитання вікторини було отримано 60 правильних відповідей, у тому числі й твоя. Для визначення єдиного переможця навання витягують картку з прізвищем. Яка ймовірність того, що приз одержиш саме ти?
- 24.5. Із 30 екзаменаційних білетів учениця не вивчила один. Яка ймовірність того, що саме цей білет вона витягне на екзамені?
- 24.6. У ящику 25 білих кульок і 15 чорних. Яка ймовірність витягнути навання з ящика:
 - 1) білу кульку;
 - 2) чорну кульку?
- 24.7. У класі 18 хлопців і 12 дівчат. Із класу вибирають навання одного учня. Яка ймовірність того, що це буде:
 - 1) хлопець;
 - 2) дівчина?

24.8. Чи є рівномірними події:

- 1) A_1 – з 20 карток із числами від 1 до 20 витягнути картку із числом 1;
- A_2 – з 20 карток із числами від 1 до 20 витягнути картку із числом 20;
- 2) B_1 – витягнути білу кульку з коробки, у якій 3 білі кульки і 7 чорних;
- B_2 – витягнути чорну кульку з коробки, у якій 3 білі кульки і 7 чорних;
- 3) C_1 – при підкиданні грального кубика випало просте число;
- C_2 – при підкиданні грального кубика випало складене число;
- 4) D_1 – витягнути червоний олівець з коробки, де половина олівців червоні, а половина – сині;
- D_2 – витягнути синій олівець з коробки, де половина олівців червоні, а половина – сині?

24.9. Відомо, що в партії з 1000 деталей 2 браковані. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь:

- 1) бракована;
- 2) якісна?

24.10. У магазині виявилось, що в партії із 400 смартфонів 2 бракованих. Яка ймовірність того, що навмання вибраний із цієї партії смартфон:

- 1) бракований;
- 2) якісний?

24.11. У кошику 5 червоних, 3 зелених і 2 жовтих яблука. Навмання вибирають одне яблуко. Яка ймовірність того, що це яблуко виявиться:

- 1) червоним;
- 2) зеленим;
- 3) червоним або жовтим;
- 4) не червоним?

24.12. У коробці 6 червоних, 3 зелених і 1 синій олівець. Із коробки навмання виймають один олівець. Яка ймовірність того, що цей олівець:

- 1) зелений;
- 2) червоний;
- 3) зелений або синій;
- 4) не зелений?

3 24.13. (Задача Д'Аламбера.) Яка ймовірність того, що за двох підкидань монети хоча б один раз випаде аверс?

24.14. З натуральних чисел від 1 до 30 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30?

24.15. Яка ймовірність того, що навмання вибране натуральне число від 1 до 15 буде дільником числа 15 або простим числом?

24.16. Маємо новий відривний календар невисокосного року. Відриваємо в ньому навмання один листок. Знайдіть ймовірність того, що:

- 1) на листку число 1;
- 2) на листку число 31;
- 3) число на листку ділиться на 5.

- 24.17.** Маємо новий відривний календар високосного року. Відриваємо в ньому один листок. Знайдіть імовірність того, що:
- 1) на листку число 2;
 - 2) на листку число 30;
 - 3) число на листку є кратним числу 10.
- 24.18.** Одночасно підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на кубиках:
- 1) випаде однакова кількість очок;
 - 2) сума очок дорівнюватиме 10;
 - 3) сума очок буде не більшою за 3;
 - 4) сума очок буде парним числом.
- 24.19.** Одночасно підкинули два гральних кубики. Знайдіть імовірність того, що:
- 1) на кубиках випаде різна кількість очок;
 - 2) сума очок на кубиках дорівнюватиме 7;
 - 3) сума очок на кубиках буде не меншою від 11;
 - 4) сума очок на кубиках буде непарним числом.
- 24.20.** Складіть таблицю добутку очок, що випали на двох гральних кубиках під час їх одночасного підкидання, аналогічну до таблиці суми очок (див. **Приклад 3** цього параграфа). Знайдіть імовірність того, що добуток очок:
- 1) дорівнюватиме 12;
 - 2) дорівнюватиме 11;
 - 3) буде меншим від 5;
 - 4) буде більшим за 26;
- 24.21.** У коробці лежать 12 синіх олівців і кілька червоних. Скільки червоних олівців у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:
- 1) синій олівець – дорівнює 0,75;
 - 2) червоний олівець – дорівнює $\frac{2}{5}$;
 - 3) синій олівець – більша за 0,5;
 - 4) червоний олівець – менша від $\frac{2}{3}$?
- 24.22.** У коробці 6 білих і кілька чорних кульок. Скільки чорних кульок у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:
- 1) білу кульку – дорівнює 0,6;
 - 2) чорну кульку – дорівнює 0,25;
 - 3) білу кульку – менша від 0,5;
 - 4) чорну кульку – більша за $\frac{1}{4}$?
- 4** **24.23.** У коробці 3 чорні ручки, кілька зелених та кілька червоних. Скільки зелених ручок у коробці і скільки червоних, якщо ймовірність навмання витягнути зелену ручку дорівнює 0,2, а червону – 0,5?
- 24.24.** У шухляді 8 білих хустин, кілька червоних і кілька картатих. Скільки в шухляді червоних хустин і скільки картатих, якщо ймовірність навмання витягнути червону хустину дорівнює 0,5, а картату – 0,1?

24.25. Антон, ідучи в гості до Ярини, придбав букет із 5 білих і кількох червоних троянд. Скільки червоних троянд у букеті, якщо ймовірність вибрати з нього намання червону троянду більша за 0,5, але менша від 0,6, при цьому квітів у букеті непарна кількість?

24.26. У мисці лежить 10 вареників з картоплею і кілька вареників з м'ясом. Скільки вареників з м'ясом у мисці, якщо ймовірність того, що один вибраний намання вареник буде з м'ясом, більша за 0,2, але менша від 0,3?

24.27. Яка ймовірність того, що намання вибране двоцифрове число ділиться на 3?

24.28. Картки з номерами 1, 2, 3, 4 виклали в ряд. Яка ймовірність того, що картки з парними номерами опиняться поряд?

24.29. Підкидають три монети. Яка ймовірність того, що:

- 1) аверсів випаде більше, ніж реверсів;
- 2) випаде два реверси;
- 3) усі монети випадуть однаковою стороною;
- 4) аверсів випаде не більше ніж один?



Вправи для повторення

24.30. Скоротіть дріб:

1) $\frac{14p^{24}n^5}{2p^8n^{10}};$

2) $\frac{9a^2 - 6a + 1}{9a^2 - 1}.$

24.31. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $6x^2 + 18x = 0;$
- 2) $5x^2 - 20 = 0.$

24.32. Побудуйте графік функції $y = -4x + x^2$. Використовуючи графік функції, знайдіть:

- 1) область значень функції;
- 2) проміжок зростання функції.

24.33. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a - 20}{(a - 5)^2} : \left(\frac{a}{a^2 - 25} - \frac{a - 8}{a^2 - 10a + 25} \right)$$

додатне, якщо $a < -5$.

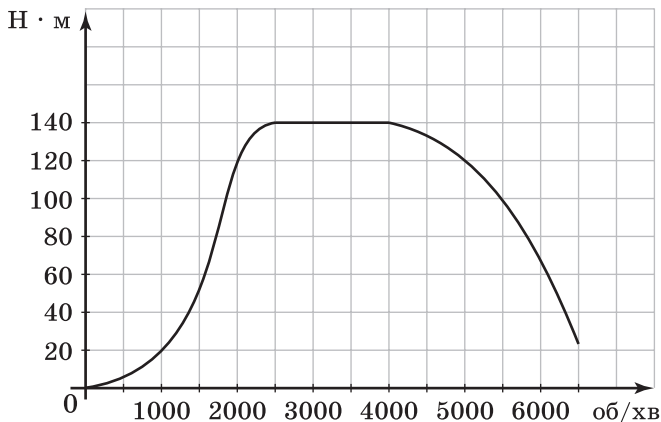
24.34. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{y}{2x} - \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ y^2 - 5xy + 2x^2 = 32. \end{cases}$$



Життєва математика

24.35. На графіку зображено залежність крутного моменту двигуна від кількості його обертів за хвилину (мал. 24.1). На осі абсцис відкладено кількість обертів за хвилину, на осі ординат – крутний момент, $\text{Н} \cdot \text{м}$. Швидкість автомобіля (у км/год) наближено обчислюють за формулою $v = 0,036n$, де n – кількість обертів двигуна за хвилину. З якою найменшою швидкістю має рухатися автомобіль, щоб крутний момент був не меншим ніж $120 \text{ Н} \cdot \text{м}$? Відповідь подайте в кілометрах за годину.



Мал. 24.1



Цікаві задачі – поміркуй одначе

24.36. Відомо, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів і $a + b + c < 0$. Чи можна визначити знак числа c ? У разі ствердної відповіді вкажіть знак числа c .

§ 25. Початкові відомості про статистику.

Статистичні дані. Способи подання даних та їх обробки

1. Уявлення про математичну статистику

У практичній діяльності людям часто доводиться збирати, обробляти та досліджувати різноманітні дані, пов'язані з явищами, процесами та подіями масового характеру. Такі дані називають *статистичними*. На запитання, пов'язані зі статистичними даними, допомагає відповісти *математична статистика*.

Математична статистика – розділ математики, що вивчає математичні методи систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Назва «статистика» походить від латинського *status*, що перекладається як «стан», «становище».

Математична статистика тісно пов’язана з теорією ймовірностей. Обидві ці математичні дисципліни вивчають випадкові події. Теорія ймовірностей на основі математичної моделі робить висновки про реальні процеси, а математична статистика встановлює властивості математичної моделі, виходячи зі спостережень на основі статистичних даних.

2. Отримання та систематизація статистичних даних

Приклад 1. Під час державної підсумкової атестації з математики 50 дев’ятикласників / дев’ятикласниць отримали такі бали:

5	10	4	7	8	9	6	4	11	6
9	2	11	5	6	7	5	8	6	10
8	7	3	10	8	12	9	6	11	7
11	5	6	4	7	5	3	9	5	10
4	6	7	9	8	4	7	5	7	6

Систематизуємо ці дані за рівнями навчальних досягнень у вигляді таблиці: початковий рівень (1–3 бали), середній рівень (4–6 балів), достатній рівень (7–9 балів), високий рівень (10–12 балів). У перший стовпчик запишемо назви рівнів навчальних досягнень. Для кожної оцінки робитимемо позначку рисою в другому стовпчику, у рядку, який відповідає рівню навчальних досягнень. У третій стовпчик запишемо сумарну кількість учнів / учениць, які отримали оцінку відповідного рівня:

Рівень навчальних досягнень	Підрахунок кількості учнів / учениць	Сума
Початковий		3
Середній		20
Достатній		18
Високий		9

3. Способи подання статистичних даних

Після обробки результати статистичних досліджень подають у найбільш наочному та стислому вигляді, наприклад, за допомогою таблиць, графіків, діаграм¹.

¹ Лінійні та стовпчасті діаграми будували у 5 класі, а кругові – у 6 класі.

Приклад 2. Подано результати статистичного дослідження з Прикладу 1 кількома способами.

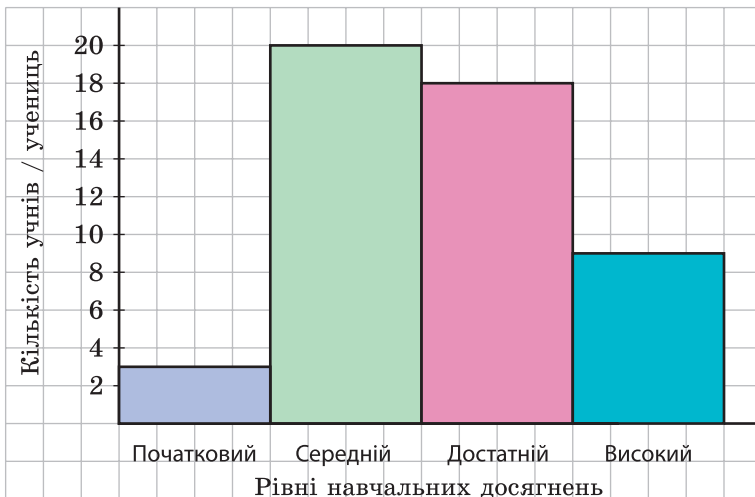
1) У вигляді *таблиці*.

Рівень навчальних досягнень	Кількість учнів / учениць
Початковий	3
Середній	20
Достатній	18
Високий	9

або

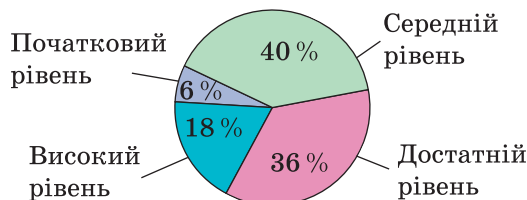
Рівень навчальних досягнень	Початковий	Середній	Достатній	Високий
Кількість учнів / учениць	3	20	18	9

2) У вигляді *стовпчастої діаграми*, яку в статистиці називають *гістограмою* (мал. 25.1).



Мал. 25.1

3) У вигляді *кругової діаграми*. На малюнку 25.2 подано кругову діаграму відсоткового розподілу кількості учнів / учениць за відповідними рівнями навчальних досягнень.



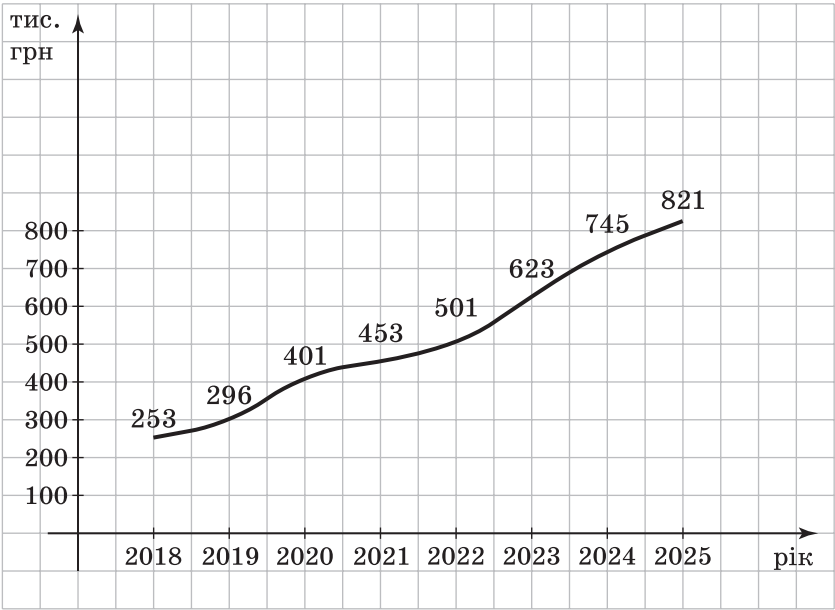
Мал. 25.2

Результати статистичних досліджень подають у вигляді графіка у разі, коли статистичні дані відображають зміни деякої величини протягом певного проміжку часу (кількох днів, місяців, років).

Приклад 3. У таблиці подано чистий прибуток ФОП (у тис. грн) по кожному з останніх восьми років.

Рік	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Прибуток, тис. грн	253	296	401	453	501	623	745	821

Подано ці статистичні дані у вигляді *графіка* (мал. 25.3).



Мал. 25.3

Подавати результати статистичних досліджень у вигляді таблиць, діаграм, графіків можна, використовуючи на комп'ютері спеціальні програмні засоби, наприклад *Microsoft Excel* або аналогічні програми, з якими ви вже навчилися працювати на уроках інформатики.

4. Середнє значення статистичних вимірювань

Середнім значенням статистичних вимірювань називають середнє арифметичне статистичних даних.

Нагадаємо, що для того щоб знайти середнє арифметичне кількох чисел, треба суму цих чисел поділити на кількість цих чисел.

Приклад 4. Яким є середнє значення чистого прибутку ФОП за останніх вісім років (див. **Приклад 3**).

Розв'язання.
$$\frac{25,3 + 29,6 + 40,1 + 45,3 + 50,1 + 62,3 + 74,5 + 82,1}{8} =$$

$$= \frac{409,3}{8} = 51,1625 \text{ (тис. грн)}$$

Відповідь: 51,1625 тис. грн.

? Які дані називають статистичними? ○ Що вивчає математична статистика? ○ Як подають результати статистичних досліджень? ○ Що у статистиці називають гістограмою? ○ Що називають середнім значенням статистичних вимірювань?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 25.1. Під час щорічного медичного огляду виміряли (у см) зріст десяти студенток і отримали такі дані:

169; 173; 167; 169, 172; 170; 171; 175; 164; 173.

Знайдіть середнє значення цих вимірювань.

25.2. Виміряли (у м) зріст десяти дев'ятикласників, що взяли участь у конкурсі «Мужність класу», і отримали такі дані:

1,67; 1,72; 1,68; 1,70; 1,73; 1,80; 1,68; 1,81; 1,78; 1,67.

Знайдіть середнє значення цих вимірювань.

2 25.3. У таблиці подано статистичні дані щодо місць, які посідала футбольна команда «Зоря» протягом десяти останніх чемпіонатів України з футболу. За даними таблиці побудуйте графік.

Рік	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Місце	4	3	4	5	3	3	4	3	10	7

25.4. У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські спортсмени на літніх Олімпійських іграх. Побудуйте гістограму кількості золотих медалей, які здобули українські спортсмени.

Рік Олімпіади	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
1996	9	2	12	23
2000	3	10	10	23
2004	9	5	9	23
2008	7	5	15	27
2012	6	5	8	19
2016	2	5	4	11
2020 ¹	1	6	12	19
2024	3	5	4	12

¹ – Олімпіада 2020 року відбулася 2021 року.

25.5. У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські школярі на міжнародних математичних олімпіадах за чотири роки поспіль. Побудуйте гістограму загальної кількості медалей, які здобули українські школярі на міжнародних математичних олімпіадах.

Рік	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
2013	1	3	1	5
2014	2	3	1	6
2015	2	3	1	6
2016	0	2	4	6

3 **25.6.** Використовуючи дані таблиці до задачі **25.4**, побудуйте кругову діаграму розподілу золотих, срібних та бронзових медалей на літніх Олімпійських іграх 2008 року.

25.7. Використовуючи дані таблиці до задачі **25.5**, побудуйте кругову діаграму розподілу золотих, срібних та бронзових медалей на Міжнародній математичній олімпіаді 2015 року.



Вправи для повторення

25.8. Ціна письмового стола становить 4000 грн. Якою буде ціна цього стола після:

- 1) зниження на 5 %; 2) підвищення на 10 %?

25.9. Відстань між селами, що дорівнює 18 км, велосипедист планував подолати за певний час. Але оскільки він рухався зі швидкістю, на 3 км/год меншою від запланованої, то витратив на дорогу на 12 хв більше, ніж планував. З якою швидкістю рухався велосипедист?



Життєва математика

25.10. Податок на додану вартість (ПДВ) у Люксембурзі становить 15 %, в Угорщині – 25 %, а в Україні – 20 % від ціни товару. Яку суму ПДВ під час купівлі планшета доведеться сплатити в кожній із цих країн, якщо його ціна (без ПДВ) в Угорщині становить 31 250 угорських форинтів, а курс угорського форинта такий: 100 угорських форинтів дорівнюють 0,32 євро або 9,17 гривні.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

25.11. (Київська обласна олімпіада юних математиків, 2016 рік.) Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: за будь-якої перестановки цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

§ 26. Вибірка. Числові характеристики вибірки. Графічне подання інформації про вибірку

У попередньому параграфі ми розглянули питання систематизації невеликої кількості статистичних даних. А як можна дослідити та систематизувати явища масового характеру, тобто такі, що охоплюють тисячі чи більше досліджуваних об'єктів?

1. Генеральна сукупність і вибірка

Вивчаючи різні масові явища, дослідники проводять спеціальні статистичні дослідження. Першим етапом статистичних досліджень є етап збору інформації статистичних даних.

Нехай потрібно вивчити деяку сукупність об'єктів стосовно деякої ознаки. Наприклад, якщо розглядати роботу продавця, то можна досліджувати його завантаженість протягом години, швидкість обслуговування клієнта, тип клієнта, інші критерії. Розглядаючи учнів та учениць деякого 9-го класу, можна досліджувати їхній зріст, масу, розмір взуття, середню успішність та інші параметри.

Генеральна сукупність – це сукупність усіх об'єктів, що підлягають дослідженню.

Обсяг генеральної сукупності, тобто число об'єктів дослідження, може бути досить великим, а іноді й нескінченним¹. Наприклад, практично неможливо виміряти зріст усіх дев'ятикласників України або розмір їхнього взуття. Але такі дані потрібні, наприклад, взуттєвій фабриці, яка хоче мати інформацію про кількість взуття кожного розміру, яке треба пошити.

У подібних випадках найкращим способом дослідження є *вибіркові спостереження*: з генеральної сукупності вибирають її деяку частину – *вибірку* та досліджують її.

Вибіркою називають сукупність об'єктів, вибраних випадковим чином із генеральної сукупності.

Обсяг вибірки зазвичай істотно менший, ніж обсяг генеральної сукупності.

Метод математичного дослідження, який полягає в тому, що на основі дослідження вибірки роблять висновок про всю генеральну сукупність, називають **вибірковим методом**.

Для того щоб у результаті застосування вибіркового методу отримати хороші оцінки генеральної сукупності, потрібно, щоб вибірка

¹ Часто буває неможливо дослідити всі об'єкти генеральної сукупності.

була *репрезентативною*, тобто щоб вона досить повно представляла ознаки генеральної сукупності, що вивчаються. Умовою забезпечення репрезентативної вибірки є дотримання випадковості відбору, тобто об'єкти генеральної сукупності повинні мати однакові ймовірності потрапити у вибірку.

2. Систематизація і ранжування вибірки

Другим етапом статистичних досліджень є систематизація отриманих даних (вибірки), тобто подання вибірки у зручному для подальших дій вигляді.

Приклад 1. Усі дев'ятикласники деякого району писали одну й ту саму перевірочну контрольну роботу з математики за текстом районного управління освіти. Вибірку склали 30 навмання обраних робіт цих дев'ятикласників. Нехай вибрані дев'ятикласники отримали такі оцінки.

4	8	3	7	10	6	8	5	9	7
9	2	6	1	8	4	11	7	10	12
10	5	11	4	7	6	3	8	2	9

Дані цієї вибірки можна систематизувати в таблицю за кількістю набраних балів.

Отриманий бал за контрольну роботу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість учнів	1	2	2	3	2	3	4	4	3	3	2	1

Дані вибірки можна також систематизувати за рівнями навчальних досягнень.

Рівень навчальних досягнень	Початковий рівень (1–3 бали)	Середній рівень (4–6 балів)	Достатній рівень (7–9 балів)	Високий рівень (10–12 балів)
Кількість учнів	5	8	11	6

Операцію розташування випадкових величин вибірки за принципом неспадання називають *ранжуванням* вибірки. Отже, після ранжування кожне наступне число вибірки не менше від попереднього.

Приклад 2. У результаті ранжування вибірки, розглянутої у прикладі 1, матимемо:
1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 10; 10; 11; 11; 12.

3. Вибіркові характеристики

Третім етапом статистичних досліджень є оцінювання числових характеристик вибірки, які ще називають *вибіркові характеристики*. Розглянемо деякі з них.

Розмах вибірки R – це різниця між найбільшим і найменшим значеннями випадкової величини у вибірці.

Для вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, отримаємо $R = 12 - 1 = 11$.

Мода вибірки Mo – це значення випадкової величини, що трапляється у вибірці найчастіше.

Для вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, є дві моди, це оцінки 7 і 8. Можна записати $Mo_1 = 7$, $Mo_2 = 8$.

Медіана вибірки Me – це серединне значення ранжованої вибірки.

Медіана ділить ранжовану вибірку на дві рівні за кількістю частини. Якщо у вибірці непарна кількість випадкових величин, то її медіаною є число, яке стоїть посередині. Наприклад, у ранжованій вибірці:

1; 2; 3; 3; 3; 4; 5; 5; 6,

що складається з 9 випадкових величин, медіаною є число 3. Можна записати $Me = 3$.

Якщо у вибірці парне число випадкових величин, то його медіана – середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині. Наприклад, у ранжованій вибірці:

2; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 6,

що складається з 8 випадкових величин, медіана – це середнє арифметичне чисел 4 і 5, що стоять посередині ряду. Отже, $Me = \frac{4+5}{2} = 4,5$.

Середнє значення вибірки $\bar{x}$ – це середнє арифметичне всіх її значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Отже, середнє значення вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, знаходимо так:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 3}{30} + \\ &+ \frac{10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{30} = \frac{202}{30} = 6 \frac{11}{15} \approx 6,73 \text{ (із точністю до сотих)}. \end{aligned}$$

4. Графічне зображення інформації про вибірку

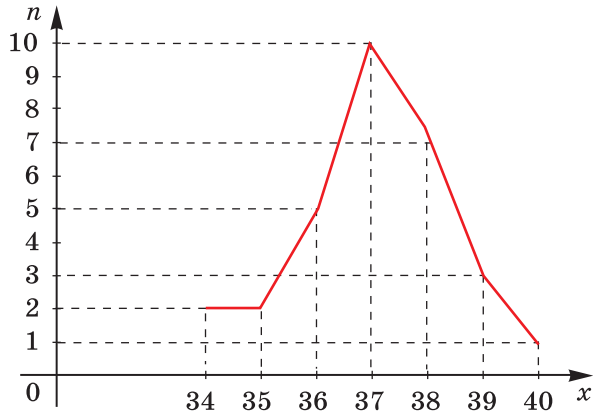
Результати статистичних досліджень після обробки можна подати в наочній і компактній формах.

Нехай дані вибірки систематизовано в таблицю, де в першому рядку розміщено значення випадкової величини x , а в другому – відповідні їм частоти n .

Полігоном частот називають ламану лінію, відрізки якої послідовно сполучають точки з координатами $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$, де x_i – значення випадкової величини, n_i – відповідні їм частоти.

Приклад 3. У вигляді таблиці систематизовано дані вибірки про розмір взуття 30 дівчат 9-го класу. Побудуємо полігон частот (мал. 26.1).

Розмір взуття, x	Частота, n
34	2
35	2
36	5
37	10
38	7
39	3
40	1



Мал. 26.1

Ви вже знаєте, як подавати результати статистичних досліджень у вигляді графіків, гістограм, кругових діаграм. Це можна робити за допомогою програмних засобів, наприклад, застосувавши програму *Excel* з офісного пакета від компанії *Microsoft* або аналогічні.

На малюнку 26.2 зображено гістограму розподілу кількості учнів залежно від отриманого бала, а на малюнку 26.3 – кругову діаграму розподілу кількості учнів залежно від рівня навчальних досягнень. Гістограму та кругову діаграму побудовано за допомогою програми *Excel*.



Мал. 26.2



Мал. 26.3

5. Застосування статистичних методів до розв'язування прикладних задач

Розглянемо, як можуть бути застосовані статистичні методи досліджень до розв'язування практичних задач.

Приклад 4. Із центральної площі невеликого міста відправляються чотири автобуси: № 1, № 2, № 3 і № 4. Місцева влада хоче з'ясувати, на якому з маршрутів має бути більше автобусів, а на якому – менше. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з певними закономірностями та об'єктивними умовами життя мешканців міста. Звичайно, відповідь можна отримати, опитавши всіх мешканців міста, але це надто довго і дорого.

На практиці ж роблять *вибірку*, тобто опитують вибірково кілька десятків чи сотень людей, після чого систематизують дані у вигляді таблиці. Нехай, наприклад, було опитано 200 мешканців міста, що користуються автобусами № 1, № 2, № 3 і № 4. Мешканець, який користується кількома маршрутами, мав назвати маршрут, яким користується найчастіше. Отримані статистичні дані було систематизовано у вигляді таблиці:

Маршрут	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Кількість користувачів маршруту	48	56	36	60

Таку таблицю називають *частотною*, а числа у другому її рядку – *частотами*. Ці числа показують, як часто трапляється у вибірці те чи інше значення. Суму частот усіх значень вибірки називають *обсягом вибірки*. У нашому прикладі обсягом вибірки є число 200, тобто кількість опитаних мешканців, адже $48 + 56 + 36 + 60 = 200$.

Відносною частотою значення вибірки називають записане у відсотках відношення його частоти до обсягу вибірки. Наприклад, відносна частота маршруту № 1 дорівнює $\frac{48}{200} \cdot 100 \% = 24 \%$.

Якщо, наприклад, місто має між маршрутами № 1, № 2, № 3 і № 4 розподілити 50 автобусів, то на маршрут № 1 доцільно виділити 12 автобусів: $50 \cdot 0,24 = 12$, тобто 24 % від 50. Подамо остаточні результати дослідження у вигляді таблиці:

Маршрут	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Частота	48	56	36	60
Відносна частота	24 %	28 %	18 %	30 %
Кількість автобусів, які доцільно виділити	12	14	9	15

? Що таке генеральна сукупність? ○ Що називають вибіркою? ○ У чому полягає вибірковий метод? ○ Що називають розмахом вибірки? ○ Що називають модою вибірки? ○ Що називають медіаною вибірки? ○ Що таке середнє значення вибірки? ○ Що називають полігоном частот?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 26.1. Дано генеральну сукупність із 30 об'єктів:
7; 12; 11; 8; 13; 1; 9; 11; 12; 17; 20; 14; 17; 18; 20;
2; 14; 19; 20; 3; 7; 15; 19; 20; 14; 5; 4; 9; 7; 13.
Створіть вибірку цієї генеральної сукупності:
1) усіх об'єктів, що стоять на парних місцях;
2) п'яти об'єктів поспіль, починаючи з тринадцятого;
3) об'єктів, узятих через два, починаючи з третього;
4) шести об'єктів поспіль, починаючи з номера, який відповідає номеру вашого прізвища у класному журналі.
- 26.2. Дано генеральну сукупність із 40 об'єктів:
7; 19; 21; 14; 30; 9; 17; 22; 21; 8;
13; 17; 22; 9; 20; 3; 15; 21; 11; 1;
3; 19; 20; 24; 27; 12; 14; 19; 13; 14;
29; 17; 21; 30; 25; 13; 19; 8; 1; 5.
Створіть вибірку цієї генеральної сукупності:
1) усіх об'єктів, що стоять на непарних місцях;
2) семи об'єктів поспіль, починаючи з дванадцятого;
3) об'єктів, узятих через три, починаючи з другого;
4) п'яти об'єктів поспіль, починаючи з номера літери в українській абетці, яка відповідає першій літері вашого імені.
- 26.3. Стрілець у п'яти серіях по 10 пострілів у кожній влучив у мішень таку кількість разів: 7; 6; 8; 9; 6. Знайдіть для цієї вибірки:
1) розмах;
2) моду;
3) медіану;
4) середнє значення.
- 26.4. Баскетболістка в десяти серіях по 5 кидків у кожній влучила в кошик таку кількість разів: 2; 3; 4; 3; 3; 1; 5; 3; 2; 4. Знайдіть для цієї вибірки:
1) розмах; 2) моду;
3) медіану; 4) середнє значення.
- 2** 26.5. 1) Проведіть ранжування генеральної сукупності об'єктів задачі 26.1.
2) Знайдіть медіану цієї генеральної сукупності.
- 26.6. 1) Проведіть ранжування генеральної сукупності об'єктів задачі 26.2.
2) Знайдіть медіану цієї генеральної сукупності.
- 26.7. 1) Заповніть таблицю за даними задачі 26.4.

Кількість влучень у серії	1	2	3	4	5
Кількість серій					

- 2) Побудуйте полігон частот за отриманими даними.

26.8. 1) Заповніть таблицю за даними задачі 26.3.

Кількість влучень у серії	6	7	8	9
Кількість серій				

2) Побудуйте полігон частот за отриманими даними.

26.9. Придумайте вибірку з п'яти елементів, медіаною якої є число 7.

26.10. Придумайте вибірку із семи елементів, медіаною якої є число 5.

26.11. Розмах деякої вибірки дорівнює 9, а її найбільший елемент дорівнює 17. Знайдіть найменший елемент вибірки.

26.12. Розмах деякої вибірки дорівнює 13, а її найменший елемент дорівнює 10. Знайдіть найбільший елемент вибірки.

3 **26.13.** Придумайте вибірку із семи елементів, модою якої є число 7, а медіаною – число 9.

26.14. Придумайте вибірку з п'яти елементів, модою якої є число 10, а медіаною – число 8.

26.15. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 8,4, складається із чисел 9; a ; 12; 6; $2a$. Знайдіть:

1) a ; 2) медіану цієї вибірки.

26.16. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 10,6, складається із чисел b ; 7; 16; $3b$; 10. Знайдіть:

1) b ; 2) медіану цієї вибірки.

26.17. На телефонній станції спостерігають за кількістю неправильних з'єднань протягом хвилини. Результати спостережень систематизовано в таблицю.

Кількість неправильних з'єднань протягом хвилини, x	0	1	2	3	4
Кількість хвилин, n	4	10	11	12	3

Знайдіть для випадкової величини x :

1) середнє значення; 2) моду;

3) медіану.

26.18. На заводі спостерігають за кількістю бракованих деталей x , виготовлених робітником протягом зміни. Результати спостережень систематизовано в таблицю.

Кількість бракованих деталей протягом зміни, x	0	1	2	3
Кількість змін, n	4	5	7	4

Знайдіть для випадкової величини x :

1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

26.19. Придумайте вибірку, що складається із цілих чисел, медіаною якої є число 7,5.

26.20. Практичне завдання. 1) Дізнайтеся оцінки, отримані учнями та ученицями вашого класу під час останньої контрольної роботи з алгебри. За допомогою комп'ютерної програми побудуйте гістограму за цими даними.

2) Систематизуйте отримані дані за рівнями навчальних досягнень. За допомогою комп'ютерної програми побудуйте кругову діаграму за цими даними.

4

26.21. Проектна діяльність. 1) Систематизуйте в частотну таблицю дані вибірки про розмір взуття, які отримано в результаті опитування 40 жінок.

36	38	35	37	38	39	36	38	37	38
39	34	37	38	35	36	39	37	38	39
37	39	35	38	36	38	40	35	37	36
38	37	39	36	38	35	38	37	34	36

2) Знайдіть частоти та відносні частоти значень вибірки.

3) Взуттєва фабрика планує випускати 10 000 пар жіночого взуття щорічно. Яку кількість пар взуття кожного розміру доцільно випускати?

26.22. Проектна діяльність. 1) Систематизуйте в частотну таблицю дані вибірки про розмір взуття, які отримано в результаті опитування 40 чоловіків.

42	39	41	43	40	42	41	44	42	43
44	42	40	38	43	41	42	44	41	43
45	41	42	40	43	39	44	41	43	42
42	43	39	42	40	44	41	42	43	40

2) Знайдіть частоти та відносні частоти значень вибірки.

3) Взуттєва фабрика планує випускати 20 000 пар чоловічого взуття щорічно. Яку кількість пар кожного розміру доцільно випускати?



Вправи для повторення

26.23. Відомо, що $a < b$. Порівняйте:

1) $a + 3$ і $b + 3$;

2) $a - 7$ і $b - 7$;

3) $-a$ і $-b$;

4) $\frac{a}{3}$ і $\frac{b}{3}$;

5) $2a - 3$ і $2b - 3$;

6) $1 - 7a$ і $1 - 7b$.

26.24. Побудуйте графік функцій:

1) $y = |x|$;

2) $y = |x| - 2$;

3) $y = |x| + 3$;

4) $y = |x - 2|$;

5) $y = |x + 3|$;

6) $y = 2 - |x|$.



Життєва математика

26.25. Система навігації, вбудована у спинку літакового крісла, інформує пасажирів про те, що політ проходить на висоті 40 000 футів. Обчисліть висоту польоту в кілометрах. Вважайте, що 1 фут дорівнює 30,5 см.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

26.26. За яких значень a рівняння $\frac{ax^2 - 8x + a}{x - 2} = 0$ має єдиний розв'язок?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5 (§§ 22-26)

Завдання 1-12 мають по чотири варіанти відповідей (А-Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. У класі 9 юнаків і 10 дівчат. Скількома способами можна вибрати старосту в цьому класі?

А. 9

Б. 10

В. 19

Г. 90

2. Укажіть, яка з подій є випадковою.

А. Навмання вибрана доба матиме 24 години

Б. Гральний кубик має шість граней

В. Наступним днем після п'ятниці йде субота

Г. Навмання вибране трицифрове число кратне числу 7

3. Середнє значення статистичних даних 8, 7, 9, 10 і 7 дорівнює...

А. 41

Б. 8,2

В. 7

Г. 10,25

4. Випадковий дослід полягав у підкиданні грального кубика, яке проведено 100 разів. Результати дослідів занесено в таблицю. Якою є відносна частота випадіння числа 6?

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадіння числа	18	15	16	15	19	17

А. 0,17

Б. 17

В. 0,017

Г. 1,7

5. У наборі новорічних іграшок 6 червоних кульок, 3 білі і 1 жовта. Яка ймовірність того, що взята навмання з набору кулька не буде червоною?

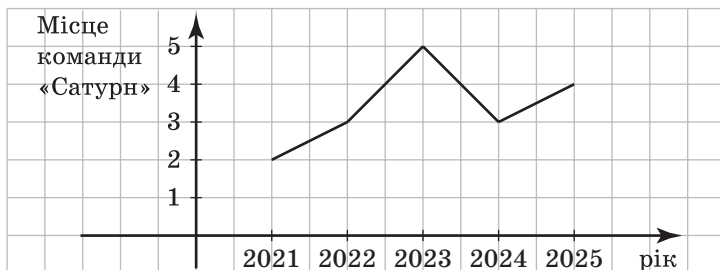
А. 0,6

Б. 0,4

В. 0,3

Г. 0,1

6. На графіку (мал. 1) показано, які місця посідала волейбольна команда «Сатурн» протягом останніх п'яти чемпіонатів області з волейболу. Якого року – 2022-го чи 2024-го – команда «Сатурн» посіла більш високе місце?
- А. 2022 року
 Б. 2024 року
 В. 2022 року і 2024 року команда «Сатурн» посіла однакове місце
 Г. Неможливо визначити



Мал. 1

- 3 7. У баскетбольній команді з 5 дівчат треба вибрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?
- А. 5 Б. 10
 В. 20 Г. 25
8. Серед 100 опитаних жителів невеликого міста 97 мали мобільний телефон. Яке число буде найближчим до кількості мобільних телефонів, якщо опитати 200 жителів цього міста?
- А. 194 Б. 98 В. 190 Г. 199
9. З натуральних чисел від 1 до 24 навмання називають одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 24?
- А. $\frac{1}{2}$ Б. $\frac{7}{24}$ В. $\frac{3}{8}$ Г. $\frac{1}{3}$
- 4 10. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 7, 9, якщо в кожному числі цифри не повторюються?
- А. 256 Б. 24 В. 18 Г. 9
11. Відомо, що біатлоністка влучає в мішень з імовірністю, більшою за 0,8, але меншою від 0,85. Яке число найбільш точно відображає приблизну кількість пострілів під час тренування, якщо в них біатлоністка мала 14 влучень у мішень?
- А. 17 Б. 20
 В. 22 Г. 15
12. У коробці 4 чорні ручки, кілька синіх та кілька червоних. Скільки синіх ручок у коробці, якщо ймовірність навмання витягнути синю ручку дорівнює 0,5, а червону – 0,3?
- А. 9 Б. 8
 В. 12 Г. 10

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3** 13. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 6,2, складається із чисел 8; 5; a ; $2a$; 6. Знайдіть a та установіть відповідність між вибірковою характеристикою (1–3) та її значенням (А–Г).

Вибіркова характеристика

Значення

1. Розмах вибірки
2. Мода вибірки
3. Медіана вибірки

- А. 4
- Б. 5
- В. 6
- Г. 8

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 22–26

- 1** 1. На полиці стоїть 7 збірок віршів і 3 збірки оповідань. Скількома способами з полиці можна взяти:

- 1) будь-яку збірку;
- 2) збірку віршів і збірку оповідань?

2. Які з подій є випадковими:

- 1) під час підкидання грального кубика випаде 5 очок;
- 2) площа круга, радіус якого дорівнює 8 см, дорівнюватиме 64π см²;
- 3) наступним днем після 31 грудня буде 1 січня;
- 4) придбаний лотерейний квиток виявиться виграшним?

3. Виміряли (у см) зріст п'яти дев'ятикласників і отримали такі дані:
160, 164, 158, 161, 162.

Знайдіть для цієї вибірки:

- 1) розмах;
- 2) середнє значення.

- 2** 4. Було виконано п'ять серій по 100 підкидань монети в кожній. Результати дослідів занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній із серій.

Серія	1	2	3	4	5
Випадіння аверсу (подія A)	47	51	50	48	53
Відносна частота події A					

5. У ящику 11 білих, 4 чорні і 5 зелених кульок. Навмання виймають одну з них. Яка ймовірність того, що вона виявиться:

- 1) білою;
- 2) не зеленою?

6. У таблиці записано місця, які посідала футбольна команда «Пролісок» протягом п'яти останніх чемпіонатів області з футболу. За даними таблиці побудуйте графік.

Рік	2021	2022	2023	2024	2025
Місце	7	3	7	10	5

- 3** 7. У секції плавання тренується 7 спортсменок. Скількома способами між ними можна розподілити етапи естафети 4 по 100 м вільним стилем (тобто кожна із чотирьох плавчинь, що бере участь в естафеті, пливе свій етап: перший, або другий, або третій, або четвертий)?
8. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 8,8, складається із чисел 4; a ; 7; $3a$; 9. Знайдіть:
- 1) a ; 2) медіану цієї вибірки.
- 4** 9. У шафі лежить 10 зелених, кілька чорних і кілька сірих пар шкарпеток. Скільки чорних і скільки сірих пар шкарпеток у шафі, якщо ймовірність навмання взяти пару чорних шкарпеток дорівнює 0,3, а сірих – 0,2?

Додаткові завдання

- 3** 10. Було перевірено 500 деталей, з яких 2 виявилися бракованими.
- 1) Скільки приблизно бракованих деталей буде в партії з 1500 деталей?
- 2) Скільки приблизно було деталей у партії, якщо серед них виявилось 8 бракованих?
- 4** 11. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 3, 7, 9, якщо цифри в числі не повторюються?
12. Відомо, що баскетболістка влучає в кошик зі штрафного кидка з ймовірністю, більшою за 0,7, але меншою, ніж 0,75. Скільки приблизно штрафних кидків виконала вона під час тренування, якщо відбулося 12 влучень у кошик?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 22

- 1** 1. У танцювальному клубі займаються 7 юнаків і 9 дівчат. Скількома способами можна вибрати одну танцювальну пару для участі в конкурсі?
- 2** 2. Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного і одного приголосного серед звуків слова «стежка»?
3. Скількома способами можна викласти в ряд червону, білу, чорну та зелену кульки?
4. З букв розрізної абетки складено слово «учень». Скільки різних послідовностей букв можна отримати, переставляючи букви цього слова?
- 3** 5. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 1 і 2, якщо цифри в числі можуть повторюватися?
6. Скільки різних чотирицифрових чисел, у запису яких використовуються лише непарні цифри, можна скласти, якщо цифри в числі можуть повторюватися?

7. Скільки різних двоцифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі:
 - 1) можуть повторюватися;
 - 2) не можуть повторюватися?
8. Скількома способами можна вибрати старосту та його заступника в класі, де навчається 28 учнів та учениць?
9. Скількома способами можна пошити двоколірний прапор зі смужок однакової ширини, якщо є шовк восьми різних кольорів?
10. З букв слова «сокіл» беруть деякі три і викладають у ряд. Скільки різних послідовностей букв при цьому можна отримати?
- 4** 11. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 0, 1, 2, 3, 4, якщо цифри в числі не повторюються?
12. Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких парні й не повторюються?
13. Скільки є різних варіантів складання шифру із чотирьох цифр, якщо цифри у шифрі:
 - 1) можуть повторюватися;
 - 2) не можуть повторюватися?
14. Шкільний розклад на день містить 5 уроків. Визначте кількість різних варіантів розкладів на один день, якщо в класі вивчають 9 предметів і предмети в один день не можуть повторюватися.
15. Під час зустрічі 8 чоловіків обмінялися рукоштовками. Скільки рукоштовок було здійснено?

До § 23

- 1** 16. Які з даних подій випадкові, вірогідні, неможливі:
 - 1) програти партію в шахи рівному по силі супернику;
 - 2) під час підкидання грального кубика випаде число 11;
 - 3) випаде два аверси під час підкидання двох монет одночасно;
 - 4) дата народження людини, яку зустріли, 1 вересня;
 - 5) дата народження людини, яку зустріли, 31 вересня;
 - 6) витягнути олівець із коробки, де лежать 6 зелених і 5 червоних олівців;
 - 7) наступним днем після 1 грудня буде 2 грудня;
 - 8) наступним днем після 2 грудня буде 1 грудня?
- 2** 17. Перемалуйте таблицю в зошит і для кожного досліду вкажіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової події.

№ з/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Підкидання двох гральних кубиків одночасно			
2	Витягування хустинки з коробки, де лежать червоні та зелені хустинки			
3	Складання трицифрового числа із цифр 1, 2, 3			
4	Кількість днів навчання обраного місяця року			

18. Було виконано чотири серії по 100 підкидань монети в кожній. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній серії.

Серія	1	2	3	4
Випадіння аверсу (подія A)	51	50	47	49
Відносна частота події A				

19. Відомо, що в партії з 10 000 тонометрів 9 є бракованими. Яка ймовірність того, що навмання вибраний із цієї партії тонометр виявиться бракованим?

- 3** 20. Щоб з'ясувати, який зріст у чоловіків деякого міста трапляється частіше, а який – рідше, дослідники розійшлися по різних частинах міста й записували зріст чоловіків, яких зустрічали. Результати цього дослідження було занесено в таблицю.

Зріст, см	до 161	161–170	171–180	181–190	вище 190
Кількість опитаних	15	142	241	79	53

Оцініть (із точністю до сотих), що обраний навмання чоловік цього міста має зріст:

- 1) нижчий від 161 см;
 - 2) від 171 до 180 см;
 - 3) вищий за 180 см;
 - 4) нижчий від 181 см.
21. *Проектна діяльність.* Виберіть якийсь текст українською мовою, позначте в ньому будь-які шість рядків поспіль. Обчисліть відносну частоту в цих рядках букви «о» та букви «ц» та порівняйте їх.
22. У серії зі 100 пострілів стрілець влучив у ціль 84 рази.
- 1) Скільки приблизно влучень буде в серії зі 150 пострілів?
 - 2) Скільки приблизно пострілів зробив стрілець, якщо серед них було 189 влучень?
- 4** 23. Сергій грає в настільний теніс краще, ніж Василь, а тому виграє партію з імовірністю, більшою за 0,6, але меншою від 0,7. Скільки партій приблизно зіграли хлопці, якщо Сергій виграв 5 партій?

До § 24

- 2** 24. 1) Чи всі рівноймовірні події мають імовірність, що дорівнює 0,5?
2) Наведіть приклад двох рівноймовірних подій, імовірність яких не дорівнює 0,5.
25. У лотереї з 500 квитків 50 є виграшними. Яка ймовірність виграти в цій лотереї, якщо придбати один квиток?
26. Гральний кубик підкидають один раз. Знайдіть імовірність того, що:
- 1) випаде число, яке є дільником числа 9;
 - 2) випаде не більше як 2 очки;
 - 3) випаде не менше як 2 очки;
 - 4) випаде число, яке є квадратом натурального числа.

- 3** 27. У ящику a синіх і b червоних кульок. Із нього виймають одну кульку червоного кольору і відкладають. Після цього з ящика беруть ще одну кульку. Яка ймовірність того, що вона також червона?
28. Підкидають дві однакові монети. Яка з подій більш імовірна: A – монети випадуть однаковими сторонами чи B – монети випадуть різними сторонами?
29. У коробці 25 карток, пронумерованих від 1 до 25. Із коробки навмання виймають одну картку. Яка ймовірність того, що на ній написане число:
- 1) 1; 2) 26;
 - 3) парне; 4) непарне;
 - 5) кратне числу 5; 6) просте;
 - 7) одноцифрове; 8) двоцифрове;
 - 9) у запису якого є цифра 2;
 - 10) у запису якого немає цифри 1?
30. Підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що модуль різниці чисел, що випадуть, дорівнюватиме 1?
- 4** 31. На десяти картках записано цифри від 0 до 9. Спочатку навмання беруть одну картку, а потім, не повертаючи її назад, – іншу. Із цих карток утворюють двоцифрове число: на першій картці – десятки цього числа, на другій – одиниці (наприклад, якщо складено число 01 – це означатиме число 1). Знайдіть імовірність того, що складуть число, яке:
- 1) кратне числу 3; 2) є дільником числа 99;
 - 3) кратне числу 11.
32. На п'яти картках записано цифри від 1 до 5. Виймають навмання одну картку, запам'ятовують число, що на ній записано, і картку знов кладуть до інших. Потім ще раз вибирають одну картку. Знайдіть імовірність того, що:
- 1) обидва рази витягали однакову картку;
 - 2) першого разу витягнули картку з більшим числом, ніж другого разу.
33. У коробці 3 білі, 5 чорних і кілька зелених кульок. Скільки зелених кульок у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька є білою, більша за 0,2, а ймовірність того, що вона зелена, більша за 0,4?

До § 25

- 1** 34. У таблиці подано інформацію про місця, які посідала футбольна команда «Олександрія» (м. Олександрія Кіровоградської обл.) протягом п'яти останніх чемпіонатів України з футболу.

Рік	2021	2022	2023	2024	2025
Місце	9	6	6	8	2

Яке місце в середньому посідала команда «Олександрія» протягом останніх п'яти чемпіонатів?

- 2** 35. За даними таблиці попередньої задачі побудуйте графік.
- 3** 36. *Проектна діяльність.* Дізнайтеся (із газет чи інтернету) відомості про кількість м'ячів, які забивала команда вашого регіону в останніх десяти матчах чемпіонату України з футболу. Побудуйте гістограму та кругову діаграму за цими даними.

До § 26

- 1** 37. Дано генеральну сукупність 50 об'єктів:
 1; 7; 13; 12; 31; 15; 16; 19; 21; 40;
 3; 14; 19; 21; 45; 14; 19; 29; 35; 47;
 15; 17; 18; 25; 23; 15; 8; 9; 17; 1;
 42; 19; 15; 19; 25; 27; 29; 4; 9; 8;
 3; 4; 17; 48; 13; 29; 32; 13; 12; 5.
 Створіть вибірку цієї генеральної сукупності:
 1) усіх об'єктів, що стоять на парних місцях;
 2) усіх об'єктів, що стоять на непарних місцях;
 3) десяти об'єктів поспіль, починаючи з п'ятнадцятого;
 4) об'єктів, узятих через п'ять, починаючи з першого.
38. Футболіст у п'яти серіях по 5 пенальті в кожній забив таку кількість м'ячів: 5; 4; 4; 3; 5. Знайдіть для цієї вибірки:
 1) розмах;
 2) моду;
 3) медіану;
 4) середнє значення.
- 2** 39. 1) Проведіть ранжування генеральної сукупності об'єктів задачі 37.
 2) Знайдіть медіану цієї генеральної сукупності.
40. 1) Заповніть таблицю за даними задачі 38.
- | | | | |
|------------------------------------|---|---|---|
| Кількість забитих пенальті в серії | 3 | 4 | 5 |
| Кількість серій | | | |
41. Придумайте вибірку дев'яти елементів, медіаною якої є число 10.
42. Розмах даної вибірки дорівнює 15, а найменший елемент 5. Укажіть найбільший елемент вибірки.
43. За даними задачі 25.4 побудуйте гістограму кількості бронзових медалей, що здобули українські спортсмени під час літніх Олімпійських ігор.
- 3** 44. За даними задачі 25.4 побудуйте кругову діаграму кількості золотих медалей, що здобули українські спортсмени під час літніх Олімпійських ігор.
45. Придумайте вибірку з одинадцяти елементів, модою якої є число 9, а медіаною – число 5.

46. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 5,2, складається із чисел 3; c ; 7; $4c$; 6. Знайдіть:

- 1) c ; 2) медіану цієї вибірки.

47. Самостійна робота містила 4 тестових завдання. Складено таблицю відповідності між кількістю допущених помилок X і кількістю учнів / учениць n , які припустилися такої кількості помилок.

Кількість помилок, X	0	1	2	3	4
Кількість учнів / учениць, n	2	7	6	4	1

Знайдіть для випадкової величини X :

- 1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.



Головне в розділі 4

КОМБІНАТОРНЕ ПРАВИЛО СУМИ

Якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами, а елемент B (незалежно від вибору елемента A) – k_2 способами, то вибрати A або B можна $k_1 + k_2$ способами.

КОМБІНАТОРНЕ ПРАВИЛО ДОБУТКУ

Якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами і після кожного такого вибору (незалежно від вибору елемента A) інший елемент B можна вибрати k_2 способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати $k_1 \cdot k_2$ способами.

ВИПАДКОВА ПОДІЯ. ЧАСТОТА ТА ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Випадковий дослід – це дослід (експеримент, спостереження, випробування), результат якого залежить від випадку і який можна повторити багато разів за однакових умов.

Випадкова подія – це подія, яка за однакових умов може відбутися, а може й не відбутися.

Подію, яка за даних умов обов'язково відбудеться, називають **вірогідною**.

Подію, яка за даних умов ніколи не відбудеться, називають **неможливою**.

Якщо за незмінних умов проведено n випадкових дослідів і в $n(A)$ випадків подія A відбулася, то число $n(A)$ називають **частотою події A** , а відношення $\frac{n(A)}{n}$ – **відносною частотою події A** .

КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню кількості випадків, що сприяють появі події A , до кількості всіх можливих випадків:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість усіх можливих випадків, m – кількість випадків, що сприяють появі події A .

ЙМОВІРНОСТІ ДЕЯКИХ ПОДІЙ

Ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

Ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Ймовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1.

Рівноймовірні події – події, ймовірність яких однакова в даному випробуванні.

ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИСТИКУ. СТАТИСТИЧНІ ДАНІ

Математична статистика – розділ математики, що вивчає математичні методи систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Середнім значенням статистичних вимірювань називають середнє арифметичне статистичних даних.

ВИБІРКА. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБІРКИ

Генеральна сукупність – це сукупність усіх об'єктів, що підлягають дослідженню.

Вибіркою називають сукупність об'єктів, вибраних випадковим чином із генеральної сукупності.

Метод математичного дослідження, який полягає в тому, що на основі дослідження вибірки роблять висновок про всю генеральну сукупність, називають *вибірковим методом*.

Розмах вибірки R – це різниця між найбільшим і найменшим значеннями випадкової величини у вибірці.

Мода вибірки Mo – це значення випадкової величини, що трапляється у вибірці найчастіше.

Медіана вибірки Me – це серединне значення ранжованої вибірки.

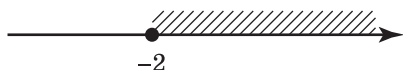
Середнє значення вибірки $\bar{x}$ – це середнє арифметичне всіх її значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 9 КЛАСУ

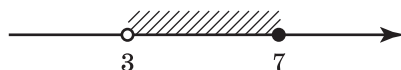
1 1. Порівняйте a і b , якщо:

- 1) $a - b = 5$; 2) $a - b = -4,1$.

2. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 1 і 2.



Мал. 1



Мал. 2

3. Дано $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$. Знайдіть:

- 1) $f(0)$; 2) $f(3)$.

2 4. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $-3x < 12$; 2) $4x - x^2 \geq 0$.

5. Знайдіть дев'ятий член та суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 9$, $d = -2$.

6. Відомо, що в партії з 2000 деталей 5 є бракованими. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь:

- 1) бракована; 2) якісна?

3 7. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -7. \end{cases}$$

8. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x - 5$. За графіком знайдіть:

- 1) область значень функції;
2) проміжок зростання функції.

4 9. Доведіть, що $x^2 + y^2 - 2(2x - y) + 5 \geq 0$ для будь-яких значень змінних x та y .

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

До розділу 1

1. Доведіть нерівність:

- 1) $(x^3 - y^3)(x - y) \geq 3xy(x - y)^2$;
2) $(x^2 - y^2)(x^4 - y^4) \leq (x^3 - y^3)^2$.

2. Доведіть нерівність:

- 1) $9x^2 + 25 \geq 30|x|$; 2) $x^2 - 4x + 5 \geq 2|x - 2|$.

3. Доведіть, що для невід'ємних значень змінних x та y справджується нерівність:

- 1) $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$; 2) $(x + y)^3 \leq 4(x^3 + y^3)$.

4. Доведіть, що коли $x \geq y$, то:

1) $x^3 - y^3 \geq x^2y - xy^2$;

2) $x^5 - y^5 \geq x^4y - xy^4$.

5. Доведіть, що, коли $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, справджується нерівність $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

6. Доведіть, що:

1) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$;

2) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} < 2$.

7. Доведіть нерівність $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$.

8. Відсоток учнів 9-го класу, які володіють трьома іноземними мовами (англійською, французькою і німецькою), лежить у межах від 2,9 до 3,1 %. Визначте, яка найменша кількість учнів може бути в цьому класі. Скільки учнів цього класу володіють трьома іноземними мовами?

9. Чи правильно, що:

1) коли $a^2b \leq 0$, то $b \leq 0$;

2) коли $\frac{a^2}{b} \geq 0$, то $b > 0$;

3) коли $a^2b > 0$, то $b > 0$;

4) коли $\frac{a^2}{b} < 0$, то $b < 0$?

10. Між числами $\frac{4}{7}$ і $\frac{5}{7}$ знайдіть число, що дорівнює квадрату раціонального числа. Скільки існує таких чисел?

11. Який дріб ближчий до одиниці: правильний чи обернений йому неправильний?

12. Розв'яжіть рівняння з трьома змінними:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{y+1}{\sqrt{y}} + \frac{z+1}{\sqrt{z}} = 6.$$

13. Доведіть нерівність:

$$\left(1 + \frac{x^2}{yz}\right) \left(1 + \frac{y^2}{xz}\right) \left(1 + \frac{z^2}{xy}\right) \geq 8, \text{ де } x > 0, y > 0, z > 0.$$

14. Відомо, що $x > 0$. Знайдіть найменше значення виразу:

1) $x + \frac{4}{x}$;

2) $\frac{x^2 + 15x + 36}{x}$.

15. Відомо, що $y > 0$. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\frac{y}{9 + y^2}$;

2) $\frac{y^2}{9y^4 + 4}$.

16. Доведіть, що коли $x + y + z = 7$ і $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, то $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} < 5$.
17. Знайдіть область визначення функції
- $$y = \sqrt{2 - \sqrt{5}(x + \sqrt{5})} - 2x.$$
18. Для всіх значень параметра m розв'яжіть нерівність:
 1) $3(2m - x) < mx + 1$; 2) $5(3m + x) < mx - 7$.
19. Чи існує таке значення a , щоб розв'язком системи $\begin{cases} x \leq 6, \\ x < a \end{cases}$ був проміжок:
 1) $(-\infty; 7)$; 2) $(-\infty; 6)$; 3) $(-\infty; 6]$; 4) $(-\infty; 5)$?

До розділу 2

20. Доведіть, що графік функції $y = (x - a)(x - b) - c^2$ за будь-яких значень a , b і c має з віссю x хоча б одну спільну точку.
21. Побудуйте графік функції:
 1) $y = (x^2 - 5)^2 - (x^2 - 3)^2$;
 2) $y = (x - 1)^2(x - 2) - (x - 2)^2(x - 1)$.
22. Побудуйте графік функції:
 1) $y = \frac{x^3}{(\sqrt{x})^2} - \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} - 2$;
 2) $y = x^2 - 2x - (\sqrt{2x - 4})^2$.
23. Віссю симетрії графіка функції $y = ax^2 - (a + 6)x + 9$ є пряма $x = 2$. Побудуйте графік цієї функції.
24. За якого значення a множина значень функції $y = x^2 - 2x + a$ збігається з областю визначення функції $y = \sqrt{2x - a}$?
25. Побудуйте графік функції:
 1) $y = \|x^2 - 1| - 3|$; 2) $y = \frac{|x|}{|x| - 2}$.
26. Доведіть, що нерівність $\frac{x - a}{x - b} < 0$ рівносильна нерівності $(x - a)(x - b) < 0$, а нерівність $\frac{x - a}{x - b} > 0$ рівносильна нерівності $(x - a)(x - b) > 0$.
27. Використовуючи результати попередньої задачі, розв'яжіть нерівність:
 1) $\frac{x}{x - 2} > 0$; 2) $\frac{x + 3}{x - 1} < 0$; 3) $\frac{2x - 7}{x} > 0$; 4) $\frac{2x - 7}{5x + 1} < 0$.
28. Розв'яжіть нерівність:
 1) $|x^2 + 3x| > 4$; 2) $|x^2 + 4x| < 5$;
 3) $|2x^2 + 5x - 4| \leq 3$; 4) $|2 + 4x - 3x^2| \geq 2$.

29. Знайдіть розв'язки нерівності:
 $(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 \leq 0$.
30. За яких значень a областю визначення функції
 $y = \sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + (3a-3)}$ є множина всіх чисел?
31. За яких значень m квадратний тричлен $mx^2 - 7x + 4m$ набуває від'ємних значень для будь-яких значень x ?
32. За яких значень a нерівність $\frac{x^2 + ax - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ справджується для всіх значень x ?
33. За яких значень b подвійна нерівність $-9 < \frac{3x^2 + bx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ справджується для будь-якого значення x ?
34. Скільки розв'язків має система рівнянь залежно від значень a :
- 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 2? \end{cases}$
35. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x+1| + |y+1| = 8, \\ |x+1| = 2y - 5. \end{cases}$
36. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0. \end{cases}$
37. Розв'яжіть систему рівнянь:
- 1) $\begin{cases} xy = 15, \\ x^2 + x + y^2 + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -12, \\ x^2 - x + y^2 + y = 18. \end{cases}$
38. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:
- 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 26. \end{cases}$
39. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$
40. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:
- 1) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$
41. Розв'яжіть систему рівнянь:
- 1) $\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \frac{21}{5}, \\ \frac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \frac{21}{4}. \end{cases}$

42. За допомогою заміни $y = tx$ розв'яжіть системи рівнянь, ліві частини яких є однорідними многочленами, тобто многочленами, всі доданки яких одного і того самого степеня:

$$1) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

43. Дві точки рухаються по колу. Одна з них здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає зробити за 1 хв на два оберти більше. Скільки обертів за хвилину здійснює кожна з точок?

44. Дорога від пункту A до пункту B спочатку йде вгору, а потім спускається вниз (мал.



Мал. 1

- 1). Туристи піднімаються зі швидкістю на 1 км/год меншою, ніж спускаються. На шлях від A до B вони витрачають 4 год, а на зворотний – 4 год 10 хв. З якою швидкістю туристи піднімаються вгору і з якою – спускаються, якщо довжина цього шляху від A до B дорівнює 14 км?
45. Два поїзди, довжина яких 490 м і 210 м, рівномірно рухаються назустріч один одному паралельними коліями. Машиніст першого з них побачив зустрічний поїзд на відстані 700 м, після чого через 28 с поїзди зустрілися. Визначте швидкість кожного поїзда, якщо перший з них проїжджає повз нерухомого спостерігача на 35 с довше, ніж другий.
46. З одного місця старту в одному напрямку вирушили одночасно два мотоциклісти: один зі швидкістю 80 км/год, а другий – 60 км/год. Через пів години з того самого місця і в тому самому напрямку вирушив автомобіль, який наздогнав першого мотоцикліста через 1 год 15 хв після того, як наздогнав другого. Визначте швидкість автомобіля.
47. Дві автівки вирушили одночасно з міст A і B назустріч одна одній і після зустрічі продовжили рух у тому самому напрямку. Швидкість однієї автівки була на 30 км/год більшою за швидкість другої, тому вона прибула в пункт B через 2 год після зустрічі. Друга автівка прибула в пункт A через 4,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожної автівки.
48. Два пішоходи вийшли одночасно назустріч один одному: перший із пункту A , другий – із пункту B . Перший пішохід до зустрічі пройшов на 1 км більше за другого. Через 45 хв після зустрічі перший пішохід прийшов у пункт B . Другий пішохід прибув у пункт A через 1 год 20 хв після зустрічі. Знайдіть відстань від A до B .
49. Андрій, Петро і Сергій, працюючи разом, можуть почистити відерце картоплі за 12 хв, Андрій, Петро і Юрій – за 15 хв, а Сергій і Юрій – за 20 хв. За скільки хвилин почистять картоплю хлопці, працюючи вчетирьох?
50. Тому Соєру доручили пофарбувати паркан. Якщо він робитиме це самостійно, то закінчить фарбувати на 8 год пізніше, ніж робив би це з другом Геком. Якщо фарбуватиме тільки Гек, то виконає роботу на 4,5 год пізніше, ніж це зробили б обидва хлопці разом. За який час пофарбують паркан обидва хлопці, працюючи разом?

51. Сплавили два сорти чавуну з різним відсотковим умістом хрому. Якщо одного сорту взяти в 5 разів більше, ніж другого, то відсотковий вміст хрому в сплаві буде вдвічі більший, ніж відсотковий вміст хрому в меншій із частин, що сплавляються. Якщо узяти однакову кількість обох сортів, то сплав міститиме 8 % хрому. Визначте відсотковий вміст хрому в кожному із цих двох сортів чавуну.
52. О 17 год зі свого будинку до стадіону на велосипеді виїхав уболивальник Сергій, який рухався із запланованою швидкістю і розраховував приїхати на футбольний матч о 18 год 30 хв, за пів години до його початку. О 17 год 20 хв брат Сергія Петро побачив, що Сергій забув квиток, і зателефонував йому на мобільний. Тоді Сергій миттєво розвернув велосипед і, збільшивши швидкість на 3 км/год, поїхав додому, а Петро зі швидкістю 5 км/год вийшов назустріч Сергію. Під час зустрічі Петро віддав Сергію квиток, і той з тією самою швидкістю вирушив на стадіон. У результаті Сергій приїхав на стадіон за 20 хв до початку матчу. Яка відстань від будинку Сергія до стадіону і з якою швидкістю він планував рухатися?

До розділу 3

53. *Послідовність* називають *зростаючою*, якщо кожен її член, починаючи з другого, більший за попередній. Які з послідовностей є зростаючими:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|------------------------|
| 1) $a_n = 5n - 7$; | 2) $b_n = 3 - 4n$; | 3) $c_n = (-1)^n$; |
| 4) $x_n = \frac{6}{n}$; | 5) $y_n = -\frac{8}{n}$; | 6) $a_n = n^2 + 7n$; |
| 7) $b_n = n^3$; | 8) $c_n = n^2 - 8n$; | 9) $x_n = (1 - n)^2$? |

54. *Послідовність* називають *спадною*, якщо кожен її член, починаючи з другого, менший від попереднього. Які з послідовностей є спадними:

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| 1) $c_n = \frac{1}{2}n - 8$; | 2) $a_n = 4 - 5n$; | 3) $b_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$; |
| 4) $x_n = \frac{10}{n}$; | 5) $y_n = -\frac{1}{n}$; | 6) $c_n = -n^2 - n$; |
| 7) $g_n = -(n + 1)^3$; | 8) $b_n = -2n^2 + 10n$; | 9) $x_n = \frac{1}{n^5}$? |

55. Знайдіть суму n перших членів послідовності (x_n) , якщо $x_n = \frac{1}{n(n + 1)}$.

56. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія з додатними членами. Доведіть, що сума n перших членів послідовності (x_n) , де

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}, \text{ дорівнює } \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

57. Між числами $-19,88$ і $19,91$ вставлено n таких чисел, що вони разом з даними утворюють арифметичну прогресію. За якого значення n різниця цієї прогресії належить області визначення функції $y = \sqrt{-x^2 + 7|x| - 12}$?
58. Доведіть, що коли a , b і c – три послідовних члени арифметичної прогресії, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ і $b^2 + bc + c^2$ в зазначеному порядку також утворюють арифметичну прогресію.
59. Доведіть, що коли сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то її різниця дорівнює радіусу кола, вписаного в цей трикутник.
60. Нехай дано послідовність концентричних кіл (тобто кіл, що мають спільний центр) із центром у точці $A(-6; 8)$ таких, що радіуси цих кіл R_n утворюють арифметичну прогресію з першим членом $1,6$ і різницею $0,4$. Чи існує в цій послідовності коло, що проходить через початок координат? Якщо існує, то який його номер?
61. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Відомо, що $a_{2m} + a_{2k} = 0$. Доведіть, що $a_{m+k} = 0$.
62. В арифметичній прогресії $S_m = S_n$, $m \neq n$. Доведіть, що $S_{m+n} = 0$.
63. Відомо, що за будь-якого значення n сума n перших членів деякої числової послідовності обчислюється за формулою $S_n = 2n^2 + 3n$. Доведіть, що ця послідовність є арифметичною прогресією, та знайдіть її різницю.
64. Послідовність чисел $1; 8; 22; 43; \dots$ має властивість: різниці двох сусідніх чисел (наступного й попереднього) утворюють арифметичну прогресію $7; 14; 21; \dots$. Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює 35 .
65. У зростаючій арифметичній прогресії a_1, a_2, a_3, a_4 , що складається із цілих чисел, найбільший член дорівнює сумі квадратів решти членів. Знайдіть цю прогресію.
66. Доведіть, що коли сторони трикутника утворюють геометричну прогресію, то його висоти також утворюють геометричну прогресію.
67. Послідовність (b_n) – скінченна геометрична прогресія. Доведіть, що
$$\frac{S_n - b_n}{S_n - b_1} = \frac{1}{q}.$$
68. a, b, c – послідовні члени геометричної прогресії. Доведіть, що
$$\frac{a^2 + b^2}{a} = \frac{b^2 + c^2}{c}.$$
69. Дві геометричні прогресії складаються з однакової кількості членів. Перший член і знаменник першої прогресії дорівнюють відповідно 20 і $\frac{3}{4}$, а перший член і знаменник другої відповідно дорівнюють 4 і $\frac{2}{3}$. Якщо перемножити члени цих прогресій з однаковими номе-

- рами, то сума всіх добутків дорівнюватиме $158\frac{3}{4}$. Знайдіть, скільки членів у цих прогресіях.
70. У зростаючій геометричній прогресії сума першого і останнього членів дорівнює 257, а добуток другого і передостаннього членів дорівнює 256. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо їх сума дорівнює 511.
71. Знайдіть усі прогресії, які є одночасно й арифметичними, і геометричними.
72. Сума трьох послідовних членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 15. Якщо від перших двох її членів відняти по 1, а до третього додати 1, то три отриманих числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть три початкових числа.
73. Сума трьох чисел, що утворюють геометричну прогресію, дорівнює 91. Якщо до цих чисел додати відповідно 25, 27 і 1, то отримаємо три числа, що утворять арифметичну прогресію. Знайдіть сьомий член геометричної прогресії.
74. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо до другого числа додати 2, то вони утворять арифметичну прогресію. Якщо після цього до третього числа додати 16, то прогресія знову стане геометричною. Знайдіть три початкових числа.
75. Підприємство два роки поспіль збільшувало обсяг своєї продукції на однаковий відсоток і за два роки збільшило виробництво вдвічі. Знайдіть відсоток, на який щорічно збільшувався обсяг продукції.

До розділу 4

76. На полиці стоять підряд 50 книжок, частина – з фізики, частина – з математики. Відомо, що жодна книжка з фізики не стоїть поряд з іншою книжкою з фізики, а кожна книжка з математики обов'язково стоїть поряд з іншою книжкою з математики. Якою може бути найбільша кількість книжок з фізики?
77. У квадраті 2027×2027 зафарбовано всі клітини по обох діагоналях. Навмання вибирають одну клітину. Яка ймовірність того, що вона не зафарбована?
78. Телефонний номер Миколи складається із семи різних цифр. Наталя хоче йому зателефонувати, пам'ятаючи, що всі цифри його номера різні, але забула дві останні цифри. Яка ймовірність того, що, набираючи телефонний номер навімання, Наталя з першої спроби додзвониться до Миколи?
79. З відрізків завдовжки 1; 3; 5; 7 і 9 см вибирають навімання три. З якою ймовірністю із цих трьох відрізків можна побудувати трикутник?
80. Яка ймовірність того, що в січні вибраного навімання року буде п'ять субот?
81. У шаховому турнірі брало участь 10 гросмейстерів, двоє з яких – українці. Кожен із гросмейстерів зіграв по одній партії з кожним зі

своїх суперників. Любитель шахів Олександр Семенович вирішив переглянути одну з партій турніру, вибравши її намання. Яка ймовірність того, що в цій партії гратимуть:

1) двоє українців;

2) український grosмейстер з іноземним?

82. Учениця намання вибирає одне із чисел від 1930 до 2029. Яка ймовірність того, що це число можна записати у вигляді $2^a - 2^b$, де a і b – натуральні числа?

83. Усі грані куба з ребром 1 м пофарбовано. Куб розпилено на 1000 кубиків з ребром 10 см. Із цих кубиків один вибирають намання. Яка ймовірність того, що в нього:

1) пофарбовано 3 грані;

2) пофарбовано 2 грані;

3) пофарбовано 1 грань;

4) жодну з граней не пофарбовано?

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Повторюємо алгебру за 8 клас

17. 1) $\frac{a-1}{2a+b}$; 2) $\frac{3}{xy}$; 3) $-\frac{1}{2x+6}$; 4) $-\frac{x(y+2)}{3(a+2)}$. 18. 1) $\frac{x-1}{3x+y}$; 2) $-\frac{5}{ab}$; 3) $\frac{1}{3x-6}$;
4) $-\frac{p(m+3)}{4(a+3)}$. 19. 37 років. 21. 1954 р. 22. 1576 р. 23. 1) 64; 2) 1; 3) 0,25;
4) 81; 5) -5; 6) 0,01. 24. 1) 0,2; 2) 7; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 2; 5) $-\frac{1}{9}$; 6) 1. 25. *Порада.* Після спрощень виразу отримаємо -1. 26. Ні. *Порада.* Після спрощень отримаємо 1. 27. 3. 28. 6-те місце. 29. 1) 2; 4; 2) $3 - \sqrt{17}$. 30. 3. 35. 10,4 млн га. 45. 1) 9; 2) 7; 3) -1; 11; 4) коренів немає; 5) -6; 6) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 46. 1) коренів немає; 2) 23; 3) -9; 4) -4; 10; 5) -4; 4; 6) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. 47. 1) $7\frac{59}{88}$; 2) 4; 3) 220; 4) 216.
48. 1) $4\frac{27}{40}$; 2) 5; 3) 70; 4) 125. 49. 1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-5}$; 2) $\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{7}}$. 50. 1) $\frac{\sqrt{y}+6}{\sqrt{y}}$;
2) $\frac{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$; 3) $\sqrt{6,5}$. 51. 1) 0; 3; 2) 4. 52. 1) -2; 0; 2) 1. 53. 1) -5; 4; 2) $\pm\sqrt{2}$;
3) $\pm\sqrt{3}$; ± 1 . 54. 1) -12; 13; 2) $\pm\sqrt{33}$; 3) 0; ± 2 . 55. 1) 12; 2) 64. 56. 1) 10; 2) 36.
73. $a = 2$; $b = -4$. 74. $b = 3$; $c = -18$. 75. 1) 0; 1; 2) -1; 1; 3) -1,25; 2; 4) -2.
76. 1) 0; -4; 2) -1; 1; 3) -1; $1\frac{1}{9}$; 4) -1. 77. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) -1; 3; 3) 1804 р. 78. 1) $-\frac{1}{5}$;
5; 2) $-\frac{14}{5}$; 2; 3) 4-те місце. 79. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$; $p = 1$ або $x_1 = 3$, $x_2 = -2$; $p = -1$.
80. $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; $q = -4$. 81. 1) $\frac{4}{x+1}$; 2) $\frac{x+2}{2x-1}$; 3) $\frac{x+3}{1-x}$. 82. 1) $\frac{x-3}{2}$; 2) $\frac{3x+1}{x+3}$;
3) $\frac{x-2}{1-x}$. 83. 1) -10; 2) -2,8; 3; 3) коренів немає; 4) 2. 84. 1) -2; 2) $\pm\sqrt{7}$;
3) 10; 4) коренів немає. 85. 90 км/год; 80 км/год. 86. 12 км/год; 16 км/год.
87. 1) $1 \pm \sqrt{3}$; 2) 9; 1; 3) 4. 88. 1) -1; 2) 4; 1; 3) 1. 89. 1) $-\frac{1}{16}$; 2) 0; -4. 90. 1) -4;
4; 2) 0; -9. 91. 1) -3; 1; 2) -3; 2. 92. 1) 1; 3; 2) -1; 2; $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Розділ 1

- § 1. 1.16. 1) $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$; 2) $\sqrt{7} + \sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. 1.17. 1) $\sqrt{3} - 1 > \frac{1}{\sqrt{3}+1}$;
2) $4 + \sqrt{15} = \frac{1}{4 - \sqrt{15}}$. 1.18. 1) *Порада.* $a^2 + 10a + 26 = (a + 5)^2 + 1$.
1.23. 2) *Порада.* $a^2 + b^2 - (4(a + b) - 8) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2$; 3) $m^2 + n^2 + 1 -$
 $-(m + n + mn) = \frac{(m^2 - 2mn + n^2) + (m^2 - 2m + 1) + (n^2 - 2n + 1)}{2}$. 1.24. 3) По-

рада. Доведіть, що $(a + 1)^3 - 4(a^3 + 1) = -3(a + 1)(a - 1)^2$. **1.26.** 2) Порада. $\frac{3m}{5n} + \frac{5n}{12m} - (-1) = \frac{(6m + 5n)^2}{60mn}$. **1.28.** $m^3 + n^3 > mn(m + n)$. **1.29.** Добуток першого і четвертого виразів менший від добутку другого і третього. **1.30.** Перша. **1.31.** Поліна. **1.34.** 8 днів. **1.35.** 1,5. **1.36.** 5010 грн. **1.40.** $65\frac{5}{11}$ км/год.

§ 2. **2.17.** 1) $a > 0$; 2) $a < 0$; 3) $a > 0$; 4) $a > 0$. **2.18.** 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x > 0$; 4) $x < 0$. **2.19.** 1) Так; 2) ні. **2.20.** 1) $x + 2 > y$; 2) $y - 3 < x$; 3) $-x + 1 < -y + 1$; 4) $-x < -y + 8$; 5) $-(x + 1) < -y$; 6) порівняти неможливо. **2.21.** 1) $a - 2 < b$; 2) $b + 3 > a$; 3) $-a + 2 > -b + 2$; 4) $-b - 7 < -a$; 5) $-a > -(b + 3)$; 6) порівняти неможливо. **2.22.** 1) $3,1 < 2x + 0,7 < 3,7$; 2) $3,5 < 5 - x < 3,8$; 3) $-0,6 < \frac{x}{3} - 1 < -0,5$; 4) $-13 < 2 - 10x < -10$. **2.23.** 1) $2,2 < 3a - 0,2 < 3,4$; 2) $2,8 < 4 - a < 3,2$; 3) $3,4 < \frac{a}{2} + 3 < 3,6$; 4) $4 < 10 - 5a < 6$. **2.24.** 1) $4 < \frac{20}{a} < 10$; 2) $0,1 < \frac{1}{3a + 4} < 1$. **2.25.** 1) $10 < \frac{100}{x} < 20$; 2) $0,2 < \frac{1}{2x - 3} < 1$. **2.26.** $42 < a < 50$. **2.27.** $48 < p < 51$. **2.28.** 1) $x > y$; 2) $x < y$. **2.29.** 1) $a < b$; 2) $a > b$. **2.30.** $3 < \frac{12}{7 - 3a} < 12$. **2.31.** $3 < \frac{27}{13 - 2b} < 9$. **2.32.** $\frac{6}{x} > 3$ або $\frac{6}{x} < -3$. **2.34.** 1) -3 ; 2) -4 . **2.36.** 12,25. **2.37.** Модель В ($R = 32,5$), модель А ($R = 28$). **2.38.** Говерла, Дніпро.

§ 3. **3.11.** 1) $-1 < 3a + b < 46$; 2) 45 перемог. **3.12.** 1) $-2 < 2x + y < 9$; 2) 8 медалей. **3.16.** Ні. **3.19.** 1) $2,5 < \frac{a}{b} < 10$; 2) $\frac{2}{15} < \frac{4b}{3a} < \frac{8}{15}$. **3.20.** 1) $\frac{2}{5} < \frac{x}{y} < 4$; 2) $\frac{5}{8} < \frac{5y}{2x} < \frac{25}{4}$. **3.21.** $10,8 < P < 12,4$. **3.22.** $28 < P < 34$. **3.23.** $63^\circ < \angle A < 70^\circ$. **3.26.** Порада. Використайте нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним та почленне множення нерівностей. **3.27.** Див. пораду до попереднього номера. **3.28.** Порада. Використайте $x + \frac{1}{x} \geq 2$, коли $x > 0$. **3.29.** $2810 < M < 2875$. **3.31.** 100 г 6-відсоткового і 200 г 3-відсоткового. **3.32.** $4\frac{2}{3}$. **3.34.** 1) 96,5 км/год; 2) 0,63 км/год. **3.39.** 1.

§ 4. **4.10.** -1 ; -2 . **4.11.** 1; 2; 3; 4. **4.12.** 1) Будь-яке число, крім 0; 2) будь-яке число, крім 0; 3) будь-яке число; 4) $x = 0$; 5) будь-яке число, крім 1; 6) будь-яке число; 7) немає розв'язків; 8) $x = 1$; 9) немає розв'язків. **4.13.** 1) Будь-яке число; 2) будь-яке число, крім -2 ; 3) немає розв'язків; 4) $x = -2$; 5) немає розв'язків; 6) будь-яке число. **4.14.** 1) Будь-яке число, крім -2 ; 2) немає розв'язків; 3) будь-яке число, крім 0; 4) будь-яке число, крім 0 і -1 ; 5) будь-яке число, більше за 0; 6) 1 і будь-яке число, менше від 0. **4.15.** 1) Будь-яке число, крім 3; 2) немає розв'язків; 3) будь-яке число, крім 0; 4) будь-яке число, крім 0 і 1; 5) будь-яке додатне число, крім 3; 6) будь-яке від'ємне число. **4.19.** ≈ 122 см. **4.26.** На $16\frac{2}{3}\%$.

§ 5. 5.13. 2) 18 медалей. 5.22. 60 км/год. 5.23. 6 або -6. 5.27. 1) На 5-й хв; 2) за 5 хв; 3) за 2 хв; 4) на 30 °C. 5.28. -4; 2.

§ 6. 6.25. 1) $a > 0$; 2) $a < 0$. 6.26. 1) $b > 0$; 2) $b < 0$. 6.28. 1) 1; 2; 3; 2) 1; 2; 3; 4; 5. 6.29. 1) 1; 2; 2) 1; 2; 3. 6.30. 1885 р. 6.31. 1710 р. 6.32. 1) 9; 2) 0. 6.33. 1) 5; 2) 0. 6.34. 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків. 6.35. 1), 3) Не має розв'язків; 2), 4) $(-\infty; +\infty)$. 6.36. Меншою від 12 см. 6.37. 1) $a > -7$; 2) $a > -2$. 6.38. 1) $a = 0$; 2) $a = 3$. 6.39. 1) $b < -4,5$; 2) $-4 < b < 0$ або $b > 0$. 6.40. 1) $a > -4$; 2) $a > 9$. 6.41. 48. 6.42. 51. 6.43. 41 банка. 6.44. 20 відер. 6.45. 1) Якщо $a < 0$, то $x < \frac{3}{a}$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$,

то $x > \frac{3}{a}$; 2) якщо $a < 0$, то $x \leq 0$; якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a > 0$, то $x \geq 0$; 3) якщо $a < 0$, то $x > 0$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x < 0$; 4) якщо $a < 0$, то $x < -\frac{5}{a}$; якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a > 0$, то $x > -\frac{5}{a}$. 6.48. 2 км/год. 6.51. 2376 грн. 6.54. Останнє, у неї 30 % перемог.

§ 7. 7.17. 1) 6; 7; 2) 1; 2. 7.18. 1) -5; -4; -3; -2; -1; 2) 7; 8. 7.19. 82 медалі. 7.20. 1) 1; 2) -2. 7.21. 1) 1; 2) -1. 7.22. У 2020 р. 7.27. 1), 3) Не має розв'язків; 2) $x < 2,8$; 4) x – будь-яке число. 7.28. 1) Не має розв'язків; 2) $x < 10$. 7.29. 1) $[3; 5) \cup (5; 7)$; 2) $(5; 10)$. 7.30. 1) $[2; 4) \cup (4; 6)$; 2) $(3; 8)$. 7.31. Більше за 1 см, але менше від 6 см. 7.32. 2) 26 кг. 7.33. 2) 6 грн. 7.34. $-1 < a < 0$. 7.35. $a > 3$. 7.39. 1) $15 < 2x - y < 38$; 2) $2 < \frac{x}{y} < 10$. 7.40. $m < -\frac{1}{2}$. 7.41. За 60 хв. 7.42. Немає коренів.

Вправи для повторення розділу 1

3. 2), 3). 5. 1) $m > 0$; 2) $m < 0$; 3) $m < 0$; 4) $m > 0$. 7. 1) $a^3 - b^3 \geq ab(b - a)$; 2) $m^2 + n^2 \geq \frac{1}{2}$. 8. Перша. 9. Площа квадрата більша. 14. 1) $8x > 5y$; 2) $3x > y$; 3) $-3x < -y$; 4) $-5x < -2y$. 16. 1) $2a - 10 > 0$; 2) $35 - 7a < 0$. 17. 1) $1 < |x| < 3$; 2) $0 \leq |x| < 7$. 21. 1), 3) Так; 2), 4) ні. 22. $81 < S < 100$. 23. 1) $3m + 2n > 12$; 2) $b - 3a < 0$; 3) порівняти неможливо; 4) $p - 4q < 9$. 24. 1) $5 < a^2 + 2a + 5 < 8$; 2) $-4 < x^2 - 4x < -3$; 3) $\frac{3}{20} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{3}{10}$; 4) $-6 < \frac{1}{mn} - 7 < -3\frac{2}{3}$. 25. $x > y$. 26. $20 < S < 60$. 31. 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. 32. -1 і -2. 36. Найменше число 1,6, найбільшого не існує. 44. 30. 45. 1) $[11; +\infty)$; 2) $[5; 7) \cup (7; +\infty)$. 46. Більшою за 9 см. 47. 7, 8, 9 або 10. 48. 1) $a > 1$; 2) $a < 0$ або $0 < a < \frac{1}{4}$. 49. 1) Якщо $a < -3$, то $x \leq \frac{a-5}{a+3}$; якщо $a = -3$, то x – будь-яке число; якщо $a > -3$, то $x \geq \frac{a-5}{a+3}$; 2) якщо $a < 3$, то $x > -3$; якщо $a = 3$, то розв'язків немає; якщо $a > 3$, то $x < -3$; 3) якщо $a < -1$, то $x < a - 1$;

якщо $a = -1$, то розв'язків немає; якщо $a > -1$, то $x > a - 1$; 4) якщо $a < -2$ або $a > 2$, то $x \leq \frac{1}{a+2}$; якщо $a = -2$, то розв'язків немає; якщо $-2 < a < 2$, то $x \geq \frac{1}{a+2}$; якщо $a = 2$, то x – будь-яке число. **54.** 1) 1; 2; 3; 2) натуральних розв'язків немає. **56.** 2) [8; 9]. **57.** 19. **59.** 1) $a > 5$; 2) $a \geq 2$. **60.** **56.** **61.** 1) Якщо $a \leq 2$, то розв'язків немає; якщо $a > 2$, то $2 < x < a$; 2) якщо $a \leq 6$, то $x > 6$; якщо $a > 6$, то $x > a$. **62.** $a < -0,5$ або $a > 1,5$. **63.** $0 \leq a \leq 8$.

Фіскальна математика

1. На 3 059 025 тис. грн. 2. На 915 грн. 3. 3350 грн. 4. 80 грн.
5. 1) 2000 грн; 2) 24 000 грн. 6. 1) 12 000 грн; 2) 11 880 грн.

Розділ 2

§ 8. 8.4. 29 медалей. **8.5.** У 19 років. **8.19.** 7) x – будь-яке число; 8) $(-\infty; -1) \cup (-1; 5) \cup (5; +\infty)$; 9) $[2; +\infty)$; 10) $(-2, 5; +\infty)$. **8.20.** 7) x – будь-яке число; 8) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$; 9) $[-3; +\infty)$; 10) $(3, 5; +\infty)$. **8.22.** $k = -3$, $l = 5$. **8.23.** $k = 3$, $l = -7$. **8.24.** 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$; 3) $[2; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$; 5) $[5; +\infty)$; 6) $(-\infty; 9]$. **8.30.** $c = 3$, $x_2 = 1$. **8.31.** $-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. **8.32.** Один. **8.33.** 12 628 грн. **8.37.** 50.

§ 9. 9.12. 1) (0; 3), (-3; 0); 2) (0; $\sqrt{2}$), (-2; 0); 3) (0; -1), (1; 0); 4) (2; 0). **9.13.** 1) (0; -5), (5; 0); 2) (0; 3), (-9; 0); 3) (0; 1), (-2; 0); 4) (-3; 0). **9.18.** 1) 3; 2) 2. **9.19.** 1) 2; 2) 2. **9.23.** 1) $x > 1$; 2) $-10 \leq x < -4$. **9.24.** 70 км/год і 80 км/год. **9.25.** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $c = 6$. **9.26.** 7 хв. **9.28.** Перший дріб менший.

§ 10. 10.15. 1) $x = -3$, $x = 1$; 2) $[-4; +\infty)$; 3) $-3 < x < 1$; 4) $[-1; +\infty)$. **10.16.** 1) $x = 1$, $x = 3$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $x < 1$ або $x > 3$; 4) $(-\infty; 2]$. **10.17.** 1) $x = 5$; 2) $x = -3$, $x = 0$. **10.18.** 1) $x = 3$; 2) $x = 0$, $x = 5$. **10.19.** Порада. $\frac{x+4}{x-2} = \frac{x-2+6}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{6}{x-2} = \frac{6}{x-2} + 1$. **10.20.** Порада. $\frac{x+5}{x+1} = \frac{x+1+4}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x+1} + 1$. **10.21.** 2) $a = 4$. **10.23.** $-2 \leq x < 5$. **10.24.** 10. **10.25.** 2 с. **10.30.** 1) 4; 2) 7.

§ 11. 11.20. $y = \frac{1}{12}x^2$. **11.23.** $a = -10$. **11.24.** $b = 2$. **11.25.** 1) $b = 2$; 2) $b = -10$. **11.26.** $a = -3$. **11.27.** 1) (2; 2) і (5; 5); 2) (4; -4) і (2; -2). **11.28.** 1) (0; 0) і (6; 6); 2) (2; -2) і (-5; 5). **11.30.** (2,5; 8) і (2; 7). **11.31.** (1; -5) і (0,2; -4,2). **11.32.** $\approx 10,6$ с. **11.33.** 1) 125 м; 2) піднімалася в перші 5 с, спускалася в наступні 5 с; 3) через 10 с. **11.34.** 1) 11,25 м; 2) піднімався в перші 1,5 с, спускався в наступні 1,5 с; 3) через 3 с. **11.35.** $b = -10$, $c = 32$. **11.36.** $a = 2$, $c = 5$. **11.37.** $a = 1$, $b = -6$, $c = 7$. **11.38.** 1) 25 с; 2) 50 с. **11.39.** 1) 5 с; 2) 20 с. **11.40.** $c = 7$. **11.41.** $c = 8$. **11.42.** $c > 16$. **11.43.** $c < -1$. **11.50.** 1. **11.51.** 1) -3; 3; 2) -2; 2; 3. **11.52.** 1031 особа. **11.55.** На 11.

§ 12. 12.16. 1) $(-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right]$.

12.17. 1) $(2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$; 2) $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$.

12.20. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $\emptyset$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 4) $\{4\}$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

6) $\{5\}$; 7) $(-\infty; +\infty)$; 8) $\emptyset$. 12.21. 1) Немає розв'язків; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\{3\}$;

4) $(-\infty; 0,6) \cup (0,6; +\infty)$; 5) $\{1\}$; 6) $(-\infty; +\infty)$; 7) $\emptyset$; 8) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

12.22. 1) 1; 2) 1; 2; 3; 4. 12.23. 1) 1; 2; 3; 2) -3; -2; -1; 0. 12.24. 5 мов.

12.25. 16 медалей. 12.26. 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків.

12.27. 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків. 12.29. 1) -3; 2) -2. 12.30. 1) 1;

2) 0. 12.31. 1) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; 2) $(-\infty; -2,5) \cup (0,5; +\infty)$; 3) $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$; 4) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

12.32. 1) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$; 2) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. 12.33. 1) $[-1; 2) \cup (2; 3]$;

2) $(-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$. 12.34. 30 хв. 12.35. 1) (0; 1); 2) (3; +∞).

12.36. 1) $(-\infty; -4,5]$; 2) $[8; 12)$. 12.37. 1) 0; 1; 5; 6; 2) -3; 1; 2. 12.38. 1) 0;

1; 3; 4; 5; 2) 1; 2; 3. 12.39. 1) $[3; 4) \cup (4; 5]$; 2) $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

12.40. $[3; 4)$. 12.41. (4; 5]. 12.42. 1) $-2 < a < 6$; 2) $0 < a < \frac{12}{13}$. 12.43. 1) $a < 2$ або

$a > 6$; 2) $a < 0$ або $0 < a < 0,4$, або $a > 2$. 12.44. 1) $-7 < a < 5$; 2) $a < 0$ або

$0 < a < \frac{1}{4}$. 12.45. 1) $0 < m < 28$; 2) $m < -4$. 12.48. $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. 12.49. 9 упа-

ковок. 12.54. Так.

§ 13. 13.11. 1) (2; 1), (2; -1); 2) немає розв'язків. 13.12. 1) (3; 1), (-3; 1);

2) немає розв'язків. 13.13. 1) (-1; 6); (2; 3); 3) 5 медалей. 13.14. 1) (-2; 6);

(3; 11); 3) 29 років. 13.15. 1) (-4; 0), (-1; -3); 2) (0; 2). 13.16. 1) (-6; 0),

(-1; -5); 2) (0; 3). 13.17. 1) Один розв'язок; 2) чотири розв'язки.

13.18. 1) (3; 2), (-42; 11); 2) (5; 0), (3; 4); 3) (-2; 4), (2; 2); 4) (4; 3), $\left(\frac{3}{7}; -\frac{4}{7}\right)$.

13.19. 1) (-1; -1), (5; 2); 2) (3; 2), (-1,2; 3,4); 3) (3; -1), (-3; 2); 4) (2; 3), (15;

-10). 13.20. 1) (3; 2), (-4; 9); 2) (3; 5), (5; 3), (-3; -5), (-5; -3). 13.21. 1) $\left(3,5; \frac{3}{7}\right)$;

2) (2; 5), (2; -5), (-2; 5), (-2; -5); 3) (1; 4), (-1; -4); 4) (1; 5), (-1; -5).

13.22. 1) $\left(5; \frac{1}{2}\right)$; 2) (1; 2), (1; -2), (-1; 2), (-1; -2); 3) (2; 1), (-2; -1); 4) (-3; 1),

(3; -1). 13.23. 1) (2; 3), (-2,5; -1,5); 2) (4; -1), (2; -3). 13.24. 1) (2; 1),

$\left(-1\frac{1}{3}; -2\frac{1}{3}\right)$; 2) (-1; -8), $\left(-4\frac{1}{3}; 2\right)$. 13.25. 1) (2; 1), (1; 2); 2) (3; 2), (-2; -3);

3) (1; 0), (-1,5; 2,5); 4) (2; -1), $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$. 13.26. 1) (3; 2), (-10; 15); 2) (-1,5; 0,5),

(0,5; 2,5). 13.27. 1) $a = 2$; 2) $a = -2$. 13.28. $[-11,5; -9]$. 13.29. 2 км/год.

13.31. 5000. 13.32. 1) Зошит - 9 грн, олівець - 6 грн; 2) 18 км/год; 2 км/год.

§ 14. 14.2. -7 і 4 . 14.3. 4 і -3 . 14.4. -2 і -5 . 14.5. 6 і 4 . 14.6. 20 м і 30 м. 14.7. 8 см і 10 см. 14.8. 5 см і 12 см. 14.9. 6 см і 8 см. 14.10. 5 і 10 або 30 і -15 . 14.11. 6 і 3 або 1 і -2 . 14.12. 24. 14.13. 48. 14.14. 8 с./хв і 10 с./хв. 14.15. Яна – 6 задач, Олег – 5 задач. 14.16. 5 м і 8 м або $19,5$ м і $22,5$ м. 14.17. 21 ряд. 14.18. 60 км/год і 80 км/год. 14.19. 12 км/год і 18 км/год. 14.20. 3 км/год і 12 км/год. 14.21. 28 см. 14.22. 30 см². 14.23. 6 год і 3 год. 14.24. Батько за 10 днів, син – за 15 днів. 14.25. 4 км/год і 5 км/год. 14.26. 12 км/год і 18 км/год. 14.27. 20 км/год і 2 км/год. *Порада.* Для розв’язування отриманої системи використати метод заміни змінної. 14.28. 18 км/год і 12 км/год. *Порада.* Нехай швидкість велосипедиста, що їхав з A до B , – x км/год, а велосипедисти – y км/год. За умовою задачі ма-

тимемо систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{9}{10}y = 18, \\ \frac{18}{y} - \frac{18}{x} = \frac{9}{10} - \frac{2}{5}. \end{cases}$$
 14.31. $[-3; 2) \cup (2; 3]$. 14.32. 8.

14.33. Наталка живе у третьому під’їзді на 5 поверсі, Сергій – у п’ятому під’їзді на 7 поверсі. 14.34. 2027¹⁰.

Вправи для повторення розділу 2

7. 1), 3), 4) Так; 2) ні. 8. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 6) $(2; 5) \cup (5; +\infty)$; 7) $x = 0$; 8) $x = -1$; 9) $x = 0$. 9. 1) 0; 2) 0; 3) $[0; 2]$; 4) $(0; 1]$; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{4}\right]$. 13. 1) Не існують; 2) 1; 3) 10. 14. 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2)$. 20. 1) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 2) $x = 0$; 3) немає таких проміжків; 4) $(-\infty; -3)$ і $(-3; +\infty)$; 5) $-3 < x < 0$; 6) $x < -3$ або $x > 0$. 21. $a = 2$. 28. $c = 9$. 29. $a = -2$. 30. 1) $[0; 8]$; 2) $[-27; 0]$. 31. $(-1; 4)$, $(5; 10)$. 32. $p = -5$; $q = 8$. 34. $x = 4$. 35. 1) $-0,5$; 2) -1 . 36. 1) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D = 0$; 2) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D > 0$; 3) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D < 0$; 4) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D > 0$. 38. $a > \frac{8}{7}$. 44. 1) $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$; 2) $[3; 6]$; 3) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. 45. Менша від 5 см. 46. $0 < x \leq 7$. 47. $-1,5 \leq x \leq -\frac{4}{3}$. 48. 1) $c = 16$; 2) $c = 9$. 49. 1) $[-2; -1) \cup (1; 2]$; 2) $[-3; -1) \cup (0; 2]$. 50. $a = -2$. 51. $m < -\frac{1}{7}$ або $m > 1$. 52. Якщо $a \leq -6$ або $a \geq -1$,

то $x_{1,2} = a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 7a + 6}$; якщо $-6 < a < -1$, то розв’язків немає. 53. 1) Якщо $a < 2$, то $-2 < x < -a$; якщо $a = 2$, то розв’язків немає; якщо $a > 2$, то $-a < x < -2$; 2) якщо $a < -1$, то $x \leq 2a$ або $x \geq -a - 3$; якщо $a = -1$, то x – будь-яке число; якщо $a > -1$, то $x \leq -a - 3$ або $x \geq 2a$. 54. 1) Якщо $m \leq -2$, то $x < m$; якщо $-2 < m \leq 3$, то $x \leq -2$; якщо $m > 3$, то $x \leq -2$ або $3 \leq x < m$; 2) якщо $m \leq -4$, то $-4 < x < 2$; якщо $-4 < m < 2$, то $m \leq x < 2$;

якщо $m \geq 2$, то система не має розв'язків. **58.** 1) (2; 5); 2) система не має розв'язків. **59.** 1) (6; 2), (2; 6); 2) (3; -4), (-3; 4), (-4; 3), (4; -3). **60.** 1) (3; 2), (-3; 2), (-3; -2), (3; -2); 2) (3; -2), (-3; -2); 3) (2; -1), (-2; 1); 4) (6; 10). **61.** 1) (4; 1); 2) (-1; 0), (0; -1), (1; 0). **62.** 1) (-1; -2), (-2,5; -1); 2) (3; 1), (-3; -1). **63.** 1) (6; 2), $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (2; 1), $\left(\frac{126}{11}; -\frac{54}{11}\right)$. **64.** 5 і 2 або -2 і -5. **65.** 5 і 7. **66.** 4 см і 8 см. **67.** 4 і 5 або 15 і $\frac{4}{3}$. **68.** 12 см і 9 см. **69.** 4 см і 5 см. **70.** 35. **71.** 28 см або 26 см. **72.** 90 км/год і 80 км/год. **73.** 8. **74.** 7. **75.** 25 або 85. **76.** 100×80 м. **77.** 20 год і 30 год. **78.** 20 іграшок.

Розділ 3

§ 15. **15.8.** 2) 10 м. **15.11.** 1) $y_9 = 7$; 2) $y_3 = y_6 = -29$; 3) не є членом послідовності; 4) $y_{12} = 79$. **15.12.** 1) $x_{10} = 69$; 2) не є членом послідовності; 3) $x_2 = 5$; 4) $x_1 = x_3 = 6$. **15.13.** 1) $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$, $c_4 = -7$, $c_5 = -12$; 2) $c_1 = -3$, $c_2 = -3$, $c_3 = -3$, $c_4 = -3$, $c_5 = -3$; 3) $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 4$, $c_5 = 5$; 4) $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_3 = -5$, $c_4 = 1,25$, $c_5 = -0,3125$. **15.14.** 1) $y_1 = 5$, $y_2 = 3$, $y_3 = -1$, $y_4 = -9$, $y_5 = -25$; 2) $y_1 = 16$, $y_2 = 1$, $y_3 = 8$, $y_4 = \frac{1}{16}$, $y_5 = 64$. **15.15.** 1) $a_1 = 25$; 2) $b_4 = 32$; 3) $c_{2k} = 1$, де k – натуральне число; 4) $y_2 = y_3 = 6$. **15.16.** 1) $x_1 = -1$; 2) $a_4 = -21$. **15.19.** -7. **15.20.** (0; 2), (0; -2), (-3; -1), (3; 1). **15.21.** Через 5 місяців. **15.24.** (1; 2; 3); (-1; -2; -3).

§ 16. **16.7.** 1) 673; 2) 2019 р. **16.17.** 1) 5; 2) $4\frac{1}{3}$; $5\frac{2}{3}$; 3) 4; 5; 6. **16.18.** 18; 21; 24; 27. **16.19.** 1) $a_n = -x + 3xn$; 2) $a_n = \frac{m-2}{m} + \frac{1}{m}n$. **16.20.** 1) $a_1 = 39$, $d = -2$; 2) $a_1 = 5$, $d = 2$. **16.21.** 1) $c_1 = -45$, $d = 3$; 2) $c_1 = -1$, $d = -3$. **16.22.** 1) $C = 50 + 8s$; 2) так; 3) 146 грн; 4) 15 км. **16.23.** 1) $C = 800 + 600n$; 2) так; 3) 3800 грн; 4) 8 діб. **16.24.** 1) Так; 2) ні. **16.25.** 1) Ні; 2) так. **16.26.** 32. **16.27.** 27. **16.28.** 1) $d = 5$; 2) 69. **16.29.** $x = 1$ або $x = 6$. **16.30.** $y_1 = -1$ або $y = 4$. **16.31.** $m = 1$. **16.32.** 1) -37; 2) 2,5. **16.33.** 1) -25; 2) 5,4. **16.37.** 1) -1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2) $1 \pm \sqrt{2}$. **16.38.** Так. **16.39.** $[-10; 0) \cup (0; 1]$. **16.40.** 96 000 грн.

§ 17. **17.13.** 1) 42 653; 2) 12 425; 3) 12 402; 4) 1635. **17.14.** 1) 12 810; 2) 123 525. **17.15.** 1) -44; 2) 98. **17.16.** 1) -275; 2) 192,5. **17.17.** 4. **17.18.** 4. **17.19.** 100. **17.20.** -100. **17.21.** 15. **17.22.** 6000 МВт. **17.23.** -197,4. **17.24.** 484. **17.25.** 1) 15; 2) -3 або 6. **17.26.** 1) 12; 2) -37. **17.27.** 610. **17.28.** 6 год. **17.29.** 66 990 грн. **17.32.** $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. **17.34.** 10 Ом. **17.37.** 6 або $-\frac{6}{19}$.

§ 18. **18.13.** 1) 24; 2) 1992 р. **18.17.** $x_1 = 12$, $q = 4$. **18.18.** 1) $q = 2$ або $q = -2$; 2) $q = 3$; 3) $q = \frac{3}{4}$ або $q = -\frac{3}{4}$; 4) $q_1 = -1$. **18.19.** 1) $q = 3$ або $q = -3$; 2) $q = \frac{1}{3}$. **18.20.** 2,5; -5; 10; -20; 40. **18.21.** $-\frac{5}{4}$; 5; -20; 80; -320; 1280. **18.22.** $x_5 = \frac{1}{32}$. **18.23.** $b_1 = \frac{1}{1000}$ або $b_1 = -\frac{1}{1000}$. **18.24.** 1) $c_1 = 1000$; 2) $c_6 = 64$ або $c_6 = -64$.

18.25. 10 клітин; 40 клітин; 320 клітин. 18.26. 1) 864 клієнти; 2) так.
 18.27. 1) 72 900 грн; 2) ні. 18.28. 1) 1; 8; 64 або 1; -8; 64; 2) 1; 4; 16; 64.
 18.29. $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_5 = 8$. 18.30. 4; 2; 1, якщо $x = 1$, і -9; -24; -64, якщо $x = -12$. 18.31. -1; 1; -1, якщо $y = -1$. 18.34. 8 см². 18.36. 1) $a_1 = 3$, $d = 2$;
 2) $a_1 = 5$, $d = -1$. 18.38. -10,008. 18.40. На 0,85 м. 18.43. $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

§ 19. 19.1. 1) 136 763,1 грн; 168 505,82 грн; 2) 36 763,1 грн; 68 505,82 грн.
 19.2. 1) 250 880 грн; 314 703,87 грн; 2) 50 880 грн; 114 703,87 грн.
 19.3. 80 000(1,09ⁿ - 1); 15 048 грн; 23 602,32 грн. 19.4. $\approx 80\,000$ грн.
 19.5. 58 000 грн. 19.6. 80 000 грн. 19.7. 1) 1825,35 грн; 2) 1665,94 грн.
 19.8. 1) 47 550 осіб; 2) 45 219 осіб. 19.9. 20 %. 19.10. 6. 19.11. (4; 2), (-4; -2).
 19.12. Купити у другого продавця 2200 кг пластмаси. 19.13. (0; 1), (0; -1).
Порада. Доведіть, що для $x > 0$ та $x \leq -2$ рівняння розв'язків у цілих числах не має.

§ 20. 20.10. 211. 20.11. 67,1 см. 20.12. 1) 625 лайків; 2) 1015 лайків.
 20.13. 1) 189; 2) -409,5. 20.14. 1) 682; 2) 183. 20.15. 1) $1\frac{127}{128}$; 2) 605; 3) -10;
 4) 635. 20.16. 1) $1\frac{364}{729}$; 2) 2295; 3) -104; 4) 364. 20.17. 1) 5; 2) 27. 20.18. 1) 3;
 2) 81. 20.19. 1) $\frac{1}{x^2 - 1}$; 2) $-\frac{1}{x + 1}$. 20.20. 781 або -521. 20.21. 364 або 182.
 20.22. Чоловік, котрий запропонував угоду. Багатій отримав 3 000 000 крб.,
 а заплатив 10 737 418,23 крб. 20.23. 728. 20.24. -22. 20.25. 1) Павло отримав на 27 000 грн більше прибутку, ніж Марічка; 2) Марічка отримала на 5000 грн більше прибутку, ніж Павло. 20.26. 1) 6; 2) 7; 3) 5. 20.28. -31,2.
 20.29. 252. 20.30. 20 000 грн під 10 % річних і 40 000 грн під 7 % річних.
 20.32. (2; -2); (-2; 2). 20.33. У салоні «Гамма», 5510 грн. 20.34. Легковик за 2 год, мотоцикліст за 4 год.

§ 21. 21.11. 1) $10(\sqrt{2} + 1)$; 2) $\frac{3\sqrt{2} + 4}{4}$. 21.12. 1) $\frac{9(\sqrt{3} + 1)}{2}$; 2) $\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$.
 21.13. 1) 160; 2) $-20\frac{1}{4}$. 21.14. 1) $121\frac{1}{2}$; 2) 9. 21.15. 1) $\frac{1}{1-x}$; 2) $\frac{x}{1+x^2}$.
 21.16. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{33}$; 3) $3\frac{1}{9}$; 4) $7\frac{13}{33}$; 5) $\frac{19}{30}$; 6) $7\frac{25}{99}$. 21.17. 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{2}{11}$; 3) $5\frac{2}{9}$;
 4) $4\frac{14}{33}$; 5) $\frac{49}{90}$; 6) $4\frac{28}{99}$. 21.18. 1) $\frac{1}{9}$; 2) -8. 21.19. 1) $\frac{4}{5}$; 2) -40. 21.20. $10\frac{2}{3}$
 або $2\frac{2}{3}$. 21.21. 4,5. 21.22. 6a см. 21.23. 2c² см². 21.24. 1) $3\frac{41}{150}$; 2) $6\frac{133}{330}$.
 21.25. 1) $4\frac{173}{300}$; 2) $5\frac{101}{3300}$. 21.26. 1) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{7}{9}$; $\frac{1}{2}$. 21.28. 45 045.
 21.29. 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(-\infty; 1]$. 21.30. $x_2 = 25$. 21.31. 14 875 осіб. 21.32. 1.

Вправи для повторення розділу 3

3. 7. 4. $x_{22} = -\frac{1}{3}$. 5. $b_1 = -1$. 6. 1) $a_n = 2n - 1$; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = n^2$;
 4) $a_n = 2^n$; 5) $a_n = (-1)^n$; 6) $a_n = (-1)^n + 2$. 7. 5. 14. 1) -5,5; 2) -200. 15. 27.

16. $a_{45} = -0,1$. 17. Так; середня сторона дорівнює 13 см. 19. 16; 25 або 4; 1. 25. 1) -420; 2) -615. 26. 1) 3; 2) 7. 27. 9 днів. 28. $a_1 = 8$, $d = 2$. 29. 1) 81; 2) 105. 30. 3750. 31. 1) $p^{\frac{n-n^2}{2}}$; 2) $c^{\frac{n^2+n}{2}}$. 36. 2; -4; 8; -16; 32. 37. $-\frac{8}{3}$. 38. $c_8 = \frac{1}{5}$, $c_9 = \frac{1}{25}$. 39. -18. 40. 9. 41. 1; -3; 9, якщо $x = 2$. 42. 1) $b_1 = 1,2$, $q = 2$; 2) $b_1 = 3$, $q = 2$. 43. Можуть, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}}$. 44. 1) 194 490 грн; $\approx 253\ 340$ грн; 2) 44 940 грн; $\approx 103\ 340$ грн. 45. $\approx 45\ 320$ грн. 46. 1) 7290 хворих; 2) ≈ 5905 хворих. 50. 3069 см². 51. 781,2. 52. 61. 53. 765. 54. 510 або $15\frac{15}{16}$. 55. $b_1 = 3$, $q = -2$, $n = 6$. 56. 1; 4; 16; 64; 256; 1024. 57. О 10 год 30 хв. 62. *Порада.* $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \dots\right)$. 63. Так, якщо $-1 < q < 0$. 64. $21\frac{1}{3}$. 65. 1) $\frac{19}{33}$; 2) $\frac{11}{45}$; 3) $4\frac{17}{99}$; 4) $5\frac{2}{15}$. 66. 1) $10\frac{1}{8}$; 2) $3\frac{3}{8}$. 67. 240. 68. 1) 162 або -81; 2) 341 $\frac{1}{3}$ або $204\frac{4}{5}$. 69. $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$.

Розділ 4

§ 22. 22.9. 720. 22.10. 120. 22.11. 6. 22.12. 16. 22.13. 20. 22.14. 1680. 22.15. 36. 22.16. 8. 22.17. 1) 60; 2) 125. 22.18. 1) 20; 2) 25. 22.19. 6. 22.20. 120. 22.21. 600. 22.22. 18. 22.23. 8. 22.24. 45. 22.25. 240. 22.26. 48. 22.27. 24. 22.29. (1; 1), (2; 0). 22.30. 1) -2,5; 0; 1; 2) -2; 2; 3. 22.32. 28,8 км/год. 22.33. 12.

§ 23. 23.12. Ні. 23.13. 1) $\approx 0,44$; 2) $\approx 0,23$; 3) $\approx 0,75$; 4) $\approx 0,91$. 23.14. 1) $\approx 0,09$; 2) $\approx 0,25$; 3) $\approx 0,56$; 4) $\approx 0,77$. 23.15. 1), 3), 4) Випадкова; 2) вірогідна; 5) неможлива. 23.19. 1) 9; 2) 2400. 23.20. 1) 495; 2) 700. 23.21. Або 21, або 22, або 23. 23.22. Від 55 до 59 пострілів. 23.25. (-2,5; -1). 23.26. -10,008. 23.28. 5539 грн. 23.29. 3,5.

§ 24. 24.13. $\frac{3}{4}$. 24.14. $\frac{4}{15}$. 24.15. $\frac{8}{15}$. 24.16. 1) $\frac{12}{365}$; 2) $\frac{7}{365}$; 3) $\frac{71}{365}$. 24.17. 1) $\frac{2}{61}$; 2) $\frac{11}{366}$; 3) $\frac{35}{366}$. 24.18. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$. 24.19. 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$. 24.20. 1) $\frac{1}{9}$; 2) 0; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{1}{12}$. 24.21. 1) 4; 2) 8; 3) менше від 12; 4) менше від 24. 24.22. 1) 4; 2) 2; 3) більше за 6; 4) більше за 2. 24.23. Зелених - 2 ручки, червоних - 5. 24.24. 10 червоних хустин і 2 картаті. 24.25. 6 червоних тро-янд. 24.26. 3 або 4 вареники. 24.27. $\frac{1}{3}$. 24.28. $\frac{1}{2}$. 24.29. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$. 24.34. (2; -2), (-2; 2). 24.35. 72 км/год. 24.36. $c < 0$.

§ 25. 25.9. 15 км/год. 25.10. У Люксембурзі - 15 євро, в Угорщині - 7812,5 форинтів, в Україні - 573,13 грн. 25.11. 8 чисел.

§ 26. 26.15. 1) $a = 5$; 2) $Me = 9$. 26.12. 1) $b = 5$; 2) $Me = 10$. 26.17. 1) $\bar{x} = 2$; $Mo = 3$; 3) $Me = 2$. 26.18. 1) $\bar{x} = 1,55$; 2) $Mo = 2$; 3) $Me = 2$. 26.25. 12,2 км.

26.26. -4; 0; 3,2; 4.

Вправи для повторення розділу 4

4. 120. 5. 8. 6. 625. 7. 1) 25; 2) 20. 8. 756. 9. 56. 10. 60. 11. 48. 12. 96.
 13. 1) 10 000; 2) 5040. 14. 15 120. 15. 28. 20. 1) 0,03; 2) 0,45; 3) 0,25; 4) 0,75.
 22. 1) 126; 2) 225. 23. 8 партій. 27. $\frac{b-1}{a+b-1}$. 28. Рівномовірні події. 29. 1) $\frac{1}{25}$;
 2) 0; 3) $\frac{12}{25}$; 4) $\frac{13}{25}$; 5) $\frac{1}{5}$; 6) $\frac{9}{25}$; 7) $\frac{9}{25}$; 8) $\frac{16}{25}$; 9) $\frac{8}{25}$; 10) $\frac{13}{25}$. 30. $\frac{5}{18}$. 31. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{30}$;
 3) 0. 32. 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$. 33. 6. 46. 1) 2; 2) 6. 47. 1) 1,75; 2) 1; 3) 2.

Задачі підвищеної складності

2. 2) *Порада.* $x^2 - 4x + 5 - 2|x - 2| = (x - 2)^2 - 2|x - 2| + 1 = (|x - 2| - 1)^2 \geq 0$. 5. *Порада.* Розгляньте різницю квадратів лівої і правої частин. 6. 1) *Порада.* Замініть останнє число 6 у лівій частині нерівності на 9. 7. *Порада.* Розгляньте $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121}$ і $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{119}{120}$. Доведіть, що $x > y$, а тому $x^2 > xy$. 8. 33 учні, з яких 1 володіє трьома іноземними мовами. 9. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. 10. Наприклад $\frac{16}{25}$. Існує безліч таких чисел. 11. Правильний. 12. $x = y = z = 1$. 14. 1) 4; 2) 27. *Порада.* Використайте нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним. 15. 1) $\frac{1}{6}$. *Порада.* $\frac{9+y^2}{2} \geq 3y$. Тому $\frac{y}{9+y^2} \leq \frac{1}{6}$;
 2) $\frac{1}{12}$. 16. *Порада.* $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + y + z + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leq 7 + 2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2}\right)$. 17. $x \leq 3(2 - \sqrt{5})$. 18. 1) Якщо $m < -3$, то $x < \frac{6m-1}{m+3}$; якщо $m = -3$, то x - будь-яке число; якщо $m > -3$, то $x > \frac{6m-1}{m+3}$;
 2) якщо $m < 5$, то $x < \frac{15m+7}{m-5}$; якщо $m = 5$, то нерівність не має розв'язків; якщо $m > 5$, то $x > \frac{15m+7}{m-5}$. 19. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) так. 20. *Порада.* $y = x^2 - (a+b)x + (ab - c^2)$. Дискримінант квадратного тричлена $x^2 - (a+b)x + (ab - c^2)$ дорівнює $(a-b)^2 + 4c^2$. 23. *Порада,* $a = 2$. 24. $a = 2$.
 27. 1) $x < 0$ або $x > 2$; 2) $-3 < x < 1$; 3) $x < 0$ або $x > 3,5$; 4) $-\frac{1}{5} < x < 3,5$.
 28. 1) $x < -4$ або $x > 1$; 2) $-5 < x < 1$; 3) $-3,5 \leq x \leq -\frac{5+\sqrt{33}}{4}$ або $\frac{\sqrt{33}-5}{4} \leq x \leq 1$; 4) $x \leq -\frac{2}{3}$ або $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$, або $x \geq 2$. 29. $-3 \leq x \leq -1$.

30. $a \geq 1$. 31. $m < -\frac{7}{4}$. 32. $-6 < a < 2$. 33. $-3 < b < 6$. 34. 1) Якщо $|a| > 2\sqrt{2}$,

система не має розв'язків; якщо $|a| = 2\sqrt{2}$, система має єдиний розв'язок; якщо $|a| < 2\sqrt{2}$, система має два розв'язки; 2) якщо $|a| < 2$, система не має розв'язків; якщо $|a| = 2$, система має два розв'язки; якщо $|a| > 2$, система має

чотири розв'язки. 35. (2; 4), (-4; 4). 36. (1; 2), $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$. 37. 1) Система

не має розв'язків; 2) (4; -3), (3; -4). 38. 1) (2; 1), (1; 2); 2) (3; 1), (-1; -3).

39. $x = y = 4$, $z = -4$. 40. 1) (3; 1), (1; 3). *Порада.* Заміна $x + y = u$, $xy = v$;

2) (3; 5), (5; 3). 41. 1) (3; 1), (-3; -1), $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$;

2) (2; 1), (1; 2), (-1; -2), (-2; -1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$,

$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$. 42. 1) (3; 2), (-3; -2), $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) (2; 1),

(-2; -1). 43. 6 і 4. 44. 3 км/год і 4 км/год. 45. 10 м/с і 15 м/с. 46. 100 км/год.

47. 90 км/год, 60 км/год. 48. 7 км. 49. 10 хв. 50. 6 год. 51. 11 %; 5 %.

52. 18 км; 12 км/год. *Порада.* Нехай x км/год – запланована Сергієм швидкість, а y км – відстань від дому до стадіону. Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 1,5x, \\ \frac{1}{3} + \frac{x}{3(x+8)} + \frac{y - \frac{5x}{3(x+8)}}{x+3} = 1\frac{2}{3}. \end{cases}$$

53. 1), 5), 6), 7), 9). 54. 2), 4), 6), 7), 9). 55. $\frac{n}{n+1}$. 57. 9; 10; 11; 12. 60. Так;

$n = 22$. 63. $d = 4$. 64. 101. 65. -1; 0; 1; 2. 69. 7. 70. 9. 71. Тільки послідовності однакових, відмінних від нуля, чисел. 72. 3; 5; 7. 73. 5103 або $\frac{7}{81}$. 74. 1;

3; 9 або $\frac{1}{9}$; $-\frac{5}{9}$; $\frac{25}{9}$. 75. $\approx 41,4\%$. 76. 17. 77. $\left(\frac{2026}{2027}\right)^2$. 78. $\frac{1}{20}$. 79. 0,3. 80. $\frac{3}{7}$.

81. 1) $\frac{1}{45}$; 2) $\frac{16}{45}$. 82. 0,02. 83. 1) $\frac{1}{125}$; 2) $\frac{12}{125}$; 3) $\frac{48}{125}$; 4) $\frac{64}{125}$.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання \ № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	Б	Г	Г	А	Б	В	А	Б	Г	В	Б	1-Б, 2-Г, 3-А
2	В	Б	А	Г	В	Б	В	Г	А	В	Б	Б	1-В, 2-Г, 3-Б
3	Б	Б	Г	А	В	Г	А	В	Б	А	Г	Г	1-В, 2-А, 3-Г
4	Б	А	В	Б	Г	А	В	В	Б	Б	В	Г	1-В, 2-Г, 3-А
5	В	Г	Б	А	Б	В	В	А	Г	В	А	Г	1-А, 2-Г, 3-В

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аргумент

Вершина параболи

Вибірка

Випадкова подія

Випадковий дослід

Відносна частота значення вибірки

– – події

Вірогідна подія

Вісь симетрії параболи

Властивості арифметичної прогресії

– геометричної прогресії

– нерівностей зі змінними

– функції $y = ax^2$, $a \neq 0$

– $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

– числових нерівностей

Генеральна сукупність

Графік функції

Графічний спосіб розв'язування

систем рівнянь

Доведення нерівностей

Заміна змінних у системах рівнянь

Змінна залежна

– незалежна

Знаки нестрогої нерівності

– строгої нерівності

Знаменник геометричної прогресії

Класичне означення ймовірності

Комбінаторика

Комбінаторне правило добутку

Комбінаторне правило суми

Ліва частина нерівності

Лінійні нерівності з однією змінною

Математична статистика

Медіана вибірки

Мода вибірки

Найбільше значення функції

Найменше значення функції

Найпростіші перетворення графіків функцій

Наступний член послідовності

Неможлива подія

Нерівність квадратна

– Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним

– лінійна

– неправильна

– нестрога

– правильна

– строга

– числова

Нерівності рівносильні

Нескінченна числова послідовність

Нулі функції

Об'єднання числових проміжків

Область визначення функції

– значень функції

Обсяг вибірки

Оцінювання значення виразу

Перетин числових проміжків

Подання статистичних даних

у вигляді графіків

– діаграм

– таблиць

Подвійні числові нерівності

Полігон частот

Попередній член послідовності

Послідовність

Почленне додавання нерівностей

– множення нерівностей

Права частина нерівності

Прогресія арифметична

– геометрична

Проміжок знакосталості функції

– зростання функції

– спадання функції

Рекурентна формула

Рівноймовірні події

Рівняння першого степеня з двома змінними

Різниця арифметичної прогресії

Розв'язок нерівності

– системи нерівностей

– – рівнянь

Розмах вибірки

Середнє арифметичне

– геометричне

– значення вибірки

– – статистичних вимірювань

Система лінійних нерівностей

Скінченна числова послідовність

Спосіб додавання

– підстановки ,

Статистична ймовірність події

Статистичні дані

Сума нескінченної геометричної прогресії

Теорія ймовірностей

Формула n -го члена арифметичної прогресії

– – – геометричної прогресії

– – – послідовності

– складних відсотків

– суми n перших членів арифметичної прогресії

– – – – геометричної прогресії

Функція (функціональна залежність)

– зростаюча на проміжку

– квадратична

– спадна на проміжку

Частота події

Числові послідовності

– проміжки

Члени послідовності

ЗМІСТ

Шановні дев'ятикласниці та дев'ятикласники!	3
Шановні вчительки та вчителі!	4
Шановні дорослі!	4

Повторюємо алгебру за 8 клас

Раціональні вирази	5
Квадратні корені. Дійсні числа	8
Квадратні рівняння	10

Розділ 1. Нерівності

§ 1. Числові нерівності. Доведення нерівностей	14
§ 2. Основні властивості числових нерівностей	22
§ 3. Почленне додавання і множення числових нерівностей	30
§ 4. Нерівності зі змінними. Розв'язок нерівності	36
§ 5. Числові проміжки	38
§ 6. Лінійні нерівності з однією змінною. Рівносильні нерівності	44
§ 7. Системи лінійних нерівностей з однією змінною, їх розв'язування	52
Домашня самостійна робота № 1 (§§ 1–7)	59
Завдання для перевірки знань до §§ 1–7	61
Вправи для повторення розділу 1	62
Головне в розділі 1	68
Фіскальна математика	70

Розділ 2. Квадратична функція

§ 8. Функції. Область визначення, область значень і графік функції	72
§ 9. Властивості функції	81
§ 10. Найпростіші перетворення графіків функцій	91
§ 11. Функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, її графік і властивості	101
Домашня самостійна робота № 2 (§§ 8–11)	111
Завдання для перевірки знань до §§ 8–11	113
§ 12. Квадратна нерівність	114
§ 13. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними	123
§ 14. Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель текстових і прикладних задач	133
Домашня самостійна робота № 3 (§§ 12–14)	138
Завдання для перевірки знань до §§ 12–14	140
Вправи для повторення розділу 2	141
Головне в розділі 2	149

Розділ 3. Числові послідовності

§ 15. Числові послідовності	152
§ 16. Арифметична прогресія, її властивості. Формула n -го члена арифметичної прогресії	157
§ 17. Сума n перших членів арифметичної прогресії	165

§ 18. Геометрична прогресія, її властивості. Формула n -го члена геометричної прогресії	170
§ 19. Формула складних відсотків	178
§ 20. Сума n перших членів геометричної прогресії	182
§ 21. Нескінченна геометрична прогресія та її сума	188
<i>Домашня самостійна робота № 4 (§§ 15–21)</i>	194
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 15–21</i>	195
<i>Вправи для повторення розділу 3</i>	196
<i>Головне в розділі 3</i>	201
Жінки в науці: Як хвилі океану допомагають вивчати математику . . .	203

Розділ 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики

§ 22. Комбінаторні задачі. Комбінаторні правила суми і добутку	204
§ 23. Випадкова подія. Частота та ймовірність випадкової події	209
§ 24. Класичне означення ймовірності	218
§ 25. Початкові відомості про статистику. Статистичні дані. Способи подання даних та їх обробки	225
§ 26. Вибірка. Числові характеристики вибірки. Графічне подання інформації про вибірку	231
<i>Домашня самостійна робота № 5 (§§ 22–26)</i>	239
<i>Завдання для перевірки знань до §§ 22–26</i>	241
<i>Вправи для повторення розділу 4</i>	242
<i>Головне в розділі 4</i>	247
Завдання для перевірки знань за курс алгебри 9 класу	249
Задачі підвищеної складності	249
Відповіді та поради до вправ	259
Предметний покажчик	271