

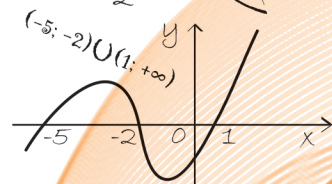
Аркадій Мерзляк
Михайло Якір

АЛГЕБРА 9

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$



$$\left(\frac{m+n}{m^2+mn} - \frac{m}{mn+n^2} \right) : \left(\frac{n^2}{m^2-mn} + \frac{1}{m+n} \right) = \frac{n-m}{n}$$

$$f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{1}{x-2}$$

$$y = kf(x) \quad u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$y = -x^2 + 1; \quad y = -(x+4)^2;$$

$$y = -x^2 - 2; \quad y = -(x+1)^2 - 1;$$

$$y = -(x-2)^2; \quad y = -(x-3)^2 + 4.$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{(m-5)^2}}{m^2-10m+25}$$

$$y = f(-x)$$

$$f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$$

$$\frac{a+9}{4a} + \frac{5a-3}{8a} \quad \boxed{S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}}$$

$$\begin{cases} 8-7x > 3x-2, \\ -2(3x-2,6) \leq -2(-2,6) \end{cases}$$

$$y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{D}{4b}$$

$$f(x) = 4 - 12x - 0,3x^2$$

$$4(x-2)-1 < 2(2x-9)$$

$$4x-8-1 < 4x-18;$$

$$4x-4x < 9-18;$$

$$0x < -9. \quad \frac{5a-6b}{ab} + \frac{5b-5c}{bc}$$

$$y = |x-2|; \quad y = |x+3|-1; \quad y = |x-1|+x.$$

Аркадій **Мерзляк**
Михайло **Якір**

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

Інтерактивний електронний додаток до підручника:

<https://qrua.xyz/alg9>



Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2026

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 27.01.2026 № 110)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає модельній навчальній програмі
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П.,
Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для 9 кл. закладів заг. серед. освіти /
А. Г. Мерзляк, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2026. —
272 с. : іл.
ISBN 978-966-474-394-2.

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-474-394-2

© А. Г. Мерзляк, М. С. Якір, 2026
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет,
художнє оформлення, 2026

ВІД АВТОРІВ

Любі дев'ятикласники та дев'ятикласниці!

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати алгебру. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Найважливіші відомості виділено **жирним шрифтом**, *жирним курсивом* і *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і важкі задачі (особливо ті, що позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевірте себе». Після кожного завдання в тестовій формі розміщені добірки задач, які допоможуть вам у підготовці до перевірки знань.

У рубриці «Говоримо та пишемо українською правильно» наведено приклади правильної математичної мови.

Частина пунктів підручника завершується рубрикою «Учимося робити нестандартні кроки». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні алгебраїчні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Вони допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не тільки в математиці, а й у житті.

У рубриці «Коли зроблено уроки» подано оповідання з історії алгебри, зокрема про внесок української ученої спільноти в розвиток цієї науки.

Бажаємо успіху!

Шановні колеги та колежанки!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книжці дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Вправи, позначені піктограмою , на ваш розсуд можна використовувати для роботи в парах або групах.

Підручник підтримано інтерактивним електронним додатком, перехід до частин якого забезпечують QR-коди біля заголовків відповідних пунктів, а також біля завдань «Перевірте себе» в тестовій формі» (два QR-коди на два варіанти підсумкових завдань).

В електронному додатку є рубрика «Жива Алгебра», яка допомагає учням візуалізувати математичні поняття, такі як графіки функцій, геометричні фігури, алгебраїчні рівняння тощо. Вона дозволяє експериментувати з параметрами, бачити зміни в реальному часі та краще розуміти складні теми. Це робить навчання більш цікавим і ефективним. Відповідні місця в підручнику позначено піктограмою

ЖА

Також в електронному додатку представлені розробки уроків, на яких діти за допомогою програми *GeoGebra* вчаться будувати графіки різноманітних функцій.

Поновити в пам'яті матеріал, вивчений у попередні роки, допоможуть посилання на підручники в електронному вигляді або QR-коди:

- 7 клас: <https://qrua.xyz/7dd3zh>
- 8 клас: <https://books.gymnasia.com.ua/qr/8a2mo3>

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.



Умовні позначення

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^*	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	закінчення доведення теореми, розв'язування прикладу;
	запитання для самоперевірки;
	рубрика «Вправи»;
	домашня практична робота;
	вправи для роботи в парах або групах;
	рубрика «Вправи для повторення»;
	рубрика «Готуємося до вивчення нової теми»;
	рубрика «Учимося застосовувати математику»;
	рубрика «Учимося робити нестандартні кроки»;
	рубрика «Говоримо та пишемо українською правильно»;
	рубрика «Коли зроблено уроки»;
	завдання «Перевірте себе» в тестовій формі»;
	завдання «Готуємося до перевірки знань»;
	рубрика «Головне в параграфі»;
	інтерактивні ілюстрації «Жива Алгебра»;
	QR-код для переходу до інтерактивного електронного додатка.

Блакитним кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **пурпуровим** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

§ 1 НЕРІВНОСТІ

У цьому параграфі ви дізнаєтеся, у якому випадку число a вважають більшим (меншим), ніж число b ; вивчите властивості числових нерівностей; дізнаєтеся, що називають розв'язком нерівності з однією змінною, розв'язком системи нерівностей з однією змінною. Ви навчитеся оцінювати значення виразів, доводити нерівності, розв'язувати лінійні нерівності та системи лінійних нерівностей з однією змінною.

1. Числові нерівності



На практиці вам часто доводиться порівнювати величини. Наприклад, площа спортивного залу більша за площу класної кімнати, площа України (603,7 тис. км²) більша за площу Польщі (312,7 тис. км²), висота гори Роман-Кош (1545 м) менша від висоти гори Говерли (2061 м), відстань від Києва до Харкова (450 км) дорівнює 0,011 довжини екватора.



$$S_{\text{Україна}} > S_{\text{Польща}}$$

Результати таких порівнянь можна записувати у вигляді числових нерівностей, використовуючи знаки $>$, $<$.

Якщо число a більше за число b , то пишуть: $a > b$; якщо число a менше від числа b , то пишуть: $a < b$.

Очевидно, що $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Справедливість цих нерівностей впливає з правил порівняння дійсних чисел, які ви вивчали в попередніх класах.

Проте числа можна порівнювати не лише за допомогою правил, які було вивчено раніше. Інший спосіб, більш універсальний, заснований на таких очевидних міркуваннях: якщо різниця двох чисел є додатною, то зменшуване більше за від'ємник, якщо ж різниця від'ємна, то зменшуване менше від від'ємника.

Ці міркування підказують, що зручно прийняти таке означення.

Означення:

Число a вважають більшим за число b , якщо різниця $a - b$ є додатним числом. Число a вважають меншим від числа b , якщо різниця $a - b$ є від'ємним числом.

Це означення дає змогу задачу про порівняння двох чисел звести до задачі про порівняння їхньої різниці з нулем.

Наприклад, щоби порівняти значення виразів $\frac{2}{2 + \sqrt{3}}$ та

$2 - \sqrt{3}$, розглянемо їхню різницю:

$$\frac{2}{2 + \sqrt{3}} - (2 - \sqrt{3}) = \frac{2 - (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - (4 - 3)}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

Оскільки $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} > 0$, то $\frac{2}{2 + \sqrt{3}} > 2 - \sqrt{3}$.

Зауважимо, що різниця чисел a і b може бути або додатною, або від'ємною, або рівною нулю, тому для будь-яких чисел a і b справедливе одне й тільки одне з таких співвідношень: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Якщо $a > b$, то точка, яка зображає число a на координатній прямій, лежить праворуч від точки, яка зображає число b (рис. 1.1).

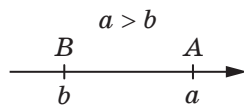


Рис. 1.1



Рис. 1.2

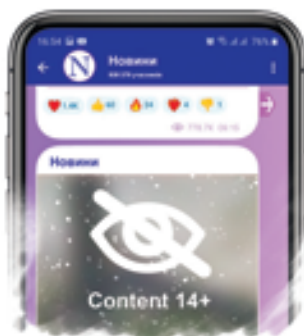


Рис. 1.3

У повсякденному житті ми часто користуємося висловками на кшталт «не більше», «не менше» або схожими за змістом:

- на виконання тесту відводиться не більше 30 хвилин;
- на атракціон допускають дітей не нижчих від 120 см (рис. 1.2);
- це відео доступне користувачам не молодшим за 14 років (рис. 1.3).

У математиці для вислову «не більше» використовують знак $\leq$ (читають: «менше або дорівнює»), а для вислову «не менше» — знак $\geq$ (читають: «більше або дорівнює»).

Якщо $a < b$ або $a = b$, то є правильною нерівність $a \leq b$.

Якщо $a > b$ або $a = b$, то є правильною нерівність $a \geq b$.

Наприклад, нерівності $7 \leq 7$, $7 \leq 15$, $-3 \geq -5$ є правильними. Зауважимо, що, наприклад, нерівність $7 \leq 5$ є неправильною.

Знаки $<$ і $>$ називають знаками **строкої нерівності**, а знаки $\leq$ і $\geq$ називають знаками **нестрокої нерівності**.

ПРИКЛАД 1. Доведіть, що при будь-яких значеннях a є правильною нерівність $(a + 1)(a + 2) > a(a + 3)$.

Розв'язання. Для розв'язання достатньо показати, що при будь-якому значенні a різниця лівої та правої частин даної нерівності є додатною. Маємо:

$$(a + 1)(a + 2) - a(a + 3) = a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - 3a = 2. \quad \blacktriangleleft$$

У таких випадках говорять, що **доведено нерівність**

$$(a + 1)(a + 2) > a(a + 3).$$

ПРИКЛАД 2. Доведіть нерівність $(a - 3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$, де a — будь-яке дійсне число.

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої та правої частин даної нерівності:

$$(a-3)^2 - (2a^2 - 6a + 10) = a^2 - 6a + 9 - 2a^2 + 6a - 10 = -a^2 - 1 = -a^2 + (-1).$$

При будь-якому значенні a маємо: $-a^2 \leq 0$. Сума недодатного й від'ємного чисел є число від'ємне. Отже, $-a^2 + (-1) < 0$.

Звідси випливає, що $(a-3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$ при будь-якому значенні a . $\blacktriangleleft$

ПРИКЛАД 3. Доведіть нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої та правої частин даної нерівності. Маємо:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Вираз $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ набуває невід'ємних значень при будь-яких невід'ємних значеннях змінних a і b . Отже, нерівність, що доводиться, є правильною. $\blacktriangleleft$

Зауважимо, що вираз $\sqrt{ab}$ називають **середнім геометричним** чисел a і b .

Отже, ми довели, що *середнє арифметичне двох невід'ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного*.

ПРИКЛАД 4. Доведіть, що $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ при будь-яких значеннях a і b .

Розв'язання. Маємо:

$$a^2 - ab + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

Оскільки $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0$ і $\frac{3}{4}b^2 \geq 0$ при будь-яких значеннях

a і b , то $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ при будь-яких значеннях a і b .

Отже, $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ при будь-яких значеннях a і b . $\blacktriangleleft$



1. У якому разі число a вважають більшим за число b ? меншим від числа b ? **2.** Як розташована на координатній прямій точка, яка зображає число a , відносно точки, яка зображає число b , якщо $a > b$? **3.** Який символ використовують для вислову «не більше» та як цей символ читають? **4.** Який символ використовують для вислову «не менше» та як цей символ читають?



ВПРАВИ

1.1.° Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $a - b = 0,4$; 3) $a - b = 0$;
2) $a - b = -3$; 4) $a + 5 = b$.

1.2.° Яке із чисел, x або y , є більшим, якщо:

- 1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$; 3) $x - 6 = y$?

1.3.° Відомо, що $m < n$. Чи може різниця $m - n$ дорівнювати числу:

- 1) 4,6; 2) -5,2; 3) 0?

1.4.° Відомо, що $b > c$. Чи може різниця $b - c$ дорівнювати числу:

- 1) -1,6; 2) 2,7?

1.5.° Як розташована на координатній прямій точка $A(a)$ відносно точки $B(b)$, якщо:

- 1) $a - b = 2$; 3) $a - b = 0$;
2) $a - b = -6$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

1.6.° На координатній прямій позначено числа a , b і c (рис. 1.4). Як ви думаєте, чи є правильною нерівність:

- 1) $a < b$; 2) $c \geq 0$; 3) $b > c$; 4) $a > c$?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

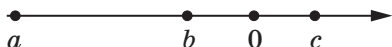


Рис. 1.4



Рис. 1.5

1.7.° На координатній прямій позначили числа m , n , p і k (рис. 1.5). Порівняйте числа:

- 1) m і k ; 2) p і n ; 3) n і k ; 4) p і m .

1.8.° Чи можуть одночасно виконуватися нерівності:

- 1) $a > b$ і $a < b$; 2) $a \geq b$ і $a \leq b$?

1.9.° Як ви думаєте, чи можна стверджувати, що при будь-якому значенні змінної є правильною нерівність:

- 1) $a^2 > 0$; 3) $-a < 0$;
2) $a^2 + 2 > 0$; 4) $(a + 2)^2 \geq 0$?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

1.10.° Порівняйте значення виразів $4(b + 1)$ і $b - 2$ при значенні b , що дорівнює: 1) -1; 2) 0; 3) 3. Як ви думаєте, чи можна стверджувати, що при будь-якому значенні b

значення виразу $4(b+1)$ більше за відповідне значення виразу $b-2$? Обговоріть це питання у класі.

1.11.° Доведіть, що при будь-якому значенні змінної є правильною нерівність:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $6x - 5 < 3(2x - 1)$; | 5) $x(x + 6) - x^2 < 2(3x + 1)$; |
| 2) $(a + 3)(a + 1) > a(a + 4)$; | 6) $(y + 5)(y - 2) \geq 3y - 10$; |
| 3) $(c - 4)(c + 4) > c^2 - 20$; | 7) $a(a - 2) \geq -1$; |
| 4) $3(b - 4) + 2b < 5b - 10$; | 8) $(b + 7)^2 > 14b + 40$. |

1.12.° Доведіть, що при будь-якому значенні змінної є правильною нерівність:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $5a + 12 > 5(a + 2)$; | 4) $y(y + 8) < (y + 4)^2$; |
| 2) $(p - 3)(p + 4) < p(p + 1)$; | 5) $(2a - 5)^2 \leq 6a^2 - 20a + 25$; |
| 3) $(x + 1)^2 > x(x + 2)$; | 6) $a^2 + 4 \geq 4a$. |

1.13.* Як ви думаєте, чи є правильним твердження:

- | | |
|--|--|
| 1) якщо $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$; | 3) якщо $\frac{a}{b} > 1$, то $a > b$; |
| 2) якщо $a < 1$, то $\frac{2}{a} > 2$; | 4) якщо $a^2 > 1$, то $a > 1$? |

Обговоріть це питання у класі.

1.14.* Доведіть нерівність:

- 1) $(3a + 2)(2a - 4) - (2a - 5)^2 > 3(4a - 12)$;
- 2) $(a - b)(a + 5b) \leq (2a + b)(a + 4b) + ab$;
- 3) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
- 4) $a(a - 3) > 5(a - 4)$;
- 5) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
- 6) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

1.15.* Доведіть нерівність:

- 1) $9x^2 - 6xy + 4y^2 \geq 0$;
- 2) $28a - 32 \leq 7a^2 - 4$;
- 3) $3(b - 1) < b(b + 1)$.

1.16.* Порівняйте суму квадратів двох довільних чисел та їхній подвоєний добуток.

1.17.** Дано три послідовних натуральних числа. Порівняйте:

- 1) квадрат середнього із цих чисел і добуток двох інших;
- 2) подвоєний квадрат середнього із цих чисел і суму квадратів двох інших.

1.18.** Порівняйте суму квадратів двох додатних чисел і квадрат їхньої суми.

1.19.** Як зміниться — збільшиться чи зменшиться — правильний дріб $\frac{a}{b}$, де $a > 0$, $b > 0$, якщо його чисельник і знаменник збільшити на одне й те саме число?

1.20.** Як зміниться — збільшиться чи зменшиться — неправильний дріб $\frac{a}{b}$, де $a > 0$, $b > 0$, якщо його чисельник і знаменник збільшити на одне й те саме число?

1.21.** Доведіть, що сума будь-яких двох взаємно обернених додатних чисел не менша від 2.

1.22.** Доведіть, що сума будь-яких двох взаємно обернених від'ємних чисел не більша за -2 .

1.23.** Чи є правильною дана нерівність при будь-яких значеннях a і b :

$$1) \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} > 1; \quad 2) \frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} > -1?$$

1.24.** Доведіть, що при всіх значеннях змінної є правильною нерівність:

$$1) \frac{a^2}{a^4 + 1} \leq \frac{1}{2}; \quad 2) \frac{(5a + 1)^2}{5} \geq 4a.$$

1.25.** Доведіть нерівність:

- 1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geq 0$;
- 2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;
- 3) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 4(a + b + c)$;
- 4) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq 4ab$.

1.26.** Доведіть нерівність:

- 1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
- 2) $x^2 + y^2 + 10 \geq 6x - 2y$.

1.27.* Як ви думаєте, чи виконується нерівність $\frac{a^2 + 4}{2} \geq \sqrt{a^2 + 3}$ при всіх значеннях a ?

Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

1.28.* Доведіть, що при всіх значеннях змінної є правильною нерівність $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$.

 Якщо вам сподобалося розв'язувати задачі 1.25–1.28, то радимо прочитати оповідання «Про деякі способи доведення нерівностей» на с. 29–31, а також узяти участь

у роботі над проєктом «Доведення нерівностей». Зміст проєкту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проєкті, ви можете знайти на с. 258.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.29. Що можна сказати про знаки чисел a і b , якщо:

- 1) $ab > 0$; 2) $\frac{a}{b} < 0$; 3) $a^2b > 0$; 4) $a^2b < 0$?

1.30. Поясніть, чому при будь-яких значеннях змінної (чи змінних) є правильною нерівність:

- 1) $a^2 \geq 0$; 4) $a^2 - 4a + 4 \geq 0$;
2) $a^2 + 1 > 0$; 5) $a^2 + b^2 + 2 > 0$;
3) $(a + 1)^2 \geq 0$; 6) $\sqrt{a^2 + 3} > 0$.

1.31. Спростіть вираз $(x - 4)(x + 4) - (x - 8)^2$ та знайдіть його значення при $x = 124$.

Отримане вами число дорівнює номеру року, у якому було офіційно відкрито та освячено Національний художній музей України, колекція якого нині нараховує понад 40 тисяч експонатів і є найбільш репрезентативним зібранням українського мистецтва у світі.



Національний художній музей України
(м. Київ)



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

- 1.32. Усі натуральні числа від 1 до 1000 включно розбили на дві групи: парні числа та непарні числа. У якій із груп сума всіх цифр, використаних для запису чисел, є більшою та на скільки?

2. Основні властивості числових нерівностей



У житті ми часто порівнюємо різні величини: зріст, масу, швидкість, ціну тощо. Наш досвід показує, що коли маса одного предмета більша за масу іншого, то й після додавання до обох однакової маси співвідношення між ними не зміниться. А якщо обидва числа помножити на додатне число, — більшим залишиться те саме, що й раніше.



У цьому пункті ми запишемо ці інтуїтивно зрозумілі речі мовою математики. Ви ознайомитеся з **основними властивостями числових нерівностей** — правилами, які допоможуть вам розв'язувати найрізноманітніші задачі.

Теорема 2.1:

Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.

Доведення. Оскільки за умовою $a > b$ і $b > c$, то різниці $a - b$ і $b - c$ є додатними числами. Тоді додатною буде їхня сума $(a - b) + (b - c)$. Маємо: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Отже, різниця $a - c$ є додатним числом, тому $a > c$. ◀

Аналогічно можна довести таку властивість: **якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.**

Теорему 2.1 можна проілюструвати геометрично (рис. 2.1): якщо на координатній прямій точка A (a) лежить праворуч від точки B (b), а точка B (b) — праворуч від точки C (c), то точка A (a) лежить праворуч від точки C (c).

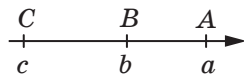


Рис. 2.1

Теорема 2.2:

Якщо $a > b$ і c — будь-яке число, то $a + c > b + c$.

Доведення. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + c)$. Маємо: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Оскільки за умовою $a > b$, то різниця $a - b$ є додатним числом. Отже, $a + c > b + c$. ◀

Аналогічно можна довести таку властивість: **якщо $a < b$ і c — будь-яке число, то $a + c < b + c$.**

Оскільки віднімання можна замінити додаванням ($a - c = a + (-c)$), то теорему 2.2 можна сформулювати так:

якщо до обох частин правильної нерівності додати або від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок:

Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в другу, замінивши знак доданка на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Доведення. Нехай нерівність $a > b + c$ є правильною. Віднімемо від обох її частин число c . Отримаємо: $a - c > b + c - c$, тобто $a - c > b$. ◀

Теорема 2.3:

Якщо $a > b$ і c — додатне число, то $ac > bc$. Якщо $a > b$ і c — від'ємне число, то $ac < bc$.

Доведення. Розглянемо різницю $ac - bc$. Маємо:

$$ac - bc = c(a - b).$$

За умовою $a > b$, отже, різниця $a - b$ є додатним числом.

Якщо $c > 0$, то добуток $c(a - b)$ є додатним числом, отже, різниця $ac - bc$ є додатною, тобто $ac > bc$.

Якщо $c < 0$, то добуток $c(a - b)$ є від'ємним числом, отже, різниця $ac - bc$ є від'ємною, тобто $ac < bc$. ◀

Аналогічно можна довести таку властивість: *якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$. Якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$.*

Оскільки ділення можна замінити множенням $\left(\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}\right)$,

то теорему 2.3 можна сформулювати так:

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність;

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та замінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок:

Якщо $ab > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доведення. Поділимо обидві частини нерівності $a > b$ на додатне число ab . Отримаємо правильну нерівність $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$,

тобто $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Звідси $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ◀

Звернемо увагу, що коли з формулювання наслідку вилучити умову $ab > 0$, тобто вимогу, щоб числа a і b мали

однакові знаки, то з нерівності $a > b$ може не впливати нерівність $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Дійсно, нерівність $5 > -3$ є правильною, проте нерівність $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ є неправильною.

У теоремах цього пункту йшлося про строгі нерівності. Аналогічні властивості притаманні й нестрогим нерівностям. Наприклад, якщо $a \geq b$ і c — будь-яке число, то $a + c \geq b + c$.



1. Яке із чисел — a або c — більше, якщо відомо, що $a > b$ і $b > c$? 2. Сформулюйте теорему про додавання до обох частин нерівності одного й того самого числа. 3. Сформулюйте наслідок із теореми про додавання до обох частин нерівності одного й того самого числа. 4. Сформулюйте теорему про множення обох частин нерівності на одне й те саме число. 5. Сформулюйте наслідок із теореми про множення обох частин нерівності на одне й те саме число.



ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Пригадайте. Нерівності, що містять дробові числа, читаємо так само, як і нерівності з натуральними числами, наприклад: $\frac{7}{8} < \frac{11}{12}$ — сім восьмих менше від одинадцяти дванадцятих (або сім восьмих менше ніж одинадцять дванадцятих).

Подвійну нерівність читаємо, починаючи із середнього числа, наприклад: $-5 > -\frac{1}{2}b > -6$ — мінус одна друга «бе» менше від мінус п'яти, але більше за мінус шість; $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ — «ікс» більше ніж одна третя, але менше ніж одна друга.



ВПРАВИ

2.1.° Відомо, що $a > 6$. Як ви думаєте, чи є правильною нерівність:

1) $a > 4$;

2) $a \geq 5,9$;

3) $a > 7$?

Обговоріть це питання у класі.

2.2.° Відомо, що $a < b$ і $b < c$. Яке з тверджень є правильним:

- 1) $a > c$; 2) $a = c$; 3) $c > a$?

2.3.° Як ви вважаєте, яке із чисел — a чи 0 — більше, якщо:

- 1) $b \leq -1$ і $a < b$; 2) $b \leq a$ і $b > 0,1$?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

2.4.° Порівняйте числа m і 0 , якщо:

- 1) $n < m$ і $n \geq 3$; 2) $n > m$ і $n < -4$.

2.5.° Порівняйте числа m і n , якщо:

- 1) різниці $m - 9$ і $9 - n$ є додатними числами;
2) різниця $8 - m$ є додатним числом, а різниця $10 - n$ — від'ємним числом.

2.6.° Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $a - c < 0$ і $c - b < 0$; 2) $a - 5 > 0$ і $b - 3 < 0$.

2.7.° Запишіть нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) до обох частин нерівності $-3 < 4$ додамо число 5 ; число -2 ;
2) від обох частин нерівності $-10 < -6$ віднімемо число 3 ; число -4 ;
3) обидві частини нерівності $7 > -2$ помножимо на число 5 ; на число -1 ;
4) обидві частини нерівності $12 < 18$ поділимо на число 6 ; на число -2 .

2.8.° Відомо, що $a > b$. Запишіть нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) до обох частин даної нерівності додамо число 8 ;
2) від обох частин даної нерівності віднімемо число -6 ;
3) обидві частини даної нерівності помножимо на число 12 ;
4) обидві частини даної нерівності помножимо на число $-\frac{1}{3}$;
5) обидві частини даної нерівності поділимо на число $\frac{2}{7}$;
6) обидві частини даної нерівності поділимо на число -4 .

2.9.° Відомо, що $b > a$, $c < a$ і $d > b$. Порівняйте числа:

- 1) a і d ; 2) b і c .

2.10.° Розташуйте в порядку зростання числа a , b , c і 0 , якщо $a > b$, $0 < b$ і $0 > c$.

2.11.° Відомо, що $a > 4$. Порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $a - 3$; 2) $2 - a$; 3) $(a - 3)(a - 2)$;

$$4) \frac{(a-4)(a-2)}{3-a}; \quad 5) (1-a)^2 (4-a).$$

2.12.* Відомо, що $-2 < b < 1$. Порівняйте з нулем значення виразу:

$$\begin{array}{lll} 1) b+2; & 3) 1-b; & 5) (b+2)(b-4)^2; \\ 2) b-2; & 4) (b-1)(b-3); & 6) (b-3)(b+3)(b-2)^2. \end{array}$$

2.13.* Дано: $a > b$. Порівняйте:

$$\begin{array}{ll} 1) a+9 \text{ і } b+9; & 5) -40b \text{ і } -40a; \\ 2) b-6 \text{ і } a-6; & 6) \frac{a}{20} \text{ і } \frac{b}{20}; \\ 3) 1,8a \text{ і } 1,8b; & 7) 2a-3 \text{ і } 2b-3; \\ 4) -a \text{ і } -b; & 8) 5-8a \text{ і } 5-8b. \end{array}$$

2.14.* Дано: $-3a > -3b$. Порівняйте:

$$\begin{array}{ll} 1) a \text{ і } b; & 4) -\frac{5}{9}b \text{ і } -\frac{5}{9}a; \\ 2) \frac{2}{7}a \text{ і } \frac{2}{7}b; & 5) 3a+2 \text{ і } 3b+2; \\ 3) b-4 \text{ і } a-4; & 6) -5a+10 \text{ і } -5b+10. \end{array}$$

2.15.* Відомо, що $1 \leq m < 2$. Які з нерівностей є правильними:

$$\begin{array}{ll} 1) -1 \leq -m < -2; & 3) -1 \geq -m > -2; \\ 2) -2 < -m \leq -1; & 4) -2 > -m \geq -1? \end{array}$$

2.16.* Відомо, що $-3 < n \leq 4$. Які з нерівностей є правильними:

$$\begin{array}{ll} 1) -4 \leq -n < 3; & 3) 3 > n \geq -4; \\ 2) 3 < -n \leq -4; & 4) 3 \geq n > -4? \end{array}$$

2.17.* Відомо, що $a > b$. Розташуйте в порядку спадання числа $a+7$, $b-3$, $a+4$, $b-2$, b .

2.18.* Дано: $a < b$. Порівняйте:

$$\begin{array}{ll} 1) a-5 \text{ і } b; & 3) a+3 \text{ і } b-2. \\ 2) a \text{ і } b+6; & \end{array}$$

2.19.* Порівняйте числа a і b , коли відомо, що:

$$\begin{array}{ll} 1) a > c \text{ і } c > b+3; & 2) a > c \text{ і } c-1 > b+d^2, \\ \text{де } c \text{ і } d \text{ — деякі числа.} & \end{array}$$

2.20.* Порівняйте числа a і 0 , якщо:

$$\begin{array}{ll} 1) 7a < 8a; & 3) -6a > -8a; \\ 2) \frac{a}{2} < \frac{a}{3}; & 4) -0,02a > -0,2a. \end{array}$$

2.21.* Дано: $a > -2$. Доведіть, що:

$$\begin{array}{ll} 1) 7a+10 > -4; & 2) -6a-3 < 10. \end{array}$$

2.22.* Дано: $b \leq 10$. Доведіть, що:

- 1) $5b - 9 \leq 41$; 2) $1 - 2b > -21$.

2.23.** Як ви думаєте, чи є правильним твердження:

- 1) якщо $a > b$, то $a > -b$;
2) якщо $a > b$, то $2a > b$;
3) якщо $a > b$, то $2a + 1 > 2b$;
4) якщо $a > b + 2$ і $b - 3 > 4$, то $a > 9$;
5) якщо $a > b$, то $ab > b^2$;
6) оскільки $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$;
7) оскільки $5 > 3$, то $5(a^2 + 1) > 3(a^2 + 1)$?

Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

2.24.** Запишіть нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) обидві частини правильної нерівності $a > 2$ помножимо на a ;
2) обидві частини правильної нерівності $b < -1$ помножимо на b ;
3) обидві частини правильної нерівності $m < -3$ помножимо на $-m$;
4) обидві частини правильної нерівності $c > -4$ помножимо на c .

2.25.* Запишіть нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) обидві частини правильної нерівності $a < -a^2$ поділимо на a ;
2) обидві частини правильної нерівності $a > 2a^2$ поділимо на a ;
3) обидві частини правильної нерівності $a^3 > a^2$ поділимо на $-a$.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

2.26. Щоденник дорожчий за ручку на 20 грн. Відомо, що ручка коштує не більше ніж 40 грн. Ціна щоденника та ручки дорівнює цілому числу гривень.

- 1) Яку найбільшу ціну може мати щоденник?
2) Якщо ціну на кожний із цих товарів підвищили на 10 грн, то як змінилася різниця в цінах?
3) Якщо обидва товари продають зі знижкою 50 %, то яка буде різниця між їхніми цінами?

2.27. У Дмитра у 2 рази більше марок, ніж у Надії, у Надії — у 2 рази більше марок, ніж у Михайла. Якому з наведених чисел може дорівнювати кількість марок, що має Дмитро?

- 1) 18; 2) 22; 3) 24; 4) 30.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.28. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a^2 + b^2}{2a^2 + 2ab} + \frac{b}{a + b};$$

$$3) \frac{c + 1}{3c} : \frac{c^2 - 1}{6c^2};$$

$$2) \frac{a^2 + 9}{a^2 - 9} - \frac{a}{a + 3};$$

$$4) \frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - n^2} : (m + n).$$

2.29. Моторний човен за один і той самий час може проплисти 48 км за течією річки або 36 км проти течії. Яка власна швидкість човна, якщо швидкість течії становить 2 км/год?

3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу



Розглянемо приклади.

1) Якщо з першого поля зібрали не менше ніж 40 т жита, а з другого поля — не менше ніж 45 т, то очевидно, що з двох полів разом зібрали не менше ніж 85 т жита.

2) Якщо довжина прямокутника не більша за 70 см, а ширина — не більша за 40 см, то зрозуміло, що його площа не більша за 2800 см².

Висновки із цих прикладів є інтуїтивно очевидними. Їхню правильність підтверджують такі теореми.

Теорема 3.1 (про почленне додавання нерівностей):

Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доведення. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + d)$. Маємо:
 $(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d)$.

Оскільки $a > b$ і $c > d$, то різниці $a - b$ і $c - d$ є додатними числами. Отже, різниця, що розглядається, є додатною, тобто $a + c > b + d$. ◀

Аналогічно можна довести таку властивість: **якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.**

Нерівності $a > b$ і $c > d$ (або $a < b$ і $c < d$) називають **нерівностями однакового знака**, а нерівності $a > b$ і $c < d$ (або $a < b$ і $c > d$) — **нерівностями протилежних знаків**.

Говорять, що нерівність $a + c > b + d$ отримано з нерівностей $a > b$ і $c > d$ шляхом почленного додавання.

Теорема 3.1 означає, що *при почленному додаванні правильних нерівностей однакового знака результатом є правильна нерівність того самого знака*.

Зазначимо, що теорема 3.1 справедлива й у разі почленного додавання трьох і більше нерівностей. Наприклад, якщо $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ і $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Теорема 3.2 (про почленне множення нерівностей):

Якщо $a > b$, $c > d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac > bd$.

Доведення. Розглянемо різницю $ac - bd$. Маємо:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

За умовою $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Отже, різниця, що розглядається, є додатною. Із цього випливає, що $ac > bd$. ◀

Аналогічно можна довести таку властивість: *якщо $a < b$, $c < d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac < bd$.*

Говорять, що нерівність $ac > bd$ отримано з нерівностей $a > b$ і $c > d$ шляхом почленного множення.

Теорема 3.2 означає, що *при почленному множенні правильних нерівностей однакового знака, у яких ліві та праві частини — додатні числа, результатом є правильна нерівність того самого знака*.

Звернемо увагу: якщо з формулювання теореми 3.2 вилучити вимогу, щоб a, b, c, d були додатними числами, то з нерівностей $a > b$ і $c > d$ може не впливати нерівність $ac > bd$. Справді, розглянемо дві правильні нерівності $-2 > -3$ і $4 > 1$. Помноживши почленно ці нерівності, отримаємо неправильну нерівність $-8 > -3$.

Зауважимо, що теорема 3.2 справедлива й у разі почленного множення трьох і більше нерівностей. Наприклад, якщо $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — додатні числа, причому $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, то $a_1 a_2 a_3 > b_1 b_2 b_3$.

Наслідок:

Якщо $a > b$ і a, b — додатні числа, то $a^n > b^n$, де n — натуральне число.

Доведення. Запишемо n правильних нерівностей $a > b$:

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \dots \\ a > b \end{array} \right\} n \text{ нерівностей}$$

Оскільки a і b — додатні числа, то можемо перемножити почленно n записаних нерівностей. Отримаємо: $a^n > b^n$. ◀

Зазначимо, що всі розглянуті властивості нерівностей є правильними й у тому випадку, коли нерівності є нестрогими:

якщо $a \geq b$ і $c \geq d$, то $a + c \geq b + d$;

якщо $a \geq b$, $c \geq d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac \geq bd$;

якщо $a \geq b$ і a, b — додатні числа, то $a^n \geq b^n$, де n — натуральне число.

Ви знаєте, що значення величин, які є результатом вимірювань, не є точними. Вимірювальні прилади дають змогу лише встановити, між якими числами знаходиться точне значення величини. Ці числа називають **межами значення величини**.

Нехай, наприклад, у результаті вимірювання ширини x і довжини y прямокутника було встановлено, що $2,5 \text{ см} < x < 2,7 \text{ см}$ і $4,1 \text{ см} < y < 4,3 \text{ см}$. Тоді за допомогою теореми 3.2 можна оцінити площу прямокутника. Маємо:

$$\begin{array}{r} \times \quad \quad \quad 2,5 \text{ см} < x < 2,7 \text{ см} \\ \quad \quad \quad 4,1 \text{ см} < y < 4,3 \text{ см} \\ \hline 10,25 \text{ см}^2 < xy < 11,61 \text{ см}^2. \end{array}$$

Узагалі, якщо відомо значення меж величин, то, використовуючи властивості числових нерівностей, можна знайти межі значення виразу, який містить ці величини, тобто **оцінити його значення**.

Такі оцінки часто застосовують у фізиці, економіці та будівництві, наприклад, щоб визначити можливий діапазон витрат матеріалів, допустимі коливання температури чи приблизну вартість покупки.

ПРИКЛАД 1. Дано: $6 < a < 8$ і $10 < b < 12$. Оцініть значення виразу:

$$1) a + b; \quad 2) a - b; \quad 3) ab; \quad 4) \frac{a}{b}; \quad 5) 3a - \frac{1}{2}b.$$

Розв'язання. 1) Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$\begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ + \quad 10 < b < 12 \\ \hline 16 < a + b < 20. \end{array}$$

2) Помноживши кожен частину нерівності $10 < b < 12$ на -1 , отримуємо: $-10 > -b > -12$, тобто $-12 < -b < -10$. Ураховуючи, що $a - b = a + (-b)$, далі маємо:

$$\begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ + \quad -12 < -b < -10 \\ \hline -6 < a - b < -2. \end{array}$$

3) Оскільки $a > 6$ і $b > 10$, то a і b набувають додатних значень. Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримуємо:

$$\begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ \times \quad 10 < b < 12 \\ \hline 60 < ab < 96. \end{array}$$

$$4) \text{ Оскільки } 10 < b < 12, \text{ то } \frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}, \text{ тобто } \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}.$$

Ураховуючи, що $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, маємо:

$$\begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ \times \quad \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10} \\ \hline \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}. \end{array}$$

5) Помножимо кожен частину нерівності $6 < a < 8$ на 3 , а кожен частину нерівності $10 < b < 12$ на $-\frac{1}{2}$.

Отримуємо дві правильні нерівності:

$$18 < 3a < 24 \text{ і } -5 > -\frac{1}{2}b > -6.$$

Додамо отримані нерівності:

$$\begin{array}{r} 18 < 3a < 24 \\ + \quad -6 < -\frac{1}{2}b < -5 \\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19. \end{array}$$

Відповідь: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$;

3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$. ◀

ПРИКЛАД 2. Доведіть, що $\sqrt{24} + \sqrt{47} < 12$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{24} < 5$ і $\sqrt{47} < 7$, то

$$\sqrt{24} + \sqrt{47} < 5 + 7 = 12. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3. Порівняйте значення виразів 5^{10} і 3^{15} .

Розв'язання. Маємо: $5^{10} = (5^2)^5 = 25^5$; $3^{15} = (3^3)^5 = 27^5$.

Застосувавши наслідок із теореми про почленне множення нерівностей, отримуємо: $25^5 < 27^5$.

Отже, $5^{10} < 3^{15}$. ◀



1. Сформулюйте теорему про почленне додавання нерівностей. **2.** Поясніть, які нерівності називають нерівностями однакового знака, а які — нерівностями протилежних знаків. **3.** Сформулюйте теорему про почленне множення нерівностей. **4.** Сформулюйте наслідок з теореми про почленне множення нерівностей.



ВПРАВИ

3.1.^о Запишіть нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) додамо почленно нерівності $10 > -6$ і $8 > 5$;
- 2) перемножимо почленно нерівності $2 < 7$ і $3 < 4$;
- 3) перемножимо почленно нерівності $1,2 > 0,9$ і $5 > \frac{1}{3}$.

3.2.° Запишіть нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) додамо почленно нерівності $-9 < -4$ і $-6 < 4$;
2) перемножимо почленно нерівності $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$ і $24 < 27$.

3.3.° Дано: $-3 < a < 4$. Оцініть значення виразу:

- 1) $2a$; 3) $a + 2$; 5) $3a + 1$; 7) $-4a$;
2) $\frac{a}{3}$; 4) $a - 1$; 6) $-a$; 8) $-5a + 3$.

3.4.° Дано: $2 < b < 6$. Оцініть значення виразу:

- 1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b - 6$; 3) $2b + 5$; 4) $4 - b$.

3.5.° Відомо, що $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$. Оцініть значення виразу:

- 1) $3\sqrt{7}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{7} + 1,3$.

 **3.6.°** Дано: $5 < a < 6$ і $4 < b < 7$. Оцініть значення виразу:

- 1) $a + b$; 2) ab .

3.7.° Відомо, що $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ і $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$. Оцініть значення виразу:

- 1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{15}$.

3.8.° Дано: $2 < x < 4$. Оцініть значення виразу $\frac{1}{x}$.

3.9.° Відомо, що $0,2 < a < 3$. Оцініть значення виразу $\frac{1}{a}$.

3.10.° Оцініть значення виразу $a - b$, якщо:

- 1) $4 < a < 5$ і $3 < b < 6$; 2) $-1 < a < 2$ і $-5 < b < -4$.

3.11.° Оцініть значення виразу $m - n$, якщо:

- 1) $6 < m < 10$ і $7 < n < 12$; 2) $-8 < m < -6$ і $-3 < n < 0$.

3.12.° Оцініть середнє арифметичне значень a і b , якщо відомо, що $2,5 < a < 2,6$ і $3,1 < b < 3,2$.

 **3.13.°** Оцініть периметр рівнобедреного трикутника з основою a см і бічною стороною b см, якщо $10 < a < 14$ і $12 < b < 18$.

3.14.° Оцініть периметр паралелограма зі сторонами a см і b см, якщо $15 \leq a \leq 19$ і $6 \leq b \leq 11$.

3.15.° Як ви думаєте, чи є правильним твердження:

- 1) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 9$;
2) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 8$;
3) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 9,2$;

- 4) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a - b > -5$;
5) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $b - a > 5$;
6) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $ab > 13$;
7) якщо $a > 2$ і $b < -7$, то $a - b > 9$;
8) якщо $a < 2$ і $b < 7$, то $ab < 14$;
9) якщо $a > 2$, то $a^2 > 4$;
10) якщо $a < 2$, то $a^2 < 4$;
11) якщо $a > 2$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$;
12) якщо $a < 2$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{2}$?

Обговоріть це питання у класі.

3.16.* Дано: $5 < a < 8$ і $3 < b < 6$. Оцініть значення виразу:

- 1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

3.17.* Дано: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ і $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Оцініть значення виразу:

- 1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

3.18.* Порівняйте значення виразів:

- 1) 2^{24} і 9^8 ; 2) $0,3^{20}$ і $0,1^{10}$; 3) $0,0015^{10}$ і $0,2^{40}$.

3.19.* Порівняйте значення виразів:

- 1) 51^7 і 7^{14} ; 2) $0,4^{12}$ і $0,3^8$.

3.20.** Доведіть, що периметр чотирикутника більший за суму його діагоналей.

3.21.** Доведіть, що кожна діагональ опуклого чотирикутника менша від його півпериметра.

3.22.** Доведіть, що сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника менша від суми його діагоналей.

3.23.** Доведіть твердження:

- 1) якщо $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$;
2) якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a^2 > b^2$, то $a > b$.

3.24.** Доведіть, що коли $a < b < 0$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

3.25.** Відомо, що $b > 0$ і $a > b$. Як ви думаєте, чи є правильною при всіх указаних значеннях a і b нерівність:

- 1) $a^2 + a > b^2 + b$; 3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;
2) $a^2 - a > b^2 - b$; 4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

Обговоріть це питання у класі.

3.26.* Доведіть, що:

$$1) \sqrt{27} + \sqrt{65} > 13; \quad 2) \sqrt{65} - \sqrt{35} > 2.$$

3.27.* Доведіть, що:

$$1) \sqrt{55} + \sqrt{35} > \sqrt{120}; \quad 2) \sqrt{119} - \sqrt{67} < 3.$$



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

3.28. Андрій їде з передмістя до центру міста: спочатку автобусом, а потім пересідає на метро. Тривалість поїздки на автобусі від 16 хв до 18 хв, на метро — від 10 хв до 12 хв. Оцініть:

- 1) скільки часу може тривати вся поїздка;
- 2) наскільки поїздка на метро може бути коротшою за поїздку автобусом;
- 3) скільки часу витратять троє друзів Андрія, якщо кожен із них їде тим самим маршрутом 😊.

3.29. Олеся працює в майстерні з виготовлення сувенірів. Для пакування одного сувеніра потрібно від 12 см до 15 см декоративної стрічки та від 8 г до 10 г кольорового паперу. За годину Олеся планує упакувати від 7 до 9 сувенірів. Оцініть:

- 1) скільки стрічки може знадобитися для пакування всіх сувенірів;
- 2) скільки паперу може піти на весь обсяг роботи;
- 3) скільки грошей може отримати майстерня за годину на упаковці сувенірів, якщо упаковка одного сувеніра коштує від 15 грн до 20 грн?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.30. Спростіть вираз:

$$1) \frac{x-3}{x+3} \cdot \left(x + \frac{x^2}{3-x} \right); \quad 2) \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{ab}{a^2-b^2}.$$

3.31. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

$$1) \frac{x^2}{x+4}; \quad 2) \frac{x-4}{x^2-4}; \quad 3) \frac{x^2-4}{x^2+4}; \quad 4) \frac{4}{x-4} + \frac{1}{x}?$$



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 7 із підручника «Алгебра. 8 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

3.32. Чи є рівносильними рівняння:

1) $4x + 6 = 2x - 3$ і $4x + 3 = 2x - 6$;

2) $8x - 4 = 0$ і $2x - 1 = 0$;

3) $x^2 + 2x - 3 = 0$ і $x^2 + x = 3 - x$;

4) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$ і $x^2 - 1 = 0$;

5) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$ і $x - 1 = 0$;

6) $x^2 + 1 = 0$ і $0x = 5$?



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

3.33. Доведіть, що для непарних чисел a, b, c, d, e і f не

може виконуватися рівність $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$.



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Про деякі способи доведення нерівностей

У п. 1 було доведено кілька нерівностей. Ми використовували такий прийом: розглядали різницю лівої і правої частин нерівності та порівнювали її з нулем.

Проте існує і ряд інших способів доведення нерівностей. Ознайомимося з деякими з них.

Міркування «від супротивного»

Назва цього методу відображає його сутність.

ПРИКЛАД 1. Для будь-яких чисел a_1, a_2, b_1, b_2 доведіть нерівність

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2). \quad (*)$$

Розв'язання. Припустимо, що нерівність, яку доводимо, є неправильною. Тоді знайдуться такі числа a_1, a_2, b_1, b_2 , що буде правильною нерівність

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 > (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Звідси

$$a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 > a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2;$$

$$2a_1 b_1 a_2 b_2 > a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2;$$

$$a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 < 0;$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 < 0.$$

Остання нерівність є неправильною. Отримана суперечність означає, що нерівність (*) є правильною. ◀

Метод використання очевидних нерівностей

ПРИКЛАД 2. Для будь-яких чисел a , b і c доведіть нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Розв'язання. Очевидно, що при будь-яких значеннях a , b і c виконується така нерівність:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Звідси отримуємо:

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0;$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac. \quad \blacktriangleleft$$

Метод застосування раніше доведеної нерівності

У п. 1 ми довели, що для будь-яких $a \geq 0$ і $b \geq 0$ є правильною нерівність

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Її називають *нерівністю Коші*¹ для двох чисел.

Розглянемо, як можна використовувати нерівність Коші під час доведення інших нерівностей.

¹ Огюстен Луї Коші (1789–1857) — видатний французький математик, автор понад 800 наукових праць.

ПРИКЛАД 3. Доведіть, що для додатних чисел a і b справедлива нерівність

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4.$$

Розв'язання. Застосуємо нерівність Коші для додатних чисел a і $\frac{1}{b}$. Отримуємо:

$$\frac{a + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}.$$

Звідси $a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$

Аналогічно можна довести, що $b + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримаємо:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Звідси $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4.$ ◀



ВПРАВИ

1. Доведіть нерівність:

- 1) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$, якщо $a > 0$ і $b > 0$;
- 2) $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $c \geq 0$;
- 3) $(a^3+b)(a+b^3) \geq 4a^2b^2$, якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$;
- 4) $(ab+1)(a+b) \geq 4ab$, якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$;
- 5) $(a+2)(b+5)(c+10) \geq 80\sqrt{abc}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $c \geq 0$;
- 6) $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$, якщо $a > 0$ і $b > 0$;
- 7) $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$, якщо $a_1, a_2, \dots, a_n$ — додатні числа, добуток яких дорівнює 1.

4. Нерівності з однією змінною



Розглянемо задачу. Олена хоче купити абонемент до спортзалу. Вона знає, що спочатку треба заплатити 40 грн за реєстрацію. Крім того, вона хоче замовити два тренування, які коштують однаково. Якою має бути ціна одного тренування, щоб загальна сума витрат Олени не перевищила 380 грн?

Нехай одне тренування коштує x грн. Тоді вся сума, яку має заплатити Олена, дорівнює $(40 + 2x)$ грн. Нерівність $40 + 2x \leq 380$ є математичною моделлю цієї задачі.

Якщо в цю нерівність замість змінної x підставити, наприклад, число 150, то отримаємо правильну числову нерівність $40 + 300 \leq 380$. У такому разі кажуть, що число 150 є **розв'язком нерівності** $40 + 2x \leq 380$.

Означення:

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність.

Так, кожне із чисел 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ є розв'язком нерівності $14 + 2x > 44$, а число 10 не є її розв'язком.

Зауваження. Означення розв'язку нерівності аналогічне означенню кореня рівняння. Проте не прийнято говорити «корінь нерівності».

Означення:

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків не існує.

Усі розв'язки нерівності утворюють **множину розв'язків нерівності**. Якщо нерівність розв'язків не має, то говорять, що множиною її розв'язків є **порожня множина**. Нагадаємо, що порожню множину позначають символом $\emptyset$.

Таким чином, можна сказати, що **розв'язати нерівність означає знайти множину її розв'язків**.

Наприклад, у задачі «розв'яжіть нерівність $x^2 > 0$ » відповідь буде такою: «усі дійсні числа, крім числа 0».

Очевидно, що нерівність $|x| < 0$ розв'язків не має, тобто множиною її розв'язків є порожня множина.

Означення:

Нерівності називають рівносильними, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків.

Наведемо кілька прикладів.

Нерівності $x^2 \leq 0$ і $|x| \leq 0$ є рівносильними. Справді, кожна з них має єдиний розв'язок $x = 0$.

Нерівності $x^2 > -1$ і $|x| > -2$ є рівносильними, оскільки множиною розв'язків кожної з них є множина дійсних чисел.

Оскільки кожна з нерівностей $\sqrt{x} < -1$ і $0x < -3$ розв'язків не має, то вони також є рівносильними.



1. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною?
2. Що означає розв'язати нерівність? 3. Які нерівності називають рівносильними?



ВПРАВИ

- 4.1.°** Чи є розв'язком нерівності $x < 6$ число:
1) 5; 2) 6; 3) 6,5; 4) -2?
- 4.2.°** Чи є розв'язком нерівності $x > -4$ число:
1) -3; 2) -5; 3) -4; 4) 2?
- 4.3.°** Які із чисел -3; 0; 7 є розв'язками нерівності:
1) $x \leq 7$; 2) $3x > x - 1$; 3) $x^2 - 9 \geq 0$?
- 4.4.°** Чи є розв'язком нерівності $6x + 1 \leq 2 + 7x$ число:
1) -0,1; 2) -2; 3) 0; 4) -1; 5) 2?
- 4.5.°** Назвіть будь-які три розв'язки нерівності $x \geq -2$.
- 4.6.°** Назвіть будь-які два розв'язки нерівності $x + 5 > 2x$.
- 4.7.°** Запишіть будь-які три розв'язки нерівності $x \leq 3$.
- 4.8.°** Чи є число 1,99 розв'язком нерівності $x < 2$? Чи існують розв'язки даної нерівності, більші за 1,99? У разі ствердної відповіді наведіть приклад такого розв'язку. Поміркуйте, скільки розв'язків, кожен з яких більший за 1,99, має ця нерівність. Обговоріть це питання у класі.

4.9.° Чи є число 4,001 розв'язком нерівності $x > 4$? Чи існують розв'язки даної нерівності, менші від 4,001? У разі ствердної відповіді наведіть приклад такого розв'язку.

4.10.° Як ви думаєте, множиною розв'язків якої з даних нерівностей є порожня множина:

- 1) $(x-3)^2 > 0$; 3) $(x-3)^2 < 0$;
2) $(x-3)^2 \geq 0$; 4) $(x-3)^2 \leq 0$?

Обговоріть це питання у класі.

4.11.° Які з наведених нерівностей не мають розв'язків:

- 1) $0x > -2$; 2) $0x < 2$; 3) $0x < -2$; 4) $0x > 2$?

4.12.° Множиною розв'язків якої з наведених нерівностей є множина дійсних чисел:

- 1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

4.13.° Розв'язком якої з даних нерівностей є будь-яке дійсне число:

- 1) $x^2 > 0$; 2) $x^2 + 1 > 0$; 3) $\sqrt{x} \geq 0$?

4.14.° Укажіть найбільший розв'язок нерівності $x \leq 5$. Як ви думаєте, чи має найбільший розв'язок нерівність $x < 5$? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

4.15.° Укажіть найменший розв'язок нерівності $x \geq 4$. Як ви думаєте, чи має найменший розв'язок нерівність $x > 4$?

4.16.° Серед зазначених нерівностей укажіть нерівність, розв'язком якої є будь-яке дійсне число, і нерівність, що не має розв'язків:

- 1) $\frac{x^2 + 1}{x^2} \geq 0$; 3) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \geq 1$;
2) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} < 1$; 4) $\frac{x^2}{x^2 + 1} \geq 0$.

4.17.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $|x| > 0$; 4) $|x| \leq -1$;
2) $|x| \leq 0$; 5) $|x| > -3$;
3) $|x| < 0$; 6) $\left| \frac{1}{x} \right| > -3$.

4.18.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{2}{x^2} + 2 > 0$; 2) $(x + 2)^2 > 0$;

3) $(x+2)^2 \leq 0$;

5) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 > 0$;

4) $\frac{x+2}{x+2} > 0$;

6) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 \geq 0$.

4.19.* Чи рівносильні нерівності:

1) $\frac{1}{x} < 1$ і $x > 1$;

3) $(x+5)^2 < 0$ і $|x-4| < 0$;

2) $x^2 \geq x$ і $x \geq 1$;

4) $\sqrt{x} \leq 0$ і $x^4 \leq 0$?

4.20.* Чи рівносильні нерівності:

1) $|x| > -x^2$ і $x^2 > 0$;

2) $|x| \geq -x^2$ і $|x| \leq 0$?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



4.21. Розшифруйте прізвище канадського математика, засновника найпрестижнішої міжнародної премії за видатні досягнення в математиці. Номер прикладу відповідає місцю, на якому стоїть буква у слові.

1) $a^{15} \cdot a^{-4} \cdot a^{-8}$;

3) $a^{-1} : a^{-3} : a$;

5) $(a^{-2})^5 \cdot (a^{-4})^{-2}$.

2) $a^{-14} \cdot a^6 : a^{-10}$;

4) $(a^{-3})^4 : a^{-9}$;

Відповідь	a	a^2	a^{-2}	a^3	a^{-3}
Буква	Л	І	С	Ф	Д

Знайдіть в інтернеті інформацію про життя, наукову й освітянську діяльність цього математика, про історію вказаної премії, а також відповіді на такі запитання.

- 1) Кому із наших співвітчизниць була присуджена ця премія?
- 2) Кого зображено на лицьовій стороні медалі, якою нагороджують лауреатів, і що означає напис на ній?



4.22. Велосипедист проїхав із села до озера й повернувся назад, витративши на весь шлях 1 год. Із села до озера він їхав зі швидкістю 15 км/год, а повертався зі швидкістю 10 км/год. Знайдіть відстань від села до озера.

5. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки



Властивості числових рівностей допомагали нам розв'язувати рівняння. Аналогічно властивості числових нерівностей допоможуть розв'язувати нерівності.

Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, простішим рівнянням, рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності.

Під час заміни рівняння на його рівносильне використовують теореми про перенесення доданків з однієї частини рівняння в другу та про множення обох частин рівняння на одне й те саме відмінне від нуля число.

Аналогічні правила застосовують і під час розв'язування нерівностей.

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

За допомогою цих правил розв'яжемо, наприклад, таку нерівність: $14 + 2x > 44$.

Переносимо доданок 14 у праву частину нерівності:

$$2x > 44 - 14.$$

Звідси $2x > 30$.

Поділивши обидві частини нерівності на 2, отримуємо:

$$x > 15.$$

Зауважимо, що отримана нерівність рівносильна заданій нерівності. Множина її розв'язків складається з усіх чисел, які більші за 15. Цю множину називають **числовим проміжком** і позначають так: $(15; +\infty)$ (читають: «проміжок від 15 до плюс нескінченності»).

У цій задачі відповідь можна записати одним зі способів: $(15; +\infty)$ або $x > 15$.

Точки координатної прямої, які зображають розв'язки нерівності $x > 15$, розміщені праворуч від точки, яка зображає число 15, і утворюють промінь, у якого «виколото» початок (рис. 5.1).



Рис. 5.1

Зауважимо, що для зображення на рисунку числового проміжку використовують два способи: за допомогою або штриховки (рис. 5.1, а), або дужки (рис. 5.1, б). Ми використаємо другий спосіб.

ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть нерівність $3 + \frac{x}{2} \leq 7 + x$.

Розв'язання. Перенесемо доданок x із правої частини нерівності в ліву, а доданок 3 — з лівої частини в праву та зведемо подібні члени:

$$-x + \frac{x}{2} \leq 7 - 3;$$

$$-\frac{x}{2} \leq 4.$$

Помноживши обидві частини останньої нерівності на -2 , отримуємо:

$$x \geq -8.$$

Множиною розв'язків цієї нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $[-8; +\infty)$ (читають: «проміжок від -8 до плюс нескінченності, включаючи -8 »).

Точки координатної прямої, які зображають розв'язки нерівності $x \geq -8$, утворюють промінь (рис. 5.2).

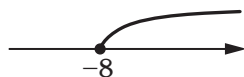


Рис. 5.2

Відповідь можна записати одним зі способів: $[-8; +\infty)$ або $x \geq -8$. ▶

ПРИКЛАД 2. Розв'яжіть нерівність $2(2 - 3x) > 3(x + 6) - 5$.

Розв'язання. Запишемо ланцюжок нерівностей, рівносильних даній:

$$4 - 6x > 3x + 18 - 5;$$

$$4 - 6x > 3x + 13;$$

$$-3x - 6x > -4 + 13;$$

$$-9x > 9;$$

$$x < -1.$$



Рис. 5.3

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $(-\infty; -1)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до -1 »). Точки координатної прямої, які зображають розв'язки нерівності $x < -1$, розміщені ліворуч від точки -1 (рис. 5.3) та утворюють промінь, у якого «виколото» початок.

Відповідь можна записати одним зі способів: $(-\infty; -1)$ або $x < -1$. ▶

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leq \frac{1}{6}$.

Розв'язання. Запишемо ланцюжок рівносильних нерівностей:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} \leq 6 \cdot \frac{1}{6};$$

$$3x - 3 + 2x \leq 1;$$

$$5x \leq 4;$$

$$x \leq \frac{4}{5}.$$

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до $\frac{4}{5}$, включаючи $\frac{4}{5}$ »). Точки координатної прямої, які зображають розв'язки нерівності $x \leq \frac{4}{5}$, утворюють промінь (рис. 5.4).

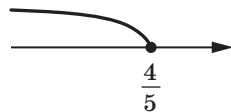


Рис. 5.4

Відповідь можна записати одним зі способів: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ або $x \leq \frac{4}{5}$. ▶

ПРИКЛАД 4. Розв'яжіть нерівність $3(2x - 1) + 7 \geq 2(3x + 1)$.

Розв'язання. Маємо: $6x - 3 + 7 \geq 6x + 2$;

$$6x - 6x \geq 2 - 4; \quad 0x \geq -2.$$

Остання нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в правильну числову нерівність $0 \geq -2$. Отже, шукана множина розв'язків збігається з множиною дійсних чисел.

Відповідь: x — будь-яке число. ◀

Цю відповідь можна записати інакше: $(-\infty; +\infty)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до плюс нескінченності»). Цей числовий проміжок називають **числовою прямою**.

ПРИКЛАД 5. Розв'яжіть нерівність

$$4(x - 2) - 1 < 2(2x - 9).$$

Розв'язання. Маємо:

$$4x - 8 - 1 < 4x - 18;$$

$$4x - 4x < 9 - 18; \quad 0x < -9.$$

Отримана нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в неправильну числову нерівність $0 < -9$.

У цій задачі відповідь можна записати одним зі способів: розв'язків немає або $\emptyset$. ◀

Кожна з нерівностей, які було розглянуто в прикладах 1–5, зводилася до рівносильної нерівності одного із чотирьох видів: $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, де x — змінна, а i і b — деякі числа. Такі нерівності називають **лінійними нерівностями з однією змінною**.

Наведемо таблицю позначень і зображень вивчених числових проміжків:

Нерівність	Проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$	



1. Сформулюйте правила, за допомогою яких можна отримати нерівність, рівносильну даній. **2.** Які нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною?



ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

В українській мові під час словозміни та словотворення у суфіксі **-ок-** може відбуватися чергування звуку [о] з нулем звуку, тобто звук [о] може випадати: промі^жо^к — промі^жку, розв'язо^к — розв'яз^ки, добу^то^к — добу^тку, вісно^во^к — вісно^вки, випадо^к — випад^ки, випад^ковий, відсо^то^к — відсо^тків, відсо^тковий, поча^то^к — поча^тку, поча^тковий.



ВПРАВИ

5.1.° Зобразіть на координатній прямій проміжок:

- 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; -5]$.

5.2.° Зобразіть на координатній прямій проміжок:

- 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 6]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$.

5.3.° Запишіть і прочитайте проміжки, зображені на рисунку 5.5.



Рис. 5.5

5.4.° Запишіть проміжки, зображені на рисунку 5.6.



Рис. 5.6

5.5.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задається нерівністю:

- 1) $x < 8$; 2) $x \leq -4$; 3) $x \geq -1$; 4) $x > 0$.

5.6.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задається нерівністю:

- 1) $x \leq 0$; 2) $x \geq \frac{1}{3}$; 3) $x > -1,4$; 4) $x < 16$.

5.7.° Укажіть найменше ціле число, яке належить проміжку:

- 1) $(6; +\infty)$; 3) $(-3,4; +\infty)$;
2) $[6; +\infty)$; 4) $[-0,9; +\infty)$.

5.8.° Укажіть найбільше ціле число, яке належить проміжку:

- 1) $(-\infty; -4)$; 3) $(-\infty; 1]$;
2) $(-\infty; -6,2]$; 4) $(-\infty; -1,8)$.

5.9.° Яким з наведених проміжків належить число -7 :

- 1) $(-\infty; -7)$; 3) $(-\infty; 0]$;
2) $[-7; +\infty)$; 4) $(-\infty; -6)$?

5.10.° Якому з наведених проміжків не належить число 9 :

- 1) $(8,99; +\infty)$; 3) $(-\infty; 8,99]$;
2) $(-\infty; 10)$; 4) $[9; +\infty)$?

5.11.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $6x > 18$; 5) $-10x < 0$; 9) $5 - 8x \geq 6$;
2) $-2x \geq 10$; 6) $7x - 2 > 19$; 10) $12 + 4x \geq 6x$;
3) $\frac{1}{3}x < 9$; 7) $5x + 16 \leq 6$; 11) $36 - 2x < 4x$;
4) $0,1x \geq 0$; 8) $4 - x < 5$; 12) $\frac{x+2}{5} < 2$.

5.12.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $5x < 30$; 4) $-12x \geq 0$; 7) $13 - 6x \geq -23$;
2) $-4x \leq -16$; 5) $4x + 5 > -7$; 8) $3x + 2 \leq -7x$;
3) $\frac{2}{3}x \leq 6$; 6) $9 - x \geq 2x$; 9) $\frac{x-3}{4} > -1$.

5.13.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $0x > 10$; 3) $0x > -8$; 5) $0x \geq 1$; 7) $0x \leq 0$;
2) $0x < 15$; 4) $0x < -3$; 6) $0x \leq 2$; 8) $0x > 0$.

5.14.° Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

- 1) $5x \geq 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

5.15.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

- 1) $8x \leq -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

5.16.° При яких значеннях a вираз $6a + 1$ набуває від'ємних значень?

5.17.° При яких значеннях b вираз $7 - 2b$ набуває додатних значень?

5.18.° При яких значеннях m значення виразу $2 - 4m$ не менші від -22 ?

5.19.° При яких значеннях n значення виразу $12n - 5$ не більші за -53 ?

↔ 5.20.° При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{4x + 20}$; 2) $\sqrt{5 - 14x}$; 3) $\frac{10}{\sqrt{4x + 10}}$?

5.21.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{13 - 2x}$; 2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x - 1}}$.

5.22.° Розв'яжіть нерівність:

1) $8x + 2 < 9x - 3$; 4) $3 - 11y \geq -3y + 6$;
2) $6 - 6x > 10 - 4x$; 5) $-8p - 2 < 3 - 10p$;
3) $6y + 8 \leq 10y - 8$; 6) $3m - 1 \leq 1,5m + 5$.

5.23.° Розв'яжіть нерівність:

1) $4 + 11x > 7 + 12x$; 3) $3x - 10 < 6x + 2$;
2) $35x - 28 \leq 32x + 2$; 4) $6x - 3 \geq 2x - 25$.

↔ 5.24.* Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{4x}{3} + \frac{x}{2} < 11$; 2) $\frac{x}{8} - \frac{1}{4} \leq x$.

5.25.* Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{y}{6} - \frac{5y}{4} < 1$; 2) $\frac{x}{10} - \frac{x}{5} > -2$.

5.26.* Розв'яжіть нерівність:

1) $3 - 5(2x + 4) \geq 7 - 2x$;
2) $6x - 3(x - 1) \leq 2 + 5x$;
3) $x - 2(x - 1) \geq 10 + 3(x + 4)$;
4) $2(2x - 3,5) - 3(2 - 3x) < 6(1 - x)$;
5) $(x + 1)(x - 2) \leq (x - 3)(x + 3)$;
6) $\frac{3x + 7}{4} - \frac{5x - 2}{2} < x$;
7) $(x - 5)(x + 1) \leq 3 + (x - 2)^2$;
8) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 3}{3} > 2 + \frac{x}{6}$.

5.27.* Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$\begin{array}{ll} 1) 3(4x + 9) + 5 > 7(8 - x); & 3) \frac{3x - 7}{5} - 1 \geq \frac{2x - 6}{3}; \\ 2) (y + 3)(y - 5) - (y - 1)^2 > -16; & 4) \frac{2x}{3} - \frac{x - 1}{6} - \frac{x + 2}{2} < 0. \end{array}$$

5.28.* Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

$$\begin{array}{l} 1) 7(x + 2) - 3(x - 8) < 10; \\ 2) (x - 4)(x + 4) - 5x > (x - 1)^2 - 17. \end{array}$$

5.29.* Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{4x + 13}{10} - \frac{5 + 2x}{4} > \frac{6 - 7x}{20} - 2; \\ 2) (x - 1)(x + 1) - (x - 4)(x + 2) \geq 0. \end{array}$$

 **5.30.*** Скільки цілих від'ємних розв'язків має нерівність

$$x - \frac{x + 7}{4} - \frac{11x + 30}{12} < \frac{x - 5}{3}?$$

5.31.* Скільки натуральних розв'язків має нерівність

$$\frac{2 - 3x}{4} \geq \frac{1}{5} - \frac{5x + 6}{8}?$$

5.32.* При яких значеннях x є правильною рівність:

$$1) |x - 5| = x - 5; \quad 2) |2x + 14| = -2x - 14?$$

5.33.* При яких значеннях y є правильною рівність:

$$1) \frac{|y + 7|}{y + 7} = 1; \quad 2) \frac{|6 - y|}{y - 6} = 1?$$

5.34.* При яких значеннях a рівняння:

$$\begin{array}{l} 1) x^2 + 3x - a = 0 \text{ не має коренів;} \\ 2) 2x^2 - 8x + 5a = 0 \text{ має хоча б один корінь?} \end{array}$$

5.35.* При яких значеннях b рівняння:

$$\begin{array}{l} 1) 3x^2 - 6x + b = 0 \text{ має два різних корені;} \\ 2) x^2 - x - 2b = 0 \text{ не має коренів?} \end{array}$$

5.36.* У коробці лежать сині та жовті кулі. Кількість синіх куль відноситься до кількості жовтих як 3 : 4. Яка найбільша кількість синіх куль може бути в коробці, якщо всього куль не більше за 44?

5.37.* У саду ростуть яблуні, вишні та сливи, кількості яких відносяться як 5 : 4 : 2 відповідно. Якою може бути найменша кількість вишень, якщо всього дерев у саду не менше від 120?

5.38.** Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 14 см і a см, де a — натуральне число. Якого найбільшого значення може набувати a ?

5.39.** При яких значеннях x визначена функція:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{1}{x-2}$;

2) $f(x) = \sqrt{24-8x} + \frac{6}{x^2-16}$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+9}} - \frac{8}{|x|-2}$;

4) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{4}{x^2-1}$?

5.40.** При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{9-x} + \frac{10}{x+3}$;

2) $\frac{6}{\sqrt{3x-21}} + \frac{9}{x^2-64}$?

5.41.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x-3| + x = 15$;

2) $|x+1| - 4x = 14$.

5.42.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x+5| + 2x = 7$;

2) $|3-2x| - x = 9$.

5.43.** Побудуйте графік функції:

1) $y = |x-2|$;

2) $y = |x+3| - 1$.

5.44.** Побудуйте графік функції:

1) $y = |x+4|$;

2) $y = |x-5| + 2$.

Якщо вам сподобалося розв'язувати задачі 5.41–5.44, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Рівняння і нерівності, які містять знак модуля».

5.45.** При яких значеннях a рівняння:

1) $4x + a = 2$ має додатний корінь;

2) $(a+6)x = 3$ має від'ємний корінь?

5.46.** При яких значеннях m рівняння $2 + 4x = m - 6$ має невід'ємний корінь?

5.47.* Знайдіть усі значення a , при яких має два різних корені рівняння:

1) $ax^2 + 2x - 1 = 0$;

2) $(a+1)x^2 - (2a-3)x + a = 0$.

5.48.* Знайдіть усі значення a , при яких не має коренів рівняння $(a-2)x^2 + (2a+1)x + a = 0$.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

- 5.49. Човен проплив деяку відстань за течією річки, а потім повернувся назад, витративши на всю подорож не більше п'яти годин. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 5 км/год, а швидкість течії — 1 км/год. Яку найбільшу відстань міг пропливти човен за течією річки?
- 5.50. Софія каталася на електросамокаті. Спочатку вона їхала за вітром, а потім повернулася назад, рухаючись проти вітру. Уся поїздка тривала не більше ніж 1 год 48 хв. Швидкість руху самоката по рівній дорозі становить 18 км/год. Вітер збільшує чи зменшує його швидкість залежно від напрямку руху на 2 км/год. Яку найбільшу відстань могла проїхати Софія в один бік?
- 5.51. Андрій має денний ліміт мобільного інтернету 800 мегабайтів. Він хоче подивитися кілька відео в інтернеті, а також переглянути соціальні мережі. Андрій знає, що на одну хвилину перегляду відео витрачається 10 мегабайтів, під час перевірки соціальних мереж витрачається близько 50 мегабайтів трафіку. Який найдовший час (у хвилинах) Андрій може дивитися відео, щоб не перевищити денний ліміт трафіку?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 5.52. Порівняйте значення виразів:

$$1) 3\sqrt{98} \text{ і } 4\sqrt{72}; \quad 3) \frac{1}{6}\sqrt{108} \text{ і } 6\sqrt{\frac{1}{12}}.$$

$$2) \frac{1}{2}\sqrt{68} \text{ і } \frac{4}{3}\sqrt{45};$$

- 5.53. Щоб наповнити басейн водою через одну трубу, потрібно в 1,5 раза більше часу, ніж для того, щоб наповнити його через другу трубу. Якщо ж відкрити одночасно обидві труби, то басейн наповниться за 6 год. За скільки годин можна наповнити басейн через кожну трубу окремо?



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

- 5.54. Трицифрове число n є таким, що числа $n - 6$, $n - 7$ і $n - 8$ кратні числам 7, 8 і 9 відповідно. Знайдіть число n .

6. Системи лінійних нерівностей з однією змінною



Розглянемо вираз $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$. Знайдемо множину допустимих значень змінної x , тобто всі значення змінної x , при яких даний вираз має зміст. Цю множину називають **областю визначення виразу**.

Оскільки підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень, то мають *одночасно* виконуватися дві нерівності: $2x-1 \geq 0$ і $5-x \geq 0$. Тобто шукані значення змінної x — це всі спільні розв'язки зазначених нерівностей.

Якщо треба знайти всі спільні розв'язки двох або кількох нерівностей, то говорять, що треба **розв'язати систему нерівностей**.

Як і систему рівнянь, систему нерівностей записують за допомогою фігурної дужки. Так, для знаходження області визначення виразу $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ треба розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 5-x \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Означення:

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює кожен нерівність системи в правильну числову нерівність.

Наприклад, числа 2, 3, 4, 5 є розв'язками системи (*), а число 7 не є її розв'язком.

Означення:

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Усі розв'язки системи нерівностей утворюють **множину розв'язків системи нерівностей**. Якщо система розв'язків не має, то говорять, що множиною її розв'язків є порожня множина.

Таким чином, можна сказати, що *розв'язати систему нерівностей означає знайти множину її розв'язків*.

Наприклад, у задачі «Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 0x \geq -1, \\ |x| \geq 0 \end{cases}$ » відповідь буде такою: «множина дійсних чисел».

Очевидно, що множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 5 \end{cases}$ складається з єдиного числа 5.

Система нерівностей $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ розв'язків не має, тобто множиною її розв'язків є порожня множина.

Розв'яжемо систему (*). Перетворюючи кожен нерівність системи в рівносильну їй, отримуємо: $\begin{cases} 2x \geq 1, \\ -x \geq -5; \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \leq 5. \end{cases}$

Множина розв'язків останньої системи складається з усіх чисел, які не менші від $\frac{1}{2}$ і не більші за 5, тобто з усіх чисел, які задовольняють нерівність $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають так: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (читають: «проміжок від $\frac{1}{2}$ до 5, включаючи $\frac{1}{2}$ і 5»).

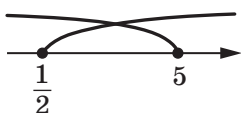
Відповідь до задачі про знаходження області визначення виразу $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ можна записати одним зі способів: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ або $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$.

Точки, які зображають розв'язки системи (*), розміщені між точками $A\left(\frac{1}{2}\right)$ і $B(5)$, включаючи точки A і B (рис. 6.1). Вони утворюють відрізок.



Рис. 6.1

Зауважимо, що всі спільні точки проміжків $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$ утворюють проміжок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (рис. 6.2). Говорять, що проміжок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ є **перетином** проміжків $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$. Записують:



$$\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right].$$

Рис. 6.2

Проміжки $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$ є множи-

нами розв'язків відповідно нерівностей $x \geq \frac{1}{2}$ і $x \leq 5$. Тоді

можна сказати, що *множина розв'язків системи* $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \leq 5 \end{cases}$ є

перетином множин розв'язків кожної з нерівностей, які складають систему.

Отже, *щоб розв'язати систему нерівностей, треба знайти перетин множин розв'язків нерівностей, які складають систему.*

ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases} \begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$

За допомогою координатної прямої знайдемо перетин множин розв'язків нерівностей даної системи, тобто перетин проміжків $(-\infty; 3)$ і $(-2; +\infty)$ (рис. 6.3). Шуканий перетин складається із чисел, які задовольняють нерівність $-2 < x < 3$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $(-2; 3)$ (читають: «проміжок від -2 до 3 »).



Рис. 6.3

Відповідь можна записати одним зі способів: $(-2; 3)$ або $-2 < x < 3$. ◀

ПРИКЛАД 2. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leq 5. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leq 2; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x \geq -2. \end{cases}$

За допомогою координатної прямої знайдемо перетин проміжків $(-\infty; 1)$ і $[-2; +\infty)$, які є множинами розв'язків нерівностей даної системи (рис. 6.4). Шуканий перетин складається із чисел, які задовольняють нерівність $-2 \leq x < 1$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $[-2; 1)$ (читають: «проміжок від -2 до 1 , включаючи -2 »).

Відповідь можна записати одним зі способів: $[-2; 1)$ або $-2 \leq x < 1$. ◀

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x \leq 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Множиною розв'язків даної системи є перетин проміжків $(-\infty; 1]$ і $(-2; +\infty)$ (рис. 6.5). Цей перетин є числовим проміжком, який позначають $(-2; 1]$ (читають: «проміжок від -2 до 1 , включаючи 1 »).

Відповідь: $(-2; 1]$. ◀



Рис. 6.4



Рис. 6.5



Рис. 6.6

ПРИКЛАД 4. Знайдіть область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}.$$

Розв'язання. Шукана область визначення — це множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x+5 \geq 0. \end{cases}$ Маємо:

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \geq -5. \end{cases}$$

Зобразимо на координатній прямій перетин проміжків $(1; +\infty)$ і $[-5; +\infty)$ (рис. 6.6). Цим перетином є проміжок $(1; +\infty)$.

Відповідь: $(1; +\infty)$. ◀

Наведемо таблицю позначень і зображень числових проміжків, вивчених у цьому пункті:

Нерівність	Проміжок	Зображення
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	



1. Що називають областю визначення виразу? 2. У яких випадках говорять, що треба розв'язати систему нерівностей? 3. Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною? 4. Що означає розв'язати систему нерівностей?



ВПРАВИ

- 6.1.° Які із чисел -6 ; -5 ; 0 ; 2 ; 4 є розв'язками системи нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -2x \leq 10? \end{cases}$$

- 6.2.° Розв'язком якої із систем нерівностей є число -3 :

- 1) $\begin{cases} x \geq -3, \\ x \geq 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$
 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 > -1, \\ x - 2 < 0? \end{cases}$

- 6.3.° Зобразить на координатній прямій проміжок:

- 1) $(-3; 4)$; 2) $[-3; 4]$; 3) $[-3; 4)$; 4) $(-3; 4]$.

- 6.4.° Зобразить на координатній прямій проміжок:

- 1) $[-2; 1]$; 2) $(0; 2)$; 3) $(-5; 6]$; 4) $[-7; -1)$.

6.5.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

- 1) $0 < x < 5$; 2) $0,2 \leq x < 102$; 3) $-2,4 \leq x \leq -1$.

6.6.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

- 1) $1 \leq x \leq 3$; 2) $6 < x \leq 7$; 3) $-0,3 < x < 0,5$.

6.7.° Запишіть усі цілі числа, які належать проміжку:

- 1) $[3; 7]$; 3) $[-5, 2; 1]$;
2) $(2, 9; 6]$; 4) $(-2; 2)$.

6.8.° Укажіть найменше і найбільше цілі числа, які належать проміжку:

- 1) $[-12; -6]$; 3) $(-10, 8; 1, 6]$;
2) $(5; 11]$; 4) $[-7, 8; -2, 9]$.

6.9.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть перетин проміжків:

- 1) $[-1; 7]$ і $[4; 9]$;
2) $[3; 6]$ і $(3; 8)$;
3) $(-\infty; 3, 4)$ і $(2, 5; +\infty)$;
4) $(-\infty; 2, 6)$ і $(2, 8; +\infty)$;
5) $[9; +\infty)$ і $[11, 5; +\infty)$;
6) $(-\infty; -4, 2]$ і $(-\infty; -1, 3)$.

6.10.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть перетин проміжків:

- 1) $[-2; 3]$ і $[-4; 1]$; 3) $(10; +\infty)$ і $(12; +\infty)$;
2) $(-\infty; 5]$ і $(2; 6)$; 4) $(-\infty; 8)$ і $(4; +\infty)$.

6.11.° Укажіть на рисунку 6.7 зображення множини розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x \leq 6. \end{cases}$

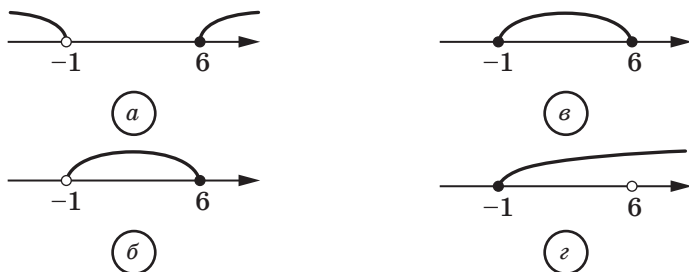


Рис. 6.7

6.12.° Укажіть на рисунку 6.8 зображення множини розв'язків подвійної нерівності $-4 \leq x \leq 2$.

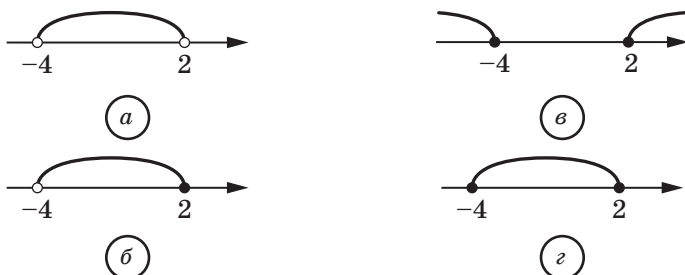


Рис. 6.8

6.13.° Який із наведених проміжків є множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

- 1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

6.14.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть множину розв'язків системи нерівностей:

- 1) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geq -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geq -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 2; \end{cases}$
 2) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leq -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < 2. \end{cases}$

6.15.° Розв'яжіть систему нерівностей:

- 1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geq -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leq x + 9; \end{cases}$
 2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x - 6 \leq x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$
 3) $\begin{cases} 6x + 3 \geq 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x + 19 \leq 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

6.16.° Розв'яжіть систему нерівностей:

- 1) $\begin{cases} -4x \leq -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$
 2) $\begin{cases} 8 - x \geq 5, \\ x - 7 \leq 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \geq 2x + 10. \end{cases}$

6.17.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $-3 < x - 4 < 7$; 3) $0,8 \leq 6 - 2x < 1,4$;
2) $-2,4 \leq 3x + 0,6 \leq 3$; 4) $4 < \frac{x}{5} - 2 \leq 5$.

Як ви думаєте, скількома способами можна розв'язати кожен із цих нерівностей? Обговоріть це питання у класі.

6.18.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $2 < x + 10 \leq 14$; 3) $-1,8 \leq 1 - 7x \leq 36$;
2) $10 < 4x - 2 < 18$; 4) $1 \leq \frac{x+1}{4} < 1,5$.

 **6.19.*** Скільки цілих розв'язків має система нерівностей $\begin{cases} -2x \geq -15, \\ 3x > -10? \end{cases}$

6.20.* Знайдіть суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x + 8 \geq 4, \\ 5x + 1 \leq 9. \end{cases}$$

6.21.* Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$-3 \leq 7x - 5 < 16?$$

6.22.* Знайдіть найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} x + 8 \geq 17, \\ \frac{x}{2} > 4,5. \end{cases}$$

6.23.* Знайдіть найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x + 1 < -4, \\ 3x - 6 \leq -12. \end{cases}$$

6.24.* Розв'яжіть систему нерівностей:

- 1) $\begin{cases} 8(2-x) - 2x > 3, \\ -3(6x-1) - x < 2x; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \frac{x+1}{4} - \frac{2x+3}{3} > 1, \\ 6(2x-1) < 5(x-4) - 7; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2(x+11) \geq 3(6-x), \\ (x-3)(x+6) \geq (x+5)(x-4); \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 4) & \begin{cases} 2x - \frac{x+1}{2} \leq \frac{x+1}{3}, \\ (x+5)(x-3) + 41 \geq (x-6)^2; \end{cases} \\
 5) & \begin{cases} \frac{x+2}{7} < \frac{x+1}{4}, \\ (x-6)(x+2) + 4x < (x-7)(x+7). \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.25.* Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} \frac{2x-3}{5} - \frac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1) + 7(x+2) > 3; \end{cases} \\
 2) & \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < \frac{x+12}{6}, \\ 0,3x - 19 \leq 1,7x - 5; \end{cases} \\
 3) & \begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1) - 8 < 34 - 3(5x-9); \end{cases} \\
 4) & \begin{cases} \frac{3x-2}{3} - \frac{4x+1}{4} \leq 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7). \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.26.* Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} 2x - 1 < 1,7 - x, \\ 3x - 2 \geq x - 8; \end{cases} & 2) & \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1, \\ 2x - \frac{x}{2} \geq 10. \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.27.* Скільки цілих розв'язків має система нерівностей:

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} 4x + 3 \geq 6x - 7, \\ 3(x+8) \geq 4(8-x); \end{cases} & 2) & \begin{cases} x - \frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{6} < 2, \\ \frac{2x-5}{3} \geq -3? \end{cases}
 \end{aligned}$$

 **6.28.*** Знайдіть область визначення виразу:

$$\begin{aligned}
 1) & \sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5}; & 3) & \sqrt{2x-4} + \sqrt{1-x}; \\
 2) & \sqrt{3x+5} - \frac{1}{\sqrt{15-5x}}; & 4) & \sqrt{12-3x} - \frac{5}{x-4}.
 \end{aligned}$$

6.29.* При яких значеннях змінної має зміст вираз:

$$1) \sqrt{8-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad 2) \sqrt{7x-35} + \frac{1}{x^2-5x}?$$

6.30.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) -3 < \frac{2x-5}{2} < 4; \quad 2) -4 \leq 1 - \frac{x-2}{3} \leq -3.$$

6.31.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) -2 \leq \frac{6x+1}{4} < 4; \quad 2) 1,2 < \frac{7-3x}{5} \leq 1,4.$$

6.32.** Одна сторона трикутника дорівнює 4 см, а сума двох інших — 8 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо довжина кожної з них дорівнює цілому числу сантиметрів.

6.33.* При яких значеннях a має хоча б один розв'язок система нерівностей:

$$1) \begin{cases} x \geq 3, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq a; \end{cases}$$

6.34.* При яких значеннях a не має розв'язків система нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq a; \end{cases}$$

6.35.* При яких значеннях a множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x \geq a \end{cases}$ є проміжок:

$$1) (-1; +\infty); \quad 2) [1; +\infty)?$$

6.36.* При яких значеннях a множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \geq 7, \\ x < a \end{cases}$ містить рівно чотири цілих числа?

6.37.* При яких значеннях b множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x < 5, \\ x \geq b \end{cases}$ містить рівно три цілих числа?

6.38.* При яких значеннях a корені рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ менші від числа 5?

6.39.* При яких значеннях a корені рівняння

$$x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$$

належать проміжку $[-2; 8]$?

- 6.40.*** При яких значеннях a один із коренів рівняння $3x^2 - (2a + 5)x + 2 + a - a^2 = 0$ менший від -2 , а другий — більший за 3 ?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.41. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2}{x^2 - 16} = \frac{3x + 4}{x^2 - 16}; \quad 2) \frac{5}{x - 3} - \frac{8}{x} = 3.$$

Виконуючи вправу 4.21, ви дізналися про престижну міжнародну премію за досягнення в математиці. Існують премії за досягнення в цій науковій галузі і в Україні. Одна з них — премія Національної академії наук України імені видатного українського математика Юрія Олексійовича Митропольського.

Знайдіть в інтернеті інформацію про життя й наукову діяльність цього вченого, а також дізнайтеся про інші українські премії за досягнення в математиці.



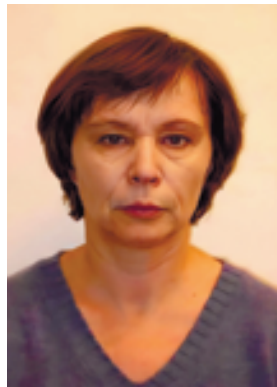
Ю. О. Митропольський
(1917–2008)

6.42. Знайдіть значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{54} - 0,5\sqrt{24}; & 3) (\sqrt{17} - \sqrt{11})(\sqrt{17} + \sqrt{11}); \\ 2) \sqrt{5} \cdot \sqrt{30}; & 4) \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}}; \end{array}$$

5) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2$; 7) $\sqrt{(\sqrt{6}-3)^2} - 3$.

6) $\frac{18}{\sqrt{6}}$;



Використовуючи знайдені значення виразів, розшифруйте прізвище сучасної української математики, докторки фізико-математичних наук, членкині-кореспондентки Національної академії наук України, лауреатки премії імені Ю. О. Митропольського. Номер завдання відповідає місцю, на якому стоїть буква у слові.

Відповідь	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{6}$	$5\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$	1,5	6
Буква	Б	Н	Е	А	Щ	И	Р

Знайдіть в інтернеті інформацію про наукову діяльність цієї математики та про те, якими ще преміями відзначені її досягнення.



ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–14 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.



- Порівняйте числа a і b , якщо $a - b = -3,6$.
 А) $a > b$; В) $a = b$;
 Б) $a < b$; Г) порівняти неможливо.
- Відомо, що $m > n$. Яке з наведених тверджень хибне?
 А) $m - 2 > n - 2$; В) $m + 2 > n + 2$;
 Б) $2m > 2n$; Г) $-2m > -2n$.

11. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x - 1 > 2x - 3, \\ 4x + 5 > x + 17. \end{cases}$$

- А) $\emptyset$; Б) $(2; +\infty)$; В) $(-\infty; 4)$; Г) $(2; 4)$.

12. Який із зображених числових проміжків відповідає множині розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 8 - 7x > 3x - 2, \\ -2(3x - 2,6) \leq -2 \cdot (-2,6)? \end{cases}$$

А)



Б)



В)



Г)



13. Розв'яжіть нерівність $-1 < \frac{1-2x}{5} < 3$.

- А) $(-3; 7)$; Б) $(-7; 3)$; В) $(-7; -3)$; Г) $(3; 7)$.

14. При яких значеннях a рівняння $2x^2 + 6x + a = 0$ не має коренів?

- А) $a < 4,5$; Б) $a > 4,5$; В) $a > -4,5$; Г) $a < -4,5$.

У завданні 15 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.

15. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність	Множина розв'язків
1) $-3x + 8 \geq 5$	А) $(-\infty; +\infty)$
2) $2x + 4 \geq 0,5(4x - 2)$	Б) $(-\infty; 1]$
3) $4x - 6 \geq 7x - 3$	В) $[1; +\infty)$
	Г) $(-\infty; -1]$
	Д) $\emptyset$



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

- 1.° Доведіть нерівність $(x - 2)(x + 5) < x(x + 3)$.
2. Відомо, що $4 < x < 9$, $1 < y < 5$. Оцініть значення виразу:
 - 1)° $x + 3y$;
 - 2)° xy ;
 - 3)° $x - y$.
- 3.° Розв'яжіть нерівність:
 - 1) $\frac{2}{3}x \geq 4$;
 - 2) $4(x - 1) < 9x - 6$.
- 4.° Розв'яжіть систему нерівностей:
 - 1) $\begin{cases} 8x - 32 > 0, \\ -5x + 15 < 0; \end{cases}$
 - 2) $\begin{cases} 2x + 9 < 17, \\ 10 - 7x < 3. \end{cases}$
- 5.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:
 - 1) $\frac{x - 1}{2} - \frac{2x + 1}{8} < x + 2$;
 - 2) $(6x - 1)^2 - 4x(9x - 3) \leq 1$.
- 6.° Скільки цілих розв'язків має система нерівностей

$$\begin{cases} x - \frac{x - 2}{3} \geq \frac{x - 3}{4} - \frac{x - 1}{2}, \\ 1 - 0,5x > x - 4? \end{cases}$$
- 7.° При яких значеннях змінної має зміст вираз

$$\sqrt{6a - 18} + \frac{1}{\sqrt{35 - 7a}}?$$
- 8.° Доведіть нерівність $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 1 \geq 0$.

**ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1****Порівняння чисел**

Число a вважають більшим за число b , якщо різниця $a - b$ є додатним числом.

Число a вважають меншим від числа b , якщо різниця $a - b$ є від'ємним числом.

Основні властивості числових нерівностей

Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.

Якщо $a > b$ і c — будь-яке число, то $a + c > b + c$.

Якщо $a > b$ і c — додатне число, то $ac > bc$.

Якщо $a > b$ і c — від'ємне число, то $ac < bc$.

Якщо $a > b$ і $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Додавання і множення числових нерівностей

Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Якщо $a > b$, $c > d$ і a , b , c , d — додатні числа, то $ac > bd$.

Розв'язок нерівності з однією змінною

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність.

Рівносильні нерівності

Нерівності називають рівносильними, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків.

Правила розв'язування нерівностей з однією змінною

- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

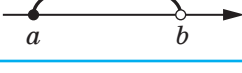
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Розв'язування системи нерівностей з однією змінною

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює кожен нерівність системи в правильну числову нерівність.

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає, тобто знайти множину її розв'язків.

Числові проміжки

Нерівність	Проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$	
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	



§ 2 КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

У цьому параграфі ви повторите й розширите свої знання про функцію та її властивості.

Дізнаєтесь, яку функцію називають квадратичною, яка фігура є її графіком, вивчите властивості квадратичної функції.

Навчитесь застосовувати властивості квадратичної функції.

Розширите свої знання про системи рівнянь із двома змінними, методи їхнього розв'язування, набудете нових навичок розв'язування систем рівнянь.

7. Повторення та розширення відомостей про функцію



У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни другої величини (залежної змінної).

Наприклад:

- у процесі зміни часу доби змінюється температура повітря (незалежна змінна — це час, залежна — температура повітря);
- зі збільшенням відстані, яку проїхав автомобіль, зменшується кількість пального в його баці (незалежна змінна — відстань, залежна — кількість пального);
- у разі зміни кількості глядачів у кінотеатрі змінюється прибуток (незалежна змінна — кількість глядачів, залежна — прибуток);
- унаслідок зміни швидкості автомобіля змінюється довжина гальмівного шляху (незалежна змінна — швидкість, залежна — гальмівний шлях).

Вивчення цих процесів потребує створення їхніх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

Із цим поняттям ви ознайомилися в 7 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція** — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y .

Наприклад:

- X — множина дійсних чисел. Застосуємо таке правило: кожне число з множини X помножимо на 2. Тоді множина X і це правило задають знайому вам функцію, яку називають пряма пропорційність;
- X — множина дійсних чисел, не рівних нулю. Застосуємо таке правило: кожному числу з множини X ставимо у відповідність число, обернене до нього. Тоді множина X і це правило задають знайому вам функцію, яку називають обернена пропорційність.



Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x , залежну — буквою y , функцію (правило) — буквою f . Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x . Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Множину всіх значень, яких набуває аргумент, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Так, областю визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ є проміжок $(0; +\infty)$, тобто $D(y) = (0; +\infty)$.

У функціональній залежності кожному значенню аргументу x відповідає певне значення залежної змінної y . Значення залежної змінної ще називають **значенням функції** і позначають $f(x)$. Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$.

чають $E(f)$ або $E(y)$. Так, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є проміжок $[0; +\infty)$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за яким можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Функцію можна задати одним із таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Наприклад, кожній дитині в класі поставимо у відповідність її улюблений колір веселки. (Будемо вважати, що кожна дитина цього класу має лише один улюблений колір і кожний колір веселки подобається хоча б одній дитині.) Ми задали функцію описово. У ній: область визначення — це множина дітей цього класу, а область значень — це множина кольорів веселки: червоний, оранжевий, жовтий, зелений, блакитний, синій, фіолетовий.



Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Такий спосіб задання функції називають **аналітичним**. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функцію задано формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її область визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

ЖА1 Як за допомогою програми *GeoGebra* будувати графіки деяких функцій, ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



У таблиці наведено функції, які ви вивчали в 7 і 8 класах.

Функція	Область визначення	Область значень	Графік
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	Якщо $k \neq 0$, то $(-\infty; +\infty)$; якщо $k = 0$, то область значень складається з одного числа b	Пряма
$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	Множина, яка складається з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	Множина, яка складається з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	Гіпербола
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Парабола
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Вітка параболи



1. Що називають аргументом функції? 2. Що називають областю визначення функції? 3. Що називають областю значень функції? 4. Що треба вказати, щоб функція вважалася заданою? 5. Які способи задання функції ви знаєте?



ВПРАВИ

7.1.° Функцію задано формулою $f(x) = -2x^2 + 5x$.

- 1) Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-5)$.
- 2) Знайдіть значення аргументу, при яких значення функції дорівнює: 0; 2; -3.
- 3) Чи є правильною рівність: $f(-1) = 7$; $f(4) = -12$?

7.2.° Функцію задано формулою $f(x) = 3x - 2$.

- 1) Знайдіть: $f(3)$; $f(0)$; $f(-0,2)$; $f(1,6)$.
- 2) Знайдіть значення x , при якому: $f(x) = 10$; $f(x) = -6$; $f(x) = 0$.

7.3.° Кожному натуральному числу, більшому за 10, але меншому від 20, поставили у відповідність остачу при діленні цього числа на 5.

- 1) Яким способом задано цю функцію?
- 2) Яка область значень цієї функції?
- 3) Задайте цю функцію таблично.

7.4.° Функцію задано формулою $y = 0,4x - 2$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y :

x	2		-2,5	
y		-2		0,8

7.5.° Дано функцію $y = -\frac{16}{x}$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y :

x	2		-0,4	
y		0,8		-32

7.6.° На рисунку 7.1 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) $f(-3,5)$; $f(-2,5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
- 2) значення x , при яких $f(x) = -2,5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
- 3) область значень функції.

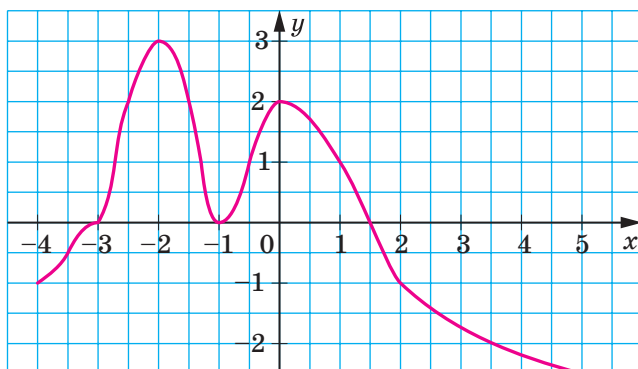


Рис. 7.1

7.7.° На рисунку 7.2 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2,5)$;
- 2) значення x , при яких $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 1,5$;
- 3) область значень функції.

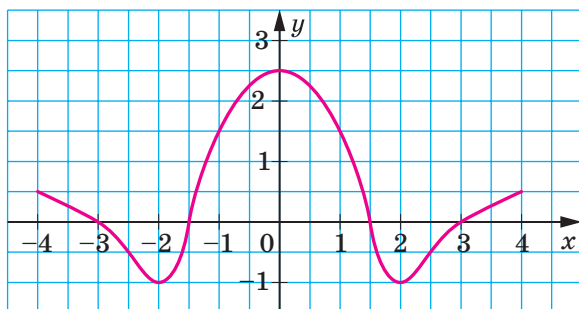


Рис. 7.2

7.8.° Знайдіть область визначення функції:

- 1) $f(x) = 7x - 15$;
- 2) $f(x) = \frac{8}{x+5}$;
- 3) $f(x) = \frac{x-10}{6}$;
- 4) $f(x) = \sqrt{x-9}$;
- 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;
- 6) $f(x) = \frac{10}{x^2-4}$;
- 7) $f(x) = \frac{6x+11}{x^2-2x}$;
- 8) $f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}$.

7.9.° Знайдіть область визначення функції:

- 1) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$;
- 2) $f(x) = \frac{9}{x^2+16}$;
- 3) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2-6x+8}$;
- 4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}$;
- 5) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;
- 6) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

7.10.° Побудуйте графік функції:

- 1) $f(x) = -2x + 3$;
- 2) $f(x) = -\frac{1}{4}x$;
- 3) $f(x) = 3$;
- 4) $f(x) = -\frac{6}{x}$.

7.11.° Побудуйте графік функції:

- 1) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$;
- 2) $f(x) = \frac{8}{x}$.

7.12.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

$$1) f(x) = \frac{1}{6}x - 7;$$

$$3) g(x) = 9 - x^2;$$

$$2) f(x) = \frac{20 + 4x}{3x - 5};$$

$$4) \varphi(x) = x^2 + 2x - 3.$$

7.13.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

$$1) h(x) = 9 - 10x; \quad 2) p(x) = 4x^2 + x - 3; \quad 3) s(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}.$$

7.14.* Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2 - 5, & \text{якщо } -1 < x < 4, \\ 11, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6,4)$.

7.15.* Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 6, & \text{якщо } x \leq -3, \\ x^2, & \text{якщо } -3 < x < 1, \\ x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

7.16.* Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ -x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

7.17.* Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{x+2}{x-5};$$

$$3) f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x^2-9};$$

$$2) f(x) = \frac{x}{|x|-7};$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \frac{4x-3}{x^2-7x+6}.$$

7.18.* Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{2}{x+1};$$

$$2) f(x) = \sqrt{8-x} + \frac{4}{x^2-8x}.$$

7.19.** Знайдіть область значень функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x} - 1;$$

$$4) f(x) = |x| + 2;$$

$$2) f(x) = 5 - x^2;$$

$$5) f(x) = \sqrt{-x^2};$$

$$3) f(x) = -7;$$

$$6) f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}.$$

7.20.* Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = x^2 + 3$;

3) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$;

7.21.* Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел 1 і 2;

2) множина всіх чисел, не менших від 5;

3) множина всіх чисел, не більших за 10, крім числа -1 ;

4) множина, яка складається з одного числа -4 .

7.22.* Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел -4 і 4 ;

2) множина всіх чисел, не менших від 2, крім числа 4.

7.23.* Як ви думаєте, чи існує функція:

1) область визначення та область значень якої складається з одного числа;

2) область визначення якої — множина дійсних чисел, а область значень складається лише з одного числа?

Обговоріть ці питання у класі.

7.24.* Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 9}$.

2) $f(x) = \frac{12x - 72}{x^2 - 6x}$;

7.25.* Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$;

2) $f(x) = \frac{x^3}{x}$.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

7.26. Ціна двох шаф була однаковою. Ціну першої шафи спочатку підвищили на 20 %, а потім знизили на 10 %. Ціну другої шафи, навпаки, спочатку знизили на 10 %, а потім підвищили на 20 %. Ціна якої шафи стала більшою?

7.27. До розчину масою 200 г, який містив 12 % солі, додали 20 г солі. Яким став відсотковий вміст солі в новому розчині?

7.28. У саду ростуть яблуні та вишні, причому вишні становлять 20 % усіх дерев. Скільки відсотків становить кількість яблунь від кількості вишень?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.29. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - x - 12$;
- 2) $-x^2 + 2x + 35$;
- 3) $6x^2 + 11x - 2$;
- 4) $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 6$.

7.30. Відстань між містами A і B становить 120 км. Через 2 год після виїзду з міста A вантажний автомобіль затримався біля залізничного переїзду на 6 хв. Щоби прибути в місто B у запланований час, він збільшив швидкість на 12 км/год. З якою швидкістю рухався автомобіль після затримки?



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

7.31. Натуральне число n має рівно 100 різних натуральних дільників (включаючи 1 і n). Знайдіть їхній добуток.

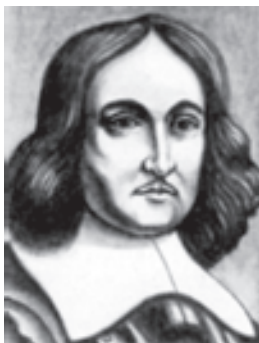


КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

З історії розвитку поняття функції

Означення функції, яким ви користуєтеся на даному етапі вивчення математики, з'явилося порівняно нещодавно — у першій половині XIX ст. Воно формувалося більше ніж 200 років під впливом бурхливих суперечок видатних математиків кількох поколінь.

Досліджувати функціональні залежності між величинами почали ще стародавні вчені. Цей пошук знайшов відображення у відкритті формул для обчислення площ і об'ємів деяких фігур. Прикладами табличного задання функцій можуть слугувати астрономічні таблиці вавилонян, стародавніх греків і арабів.



П'єр Ферма
(1601–1665)



Рене Декарт
(1596–1650)



Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Проте лише в першій половині XVII ст. своїм відкриттям методу координат видатні французькі математики П'єр Ферма і Рене Декарт заклали основи для виникнення поняття функції. У своїх працях вони досліджували зміну ординати точки залежно від зміни її абсциси.



Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)

Значну роль у формуванні поняття функції відіграли роботи великого англійського вченого Ісаака Ньютона. Під функцією він розумів величину, яка змінює своє значення з плином часу.

Термін «функція» (від латин. *functio* — здійснення, виконання) запровадив німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц. Він і його учень, швейцарський математик Йоганн Бернуллі, під функцією розуміли формулу, яка пов'язує одну змінну з іншою, тобто вони ототожнювали функцію з одним зі способів її задання.

Подальшому розвитку поняття функції багато в чому сприяло з'ясування істини в багаторічному спорі видатних математиків Леонарда Ейлера і Жана Лерона д'Аламбера, одним із предметів якого було з'ясування сутності цього поняття.

У результаті було сформовано більш загальний погляд на функцію як залежність однієї змінної величини від другої, у якому це поняття жорстко не пов'язувалося зі способом задання функції.



Йоганн Бернуллі
(1667–1748)



Леонард Ейлер
(1707–1783)



Жан Лерон д'Аламбер
(1717–1783)

У 30-х рр. XIX ст. ідеї Ейлера набули подальшого розвитку. Саме тоді з'явилося таке означення: змінну величину y називають функцією змінної величини x , якщо кожному значенню величини x відповідає єдине значення величини y .

Таке означення функції можна й сьогодні зустріти в шкільних підручниках. Проте більш сучасний погляд — це трактування функції як *правила, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної*.

Коли на межі XIX і XX ст. виникла теорія множин і стало зрозумілим, що елементами області визначення та області значень зовсім не обов'язково мають бути числа, то під функцією стали розуміти *правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y* .

8. Властивості функції



Часто про властивості об'єкта можна робити висновки за його зображенням: фотографією, рентгенівським знімком, рисунком тощо.

«Зображенням» функції може слугувати її графік. Покажемо, як графік функції дає змогу визначити певні її властивості.

На рисунку 8.1 зображено графік деякої функції $y = f(x)$.

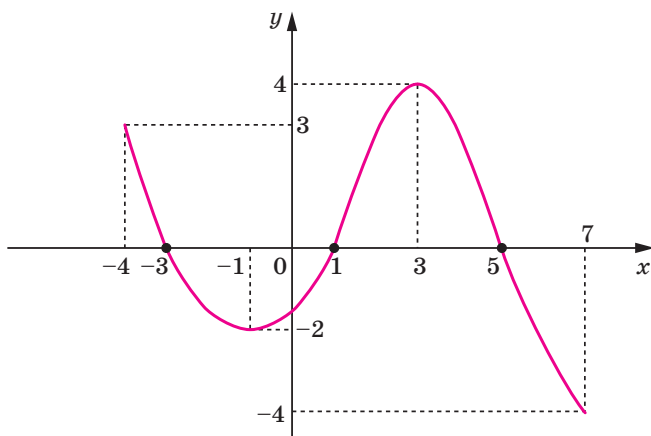


Рис. 8.1

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнюють нулю.

Означення:

Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.

Так, числа -3 , 1 , 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3]$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3]$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від'ємних.

Кожний із зазначених проміжків називають **проміжком знакосталості** функції f .

Проміжки знакосталості функції використовують синоптики, коли описують температуру повітря впродовж доби, тижня або місяця. Наприклад, якщо протягом кількох днів температура не піднімалася вище нуля, то кажуть, що на цьому проміжку часу вона була від'ємною. Цим поняттям та-

кож користуються економісти, коли аналізують прибуток або збиток підприємства. Якщо протягом певного періоду значення прибутку були від'ємними (тобто підприємство працювало у збиток), а в інший період — додатними (тобто підприємство отримувало прибуток), то кожен із цих відрізків часу — це проміжок знакосталості функції «прибуток у часі».

Означення:

Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.

Зазначимо, що, наприклад, проміжок $(0; 5)$ не є проміжком знакосталості даної функції.

Зауваження. Під час пошуку проміжків знакосталості функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини. Наприклад, проміжок $(-2; -1)$ є проміжком знакосталості функції f (рис. 8.1), але до відповіді потрібно включити проміжок $(-3; 1)$, який містить проміжок $(-2; -1)$.

Якщо переміщатися по осі абсцис від -4 до -1 , то можна помітити, що графік функції «йде вниз», тобто значення функції зменшуються. Говорять, що на проміжку $[-4; -1]$ функція спадає. Зі збільшенням x від -1 до 3 графік функції «йде вгору», тобто значення функції збільшуються. Говорять, що на проміжку $[-1; 3]$ функція зростає.

Означення:

Функцію f називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

Означення:

Функцію f називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Часто використовують і такі формулювання.

Означення:

Функцію називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу із цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Означення:

Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу із цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою**. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною**.

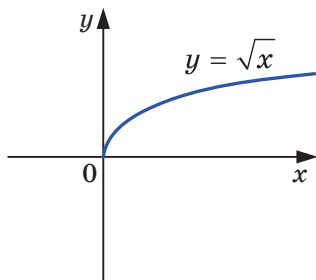


Рис. 8.2

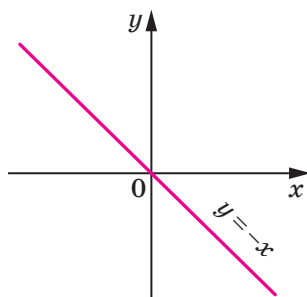


Рис. 8.3

Наприклад, на рисунку 8.2 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Ця функція є зростаючою. На рисунку 8.3 зображено графік спадної функції $y = -x$. На рисунку 8.1 зображено графік функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

Із процесами, які описуються зростаючими або спадними функціями, ми часто зустрічаємося в повсякденному житті. Ось кілька прикладів.

- **Температура чаю зменшується із часом.** Чим більше минає часу після того, як чай налили в чашку, тим нижчою стає його температура¹. Цей приклад описує **спадна функція**, у якої аргумент — **час**.
- **Атмосферний тиск зменшується із підйомом альпініста на гору.** Чим вища висота, тим нижчим є тиск. Цей приклад описує **спадна функція**, у якої аргумент — **висота**.
- **Загальна вартість покупки залежить від кількості товару.** Чим більше одиниць товару в кошику, тим більшою є загальна сума, яку треба сплатити.



ПРИКЛАД 1. Доведіть, що функція $y = x^2$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(-\infty; 0]$, причому $x_2 > x_1$. Покажемо, що $x_2^2 < x_1^2$, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Маємо: $x_2 > x_1$, звідси $-x_2 < -x_1$. Обидві частини останньої нерівності є невід'ємними числами. Тоді за властивістю числових нерівностей можна записати, що $(-x_2)^2 < (-x_1)^2$, тобто $x_2^2 < x_1^2$. ◀

Зазначимо, що в подібних випадках говорять: проміжок $(-\infty; 0]$ є **проміжком спадання функції** $y = x^2$. Аналогічно можна довести, що проміжок $[0; +\infty)$ є **проміжком зростання функції** $y = x^2$.

У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

ПРИКЛАД 2. Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу, причому $x_2 > x_1$.

¹ Йдеться про проміжок часу доти, доки температура чаю дорівнюватиме температурі навколишнього середовища.

Маємо:

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$.

Тоді якщо $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$. Отже, при $k > 0$ дана функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. Отже, при $k < 0$ дана функція є спадною. ◀

ПРИКЛАД 3. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_2 > x_1$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно можна довести, що функція $f(x)$ спадає на проміжку $(-\infty; 0)$. ◀

Проте не можна стверджувати, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на всій області визначення, тобто є спадною. Справді, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_2 > x_1$ не випливає, що $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$.



1. Яке значення аргументу називають нулем функції? 2. Поясніть, що називають проміжком знакосталості функції.
3. Яку функцію називають зростаючою на деякому проміжку?
4. Яку функцію називають спадною на деякому проміжку?
5. Яку функцію називають зростаючою? 6. Яку функцію називають спадною?



ВПРАВИ

8.1.° Розгляньте рисунок 8.4 і вкажіть, у якому випадку зображено графік функції, яка:

- 1) не має нулів;
- 2) має один нуль;
- 3) має два нулі;
- 4) є зростаючою;
- 5) є спадною.

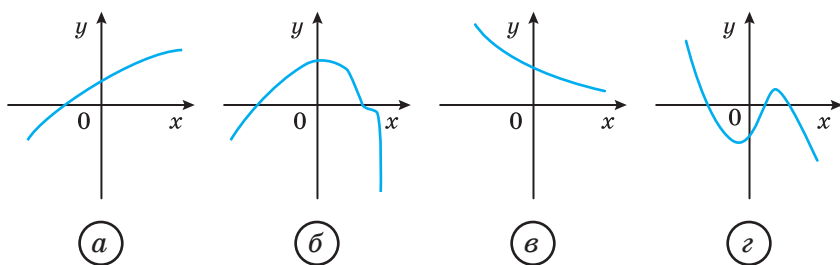


Рис. 8.4

8.2.° На рисунку 8.5 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) при яких значеннях аргументу значення функції є додатними;
- 3) проміжки зростання та проміжки спадання функції.

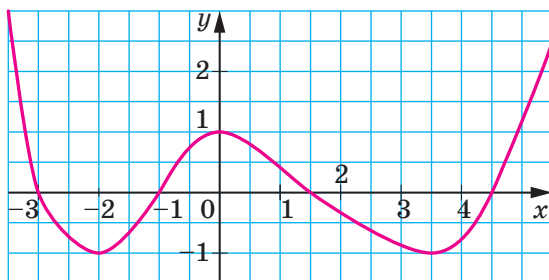


Рис. 8.5

8.3.° На рисунку 8.6 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) при яких значеннях аргументу значення функції є від'ємними;
- 3) проміжки зростання та проміжки спадання функції.

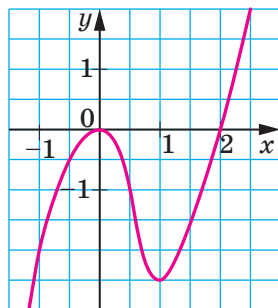


Рис. 8.6

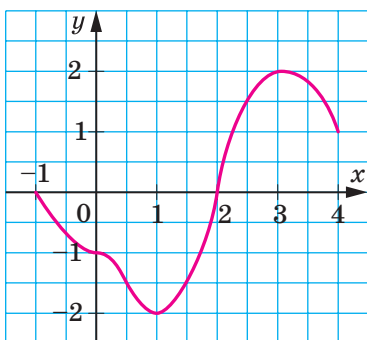


Рис. 8.7

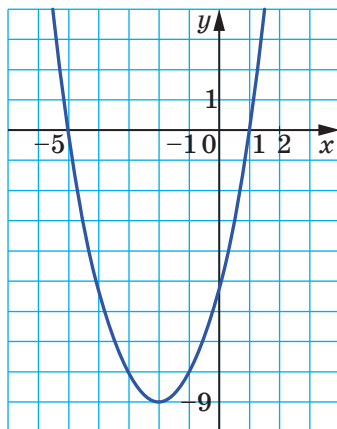


Рис. 8.8

8.4.° На рисунку 8.7 зображено графік функції, визначеної на проміжку $[-1; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) при яких значеннях x значення функції є від'ємними;
- 3) проміжки зростання та проміжки спадання функції.

8.5.° На рисунку 8.8 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Які з даних тверджень є правильними:

- 1) функція спадає на проміжку $(-\infty; -9]$;
- 2) $f(x) < 0$ при $-5 \leq x \leq 1$;
- 3) функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$;
- 4) $f(x) = 0$ при $x = -5$ і при $x = 1$;
- 5) функція на області визначення набуває найменшого значення при $x = -2$?

8.6.° На рисунку 8.9 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) значення x , при яких $y < 0$;
- 3) проміжок спадання функції;
- 4) область значень функції.

8.7.° Зростаючою чи спадною є функція:

- 1) $y = 9x - 4$;
- 2) $y = -4x + 10$;
- 3) $y = 12 - 3x$;
- 4) $y = -x$;
- 5) $y = \frac{1}{6}x$;
- 6) $y = 1 - 0,3x$?

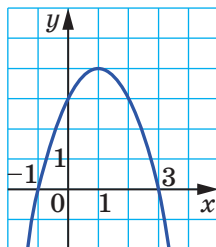


Рис. 8.9

8.8.° Знайдіть нулі функції:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) $f(x) = 0,2x + 3;$ | 4) $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3};$ |
| 2) $g(x) = 35 - 2x - x^2;$ | 5) $f(x) = x^3 - 4x;$ |
| 3) $\varphi(x) = \sqrt{x + 3};$ | 6) $f(x) = x^2 + 1.$ |

8.9.° Знайдіть нулі функції:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 12;$ | 4) $f(x) = -5;$ |
| 2) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1;$ | 5) $f(x) = \frac{3 - 0,2x}{x + 1};$ |
| 3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4};$ | 6) $f(x) = x^2 - x.$ |

8.10.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

- | | |
|--------------------|---------------------------|
| 1) $y = 5x - 15;$ | 3) $y = x^2 - 2x + 1;$ |
| 2) $y = -7x - 28;$ | 4) $y = \frac{9}{3 - x}.$ |

8.11.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

- | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| 1) $y = -4x + 8;$ | 2) $y = -x^2 - 1;$ | 3) $y = \sqrt{x} + 2.$ |
|-------------------|--------------------|------------------------|

8.12.* Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, нулями якої є числа:

- | | |
|----------------|-----------------------|
| 1) -2 і $5;$ | 2) $-4, -1, 0$ і $4.$ |
|----------------|-----------------------|

8.13.* Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку $[-5; 5]$, нулями якої є числа $-3, 0$ і $3.$

8.14.* Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку $[-4; 3]$, такої, що:

- 1) функція зростає на проміжку $[-4; -1]$ і спадає на проміжку $[-1; 3];$
- 2) функція спадає на проміжках $[-4; -2]$ і $[0; 3]$ та зростає на проміжку $[-2; 0].$

8.15.* Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, яка зростає на проміжках $(-\infty; 1]$ і $[4; +\infty)$ та спадає на проміжку $[1; 4].$

8.16.** Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -2x + 8, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання та проміжки спадання.

8.17.* Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x < -4, \\ x, & \text{якщо } -4 \leq x \leq 4, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання та проміжки спадання.

8.18.* При яких значеннях a функція $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2 + a$ має два нулі?

8.19.* При яких значеннях a функція $y = x^2 + 6x + a$ не має нулів?

8.20.* При якому найбільшому цілому значенні n функція $y = (8 - 3n)x - 7$ є зростаючою?

8.21.* При яких значеннях m функція $y = mx - m - 3 + 2x$ є спадною?

8.22.* Функція $y = f(x)$ є спадною. Як ви думаєте зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \frac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

Обговоріть це питання у класі.

8.23.* Функція $y = f(x)$ зростає на деякому проміжку. Зростаючою чи спадною на цьому проміжку є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

8.24. Розглядаючи касовий чек після покупки в магазині, ви, мабуть, звертали увагу на рядочок у ньому: «ПДВ $A = 20\%$ ». А чи знаєте ви, що таке ПДВ? Податок на додану вартість (ПДВ) є одним із ключових елементів системи оподаткування в Україні. Цей непрямий податок відіграє важливу роль у формуванні державного бюджету. Він включається в ціну товарів і послуг і сплачується кінцевим споживачем. Сума ПДВ додається до ціни товару чи послуги. За Податковим кодексом України у 2025 р. ставка ПДВ може становити 20% , або 14% ,

або 7 %. Також існують операції, що оподатковуються за нульовою ставкою або звільнені від ПДВ.

Уявімо, що ви купили пальто, яке без урахування ПДВ коштує 3200 грн. Скільки ви маєте заплатити за нього з урахуванням ПДВ, якщо цей товар підпадає під стандартну ставку цього податку в розмірі 20 %?

8.25. Фірма продала лікарські засоби і товари медичного призначення, ставка ПДВ на які становить 7 %, отримавши 560 000 грн. Скільки гривень податку на додану вартість має сплатити фірма?

8.26. Ставка ПДВ на деякі види сільськогосподарської продукції становить 14 %. Фірма, яка продає таку продукцію, сплатила 42 000 грн податку на додану вартість. Скільки гривень становить вартість проданої продукції без урахування ПДВ?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.27. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 + x - 6}{7x + 21}$; 2) $\frac{2y - 16}{8 + 7y - y^2}$; 3) $\frac{3a^2 + a - 2}{4 - 9a^2}$.

8.28. Два екскаватори різних моделей вирили котлован за 8 год. Перший екскаватор, працюючи самостійно, може вирити такий котлован у 4 рази швидше, ніж другий. За скільки годин може вирити такий котлован кожний екскаватор, працюючи самостійно?

9. Побудова графіка функції $y = ax^2$



У 8 класі ви ознайомилися з функцією $y = x^2$ і дізналися, що її графіком є фігура, яку називають параболою (рис. 9.1).

Покажемо, як за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$.

Побудуємо, наприклад, графік функції $y = 2x^2$.

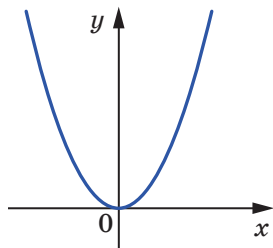


Рис. 9.1

Складемо таблицю значень функцій $y = x^2$ і $y = 2x^2$ при одних і тих самих значеннях аргументу:

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

Ця таблиця підказує, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; 2y_0)$ графіка функції $y = 2x^2$. А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = 2x^2$ є відповідною єдиній точці $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ графіка функції $y = x^2$.

Тому всі точки графіка функції $y = 2x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, помноженою на 2 (рис. 9.2).

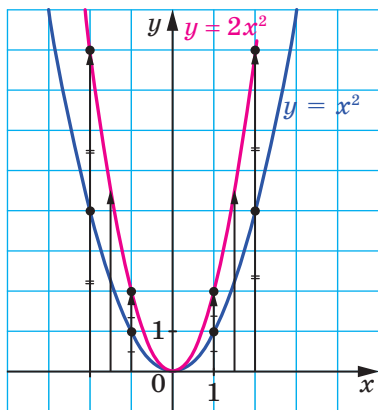


Рис. 9.2

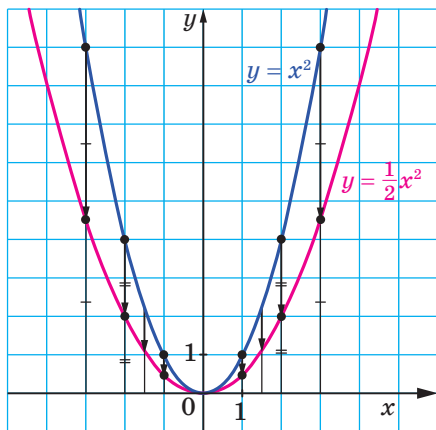


Рис. 9.3

Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$. Зрозуміло, що всі точки графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, помноженою на $\frac{1}{2}$ (рис. 9.3).

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = -x^2$.

Кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; -y_0)$ графіка функції $y = -x^2$. А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = -x^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1; -y_1)$ графіка функції $y = x^2$.

Тому всі точки графіка функції $y = -x^2$ можна отримати, замінивши кожную точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, помноженою на -1 (рис. 9.4).

Розглянуті приклади показують, як, користуючись графіком функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = ax^2$.

ЖА1 Графік функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$, можна отримати, замінивши кожную точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на a .



На рисунку 9.5 показано, як можна за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = -\frac{1}{2}x^2$.

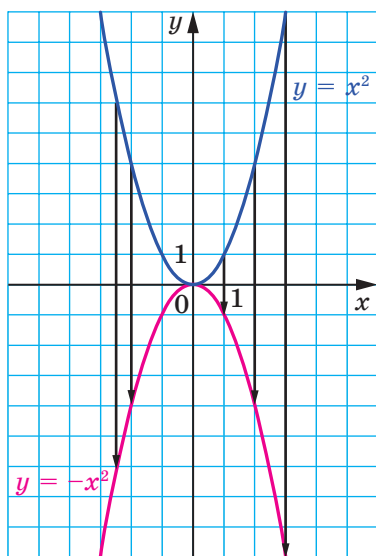


Рис. 9.4

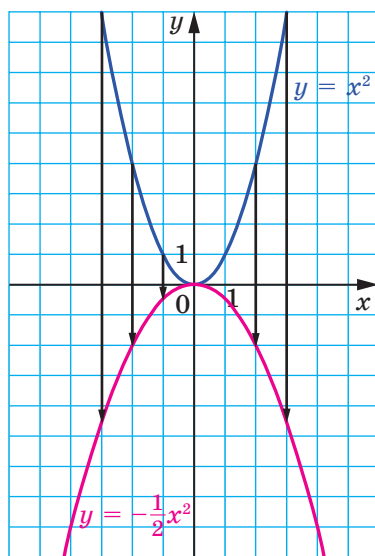


Рис. 9.5

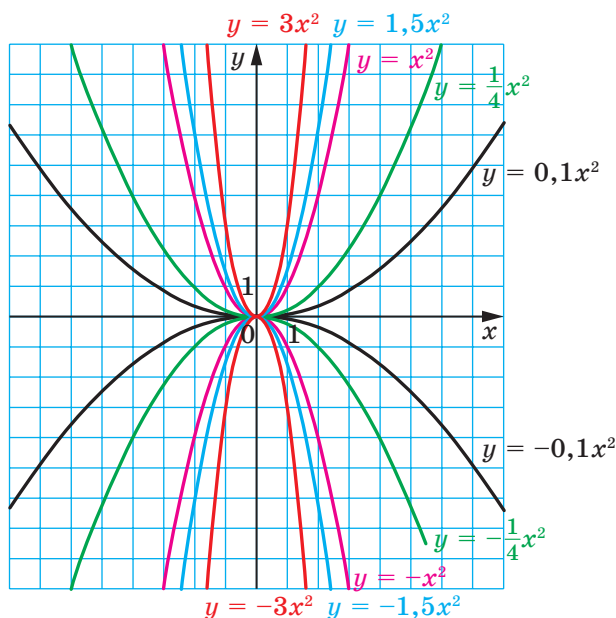


Рис. 9.6

На рисунку 9.6 зображено графіки функцій $y = ax^2$ при деяких значеннях a . Кожний із цих графіків, як і графік функції $y = x^2$, називають **параболою**. Точка $(0; 0)$ є вершиною кожної із цих парабол.

Якщо $a > 0$, то вітки параболі напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболі напрямлені вниз.

Часто замість вислову «Дано функцію $y = ax^2$ » уживають вислів «Дано параболу $y = ax^2$ ».

У таблиці наведено властивості функції $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Властивість	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знаку	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

Властивість	$a > 0$	$a < 0$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$



1. Яка фігура є графіком функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$? **2.** Яка точка є вершиною параболи $y = ax^2$? **3.** Як напрямлені вітки параболи $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$? **4.** Яка область визначення функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$? **5.** Яка область значень функції $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$? **6.** На якому проміжку зростає, а на якому проміжку спадає функція $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?



ВПРАВИ

9.1.° Чи належить графіку функції $y = -25x^2$ точка:

- 1) $A(2; -100)$; 3) $C\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$;
 2) $B(-2; 100)$; 4) $D(-1; 25)$?

9.2.° Чи належить графіку функції $y = \frac{1}{8}x^2$ точка:

- 1) $A(8; 4)$; 2) $B\left(-1; -\frac{1}{8}\right)$; 3) $C(-4; -1)$?

9.3.° У яких координатних чвертях знаходиться графік функції $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?

9.4.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину параболи $y = 3x^2$ і прямої:

- 1) $y = 300$; 2) $y = 42x$; 3) $y = -150x$; 4) $y = 6 - 3x$.

9.5.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

- 1) $y = \frac{1}{3}x^2$ і $y = 3$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$ і $y = x + 4$.

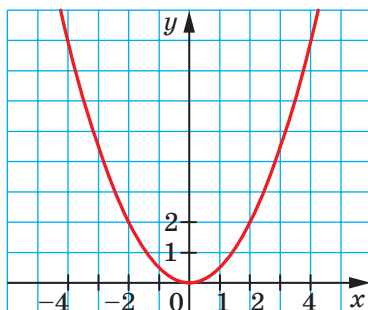
9.6.° При яких значеннях a точка $A(a; 16)$ належить графіку функції $y = 4x^2$?

9.7.° При яких значеннях b точка $B(-2; b)$ належить графіку функції $y = -0,2x^2$?

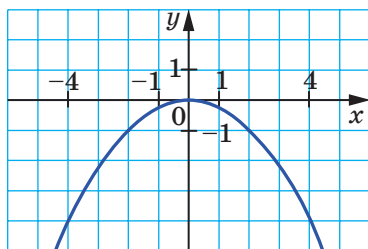
9.8.° Відомо, що точка $M(3; -6)$ належить графіку функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a .

9.9.° Відомо, що точка $K(-5; 10)$ належить графіку функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a .

↔ **9.10.*** На рисунку 9.7 зображено графік функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a .



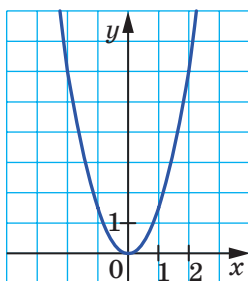
(a)



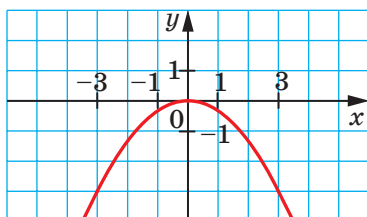
(б)

Рис. 9.7

9.11.* На рисунку 9.8 зображено графік функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a .



(a)



(б)

Рис. 9.8

9.12.* Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{4}x^2$.

9.13.* Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції $y = 3x^2$.

9.14.** Побудуйте графік функції: $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq -2, \\ -2x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції.

9.15.* Побудуйте графік функції: $y = \begin{cases} -2, & \text{якщо } x < -1, \\ -2x^2, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 0, \\ 2x^2, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

9.16. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{m-n}{m^2+mn} - \frac{m}{mn+n^2} \right) : \left(\frac{n^2}{m^3-mn^2} + \frac{1}{m+n} \right) = \frac{n-m}{n}.$$

9.17. Якого найменшого значення може набути даний вираз і при якому значенні змінної:

- | | |
|--------------------|-----------------------|
| 1) $(x-6)^2 + 3$; | 3) $x^2 + 2x - 6$; |
| 2) $(x+4)^2 - 5$; | 4) $x^2 - 10x + 18$? |



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

9.18. Щоби пофарбувати одну грань кубика, потрібно 10 с. За який найменший час 6 людей можуть пофарбувати 101 кубик? (Двоє людей не можуть одночасно фарбувати один кубик.)

10. Побудова графіків функцій

$$y = x^2 + b \text{ і } y = (x + b)^2$$



Покажемо, як, використовуючи графік функції $y = x^2$, можна побудувати графік функції $y = x^2 + 2$.

Складемо таблицю значень цих функцій при одних і тих самих значеннях аргументу.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

Ця таблиця підказує, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; y_0 + 2)$ графіка функції $y = x^2 + 2$. А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції

$y = x^2 + 2$ є відповідною єдиній точці $(x_1; y_1 - 2)$ графіка функції $y = x^2$. Тому всі точки графіка функції $y = x^2 + 2$ можна отримати, замінивши кожену точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, збільшеною на 2 (рис. 10.1).

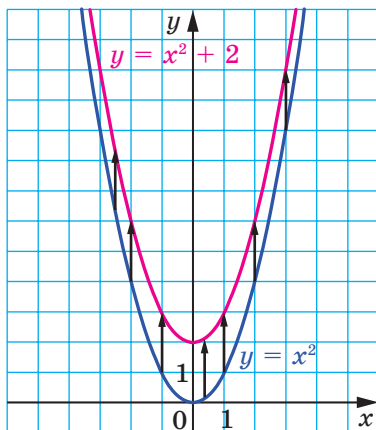


Рис. 10.1

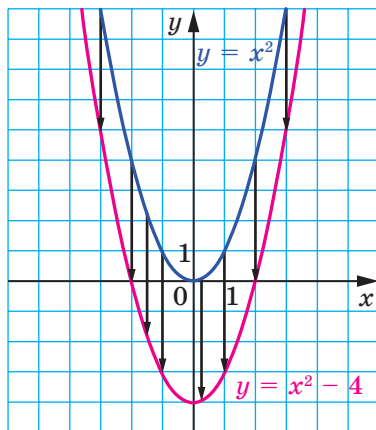


Рис. 10.2

Говорять, що графік функції $y = x^2 + 2$ отримано в результаті **паралельного перенесення**¹ графіка функції $y = x^2$ на дві одиниці вгору вздовж осі ординат.

Аналогічно, графік функції $y = x^2 - 4$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на 4 одиниці вниз уздовж осі ординат (рис. 10.2).

Ці приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = x^2 + b$.

ЖА1 Графік функції $y = x^2 + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі ординат на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць вниз, якщо $b < 0$.



Очевидно, що в результаті паралельного перенесення отримуємо фігуру, яка дорівнює фігурі, що є графіком початкової функції. Наприклад, кожний із графіків функцій $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 4$ дорівнює параболі $y = x^2$.

¹ Пізніше на уроках геометрії ви більш докладно ознайомитеся з паралельним перенесенням.

Тому графіками функцій $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 4$ також є параболи.

Покажемо, як можна за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = (x + 2)^2$.

Нехай точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = x^2$, тобто $x_0^2 = y_0$. Доведемо, що точка $(x_0 - 2; y_0)$ належить графіку функції $y = (x + 2)^2$. Знайдемо значення цієї функції у точці з абсцисою $x_0 - 2$. Маємо: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$. Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0 - 2; y_0)$ графіка функції $y = (x + 2)^2$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = (x + 2)^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1 + 2; y_1)$ графіка функції $y = x^2$.

Тому всі точки графіка функції $y = (x + 2)^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою ординатою та з абсцисою, зменшеною на 2 (рис. 10.3).

Говорять, що графік функції $y = (x + 2)^2$ отримано в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 2 одиниці вліво.

Покажемо, як за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = (x - 2)^2$. Легко встановити (зробить це самостійно), що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0 + 2; y_0)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$ і кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1 - 2; y_1)$ графіка функції $y = x^2$. Тому графік функції $y = (x - 2)^2$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 2 одиниці вправо (рис. 10.4).

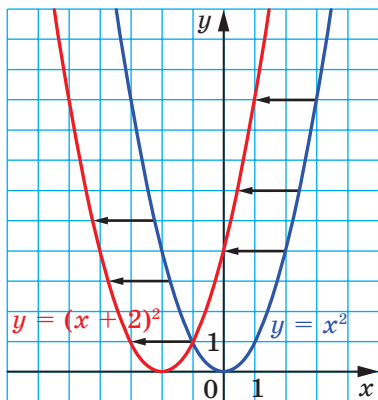


Рис. 10.3

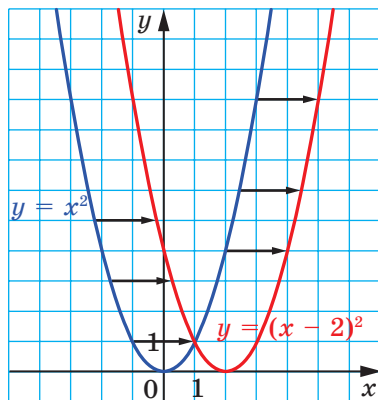


Рис. 10.4

Ці приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = (x + b)^2$.

ЖА2 Графік функції $y = (x + b)^2$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на b одиниць ліворуч, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць праворуч, якщо $b < 0$.



Зауважимо, що графіками функцій $y = (x + 2)^2$ і $y = (x - 2)^2$ є параболи, які дорівнюють параболі $y = x^2$.

ПРИКЛАД 1. Побудуйте графік функції $y = (x - 1)^2 + 3$.

Розв'язання. 1) Побудуємо графік функції $y = x^2$.

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 1 одиницю вправо. Отримаємо графік функції $y = (x - 1)^2$ (рис. 10.5).

3) Паралельно перенесемо графік функції $y = (x - 1)^2$ уздовж осі ординат на 3 одиниці вгору. Отримаємо графік функції $y = (x - 1)^2 + 3$ (див. рис. 10.5).

Описаний алгоритм побудови подамо у вигляді такої схеми:

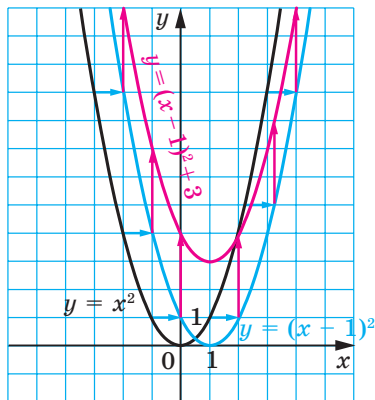
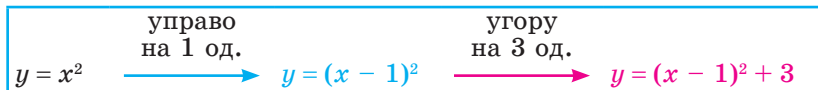


Рис. 10.5



ПРИКЛАД 2. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$.

Розв'язання. 1) Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 10.6).

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ уздовж осі абсцис на 3 одиниці вліво.

Отримаємо графік функції

$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 \text{ (див. рис. 10.6).}$$

3) Паралельно перенесемо графік функції

$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2$$

уздовж осі ординат на 1 одиницю вниз. Отримаємо шуканий графік (див. рис. 10.6).

Схема побудови має такий вигляд:

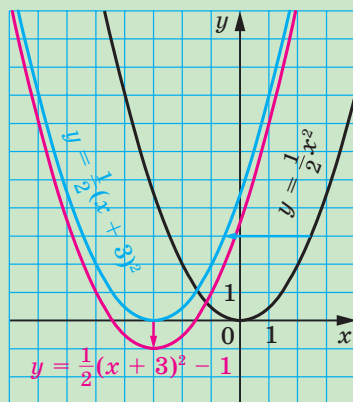


Рис. 10.6

$y = \frac{1}{2}x^2$	уліво на 3 од. →	$y = \frac{1}{2}(x+3)^2$	униз на 1 од. →	$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$
----------------------	--	--------------------------	--	------------------------------

З описаних перетворень випливає, що графіком функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$ є парабола, яка дорівнює параболі $y = \frac{1}{2}x^2$ і вершиною якої є точка $(-3; -1)$. ◀



1. Як можна отримати графік функції $y = x^2 + b$, використовуючи графік функції $y = x^2$? 2. Яка фігура є графіком функції $y = x^2 + b$? 3. Як можна отримати графік функції $y = (x + b)^2$, використовуючи графік функції $y = x^2$? 4. Яка фігура є графіком функції $y = (x + b)^2$?



ВПРАВИ

10.1.° Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:

- 1) на 6 одиниць угору вздовж осі ординат;
- 2) на 9 одиниць управо вздовж осі абсцис;
- 3) на 12 одиниць униз уздовж осі ординат;
- 4) на 7 одиниць уліво вздовж осі абсцис?

10.2.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 4 одиниці вправо:

- 1) $y = x^2 + 4$; 2) $y = x^2 - 4$; 3) $y = (x + 4)^2$; 4) $y = (x - 4)^2$?

10.3.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ уздовж осі ординат на 5 одиниць угору:

- 1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = (x + 5)^2$; 4) $y = (x - 5)^2$?

10.4.° Які координати має вершина параболи:

- 1) $y = x^2 + 8$; 3) $y = (x + 8)^2$;
2) $y = x^2 - 8$; 4) $y = (x - 8)^2$?

10.5.° Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:

- 1) на 2 одиниці вправо вздовж осі абсцис і на 3 одиниці вниз уздовж осі ординат;
2) на 1 одиницю вліво вздовж осі абсцис і на 1 одиницю вгору вздовж осі ординат?

10.6.° Які координати має вершина параболи:

- 1) $y = (x - 4)^2 + 3$; 3) $y = (x - 4)^2 - 3$;
2) $y = (x + 4)^2 + 3$; 4) $y = (x + 4)^2 - 3$?

10.7.° У якій координатній чверті знаходиться вершина параболи:

- 1) $y = (x + 10)^2 - 16$; 3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$; 4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

10.8.° Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (x - 5)^2$;
2) $y = x^2 + 4$; 4) $y = (x + 2)^2$.

10.9.° Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

- 1) $y = -x^2 + 1$; 3) $y = -(x - 2)^2$;
2) $y = -x^2 - 2$; 4) $y = -(x + 4)^2$.

10.10.° Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

- 1) $y = (x - 1)^2 + 2$; 2) $y = (x + 3)^2 - 2$.

10.11.° Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

- 1) $y = -(x + 1)^2 - 1$; 2) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

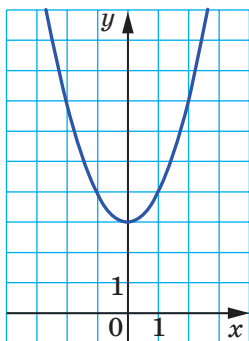
10.12.° Побудуйте графік функції $y = (x + 5)^2 - 9$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) нулі функції;
2) при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень;
3) проміжок зростання та проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

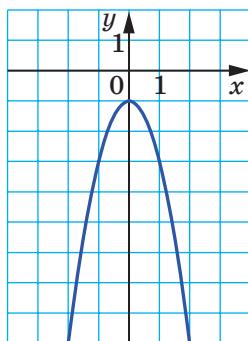
10.13.* Побудуйте графік функції $y = (x - 4)^2 - 4$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) при яких значеннях аргументу функція набуває від'ємних значень;
- 3) проміжок зростання та проміжок спадання функції;
- 4) область значень функції.

↔ **10.14.*** Задайте формулою виду $y = ax^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 10.7.



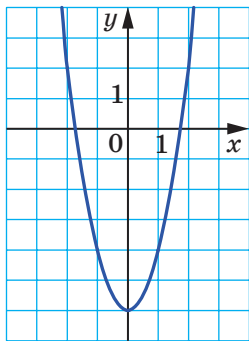
(a)



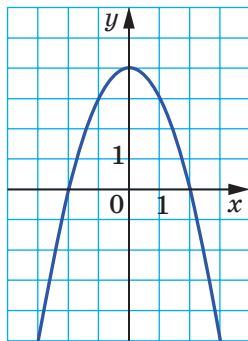
(б)

Рис. 10.7

10.15.* Задайте формулою виду $y = ax^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 10.8.



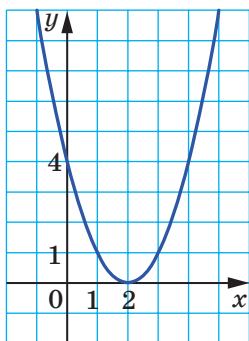
(a)



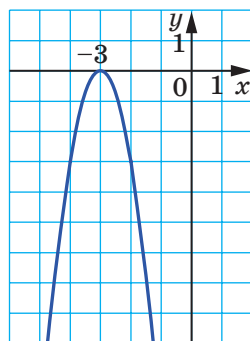
(б)

Рис. 10.8

10.16.** Задайте формулою виду $y = a(x + m)^2$ функцію, графік якої зображено на рисунку 10.9.



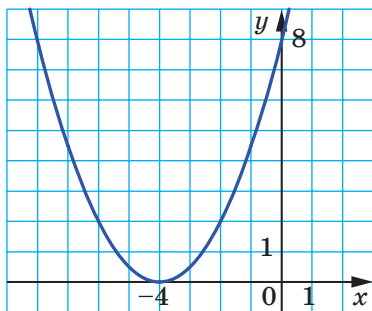
(a)



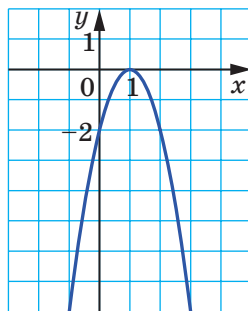
(б)

Рис. 10.9

10.17.** Задайте формулою виду $y = a(x + m)^2$ функцію, графік якої зображено на рисунку 10.10.



(a)



(б)

Рис. 10.10



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.18. Спростіть вираз:

1) $\frac{5a-3}{8a} + \frac{a+9}{4a};$

2) $\frac{5a-6b}{ab} + \frac{5b-5c}{bc};$

3) $\frac{8a+5b}{5ab^2} - \frac{2a-7b}{2a^2b};$

4) $\frac{m^2+4n^2}{8m^4n^4} - \frac{3m+4n}{6m^5n^2}.$



10.19. Запишіть у порядку зростання числа $0,5\sqrt{292}$ **В**, $0,1\sqrt{7000}$ **Б**, $5\sqrt{3}$ **З**, $6\sqrt{2}$ **Е**. Букви, що відповідають даним числам, утворюють прізвище видатного українського педагога, математика-методиста, літератора, автора багатьох шкільних підручників і посібників. Автори цього підручника пишаються тим, що навчалися у ЗВО (закладі вищої освіти) у цієї непересічної людини. Знайдіть в інтернеті інформацію про життя, наукову, педагогічну та літературну діяльність цього педагога, ознайомтеся з його творами.



11. Квадратична функція, її графік і властивості



Означення:

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратичною.

Квадратична функція не є для вас новою. Так, у 8 класі ви вивчали її окремий випадок, а саме функцію $y = x^2$. Функціональна залежність площі S круга від його радіуса r визначає квадратичну функцію $S(r) = \pi r^2$, яка є функцією виду $y = ax^2$. Із цією функцією ви ознайомилися в п. 9.

На уроках фізики ви ознайомилися з формулою $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, яка задає залежність висоти h , на якій знаходиться тіло, що його кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 , від часу руху t . Ця формула задає квадратичну функцію $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Квадратична функція може описувати деякі явища, пов'язані з економікою. Наприклад, залежність загального

доходу від ціни квитка на концерт. Якщо встановити дуже низьку ціну, квитки куплять багато людей, але загальний дохід буде невеликим. Якщо ж ціна буде надто високою, охочих прийти стане значно менше, і дохід знову буде низьким. Існує оптимальна ціна, за якої дохід буде найбільшим. Цей процес можна описати квадратичною функцією. Дослідивши її, можна визначити таку ціну квитка, яка забезпечить максимальний прибуток.

Струмені фонтана утворюють криву, форма якої нагадує графік квадратичної функції. Отже, настав час детальніше познайомитися із цією важливою та корисною функцією.



Світломузичний фонтан (м. Вінниця)

Функція $y = ax^2$, $a \neq 0$, є окремим видом квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Ви знаєте, що графіком функції $y = ax^2$ є парабола.

Має місце такий факт: графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є фігура, яка дорівнює графіку функції $y = ax^2$. Іншими словами:

графіком функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, є парабола, яка дорівнює параболі $y = ax^2$.

Із доведенням цього факту ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



Вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ напрямлені так само, як і вітки параболи $y = ax^2$: якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Загальне уявлення про графік квадратичної функції дають координати вершини параболи та напрямок її віток. Це уявлення буде тим повнішим, чим більше точок, які нале-

жать графіку, ми знатимемо. Тому можна будувати графік квадратичної функції за такою схемою:

1) *знайти абсцису вершини параболу за формулою*

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

2) *знайти ординату вершини параболу за формулою¹*

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a},$$

де D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, і позначити на координатній площині вершину параболу;

3) *визначити напрямок віток параболу;*

4) *знайти координати ще кількох точок, які належать шуканому графіку, зокрема координати точок перетину параболу з віссю абсцис (якщо дана функція має нулі), координати точки перетину параболу з віссю ординат; позначити ці точки на координатній площині;*

5) *провести через усі позначені точки плавну неперервну лінію.*

ПРИКЛАД. Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Користуючись графіком функції, знайдіть область її значень, проміжки зростання і спадання, проміжки знакостастості, найменше і найбільше значення функції.

Розв'язання. Дана функція є квадратичною. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

Знайдемо абсцису й ординату вершини параболу. Маємо:

$$x_0 = -\frac{4}{2} = -2, \text{ ордината вершини } y_0 = f(x_0) = f(-2) = -9.$$

Отже, точка $(-2; -9)$ — вершина параболу.

Знайдемо координати точок перетину параболу з віссю абсцис. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Звідси $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Отже, парабола перетинає вісь абсцис у точках $(-5; 0)$ і $(1; 0)$.

Знайдемо точку перетину параболу з віссю ординат.

¹ Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запам'ятовувати необов'язково. Достатньо обчислити значення функції $y = ax^2 + bx + c$ у точці з абсцисою

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Маємо: $f(0) = -5$. Парабола перетинає вісь ординат у точці $(0; -5)$. Позначимо знайдені чотири точки параболи на координатній площині (рис. 11.1).

Тепер бачимо, що доцільно знайти значення даної функції в точках $-1, -3, -4$ та позначити відповідні точки на координатній площині.

Маємо: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Сполучимо всі позначені точки плавною неперервною лінією. Шуканий графік зображено на рисунку 11.2.

Областю значень функції є множина $E(f) = [-9; +\infty)$.

Функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; -2]$.

Маємо: $f(x) > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; -5)$ і $(1; +\infty)$; $f(x) < 0$ на проміжку $(-5; 1)$. Найменше значення функції дорівнює -9 , найбільшого значення не існує. ◀

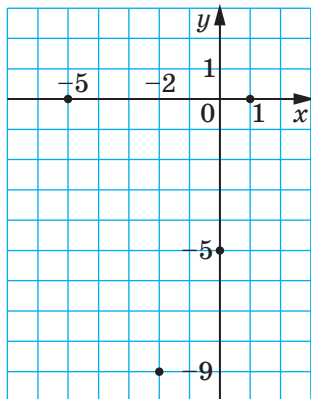


Рис. 11.1

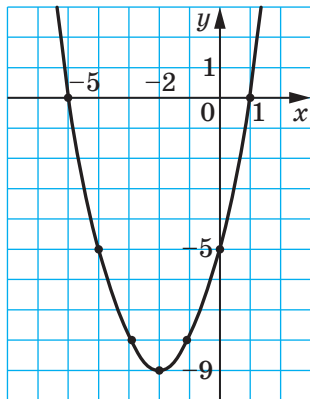


Рис. 11.2



1. Яку функцію називають квадратичною? **2.** Яка фігура є графіком квадратичної функції? **3.** За якою формулою можна знайти абсцису вершини параболи $y = ax^2 + bx + c$? **4.** Який напрямок мають вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ залежно від значення a ? **5.** Опишіть схему побудови графіка квадратичної функції.



ВПРАВИ

11.1.° Які з даних функцій є квадратичними:

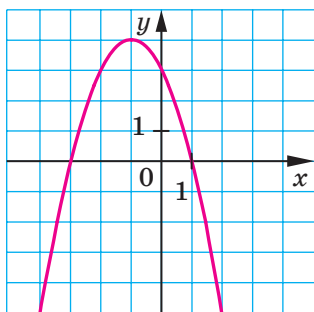
1) $y = 4x^2 + 3x + 6$;

3) $y = \frac{1}{2x^2 - 3x + 2}$;

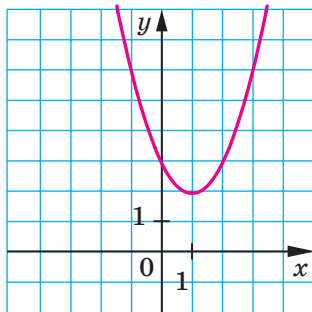
2) $y = 4x + 3$;

4) $y = 6x^2 - 5x$?

- 11.2.° Обчисліть значення функції $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$, якщо аргумент x дорівнює 1; -2; 4.
- 11.3.° Дано функцію $f(x) = x^2 - 2x - 15$. Знайдіть значення аргументу x , при якому:
- 1) $f(x) = 0$;
 - 2) $f(x) = -7$;
 - 3) $f(x) = 33$.
- 11.4.° Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину з осями координат параболи:
- 1) $y = x^2 + 3x - 4$;
 - 2) $y = -2x^2 + 3x - 1$.
- 11.5.° Графік функції $y = -6x^2 + x + c$ перетинає вісь ординат у точці $M(0; -8)$. Знайдіть значення c .
- 11.6.° Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину з осями координат параболи:
- 1) $y = x^2 - 8x + 7$;
 - 2) $y = 5 - x - 6x^2$.
- 11.7.° Визначте напрямок віток і координати вершини параболи:
- 1) $y = x^2 - 12x + 3$;
 - 3) $y = 0,3x^2 + 2,4x - 5$;
 - 2) $y = -x^2 + 4x - 6$;
 - 4) $y = -5x^2 + 10x + 2$.
- 11.8.° Визначте напрямок віток і координати вершини параболи:
- 1) $y = 0,2x^2 - 4x + 1$;
 - 2) $y = -3x^2 + 18x + 2$.
- 11.9.° Користуючись графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, зображеним на рисунку 11.3, визначте:
- 1) знаки старшого коефіцієнта і дискримінанта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$;
 - 2) координати вершини параболи;
 - 3) нулі функції;
 - 4) проміжки знакосталості функції;
 - 5) проміжок зростання та проміжок спадання функції.



(a)

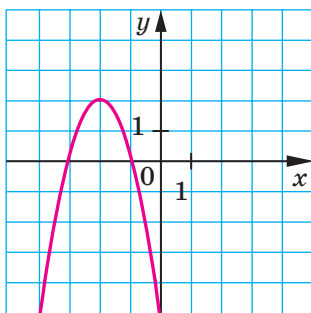


(б)

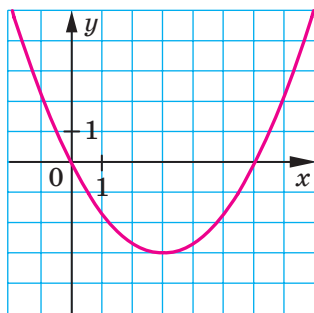
Рис. 11.3

11.10.° Користуючись графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, зображеним на рисунку 11.4, визначте:

- 1) знаки старшого коефіцієнта і дискримінанта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$;
- 2) координати вершини параболи;
- 3) нулі функції;
- 4) проміжки знакосталості функції;
- 5) проміжок зростання та проміжок спадання функції.



(a)



(б)

Рис. 11.4

11.11.° Побудуйте графік функції:

- | | |
|--------------------------|-------------------------------------|
| 1) $y = x^2 - 4x - 5$; | 5) $y = x^2 - 2x + 4$; |
| 2) $y = -x^2 + 2x + 3$; | 6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$; |
| 3) $y = 6x - x^2$; | 7) $y = x^2 - 6x + 5$; |
| 4) $y = 2x^2 - 8x + 8$; | 8) $y = 2x^2 - 5x + 2$. |

11.12.° Побудуйте графік функції:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $y = x^2 + 2x - 8$; | 3) $y = -x^2 + 4x - 5$; |
| 2) $y = x^2 - 2x$; | 4) $y = 2x^2 - 2x - 4$. |

11.13.° Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) $f(6)$; $f(1)$;
- 2) значення x , при яких $f(x) = 8$; $f(x) = -1$; $f(x) = -2$;
- 3) найбільше і найменше значення функції;
- 4) область значень функції;
- 5) проміжок зростання та проміжок спадання функції;
- 6) при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень, а при яких — від'ємних.

11.14.* Побудуйте графік функції $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) область значень функції;
- 2) проміжок зростання функції;
- 3) множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$.

11.15.* Побудуйте графік функції $f(x) = x - 0,5x^2$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) область значень функції;
- 2) проміжок зростання функції;
- 3) при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) \leq 0$.

11.16.* Побудуйте графік функції $f(x) = 3x^2 - 6x$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) область значень функції;
- 2) проміжок спадання функції;
- 3) при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) \geq 0$.

ЖА1



11.17.* Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ та визначте кількість коренів рівняння $f(x) = g(x)$:

- 1) $f(x) = x^2 - 6x + 7$, $g(x) = \sqrt{x}$;
- 2) $f(x) = 4x - 2x^2$, $g(x) = -\frac{4}{x}$.

ЖА1



11.18.* Побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = x^2 + 4x + 1$ і $y = \frac{6}{x}$, визна-

чте кількість коренів рівняння $x^2 + 4x + 1 = \frac{6}{x}$.

11.19.* Знайдіть область значень і проміжки зростання та спадання функції:

- 1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;
- 2) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;
- 3) $f(x) = 4 - 12x - 0,3x^2$;
- 4) $f(x) = 7x^2 + 21x$.

Як ви вважаєте, чи треба для розв'язання цієї задачі будувати графік функції? Обговоріть це питання у класі.

11.20.* Знайдіть область значень і проміжки зростання та спадання функції:

- 1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;
- 2) $f(x) = 9 + 8x - 0,2x^2$.

ЖА2

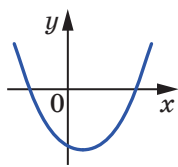


11.21.** Знайдіть найменше значення функції $y = 3x^2 - 18x + 2$ на проміжку:

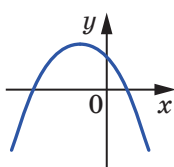
- 1) $[-1; 4]$;
- 2) $[-4; 1]$;
- 3) $[4; 5]$.

- 11.22.*** Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 - 8x + 10$ на проміжку:
1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.
- 11.23.*** При яких значеннях p і q графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $M(-1; 4)$ і $K(2; 10)$?
- 11.24.*** При яких значеннях a і b нулями функції $y = ax^2 + bx + 7$ є числа -2 і 3 ?
- 11.25.*** При яких значеннях a і b парабола $y = ax^2 + bx - 4$ проходить через точки $C(-3; 8)$ і $D(1; 4)$?
- 11.26.*** Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:
- 1) $a > 0, D > 0, c > 0, -\frac{b}{2a} > 0$; 3) $a < 0, D < 0, -\frac{b}{2a} > 0$;
2) $a > 0, D = 0, -\frac{b}{2a} < 0$; 4) $a < 0, c = 0, -\frac{b}{2a} < 0$.
- 11.27.*** Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:
- 1) $a > 0, D < 0, -\frac{b}{2a} < 0$;
2) $a < 0, D > 0, c < 0, -\frac{b}{2a} > 0$;
3) $a < 0, D = 0, -\frac{b}{2a} < 0$.
- 11.28.*** При якому значенні b проміжок $(-\infty; 2]$ є проміжком зростання функції $y = -4x^2 - bx + 5$?
- 11.29.*** При якому значенні b проміжок $(-\infty; -3]$ є проміжком спадання функції $y = 3x^2 + bx - 8$?
- 11.30.*** При яких значеннях a функція $y = 0,5x^2 - 3x + a$ набуває невід'ємних значень при всіх дійсних значеннях x ?
- 11.31.*** При яких значеннях a функція $y = -4x^2 - 16x + a$ набуває від'ємних значень при всіх дійсних значеннях x ?
- 11.32.*** При якому значенні c найбільше значення функції $y = -5x^2 + 10x + c$ дорівнює -3 ?
- 11.33.*** При якому значенні c найменше значення функції $y = 0,6x^2 - 6x + c$ дорівнює -1 ?

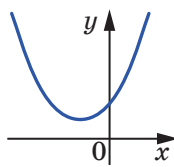
11.34.* На рисунку 11.5 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a , b і c .



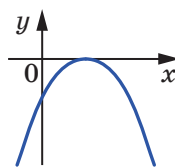
(a)



(б)



(a)



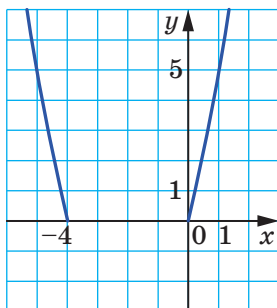
(б)

Рис. 11.5

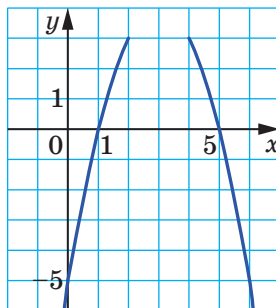
Рис. 11.6

11.35.* На рисунку 11.6 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a , b і c .

11.36.* Знайдіть ординату вершини параболи, фрагмент якої зображено на рисунку 11.7.



(a)



(б)

Рис. 11.7

11.37.* Знайдіть ординату вершини параболи, фрагмент якої зображено на рисунку 11.8.

11.38.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^3 - 8}{x - 2} - 3; \quad 2) y = \frac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}.$$

11.39.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}; \quad 2) y = \frac{x^4 - 1}{1 - x^2}.$$

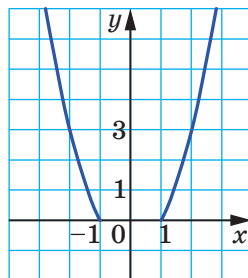


Рис. 11.8

11.40.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = x |x|; \quad 2) y = x^2 + 3x \cdot \frac{|x-3|}{x-3} - 4.$$

11.41.* Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3}{|x|} + 4x$.

ЖАЗ



11.42.* Побудуйте графік функції $y = x^2 + 2x - 3$.

Користуючись побудованим графіком, установіть, при яких значеннях a рівняння

$$x^2 + 2x - 3 = a:$$

- 1) має два корені;
- 2) має один корінь;
- 3) не має коренів.

ЖАЗ



11.43.* Побудуйте графік функції $y = -x^2 - 4x + 5$.

Користуючись побудованим графіком, установіть, скільки коренів має рівняння

$$-x^2 - 4x + 5 = a$$

залежно від значення a .

↔ Якщо вам сподобалося розв'язувати задачі 11.42 і 11.43, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Паралельне перенесення і задачі з параметрами». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проекті, ви можете знайти на с. 258.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

11.44. Із пункту B у пункт A , відстань між якими дорівнює 13 км, вирушив турист зі швидкістю 6 км/год. Одночасно з ним із пункту A в перпендикулярному напрямку (рис. 11.9) вирушила зі швидкістю 4 км/год туристка. Через який час після початку руху відстань між ними буде найменшою?

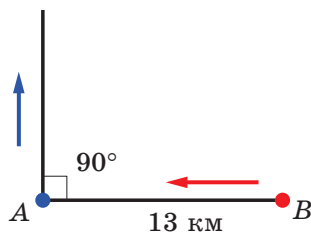


Рис. 11.9

11.45. Ділянку землі прямокутної форми треба обгородити парканом завдовжки 160 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.46. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

2) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$.

11.47. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння:

1) $x^2 - 5x - 10 = 0$;

2) $2x^2 + 6x - 7 = 0$;

3) $-\frac{1}{3}x^2 + 8x - 1 = 0$.

11.48. Через одну з двох труб можна наповнити бак водою на 10 хв швидше, ніж через другу. Якщо одночасно відкрити обидві труби, то за 8 хв буде заповнено $\frac{2}{3}$ бака.

За який час можна заповнити цей бак через кожну з труб?



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

11.49. На дошці записано число 1001. Двоє грають у таку гру. За один хід гравець стирає записане на дошці число, а замість нього записує різницю цього числа й будь-якого його дільника. Гравці роблять ходи по черзі. Програє той, після ходу якого на дошці буде записано число 0. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

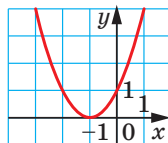
Про деякі перетворення графіків функцій

Із цим оповіданням ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом. Якщо вам сподобається його зміст, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Перетворення графіків функцій».



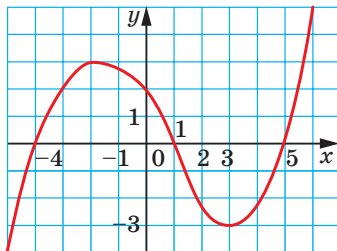
6. Графік якої функції зображено на рисунку?

- А) $y = x^2 - 1$;
 Б) $y = x^2 + 1$;
 В) $y = (x - 1)^2$;
 Г) $y = (x + 1)^2$.



7. Укажіть координати вершини параболи $y = 3(x - 4)^2 - 5$.

- А) (4; 5); Б) (4; -5);
 В) (-4; 5); Г) (-4; -5).



8. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись рисунком, укажіть проміжок спадання функції.

- А) $[-4; 1]$; Б) $[-2; 3]$;
 В) $[-3; 3]$; Г) $[-3; 1]$.

9. Знайдіть абсцису вершини параболи $y = 2x^2 - 12x + 3$.

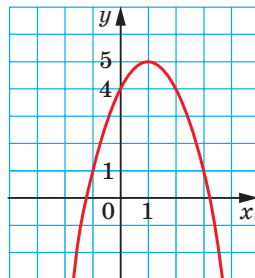
- А) 6; Б) -6; В) 3; Г) -3.

10. Вершина якої з парабол належить осі абсцис?

- А) $y = x^2 - 6$; Б) $y = (x - 6)^2$;
 В) $y = x^2 - 6x$; Г) $y = (x - 6)^2 + 2$.

11. На рисунку зображено графік функції $y = -x^2 + 2x + 4$. Користуючись рисунком, знайдіть область значень функції.

- А) $(-\infty; +\infty)$; Б) $[1; +\infty)$;
 В) $(-\infty; 1]$; Г) $(-\infty; 5]$.

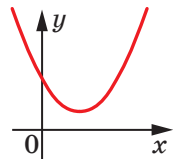


12. Знайдіть нулі функції $y = 2x^2 + x - 6$.

- А) 1,5; -2; Б) -1,5; 2;
 В) 1,5; 2; Г) -1,5; -2.

13. На рисунку зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження, якщо D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

- А) $b > 0$, $D > 0$; Б) $b < 0$, $D < 0$;
 В) $b > 0$, $D < 0$; Г) $b > 0$, $D = 0$.



14. При якому значенні a найменше значення функції $y = 3x^2 - 6x + a$ дорівнює 4?

- А) 7; Б) 4; В) -5; Г) 8.

У завданні 15 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.

15. Установіть відповідність між функцією (1–3) та її проміжком зростання (А–Д).

Функція	Проміжок зростання
1) $y = x^2 + 4x + 1$	А) $[-2; +\infty)$
2) $y = 8x^2 + 48x + 5$	Б) $[-3; +\infty)$
3) $y = 28x - 7x^2$	В) $(-\infty; -2]$
	Г) $[2; +\infty)$
	Д) $(-\infty; 2]$



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ

1.° Функція задана формулою $f(x) = 0,2x^2 - 4x$. Знайдіть:

- 1) $f(5)$ і $f(-1)$; 2) нулі функції.

2. Знайдіть область визначення функції:

1)° $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 7x - 8}$; 2)° $f(x) = \sqrt{x + 6} + \frac{2}{x^2 - 25}$.

3.° Побудуйте графік функції:

1) $y = (x + 4)^2$; 2) $y = x^2 + 4$.

4.° Побудуйте графік функції $f(x) = 5 + 4x - x^2$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) область значень даної функції;
2) проміжок спадання функції;
3) множину розв'язків нерівності $f(x) < 0$.

5.** При яких значеннях b і c вершина параболи $y = x^2 + bx + c$ знаходиться в точці $M(3; 8)$?

12. Розв'язування квадратних нерівностей



На рисунку 12.1 зображено графік деякої функції $y = f(x)$, областю визначення якої є множина дійсних чисел.

За допомогою цього графіка легко визначити проміжки знакосталості функції f , а саме: $y > 0$ на кожному з проміжків $(-5; -2)$ і $(1; +\infty)$; $y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; -5)$ і $(-2; 1)$.

Знайшовши проміжки знакосталості функції f , ми тим самим розв'язали нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Проміжки $(-5; -2)$ і $(1; +\infty)$ разом складають множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$. У таких випадках говорять, що множина розв'язків нерівності $f(x) > 0$ є **об'єднанням** зазначених проміжків. Об'єднання проміжків записують за допомогою спеціального символу $\cup$.

Тоді множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$ можна записати так:

$$(-5; -2) \cup (1; +\infty).$$

Множину розв'язків нерівності $f(x) < 0$ можна записати так:

$$(-\infty; -5) \cup (-2; 1).$$

Такий метод розв'язування нерівностей $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$ за допомогою графіка функції $y = f(x)$ називають **графічним**.

Покажемо, як за допомогою цього методу розв'язують квадратні нерівності.

Означення:

Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x — змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратними.

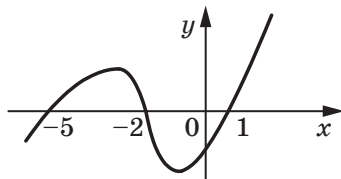


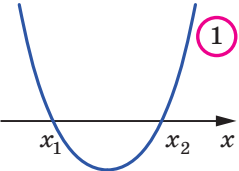
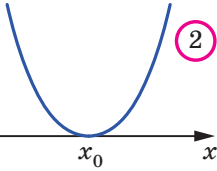
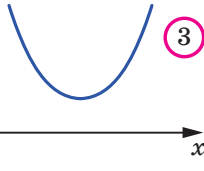
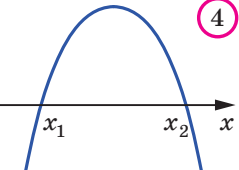
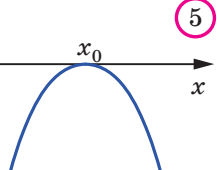
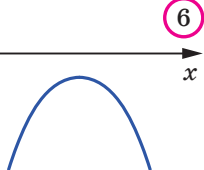
Рис. 12.1

З'ясуємо, як визначити положення графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис.

Наявність і кількість нулів квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ визначають за допомогою дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$: якщо $D > 0$, то нулів у функції два; якщо $D = 0$, то нуль один; якщо $D < 0$, то нулів немає.

Знак старшого коефіцієнта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначає напрямок віток параболи $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ вітки напрямлені вгору, при $a < 0$ — униз.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків чисел a і D відображено в таблиці (x_1 і x_2 — нулі функції, x_0 — абсциса вершини параболи).

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Пояснимо, як використовувати цю таблицю для розв'язання квадратних нерівностей.

Нехай, наприклад, потрібно розв'язати нерівність $ax^2 + bx + c > 0$, де $a < 0$ і $D > 0$. Цим умовам відповідає клітинка **4** таблиці. Тоді зрозуміло, що відповіддю буде проміжок $(x_1; x_2)$, на якому графік відповідної квадратичної функції розміщено над віссю абсцис.

ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть нерівність $2x^2 - x - 1 > 0$.

Розв'язання. Для квадратного тричлена $2x^2 - x - 1$ маємо: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Цим умовам відповідає клітинка **1** таблиці. Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$. Отримаємо $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

Тоді схематично графік функції $y = 2x^2 - x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 12.2.

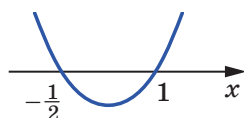


Рис. 12.2

Із рисунка 12.2 видно, що відповідна квадратична функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $(-\infty; -\frac{1}{2})$ і $(1; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$. ◀

ПРИКЛАД 2. Розв'яжіть нерівність $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $a = -9$, $D = 0$. Цим умовам відповідає клітинка **5** таблиці. Установлюємо, що $x_0 = \frac{1}{3}$. Тоді схематично графік функції $y = -9x^2 + 6x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 12.3.

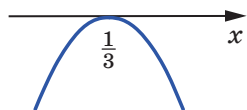


Рис. 12.3

Із рисунка 12.3 видно, що розв'язками нерівності є всі числа, крім $\frac{1}{3}$.

Зауважимо, що цю нерівність можна розв'язати іншим способом. Перепишемо дану нерівність так: $9x^2 - 6x + 1 > 0$.

Тоді $(3x - 1)^2 > 0$.

Звідси отримуємо той самий результат.

Відповідь: $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$. ◀

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть нерівність $3x^2 - x + 1 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Цим умовам відповідає клітинка **3** таблиці. У цьому випадку графік функції $y = 3x^2 - x + 1$ не має точок з від'ємними ординатами.

Відповідь: розв'язків немає. ◀

ПРИКЛАД 4. Розв'яжіть нерівність $0,2x^2 + 2x + 5 \leq 0$.

Розв'язання. Оскільки $a = 0,2$, $D = 0$, то даному випадку відповідає клітинка **2** таблиці, причому $x_0 = -5$. Але в цьому випадку квадратична функція набуває тільки невід'ємних значень. Отже, дана нерівність має єдиний розв'язок $x = -5$.

Відповідь: -5 . ◀



1. За допомогою якого символу записують об'єднання проміжків? 2. Які нерівності називають квадратними? 3. Які можливі випадки розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків a і D , де D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$? Зобразіть схематично ці випадки.



ВПРАВИ

12.1.° Які із чисел -2 ; 0 ; 1 є розв'язками нерівності:

- 1) $x^2 - x - 2 < 0$; 3) $-3x^2 - x + 2 > 0$?
2) $x^2 + x \geq 0$;

12.2.° На рисунку 12.4 зображено графік функції $y = x^2 + 2x - 3$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $x^2 + 2x - 3 < 0$; 3) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

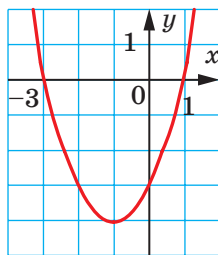


Рис. 12.4

12.3.° На рисунку 12.5 зображено графік функції $y = -3x^2 - 6x$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $-3x^2 - 6x < 0$; 3) $-3x^2 - 6x > 0$;
2) $-3x^2 - 6x \leq 0$; 4) $-3x^2 - 6x \geq 0$.

12.4.° На рисунку 12.6 зображено графік функції $y = x^2 - 4x + 4$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $x^2 - 4x + 4 < 0$; 3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$; 4) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

Як ви думаєте, чи можна розв'язати ці нерівності, не використовуючи графік функції? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

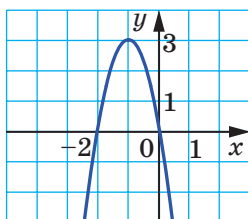


Рис. 12.5

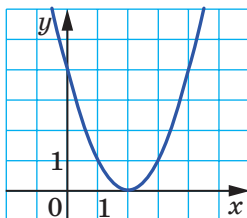


Рис. 12.6

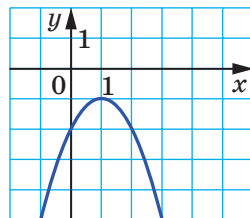


Рис. 12.7

12.14.* Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $42 - x^2 - x > 0$; 2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

12.15.* Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $1,5x^2 - 2x - 2 < 0$; 2) $-2x^2 - 15x - 25 \geq 0$.

12.16.* Складіть яку-небудь квадратну нерівність, множина розв'язків якої:

- 1) є об'єднанням проміжків $(-\infty; -4)$ і $(8; +\infty)$;
2) є проміжком $[-2; 9]$;
3) складається з одного числа 7.

12.17.* Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$.

12.18.* Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$.

12.19.** Чи рівносильні нерівності:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ і $x^2 - 2x - 15 \geq 0$;

2) $\frac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ і $\frac{1}{x^2 - x - 20} \leq 0$?

12.20.** При яких значеннях a не має коренів рівняння:

1) $x^2 - ax + 4 = 0$; 2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$?

12.21.* При яких значеннях b має два різних корені рівняння:

1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2(b - 6)x + b - 2 = 0$?

12.22.** Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leq 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geq 0, \\ x + 4 \geq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

12.23.* Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leq 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leq 0. \end{cases}$

12.24.** Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1}$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \frac{9}{x^2 - 81}$.

12.25.* Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \frac{3}{\sqrt{8 - 4x}};$$

$$2) y = \frac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \frac{x - 1}{|x| - 6}.$$

12.26.* Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) x^2 - 8|x| - 33 < 0; \quad 2) 8x^2 + 7|x| - 1 \geq 0.$$

12.27.* Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) 5x^2 - 7|x| + 2 \geq 0; \quad 2) x^2 + 10|x| - 24 \leq 0.$$

12.28.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 0;$$

$$2) (x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geq 0;$$

$$3) (x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} < 0;$$

$$4) (x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leq 0.$$

12.29.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} > 0;$$

$$2) (x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \geq 0;$$

$$3) (x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} < 0;$$

$$4) (x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \leq 0.$$

12.30.* При яких значеннях a дана нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x :

$$1) x^2 - 4x + a > 0; \quad 2) x^2 + (a - 1)x + 1 - a - a^2 \geq 0?$$

12.31.* При яких значеннях a не має розв'язків нерівність:

$$1) -x^2 + 6x - a > 0; \quad 2) x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0?$$

➡ Якщо вам сподобалося розв'язувати задачі 12.20, 12.21, 12.30, 12.31, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Дослідження квадратних рівнянь і нерівностей». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проекті, ви можете знайти на с. 258.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.32. Спростіть вираз:

$$1) \frac{x^2 + 3xy}{x + 6} : \frac{x^2 - 9y^2}{2x + 12}; \quad 2) \frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{2a^2 - 8b^2} \cdot \frac{2a^2 - 8ab + 8b^2}{6a - 9b}.$$

12.33. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{20 \cdot 66 \cdot 330}$;

3) $2\sqrt{18} \cdot 3\sqrt{30} \cdot 5\sqrt{15}$;

2) $\sqrt{3^5 \cdot 12^3}$;

4) $6\sqrt{10} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50}$.



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст пп. 24–28 із підручника «Алгебра. 7 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

12.34. Побудуйте графік рівняння:

1) $2x - 3y = 6$;

4) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$;

2) $xy = -8$;

5) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 0$;

3) $(x - 2)^2 + y^2 = 0$;

6) $(x - 3)(y - x) = 0$.

12.35. Яка з пар чисел $(-2; 1)$, $(2; -1)$, $(6; 4)$ є розв'язком системи рівнянь
$$\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28? \end{cases}$$

12.36. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5. \end{cases}$$

12.37. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26. \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$$



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Софі Жермен: жінка, яка підкорила математику

У XVIII ст. дівчатам було важко здобути освіту, особливу з математики. Але Софі Жермен із Франції довела, що справжню пристрасть не зупинять ані заборони, ані упереження.

З дитинства Софі захоплювалася наукою. Її надихнула легенда про Архімеда, який, занурений у роздуми, загинув під час захоплення Сиракуз. Батьки намагалися відмовити доньку від «нежіночих» занять, але вона потайки читала математичні книги при свічці.

У ті часи жінок не приймали до університетів, тому Софі, надсилаючи свої роботи викладачам, використовувала чоловіче ім'я — Антуан Леблан. Один із найвідоміших математиків того часу, Жозеф Луї Лагранж, був вражений її талантом і підтримував її.

Софі Жермен зробила значний внесок у теорію чисел і математичну фізику. Вона першою розробила методи для часткового доведення Великої теореми Ферма (відомої загадки, що залишалася нерозв'язаною понад 300 років!). Її ідеї стали основою для подальших досліджень цієї теореми.

Хоча жінка не здобула формальної освіти чи наукового звання, її ім'я сьогодні носить премія Французької академії наук, яку вручають за досягнення в математиці. Софі Жермен — приклад того, як наполегливість і любов до знань долають будь-які перешкоди.



Софі Жермен
(1776–1831)

13. Системи рівнянь з двома змінними



У 7 класі ви вже знайомилися з поняттям системи рівнянь і вчилися розв'язувати системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. Проте тоді працювали лише з лінійними рівняннями. Тепер це обмеження знімається: ми розглянемо системи, у які можуть входити не тільки лінійні, а й інші типи рівнянь, наприклад квадратні чи дробово-раціональні. Такі системи виникають у фізиці, економіці та загалом під час розв'язування прикладних задач із реального життя. Уміння працювати з ними — важлива складова математичної освіти.

Також ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь. Нагадаємо, що його сутність полягає в пошуку координат спільних точок графіків рівнянь, які входять до системи. На уроках геометрії ви дізналися, що графіком рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $R > 0$, є коло радіуса R із центром $(a; b)$. Ви також навчилися будувати

графік квадратичної функції. Усе це розширює можливості застосування графічного методу для розв'язування систем рівнянь.

ЖА1



ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть графічно систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи рівносильне такому: $y = x^2 - 4x + 3$. Його графіком є парабола, зображена на рисунку 13.1.

Графіком другого рівняння є пряма, яка перетинає побудовану параболу у двох точках: (1; 0) і (4; 3) (див. рис. 13.1).

Як відомо, графічний метод не гарантує того, що отриманий результат є точним. Тому знайдені розв'язки потрібно перевірити. Перевірка підтверджує, що пари чисел (1; 0) і (4; 3) справді є розв'язками даної системи.

Відповідь: (1; 0), (4; 3). ◀

Зауважимо, що ця система є «зручною» для графічного методу: координати точок перетину графіків виявилися цілими числами. Зрозуміло, що така ситуація трапляється далеко не завжди. Тому графічний метод є ефективним тоді, коли потрібно визначити кількість розв'язків або достатньо знайти їх наближено.

Систему, що розглядається, можна розв'язати й не звертаючись до графіків рівнянь. Готуючись до вивчення цієї теми, ви повторили **метод підстановки** для розв'язування систем лінійних рівнянь. Цей метод є ефективним і для розв'язування більш складних систем, у яких тільки одне рівняння є лінійним, і для деяких систем, у яких узагалі лінійних рівнянь немає.

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

методом підстановки. Виразимо змінну y через змінну x у другому рівнянні системи:

$$y = x - 1.$$

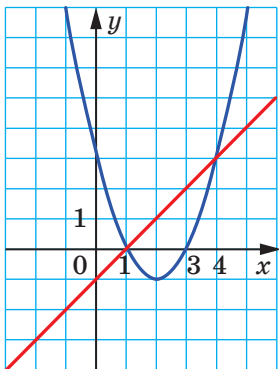


Рис. 13.1

Підставимо в перше рівняння замість y вираз $x - 1$:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Отримали рівняння з однією змінною. Спростивши його, отримаємо квадратне рівняння $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Значення y , які відповідають отриманим значенням x , знайдемо з рівняння $y = x - 1$. Маємо:

$$y_1 = 1 - 1 = 0, \quad y_2 = 4 - 1 = 3.$$

Отже, ми ще раз установили, що пари чисел $(1; 0)$ і $(4; 3)$ є розв'язками розглядуваної системи рівнянь.



ПРИКЛАД 2. Визначте кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Графіком першого рівняння системи є коло радіуса 3 із центром $(0; 0)$.

Друге рівняння рівносильне такому: $y = \frac{3,5}{x}$. Графіком цього рівняння є гіпербола.

Зобразимо коло та гіперболу на одній координатній площині (рис. 13.2). Бачимо, що графіки перетинаються в чотирьох точках. Отже, дана система має чотири розв'язки. ◀

Рисунок 13.2 також дає змогу знайти наближені значення розв'язків даної системи.

Не звертаючись до графічного методу, можна знайти точні значення розв'язків цієї системи.

Готуючись до вивчення цієї теми, ви повторили **метод додавання** для розв'язування систем лінійних рівнянь. Покажемо, як цей метод «працює» під час розв'язування більш складних систем.

Помножимо друге рівняння розглядуваної системи на 2.

Отримаємо:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$$

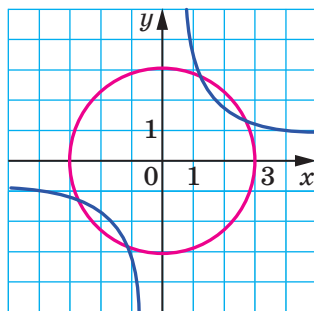


Рис. 13.2

Додамо почленно ліві та праві частини рівнянь. Отримуємо: $x^2 + y^2 + 2xy = 16$. Звідси $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ або $x + y = -4$.

Зрозуміло, що для розв'язування заданої системи досить розв'язати дві простіші системи.

$$1) \begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи друге рівняння цієї системи, отримуємо:

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Тоді } y_1 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}, \quad y_2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}.$$

$$2) \begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи друге рівняння цієї системи, отримуємо:

$$x_3 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}, \quad x_4 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Тоді } y_3 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}, \quad y_4 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{2}; \frac{4 + \sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{2}; \frac{4 - \sqrt{2}}{2} \right), \\ \left(\frac{-4 - \sqrt{2}}{2}; \frac{-4 + \sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{-4 + \sqrt{2}}{2}; \frac{-4 - \sqrt{2}}{2} \right). \quad \blacktriangleleft$$

Очевидно, що знайти такі розв'язки графічним способом неможливо.

У 8 класі ви ознайомилися з методом заміни змінних для розв'язування рівнянь. Цей метод застосовують і для розв'язування цілої низки систем рівнянь.

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $\frac{x+y}{x-y} = t$. Тоді $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{t}$.

Тепер перше рівняння системи можна записати так:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}.$$

Звідси $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Для розв'язування заданої системи досить розв'язати дві простіші системи.

$$1) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x+y = 2x-2y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$$

З другого рівняння отримуємо: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Тоді $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

$$2) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} 2x+2y = x-y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$$

З другого рівняння отримуємо: $y_3 = 1$, $y_4 = -1$.

Тоді $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Відповідь: $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $(-3; 1)$, $(3; -1)$. ◀



- 1.** Які методи розв'язування систем рівнянь ви знаєте?
2. Поясніть сутність графічного методу розв'язування систем рівнянь.
3. У яких випадках графічний метод є найбільш ефективним?



ВПРАВИ

13.1.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y+x^2=3, \\ y=x+1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=-12. \end{cases}$$

13.2.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y=x+2, \\ xy=8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y=x^2-4, \\ 2x+y=-1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x+y=3, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$$

13.3.° Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y=x+3, \\ x^2-2y=9; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y-x=2, \\ x^2-2xy=3; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} xy=15, \\ 2x-y=7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y=5, \\ xy=4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x-4y=2, \\ xy+2y=8; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x-y=4, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$$

13.4.° Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28; \end{cases} & 3) \begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases} & 4) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6. \end{cases} \end{array}$$

13.5.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases} & 3) \begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases} & 5) \begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases} & 4) \begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases} & 6) \begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4. \end{cases} \end{array}$$

13.6.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases} & 3) \begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases} & 4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1. \end{cases} \end{array}$$

13.7.° Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases} & 3) \begin{cases} x + y = 5, \\ (x - 3)(y + 5) = 6; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases} & 4) \begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60. \end{cases} \end{array}$$

13.8.° Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases} & 3) \begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases} & 4) \begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases} \end{array}$$

13.9.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину:

- 1) прямої $3x - y = 1$ і параболи $y = 3x^2 + 8x - 3$;
- 2) прямої $2x - y = 2$ і гіперболи $y = \frac{4}{x}$;

3) прямої $x + y = 1$ і кола $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16$;

4) парабол $y = x^2 - 4x + 7$ і $y = 3 + 4x - 2x^2$.

13.10.* Доведіть, що пряма $y - x = 3$ є дотичною до кола $(x + 5)^2 + y^2 = 2$, і знайдіть координати точки дотику.

13.11.* Доведіть, що:

1) пряма $y = -2x - 4$ і парабола $y = 6x^2 - 7x - 2$ не перетинаються;

2) парабола $y = 4x^2 - 3x + 6$ і пряма $y = x + 5$ мають одну спільну точку, знайдіть координати цієї точки;

3) параболи $y = 4x^2 - 3x - 24$ і $y = 2x^2 - 5x$ мають дві спільні точки, знайдіть їхні координати.

13.12.* Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3. \end{cases}$$

13.13.* Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4}{5}, \\ 3x + y = 8. \end{cases}$$

13.14.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y - xy = 1, \\ xy(x + y) = 20; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$$
$$2) \begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{21}{10}, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} \frac{y}{x} + xy = -10, \\ \frac{5y}{x} - 2xy = 13; \end{cases}$$
$$3) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x^2 y^2 + xy = 6, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

13.15.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,5, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x - 2y}{x + y} - \frac{x + y}{x - 2y} = \frac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 4, \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 10; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 4(x-y)^2 + 7(x-y) = 15, \\ 2x + 5y = 1. \end{cases}$$

13.16.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases} & 3) \begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = 12; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x^3 - y^3 = 28, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases} & 4) \begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 19, \\ xy = -6. \end{cases} \end{array}$$

13.17.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^3 - y^3 = 56, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x^2 - y^2 = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$$

13.18.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3y - 2xy = 2, \\ x + 2xy = 5; \end{cases} & 3) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} xy + y = 30, \\ xy + x = 28; \end{cases} & 4) \begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10. \end{cases} \end{array}$$

13.19.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 9; \end{cases} & 3) \begin{cases} xy - x = 24, \\ xy - y = 25; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 3xy + 2x = -4, \\ 3xy + y = -8; \end{cases} & 4) \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 66, \\ 2x^2 - y^2 = 34. \end{cases} \end{array}$$

13.20.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = 36, \\ x + 6y = 8; \end{cases} & 3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} y^2 - 2xy = 32, \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 100; \end{cases} & 4) \begin{cases} 9x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -1. \end{cases} \end{array}$$

13.21.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + 10xy + 25y^2 = 49, \\ x - 5y = -3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x + 2y, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + 25y^2 = 104, \\ xy = -4. \end{cases}$$

13.22.* При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a \end{cases}$

1) має один розв'язок;

3) не має розв'язків?

2) має два розв'язки;

13.23.* При яких значеннях k система рівнянь $\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y = kx + 3 \end{cases}$

1) має один розв'язок;

3) не має розв'язків?

2) має два розв'язки;

ЖАЗ



13.24.* Скільки розв'язків залежно від значення a має система рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 4? \end{cases}$$

ЖАЗ



13.25.* Скільки розв'язків залежно від значення a має система рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$$

13.26.* Дано два рівняння $ax^2 + x + 1 = 0$ і $x^2 + ax + 1 = 0$. Знайдіть усі значення a , при яких ці рівняння мають принаймні один спільний корінь.

➡ Якщо вам сподобалося розв'язувати задачі 13.22–13.25, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Дослідження кількості розв'язків системи рівнянь». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проєкті, ви можете знайти на с. 258.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.27. Спростіть вираз $\frac{5a+5}{a^2-a} : \left(\frac{a+3}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a} \right)$.

13.28. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 6x - 2 = 0$. Знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

- 13.29.** (Зі старовинного китайського трактату «Дев'ять відділів мистецтва рахунку») 5 волів і 2 барани коштують 11 таелів, а 2 воли та 8 баранів — 8 таелів. Скільки коштують окремо віл і баран?
- 13.30.** (Задача Леонардо Пізанського (Фібоначчі)) Один говорить другому: «Дай мені 7 динаріїв, і я буду в 5 разів багатшим за тебе». А другий говорить: «Дай мені 5 динаріїв, і я буду в 7 разів багатшим за тебе». Скільки грошей у кожного?
- 13.31.** Із села A в село B , відстань між якими дорівнює 140 км, виїхав мотоцикліст. За 20 хв до цього назустріч йому із села B у село A виїхала велосипедистка, яка зустрілася з мотоциклістом через 2 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо мотоцикліст за 2 год проїжджає на 104 км більше, ніж велосипедистка за 4 год.



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

- 13.32.** Чи існують 100 таких натуральних чисел, що будь-яка сума кількох із них не є квадратом натурального числа?



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Перша Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Сподіваємося, що задача 13.26 вам сподобалася, і ви відчули радість успіху, розв'язавши її. Ця задача варта уваги ще й тому, що в 1961 р. її було запропоновано учасникам першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків.



**Клавдія
Яківна
Латишева**
(1897–1956)

Узагалі, математичні олімпіади в Україні мають давню традицію. Перша міська олімпіада юних математиків відбулася в 1935 р. у Києві. Серед організаторів Першої всеукраїнської математичної олімпіади в 1936 р. була математикиня К. Я. Латишева. Відтоді минуло понад 80 років, і за цей час математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів першим кроком на

шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі всьому науковому світові. Усі вони в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.

Хочемо із задоволенням зазначити, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів і школярок нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. До організації та проведення олімпіад залучають найкращих представників і представниць наукової й освітянської спільноти. Саме завдяки їхньому ентузіазму та професіоналізму команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.



**Олексій
Васильович
Погорєлов**
(1919–2002)



**Селім
Григорович
Крейн**
(1917–1999)



**Марк
Олександрович
Красносельський**
(1920–1997)



**Володимир
Гершонович
Дрінфельд**
(1954 р. н.)

Радимо й вам, любі діти, брати участь у математичних олімпіадах. Нижче ми наводимо деякі задачі першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Випробуйте свої сили.

1. Рівняння $x^2 + ax + b = 0$ і $x^2 + px + q = 0$ мають спільний корінь. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є інші корені цих рівнянь.
2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1$.
3. Відстань від A до B — 999 км. Уздовж дороги стоять кілометрові стовпи, на яких відстані до A і до B написано так:

0	999
---	-----

1	998
---	-----

2	997
---	-----

...	999	0
-----	-----	---

Скільки серед цих стовпів таких, на яких є тільки дві різні цифри?

14. Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель прикладної задачі



Мабуть, немає сьогодні такої галузі знань, де б не застосовувалися досягнення математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують математичний апарат.

У чому ж полягає секрет універсальності «математичного інструмента»?

«Ключ до розв'язання багатьох наукових задач — їх вдалий переклад мовою **математики**». Таку відповідь на поставлене запитання дав один із засновників і перший директор Інституту математики Академії наук України академік Д. О. Граве.

Справді, формулювання задач із різних галузей знань містять нематематичні поняття. Якщо математик бере участь у розв'язуванні такої задачі, то він насамперед прагне перекласти її своєю «рідною» математичною мовою, тобто мовою виразів, формул, рівнянь, нерівностей, функцій, графіків тощо. Результат такого перекладу називають **математичною моделлю**, а саму задачу — **прикладною задачею**.



Дмитро
Олександрович
Граве
(1863–1939)

Термін «модель» (від латин. *modulus* — зразок) ми використовуємо дуже часто: модель літака, модель атомного ядра, модель Сонячної системи, модель якогось процесу або явища тощо. Вивчаючи властивості моделі об'єкта, ми тим самим вивчаємо властивості самого об'єкта.

Галузь математики, яка займається побудовою та вивченням математичних моделей, називають **математичним моделюванням**.

Розглянемо задачі, у яких системи рівнянь другого степеня використовують як математичні моделі реальних ситуацій.

ПРИКЛАД 1. Із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 18 км, вирушили одночасно назустріч одна одній дві туристки й зустрілися через 2 год. З якою швидкістю

йшла кожна туристка, якщо для подолання всієї відстані між пунктами одній із них потрібно на 54 хв більше, ніж другій?

Розв'язання. Нехай швидкість першої туристки дорівнює x км/год, а другої — y км/год, $x < y$. До зустрічі перша туристка пройшла $2x$ км, а друга — $2y$ км. Разом вони пройшли 18 км. Тоді $2x + 2y = 18$.

Усю відстань між пунктами перша туристка проходить за $\frac{18}{x}$ год, а друга — за $\frac{18}{y}$ год. Оскільки першій туристці для проходження цієї відстані потрібно на 54 хв = $\frac{54}{60}$ год = $\frac{9}{10}$ год більше, ніж другій, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9 - y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Розв'язавши друге рівняння останньої системи, отримуємо: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корінь -36 не підходить за змістом задачі. Отже, $y = 5$, $x = 4$.

Відповідь: 4 км/год, 5 км/год. ◀

ПРИКЛАД 2. Двоє робітників можуть разом виконати деяку роботу за 10 днів. Після 6 днів спільної роботи одного з них перевели на іншу роботу, а другий продовжував працювати. Через 2 дні самостійної роботи другого з'ясувалося, що зроблено $\frac{2}{3}$ всієї роботи. За скільки днів кожний робітник може виконати всю роботу?

Розв'язання. Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x днів, а другий — за y днів. За 1 день перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{x}$ частину роботи. Другий робітник за 1 день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{y}$ частину роботи. Оскільки

за 10 днів спільної праці вони виконують усю роботу, то $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Перший робітник працював 6 днів і виконав $\frac{6}{x}$ частину роботи, а другий працював 8 днів і виконав $\frac{8}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{2}{3}$ роботи, то

$$\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}. \quad \text{Отримали систему рівнянь} \quad \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1, \\ \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 15$, $y = 30$. Отже, перший робітник може виконати всю роботу за 15 днів, а другий — за 30 днів.

Відповідь: 15 днів, 30 днів. ◀



1. Що називають математичною моделлю задачі? **2.** Яку задачу називають прикладною? **3.** Що називають математичним моделюванням?



ВПРАВИ

- 14.1.°** Навколо прямокутної ділянки землі площею 2400 м^2 поставили огорожу завдовжки 220 м. Знайдіть довжину та ширину ділянки.
- 14.2.°** Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а сума площ квадратів, побудованих на двох його сусідніх сторонах, — 130 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника.
- 14.3.°** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а його площа — 30 см^2 . Знайдіть катети цього трикутника.
- 14.4.°** Периметр прямокутного трикутника дорівнює 40 см, а один із катетів — 8 см. Знайдіть другий катет трикутника та його гіпотенузу.
- 14.5.°** Площа прямокутника дорівнює 180 см^2 . Якщо одну його сторону зменшити на 3 см, а другу — на 2 см, то його площа дорівнюватиме 120 см^2 . Знайдіть початкові розміри прямокутника.

- 14.6.*** Якщо довжину прямокутника зменшити на 3 см, а ширину збільшити на 2 см, то його площа збільшиться на 6 см^2 . Якщо довжину прямокутника зменшити на 5 см, а ширину збільшити на 3 см, то площа прямокутника не зміниться. Знайдіть сторони даного прямокутника.
- 14.7.*** Із металевого листа прямокутної форми виготовили відкриту коробку. Для цього в кутах листа вирізали квадрати зі стороною 4 см. Знайдіть довжину та ширину листа, якщо його периметр дорівнює 60 см, а об'єм коробки — 160 см^3 .
- 14.8.*** Із міста Умань до міста Біла Церква на екскурсію в Державний дендрологічний парк «Олександрія» виїхала на автомобілі сім'я Петренків. Одночасно з цим із міста Біла Церква тією самою дорогою в місто Умань на екскурсію в Національний дендрологічний парк «Софіївка» виїхала на автомобілі сім'я Дмитренків. Через годину після виїзду вони зустрілися та, не зупиняючись, продовжили їхати з тією самою швидкістю. Сім'я Петренків приїхала до парку «Олександрія» на 35 хв раніше, ніж сім'я Дмитренків до парку «Софіївка». З якою швидкістю їхала кожна із цих родин, якщо дорога, якою вони рухалися, завдовжки 140 км?



**Державний дендрологічний
парк «Олександрія»
(м. Біла Церква)**



**Національний
дендрологічний
парк «Софіївка»
(м. Умань)**

- 14.9.*** Із села Вишневе до села Грушеве, відстань між якими 36 км, вирушив турист. Через годину після цього із Грушевого до Вишневого виїхала велосипедистка, яка зустрілася з туристом через 2 год після свого виїзду. Турист долає відстань між цими селами на 2 год довше, ніж велосипедистка. Знайдіть швидкість кожного з них.

- 14.10.*** З одного міста в друге, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус прибув до пункту призначення на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля та швидкість автобуса, якщо за 2 год автобус проїжджає на 40 км більше, ніж автомобіль за одну годину, а їхні швидкості не перевищують 90 км/год.
- 14.11.*** Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 8 днів. Якщо перша бригада, працюючи самостійно, виконає $\frac{1}{3}$ завдання, а потім її змінить друга бригада, то завдання буде виконане за 20 днів. За скільки днів кожна бригада може виконати дане виробниче завдання, працюючи самостійно?
- 14.12.*** Вікторія і Віра, працюючи разом, можуть набрати деякий текст за 4 год. Якщо Вікторія, працюючи самостійно, набере половину тексту, а потім її замінить Віра, то весь текст буде набрано за 9 год. Скільки часу потрібно кожній із них, щоб самостійно набрати весь текст?
- 14.13.**** Якщо відкрити одночасно дві труби, то басейн буде наповнено водою за 12 год. Якщо спочатку наповнювати басейн тільки через першу трубу протягом 5 год, а потім тільки через другу протягом 9 год, то водою буде наповнено половину басейну. За скільки годин можна наповнити басейн через кожну трубу?
- 14.14.**** Два трактористи, працюючи разом, можуть зорати поле за 6 год. Якщо перший тракторист працюватиме самостійно 4 год, а потім його змінить другий, то цей тракторист закінчить оранку за 9 год. За який час, працюючи самостійно, може зорати поле кожен тракторист?
- 14.15.**** При послідовному з'єднанні двох провідників опір в електричному колі становитиме 150 Ом, а при паралельному — 36 Ом. Знайдіть опір кожного провідника.
- 14.16.**** При послідовному з'єднанні трьох провідників одного виду та одного провідника другого виду опір в електричному колі становитиме 18 Ом. Якщо паралельно з'єднати по одному провіднику першого та другого видів, то за напруги 24 В сила струму в електричному колі становитиме 10 А. Знайдіть опір провідника кожного виду.
- 14.17.**** Човен проплив по річці від пристані А до пристані В і повернувся назад за 6 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо 2 км за течією річки човен пропливає

за той самий час, що й 1 км проти течії, а відстань між пристанями A і B становить 16 км.

14.18.* Катер проходить 48 км проти течії річки та 30 км за течією річки за 3 год, а 15 км за течією — на 1 год швидше, ніж 36 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера та швидкість течії.

14.19.* Модуль рівнодійної двох сил, що прикладені до однієї точки під прямим кутом, дорівнює 25 Н. Якщо модуль однієї сили зменшити на 8 Н, а другої збільшити на 4 Н, то модуль їхньої рівнодійної не зміниться. Знайдіть модулі даних сил.

14.20.* Два автомобілі виїхали одночасно з одного міста в одному напрямку. Швидкість першого автомобіля 50 км/год, а другого — 40 км/год. Через 0,5 год з того самого міста в тому самому напрямку виїхав третій автомобіль, який наздогнав перший на 1,5 год пізніше, ніж другий. Знайдіть швидкість третього автомобіля.

14.21.* З одного села одночасно в одному напрямку вирушили пішки Петро та Василь. Швидкість руху Петра становила 3 км/год, а Василя — 4 км/год. Через півтори години із цього села виїхала на велосипеді Ірина, яка наздогнала Василя через 15 хв після того, як наздогнала Петра. Знайдіть швидкість руху Ірини.

14.22.* Із міст A і B , відстань між якими 40 км, одночасно назустріч одна одній виїхали на велосипедах Галина та Катерина. Галина прибула до міста B через 40 хв, а Катерина — до міста A через 1,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість руху кожної дівчини.

14.23.* Із двох пунктів, відстань між якими 180 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Перший автомобіль прибув до другого пункту через 1 год 36 хв після зустрічі, а другий автомобіль прибув до першого пункту через 2,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

14.24.* Відстань між пристанями A і B дорівнює 28 км. Вирушивши від пристані A до пристані B , через 2 год після початку руху катер зустрів пліт, відправлений від пристані B за течією річки за 2 год до початку руху катера. Знайдіть швидкість течії річки та власну швидкість катера, якщо катер проходить відстань від A до B і повертається назад за 4 год 48 хв.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

14.25. Група школярів і школярок очищують берег річки від пластикового сміття. Якщо 6 дітей працюватимуть 4 год, то вони очистять 120 м берегу. Скільки метрів зможуть очистити 10 школярів і школярок за 5 год, працюючи з тією самою продуктивністю?



14.26. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $(2x + 1)(x + 4) - 3x(x + 2) > 0$.

14.27. При яких значеннях змінної має зміст вираз

$$\sqrt{12 - 5x} + \sqrt{2x + 1}?$$

14.28. Знайдіть проміжок спадання функції:

1) $y = 2x^2 + 10x - 9$;

2) $y = 5x - 3x^2$.

14.29. 14 грудня 1840 року в Парижі комісія у складі академіків-математиків зібралася для вивчення математичних здібностей хлопчика Анрі Мондьо, який феноменально виконував обчислення. Розв'яжіть одну із запропонованих Мондьо задач, яку хлопчик розв'язав усно: «Які два натуральних числа треба взяти, щоб різниця їхніх квадратів дорівнювала 133?»



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Наші розумниці

Із 11 по 17 квітня 2025 року в місті Приштина (Косово) пройшла 14-та Європейська математична олімпіада серед дівчат (англ. **European Girl's Mathematical Olympiad**, скорочено EGMO) — щорічний міжнародний математичний конкурс виключно для дівчат віком до 20 років, які не навчаються у ЗВО.

Мета проведення EGMO — заохочення дівчат до занять математикою, сприяння демонстрації ними своїх здібностей у цій сфері, створення відповідного середовища,



Емблема
EGMO

де вони зможуть отримати впевненість і визнання своїх математичних талантів, надання більшій кількості дівчат можливості позмагатися на міжнародній арені.

Незважаючи на те, що EGMO — європейська олімпіада, участь у ній можуть брати представниці різних континентів.

Уперше олімпіаду було проведено у квітні 2012 р. у місті Кембридж (Велика Британія). З того часу вона набула неабиякої популярності. Якщо в першій олімпіаді взяли участь 19 країн, то в 2025 р. у Приштині вже змагалися 56 команд (серед них 35 команд із Європи), у яких було 219 учасниць.

У 2019 р. олімпіада проходила в Україні: із 7 по 13 квітня у Києві змагалися 196 учасниць із 50 країн.

Команда кожної країни складається не більше ніж із чотирьох дівчат. Учасниці розв'язують задачі два дні поспіль, по три задачі щодня.

Збірна України від самого початку бере участь у цій олімпіаді і досягла значних успіхів: у 2014, 2015, 2017, 2019 і 2023 рр. наша команда очолювала офіційний (європейський) залік. Протягом 2015–2025 рр. наші дівчата вибороли 19 золотих, 23 срібні та 10 бронзових медалей.



Команда України — переможниця EGMO–2023

(зліва направо):

Марина Спектрова (Харків), Ірина Романюк,
Поліна Генік (обидві — Київ), Євгенія Франкевич (Львів)

4. Яка область визначення функції $f(x) = \frac{5}{\sqrt{8x - 4x^2}}$?
- А) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; В) $[0; 2]$;
Б) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; Г) $(0; 2)$.
5. Укажіть нерівність, яка не має розв'язків.
- А) $x^2 - 6x + 10 < 0$; В) $-3x^2 + 8x + 3 < 0$;
Б) $-5x^2 + 3x + 2 > 0$; Г) $-x^2 - 10x > 0$.
6. Пари чисел $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} y - x = 2, \\ xy - y = 10. \end{cases}$ Чому дорівнює значення виразу $x_1y_1 + x_2y_2$?
- А) 23; Б) 7; В) 35; Г) -26.
7. Які фігури є графіками рівнянь системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -3? \end{cases}$
- А) Пряма та парабола; В) коло та гіпербола;
Б) коло та парабола; Г) парабола та гіпербола.
8. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ x + y = 1? \end{cases}$
- А) Жодного розв'язку; В) два розв'язки;
Б) один розв'язок; Г) чотири розв'язки.
9. Якого найбільшого значення набуває вираз $x + y$, якщо пара чисел $(x; y)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -7? \end{cases}$
- А) 1; Б) 6; В) 0; Г) -5.
10. Пари чисел $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} 2x - xy = 5, \\ y + xy = 6. \end{cases}$ Знайдіть значення виразу $|x_1y_1 - x_2y_2|$.
- А) 1; Б) 11; В) 70; Г) 10.
11. Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а його діагональ — 13 см. Нехай сторони прямокутника дорівнюють x см і y см. Яка з наведених систем рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові?
- А) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 169; \end{cases}$
Б) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$

12. Відстань між двома містами, яка дорівнює 120 км, легковий автомобіль проїжджає на 30 хв швидше, ніж вантажівка. Відомо, що за 2 год вантажівка проїжджає на 40 км більше, ніж легковий автомобіль за 1 год. Нехай швидкість вантажівки дорівнює x км/год, а легкового автомобіля — y км/год. Яка з наведених систем рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові?

$$\text{А) } \begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$$

$$\text{В) } \begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = \frac{1}{2}, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$$

$$\text{Б) } \begin{cases} \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$$

$$\text{Г) } \begin{cases} \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = \frac{1}{2}, \\ 2x - y = 40. \end{cases}$$

13. При яких значеннях b рівняння $3x^2 - bx + 3 = 0$ не має коренів?

$$\text{А) } -6 < b < 6;$$

$$\text{В) } b > 6;$$

$$\text{Б) } b < 6;$$

$$\text{Г) } b < -6 \text{ або } b > 6.$$

14. При якому значенні a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = a \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

$$\text{А) } a = 5;$$

$$\text{В) } a = -5 \text{ або } a = 5;$$

$$\text{Б) } a = 5\sqrt{2};$$

$$\text{Г) } a = -5\sqrt{2} \text{ або } a = 5\sqrt{2}.$$

У завданні 15 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.

15. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

Множина розв'язків

$$1) x^2 + 8x - 9 \geq 0$$

$$\text{А) } (-\infty; 0] \cup [9; +\infty)$$

$$2) x^2 - 10x + 9 \leq 0$$

$$\text{Б) } [9; +\infty)$$

$$3) x^2 - 9x \geq 0$$

$$\text{В) } [1; 9]$$

$$\text{Г) } (-\infty; -9] \cup [1; +\infty)$$

$$\text{Д) } [-9; 1]$$



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 6x - 40 > 0$;

3) $x^2 > 100$;

2) $x^2 - 2x + 4 < 0$;

4) $x^2 + 10x + 25 \leq 0$.

2.° Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 7, \\ x^2 + xy = 2. \end{cases}$

3.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{17x - x^2}$;

2) $y = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 10x - 11}}$.

4.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ 5x + y = 2. \end{cases}$

5.° Дві робітниці, працюючи разом, можуть виконати певне виробниче завдання за 8 год. Якщо перша робітниця виконає $\frac{2}{3}$ завдання, а потім друга завершить роботу, то все виробниче завдання буде виконано за 16 год. За який час кожна із робітниць може виконати це завдання самостійно?

6.° При яких значеннях a рівняння $x^2 + 4ax + 5a - 1 = 0$ не має коренів?

7.° Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 8xy + 16y^2 = 16, \\ x + 4y = 12. \end{cases}$



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Функція

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y .

Нуль функції

Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.

Проміжок знакосталості функції

Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.

Зростання і спадання функції

Функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу із цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу із цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

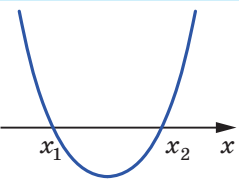
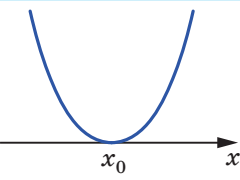
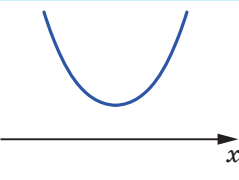
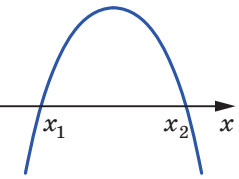
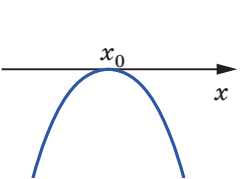
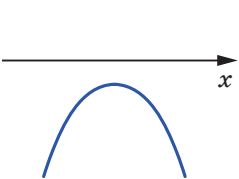
Квадратична функція

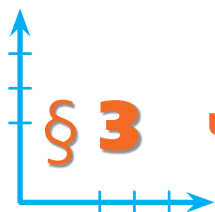
Функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратичною.

Квадратні нерівності

Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x — змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратними.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			



§ 3 ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Ви ознайомитеся з такими новими поняттями, як послідовність, n -й член послідовності, арифметична й геометрична прогресії, скінченні та нескінченні послідовності; дізнаєтеся, які є способи задання числових послідовностей.

Навчитися знаходити члени прогресій, обчислювати суми n перших членів прогресій.

15. Числові послідовності



Часто в повсякденному житті нам трапляються об'єкти, з якими зручно мати справу, якщо їх попередньо пронумерувати. Наприклад, номери мають місяці та квартали року, дні тижня, під'їзди та квартири будинку, вагони поїзда, і навіть кожен учень вашого класу має свій порядковий номер у класному журналі.



Об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, утворюють **послідовності**.

Так, можна говорити про послідовності сторінок у книзі, букв у слові, поверхів у будинку тощо.

Об'єкти, які утворюють послідовність, називають **членами послідовності**. Кожний член послідовності має свій номер. Наприклад, січень — це **перший член** послідовності місяців року. У деяких мовах це відображено навіть у назвах днів тижня. Така система, зокрема, притаманна

португальській, ісландській мовам та іврити¹. Наприклад, в івриті: *йом рішон* — перший день (неділя), *йом шені* — другий день (понеділок) тощо.

Узагалі, якщо член послідовності має номер n , то його називають **n -м членом послідовності**.

Якщо членами послідовності є числа, то таку послідовність називають **числовою**.

Наведемо приклади числових послідовностей.

1, 2, 3, 4, 5, ... — послідовність натуральних чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... — послідовність парних чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... — послідовність десяткових наближень дробу $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 — послідовність двоцифрових чисел, кратних 19;

-1, -2, -3, -4, -5, ... — послідовність від'ємних цілих чисел.

Надалі ми розглядатимемо тільки числові послідовності.

Послідовності бувають **скінченними** і **нескінченними**. Наприклад, послідовність парних натуральних чисел — це нескінченна послідовність, а послідовність двоцифрових чисел, кратних 19, — це скінченна послідовність.

Для позначення членів послідовності використовують букви з індексами:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Індекс указує порядковий номер члена послідовності. Для позначення самої послідовності використовують запис (a_n) . Наприклад, якщо (p_n) — послідовність простих чисел, то $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ і т. д.

Послідовність вважають заданою, якщо кожний її член можна визначити за його номером.

Ознайомимося з основними способами задання послідовності.

Розглянемо послідовність, у якій перший член дорівнює 1, а кожний наступний член на 3 більший за попередній. Такий спосіб задання послідовності називають **описовим**. Його можна проілюструвати за допомогою запису з трьома крапками, виписавши кілька перших членів послідовності у порядку зростання номерів:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$$

¹ Іврит — державна мова Ізраїлю.

Цей запис доцільно застосовувати тоді, коли зрозуміло, які числа мають бути записані замість трьох крапок.

Наприклад, у послідовності, яку ми розглядаємо, зрозуміло, що після числа 19 має бути записано число 22.

Якщо послідовність є скінченною, то її можна задати за допомогою таблиці. Наприклад, наведена таблиця задає послідовність кубів одноцифрових натуральних чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Послідовності можна задавати за допомогою формул. Наприклад, рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність (x_n) натуральних степенів числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

У таких випадках говорять, що послідовність задано за допомогою **формули n -го члена послідовності**.

Розглянемо кілька прикладів.

Формула $a_n = 2n - 1$ задає послідовність натуральних непарних чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

Формула $y_n = (-1)^n$ задає послідовність (y_n) , у якій усі члени з непарними номерами дорівнюють -1 , а з парними номерами дорівнюють 1 :

$$-1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

Формула $c_n = 7$ задає послідовність (c_n) , усі члени якої дорівнюють числу 7:

$$7, 7, 7, 7, 7, \dots$$

Наведені способи задання послідовностей допомагають простежити зв'язок між поняттями «функція» і «послідовність».

Розглянемо функцію $y = f(x)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел або множина n перших натуральних чисел. Тоді функція f задає нескінченну послідовність $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ або скінченну послідовність $f(1), f(2), \dots, f(n)$.

Наприклад, якщо функцію f , областю визначення якої є множина натуральних чисел, задано формулою $f(x) = x^2$, то ця функція задає послідовність квадратів натуральних чисел:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

Нерідко послідовність задають правилом, яке дає змогу знайти наступний член, знаючи попередній.

Розглянемо послідовність (a_n) , перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний член послідовності в 3 рази більший за попередній. Маємо:

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

Цю саму послідовність також можна визначити такими умовами:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n.$$

Ці рівності вказують перший член послідовності та правило, користуючись яким за кожним членом послідовності можна знайти наступний за ним член:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 3a_1 = 3, \\ a_3 &= 3a_2 = 9, \\ a_4 &= 3a_3 = 27, \\ &\text{і т. д.} \end{aligned}$$

Формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів, називають **рекурентною формулою** (від латин. *recurro* — повертатися). У наведеному прикладі це формула $a_{n+1} = 3a_n$. Умови, які визначають перший або кілька перших членів, називають **початковими умовами**. У розглядуваному прикладі початкова умова — це рівність $a_1 = 1$.

Спосіб задання послідовності за допомогою початкових умов і рекурентної формули називають **рекурентним способом** задання послідовності.

При рекурентному способі задання послідовності перший або кілька перших членів послідовності є заданими, а всі інші обчислюють один за одним. Із цієї точки зору спосіб задання послідовності формулою n -го члена видається більш зручним: за його допомогою можна одразу знайти потрібний член послідовності, знаючи лише його номер.

ПРИКЛАД. Послідовність (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = 37 - 3n$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 19; 2) -7 ? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

Розв'язання. 1) Якщо число 19 є членом даної послідовності, то існує таке натуральне значення n , при якому виконується рівність $37 - 3n = 19$. Звідси $3n = 18$; $n = 6$. Отже, число 19 є шостим членом послідовності (c_n) .

2) Маємо: $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Оскільки

число $14\frac{2}{3}$ не є натуральним, то число -7 не є членом даної послідовності.

Відповідь: 1) Так, $n = 6$; 2) ні. ◀



1. Що утворюють об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами? **2.** Як називають об'єкти, які утворюють послідовність? **3.** У якому разі послідовність вважають заданою? **4.** Поясніть, що таке формула n -го члена послідовності.



ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Запам'ятайте! В українській мові вживається префікс з- (*зробити, звести, здобути, зростання*), але перед п'ятьма буквами — **к, п, т, ф, х** — тільки префікс с-, наприклад: *скласти, скінченний, нескінченний, скоротити, спадання, спочатку, спростити, стверджувати, ствердний, стискання, стягнення, сформулювати, схвалити*.



ВПРАВИ

15.1.° Розгляньте послідовність кольорів веселки: червоний, оранжевий, жовтий, зелений, блакитний, синій, фіолетовий. Назвіть:

- 1) перший і останній члени цієї послідовності;
- 2) четвертий член послідовності;
- 3) номер, який має синій колір;
- 4) член послідовності, який передує зеленому кольору;
- 5) члени послідовності, які містяться між другим і п'ятим членами послідовності.

15.2.° Дано послідовність $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n, \dots$. Назвіть:

- 1) член послідовності, який слідує за членом: а) b_8 ;
б) b_{19} ; в) b_n ; г) b_{n-2} ;
- 2) член послідовності, який передує члену: а) b_7 ; б) b_{12} ;
в) b_n ; г) b_{n+4} ;

3) члени послідовності, які містяться між шостим і десятим членами послідовності.

15.3.° Дано послідовність 2, 7, 12, 19, 24, 26, 27, 30. Укажіть:

- 1) третій член послідовності;
- 2) номер члена послідовності, який дорівнює 26;
- 3) член послідовності, який слідує за її четвертим членом;
- 4) член послідовності, який передує її восьмому члену.

15.4.° Запишіть у порядку зростання п'ять перших членів послідовності:

- 1) двоцифрових чисел, кратних числу 4;
- 2) правильних звичайних дробів зі знаменником 11;
- 3) натуральних чисел, що дають при діленні на 8 остачу 1.

Як ви думаєте, скінченними чи нескінченними є ці послідовності? Обговоріть це питання у класі.

15.5.° Послідовність (a_n) є послідовністю трицифрових чисел, кратних числу 5, узятих у порядку зростання. Заповніть таблицю:

n	1	2	3	4	5	6
a_n						

15.6.° Знайдіть чотири перших члени послідовності (a_n) , заданої формулою n -го члена:

$$1) a_n = n + 4; \quad 2) a_n = 4n - 3; \quad 3) a_n = \frac{n}{n^2 + 1}; \quad 4) a_n = \frac{2^n}{n}.$$

15.7.° Знайдіть другий, сьомий і сотий члени послідовності (b_n) , заданої формулою n -го члена:

$$1) b_n = \frac{10}{n}; \quad 3) b_n = n^2 + 2n;$$

$$2) b_n = 5 - 2n; \quad 4) b_n = (-1)^{n+1}.$$

15.8.° Послідовність (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Знайдіть:

$$1) c_1; \quad 2) c_8; \quad 3) c_{15}; \quad 4) c_{2k}; \quad 5) c_{2k+1}.$$

15.9.° Послідовність (x_n) задано формулою n -го члена $x_n = 3n + 1$. Знайдіть:

$$1) x_1; \quad 2) x_7; \quad 3) x_{20}; \quad 4) x_{300}.$$

15.10.° Знайдіть чотири перших членів послідовності (a_n) , якщо $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$.

15.11.° Знайдіть чотири перших членів послідовності (b_n) , якщо $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\frac{b_n}{3}$.

15.12.* Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 7n + 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 23; 2) 149; 3) 47? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

15.13.* Послідовність (b_n) задано формулою n -го члена $b_n = n^2 - 4$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 5; 2) 16; 3) 77? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

 **15.14.*** Скільки від'ємних членів містить послідовність (x_n) , задана формулою n -го члена $x_n = 6n - 50$?

15.15.* Знайдіть номер першого від'ємного члена послідовності (y_n) , заданої формулою n -го члена $y_n = 38 - 3n$.

15.16.** Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = n^2 - 3n - 8$. Знайдіть номери членів цієї послідовності, менших від 10.

Цю задачу можна розв'язати декількома способами. Який обрали ви? Чи вважаєте його раціональним? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

15.17.* Послідовність (b_n) задано формулою n -го члена $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Скільки членів цієї послідовності більші за 16?

15.18.** Підберіть одну з можливих формул n -го члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 1, 4, 9, 16, 25, ...; 3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$;

2) 5, 8, 11, 14, 17, ...; 4) 0, 2, 0, 2, 0,

15.19.** Підберіть одну з можливих формул n -го члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...; 2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots$.

15.20.** Знайдіть чотири перших членів послідовності (a_n) , якщо $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$.

15.21.** Знайдіть чотири перших членів послідовності (b_n) , якщо $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

15.22. Морська вода містить 5 % солі. Скільки прісної води треба додати до 40 кг морської води, щоб концентрація солі склала 2 %?

15.23. Учні та учениці 9-А класу зібрали 350 кг макулатури, а 9-Б класу — на 20 % більше. Якщо кожна тонна макулатури в середньому може зберегти 17 дерев, то скільки дерев вдалося врятувати завдяки спільним зусиллям двох класів? Відповідь округліть до одиниць.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.24. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{\sqrt{2-x}}{x+2};$$

$$2) y = \frac{\sqrt{6-5x-x^2}}{x-1}.$$

15.25. Графіком квадратичної функції є парабола з вершиною в початку координат, яка проходить через точку $A(-1; -0,25)$. Задайте цю функцію формулою.



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

15.26. Розглядаються квадратичні функції $y = x^2 + px + q$, для яких $p + q = 5$. Доведіть, що параболи, які є графіками цих функцій, перетинаються в одній точці.



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Про кролів, соняшники, соснові шишки та золотий переріз

Розглянемо послідовність (u_n) , яку задано рекурентно такими співвідношеннями: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Запишемо кілька її перших членів:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Члени цієї послідовності називають **числами Фібоначчі**. Така назва пов'язана з тим, що італійський математик Леонардо Пізанський (Фібоначчі), розв'язуючи популярну у XII ст. задачу про чисельність потомства пари кролів, першим звернув увагу на чудові властивості цієї послідовності. У цій задачі чисельність потомства кролів збільшується так: кожна доросла пара кролів щомісяця приводить пару кроленят, які через місяць також починають давати потомство. На рисунку 15.1 кількість пар кролів відповідає послідовності чисел Фібоначчі.

На числа Фібоначчі можна натрапити в різних ситуаціях. Уявіть собі, що ви йдете доріжкою, вимощеною квадратними плитками в один ряд, ступаючи кожного разу на наступну плитку або через одну. Тоді кількість способів пройти доріжку з n плиток дорівнює n -му члену послідовності Фібоначчі (перевірте це самостійно, наприклад, для випадку $n = 8$).

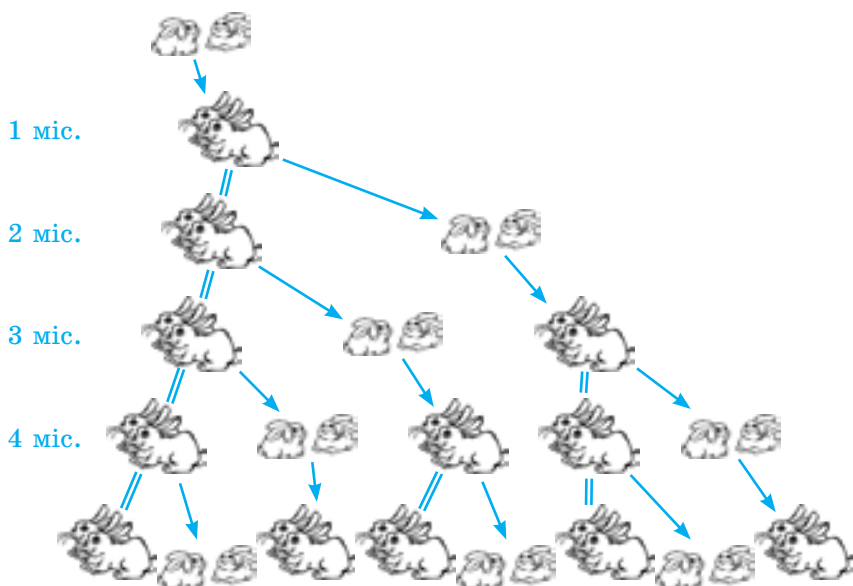


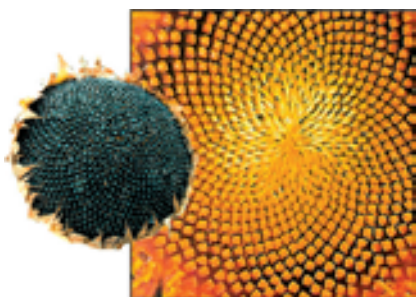
Рис. 15.1

Навіть деякі явища природи пов'язані із числами Фібоначчі.

Якщо подивитися на насіння в голівці соняшника або ромашки, то можна побачити, що зернятка розміщені у вигляді

двох сімейств спіралей, які закручуються в протилежних напрямках. Кількість спіралей у цих сімействах є сусідніми членами послідовності Фібоначчі. Зазвичай для соняшника ці числа дорівнюють 34 і 55, проте трапляються й гіганти з 89 і 144 спіралями. Подібну властивість¹ можна виявити в структурі соснових шишок. Те саме явище спостерігається й на плодах ананаса, де спіралей, як правило, буває 8 і 13.

Якщо в послідовності Фібоначчі для кожного натурального n обчислити відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, то отримаємо послідовність 1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761);



Цій послідовності притаманна така властивість: зі зростанням номерів її члени все менше й менше відрізняються від числа $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$.

Ще в давнину із цим числом люди пов'язували своє уявлення про красу та гармонію. Грецькі скульптори добре знали про відповідність правильних пропорцій людського тіла цьому магічному числу. І не даремно античні зодчі використовували його у своїх безсмертних творіннях. Так, відношення довжини Парфенона² до його висоти наближено дорівнює 1,618. Геній епохи Відродження Леонардо да Вінчі вважав, що з багатьох відношень, які використовує Творець, існує одне, єдине й неповторне. Саме його він назвав «золотим перерізом».

¹ У ботаніці таке сполучення двох сімейств спіралей називають філотаксисом.

² Парфенон — храм в Афінах, побудований у V ст. до н. е.

Французький учений Жак Біне (1786–1856) указав формулу n -го члена послідовності Фібоначчі:

$$u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Важко повірити, що ця формула задає натуральні числа. Проте це так.

**Леонардо Пізанський
(Фібоначчі)
(12–13 ст.)**

Італійський математик. Подорожуючи країнами Сходу, ознайомився з досягненнями арабських математиків і сприяв поширенню цих знань у Європі. Його основні праці: «Liber Abaci» (1202) — трактат про арифметику й алгебру, «Practica Geometriae» (1220) започаткували застосування алгебраїчних методів у геометрії.



16. Арифметична прогресія



Розглянемо такі послідовності:

2, 7, 12, 17, 22, 27, ...;

1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; ...;

3, 1, -1, -3, -5, -7,

Їм притаманна така характерна особливість: *кожний наступний член послідовності отримано в результаті додавання до попереднього одного й того самого числа*. Для першої послідовності це число дорівнює 5, для другої це число дорівнює 0,5, для третьої це число дорівнює -2.

З подібними послідовностями людям доводилося мати справу ще в давні часи, коли вони рахували предмети парами, п'ятірками, десятками, дюжинами тощо. Такі послідовності називають **арифметичними прогресіями** (від лат. *progressio* — рух уперед).

Арифметичні прогресії часто трапляються в реальному житті. Наприклад, працівник може отримувати щомісячну надбавку до зарплати в однаковому розмірі. Або вартість

проїзного абонементу на громадський транспорт може щороку зростати на фіксовану суму. Ще один приклад: спортсмен, який щотижня збільшує дистанцію бігу на два кілометри, поступово нарощуючи навантаження. Вивчення арифметичних прогресій допомагає розв'язувати практичні задачі, пов'язані з регулярним зростанням або спаданням числових величин. Це дозволяє планувати, прогнозувати результати та виявляти закономірності в економіці, природничих науках, спорті та багатьох інших сферах діяльності людини.

Означення:

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число.

Число, яке дорівнює різниці наступного й попереднього членів послідовності, називають **різницею арифметичної прогресії** та позначають буквою d (першою буквою латинського слова *differentia* — різниця).

Отже, якщо (a_n) — арифметична прогресія з різницею d , то

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots,$$

тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $a_{n+1} - a_n = d$. Звідси

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Отже, арифметичну прогресію можна задати так:

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$$

Таким чином, щоб задати арифметичну прогресію, потрібно вказати її перший член і різницю.

Наведемо кілька прикладів.

Якщо $a_1 = 2$ і $d = 5$, то отримаємо арифметичну прогресію, подану на початку пункту:

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots$$

Якщо $a_1 = 1$ і $d = 2$, то отримаємо арифметичну прогресію — послідовність непарних чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

Ми навели приклади арифметичних прогресій, у яких різниця є додатним числом. Проте різниця може бути від'ємним числом і навіть нулем. Так, послідовність 5, 5, 5, 5, ..., усі члени якої рівні між собою, є арифметичною прогресією, у якої $a_1 = 5$, $d = 0$.

Покажемо, як можна задати арифметичну прогресію за допомогою формули n -го члена.

З означення арифметичної прогресії (a_n) випливає:

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + d; \\a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2; \\a_4 &= a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3; \\a_5 &= a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4.\end{aligned}$$

Ці приклади допомагають побачити таку закономірність: щоб знайти деякий член арифметичної прогресії, можна до першого члена додати добуток різниці d і числа, яке на 1 менше від номера шуканого члена. Звідси, наприклад, $a_6 = a_1 + d \cdot 5$, $a_7 = a_1 + d \cdot 6$, і взагалі

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Записану рівність називають **формулою n -го члена арифметичної прогресії**.

Установимо важливу властивість членів арифметичної прогресії (a_n) .

Маємо:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2, \text{ звідси } 2a_2 = a_1 + a_3; \quad a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

$$a_3 - a_2 = a_4 - a_3, \text{ звідси } 2a_3 = a_2 + a_4; \quad a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}.$$

Узагалі, для будь-якого натурального n , більшого за 1, можна записати: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, звідки

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів.

ПРИКЛАД. Доведіть, що послідовність (a_n) , задана формулою n -го члена $a_n = 9n - 2$, є арифметичною прогресією.

Розв'язання. Розглянемо різницю двох довільних послідовних членів послідовності:

$$a_{n+1} - a_n = 9(n+1) - 2 - (9n - 2) = 9n + 9 - 2 - 9n + 2 = 9.$$

Отже, при будь-якому натуральному n виконується рівність $a_{n+1} = a_n + 9$, тобто кожний член даної послідовності, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число 9. Таким чином, дана послідовність є арифметичною прогресією. ◀



1. Яку послідовність називають арифметичною прогресією?
2. Яке число називають різницею арифметичної прогресії? Як позначають це число?
3. Що потрібно вказати, щоб задати арифметичну прогресію?
4. Який вигляд має формула n -го члена арифметичної прогресії?
5. Як пов'язані між собою будь-який член арифметичної прогресії та сусідні з ним члени?



ВПРАВИ

16.1.° Серед поданих послідовностей укажіть арифметичні прогресії:

- | | |
|--------------------|------------------------|
| 1) 3, -6, 12, -24; | 4) 42, 39, 36, 33; |
| 2) 4, 8, 12, 16; | 5) -5, -3, -1, 1; |
| 3) 5, 10, 5, 10; | 6) 1,2; 1,3; 1,5; 1,6. |

16.2.° Чи є арифметичною прогресією послідовність (у разі ствердної відповіді вкажіть різницю прогресії):

- | | |
|--------------------|------------------|
| 1) 24, 22, 20, 18; | 3) -3, 2, 7, 12? |
| 2) 16, 17, 19, 23; | |

16.3.° Знайдіть чотири перші члени арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 12, а різниця становить -4.

16.4.° Перший член арифметичної прогресії дорівнює -14, а різниця становить 5. Знайдіть п'ять перших членів прогресії.

16.5.° Послідовність (c_n) — арифметична прогресія, різниця якої дорівнює d . Виразіть через c_1 і d :

- | | | |
|------------|---------------|----------------|
| 1) c_6 ; | 2) c_{19} ; | 3) c_{k+1} . |
|------------|---------------|----------------|

16.6.° Перший член арифметичної прогресії (a_n) дорівнює 4, а різниця становить 0,4. Знайдіть: 1) a_3 ; 2) a_{11} ; 3) a_{32} .

16.7.° Перший член арифметичної прогресії (a_n) дорівнює 17, а різниця становить -2. Знайдіть: 1) a_4 ; 2) a_{15} ; 3) a_{60} .

16.8.° Знайдіть різницю та двісті перший член арифметичної прогресії 2,6; 2,9; 3,2;

16.9.° Чому дорівнює різниця арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_6 = -2$, $a_7 = 6$?

16.10.° Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_8 = 3$, $a_9 = -12$.

16.11.° Знайдіть різницю арифметичної прогресії (x_n) , якщо $x_1 = 2$, $x_8 = -47$.

16.12.° Знайдіть різницю арифметичної прогресії (y_n) , якщо $y_1 = 5$, $y_6 = 75$.

16.13.° Знайдіть перший член арифметичної прогресії (b_n) , якщо $b_{11} = -40$, а різниця прогресії $d = 6$.

16.14.° Знайдіть перший член арифметичної прогресії (y_n) , якщо $y_{17} = 22$, а різниця прогресії $d = 0,5$.

16.15.* Знайдіть формулу n -го члена арифметичної прогресії:
1) $-5, -7, -9, -11, \dots$; 2) $a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \dots$.

16.16.* Знайдіть формулу n -го члена арифметичної прогресії:
1) $2, 2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, \dots$; 2) $a + 3, a + 1, a - 1, a - 3, \dots$.

16.17.* Чи є членом арифметичної прогресії (c_n) :

1) число 99, якщо $c_1 = 9$, а різниця прогресії $d = 6$;

2) число 38, якщо $c_1 = 8$, а різниця прогресії $d = 4$?

У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

16.18.* Знайдіть номер члена арифметичної прогресії 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ..., який дорівнює 13,7.

16.19.* Знайдіть другий член арифметичної прогресії, якщо перший і третій члени дорівнюють відповідно -6 і 12 .

16.20.* Восьмий і десятий члени арифметичної прогресії дорівнюють відповідно $3,5$ і $2,7$. Чому дорівнює дев'ятий член прогресії?

16.21.* Знайдіть перший член арифметичної прогресії (b_n) , якщо $b_5 = 11$, $b_{11} = -7$.

16.22.* Чому дорівнює різниця арифметичної прогресії (x_n) , якщо $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$?

16.23.* Поміркуйте, як зміниться різниця скінченної арифметичної прогресії, якщо переставити її члени у зворотному порядку. Обговоріть це питання у класі.

16.24.* Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 5,2; 4,9; 4,6; ...?

16.25.* Який номер має перший додатний член арифметичної прогресії $-10, 2; -9, 5; -8, 8; \dots$?

16.26.* Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії $7, 2; 6, 6; 6; \dots$.

↔ **16.27.*** Між числами -6 і 3 вставте п'ять таких чисел, щоб вони разом із даними числами утворювали арифметичну прогресію.

16.28.* Які чотири числа треба вставити між числами 4 і -5 , щоб вони разом із даними числами утворювали арифметичну прогресію?

16.29.* Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_3 + a_7 = 30$ і $a_6 + a_{16} = 60$;

2) $a_4 + a_{10} = 36$ і $a_5 \cdot a_{11} = 340$.

16.30.* Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_5 + a_{12} = 41$ і $a_{10} + a_{14} = 62$;

2) $a_7 + a_{13} = -104$ і $a_2 \cdot a_6 = -240$.

16.31.** Чи є правильним твердження: якщо довжини сторін опуклого чотирикутника (рис. 16.1), узяті в послідовності a, b, d і c , утворюють арифметичну прогресію, то в цей чотирикутник можна вписати коло?

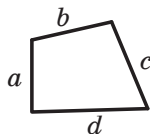


Рис. 16.1

16.32.** Величини кутів трикутника утворюють арифметичну прогресію. Яка градусна міра середнього за величиною кута трикутника?

16.33.** Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо її задано формулою n -го члена:

1) $a_n = -6n + 3$;

2) $a_n = 2n^2 - n$?

У разі ствердної відповіді вкажіть перший член і різницю прогресії.

16.34.** Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо її задано формулою n -го члена:

1) $a_n = 6 + 7n$;

2) $a_n = \frac{2n-1}{5}$?

У разі ствердної відповіді вкажіть перший член і різницю прогресії.

16.35.** З арифметичної прогресії вилучили члени з непарними номерами. Як ви думаєте, чи утворюють члени, що залишилися, арифметичну прогресію? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

16.36.* Якщо в арифметичній прогресії, різниця якої не дорівнює нулю, вилучити її члени, номери яких кратні 3, то чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?

16.37.* Кожний член арифметичної прогресії помножили на 4. Чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?

16.38.* Як ви думаєте, яку послідовність утворюють числа, що дорівнюють відповідно сумі кутів трикутника, чотирикутника, опуклого п'ятикутника, опуклого шестикутника й т. д? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

16.39.* При якому значенні x значення виразів $x^2 - 4$, $5x + 3$ і $3x + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

16.40.* При якому значенні y значення виразів $y^2 + 1$, $y^2 + y$ і $8y - 10$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

16.41.* Доведіть, що коли додатні числа a , b і c — три послідовних члени арифметичної прогресії, то

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

16.42.* Доведіть, що коли значення виразів $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$

і $\frac{1}{a+b}$ є послідовними членами арифметичної прогресії,

то значення виразів a^2 , b^2 і c^2 також є послідовними членами арифметичної прогресії.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

16.43. Ольга хоче придбати 6 однакових альбомів за ціною 48 грн за альбом і 3 однакових набори для малювання за ціною 196 грн за набір. Маючи 900 грн, Ольга відразу зрозуміла, що грошей їй вистачить. Як, на вашу думку, вона змогла це швидко визначити?

16.44. За підсумками роботи протягом кварталу приватний підприємець має сплатити єдиний податок, що становить 5 % від доходу, військовий збір у розмірі 1 % від доходу, а також 5280 грн єдиного внеску на загальнообов'язкове державне соціальне страхування. Після цих сплат із

Розповідають, що видатний німецький математик Карл Фрідріх Гаусс придумав таке розв'язання у віці 5 років.

Скористаємося описаним прийомом для знаходження суми (*).

Запишемо суму S_n двома способами. Спочатку запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_1 , а кожний наступний доданок отримано з попереднього додаванням різниці d . Потім запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_n , а кожний наступний доданок отримано з попереднього відніманням різниці d .



Карл Фрідріх Гаусс
(1777–1855)

Маємо:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d),$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d).$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Вираз, записаний у правій частині останньої рівності, є сумою n доданків, кожний з яких дорівнює $a_1 + a_n$.

Тоді $2S_n = (a_1 + a_n)n$, тобто

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Отриману рівність називають **формулою суми n перших членів арифметичної прогресії**.

Підставивши до цієї формули замість a_n вираз $a_1 + d(n-1)$, отримаємо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Звідси

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Останньою формулою зручно користуватися тоді, коли задано перший член і різницю прогресії.

Сума n перших членів арифметичної прогресії має чимало практичних застосувань. Наприклад, якщо ви плануєте накопичити гроші, щомісяця відкладаючи однакову суму, то за допомогою цієї формули можна розрахувати, скільки



у вас буде через рік чи два. У спортивних тренуваннях, поступово збільшуючи навантаження (скажімо, щодня додаючи три віджимання), за цією формулою легко визначити загальну кількість віджимань, виконаних за місяць. А ще вона чудово працює, коли треба підрахувати кількість колод у поліниці, де в кожному верхньому ряду на одну колоду менше. Такі розрахунки можуть використовувати лісники та будівельники.

ПРИКЛАД 1. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_{15} = 83$, а різниця прогресії $d = 6$.

Розв'язання. Знайдемо перший член a_1 даної прогресії. Оскільки $a_{15} = a_1 + 14d$, то

$$a_1 = a_{15} - 14d = 83 - 14 \cdot 6 = 83 - 84 = -1.$$

Скориставшись формулою $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, отримуємо: $S_{20} = \frac{2 \cdot (-1) + 6 \cdot (20-1)}{2} \cdot 20 = \frac{-2 + 114}{2} \cdot 20 = 1120$.

Відповідь: 1120. ◀

ПРИКЛАД 2. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 6.

Розв'язання. Перше трицифрове число, яке кратне 6, дорівнює 102, наступне — 108, далі йде 114 і т. д. Зрозуміло, що дані числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої $a_1 = 102$, а різниця $d = 6$. Тоді $a_n = 102 + 6(n-1) = 6n + 96$. Знайдемо кількість членів цієї прогресії.

Оскільки $a_n < 1000$, то шукана кількість — це найбільший натуральний розв'язок нерівності $6n + 96 < 1000$.

Маємо:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}.$$

Отже, $n = 150$. Тепер знайдемо шукану суму:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

Відповідь: 82 350. ◀



1. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший і останній члени? **2.** Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший член і різницю?



ВПРАВИ

- 17.1.°** Чому дорівнює сума семи перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 9$ і $a_7 = 15$?
- 17.2.°** Чому дорівнює сума шести перших членів арифметичної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 19$ і $b_6 = 14$?
- 17.3.°** Знайдіть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії, у якої $a_1 = -6$ і $d = 4$.
- 17.4.°** Знайдіть суму шістнадцяти перших членів арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 24$ і $d = -3$.
- 17.5.°** Обчисліть суму чотирнадцяти перших членів арифметичної прогресії 18, 15, 12,
- 17.6.°** Обчисліть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії -8, -6, -4,
- 17.7.°** Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = -4n + 1$. Знайдіть суму тридцяти двох перших членів прогресії.
Як ви думаєте, яку формулу краще застосувати для розв'язання цієї задачі? Обговоріть це питання у класі.
- 17.8.°** Арифметичну прогресію (c_n) задано формулою n -го члена $c_n = 5n - 2$. Знайдіть суму двадцяти шести перших членів прогресії.

17.9.* Знайдіть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_1 = 6$, $a_9 = 22$;

2) $a_6 = 49$, $a_{20} = 7$.

17.10.* Чому дорівнює сума сорока перших членів арифметичної прогресії (x_n) , якщо $x_8 = -14$, $x_{30} = -3$?

17.11.* Знайдіть суму двадцяти п'яти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_{10} = 44$, а різниця прогресії $d = 4$.

17.12.* Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ і $a_5 + a_{22} = 101$.

17.13.* Знайдіть суму тридцяти трьох перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ і $a_{15} - a_8 - a_{10} = -1$.

17.14.** При будь-якому n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 3n^2 + 5n$. Знайдіть три перших члени цієї прогресії.

17.15.* При будь-якому n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 9n - 2n^2$. Знайдіть сьомий член цієї прогресії.

17.16.** (*Стародавня єгипетська задача*) Сто мір хліба треба розділити між п'ятьма людьми так, щоб другий отримав на стільки ж більше за першого, на скільки третій отримав більше за другого, четвертий більше за третього та п'ятий більше за четвертого. Окрім того, двоє перших повинні отримати в 7 разів менше, ніж троє останніх. Скільки треба дати кожному?

17.17.** Чому дорівнює сума n перших:

1) натуральних чисел;

2) непарних чисел?

17.18.* Чому дорівнює сума n перших парних чисел?

 **17.19.**** Яке натуральне число дорівнює сумі всіх попередніх йому натуральних чисел?

17.20.** Знайдіть суму всіх від'ємних членів арифметичної прогресії $-6, 2; -5, 9; -5, 6; \dots$.

17.21.* Знайдіть суму всіх додатних членів арифметичної прогресії $8, 4; 7, 8; 7, 2; \dots$.

- 17.22.*** Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 5 і не більші за 240.
- 17.23.*** Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 4 і менші від 130.
- 17.24.*** Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 12 і менші від 200.
- 17.25.*** Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 8.
- 17.26.*** Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 7.
- 17.27.*** Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з восьмого по двадцять шостий включно, якщо перший член прогресії дорівнює 24, а різниця прогресії дорівнює -8 .
- 17.28.*** Знайдіть суму членів арифметичної прогресії (x_n) з десятого по двадцять п'ятий включно, якщо $x_1 = -3$ і $x_{11} = 12$.
- 17.29.*** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $7 + 13 + 19 + \dots + (6n + 1) = 480$, де n — натуральне число;
 - 2) $5 + 8 + 11 + \dots + x = 124$, де x — натуральне число.
- 17.30.*** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $11 + 19 + 27 + \dots + (8n + 3) = 470$, де n — натуральне число;
 - 2) $1 + 5 + 9 + \dots + x = 630$, де x — натуральне число.
- 17.31.*** Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, у якої середнє арифметичне n перших членів при будь-якому n дорівнює їхній кількості.
- 17.32.*** (Задача Гіпсикла Александрійського¹) Доведіть, що в арифметичній прогресії з парною кількістю членів, яка складається із цілих чисел, сума другої половини більша за суму першої половини на число, яке кратне квадрату половини кількості членів.
- 17.33.*** Доведіть, що коли сума n перших членів послідовності обчислюється за формулою $S_n = n^2 - 3n$, то ця послідовність є арифметичною прогресією. Знайдіть перший член і різницю цієї прогресії.

¹ Гіпсикл Александрійський (II ст. до н. е.) — давньогрецький учений, автор XIV книги «Начал» Евкліда.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

- 17.34.** Місця в секторі цирку розташовано так, що в першому ряду 6 місць, а в кожному наступному на 3 місця більше, ніж у попередньому. Скільки місць у секторі, якщо в ньому 16 рядів?
- 17.35.** Марина взяла в бібліотеці книжку. За перший день вона прочитала 40 сторінок, а кожного наступного дня читала на 10 сторінок більше, ніж попереднього. Скільки сторінок у книжці, якщо Марина прочитала її за 7 днів?
- 17.36.** Скільки ударів зробить годинник протягом доби, якщо він відбиває тільки кількість цілих годин від 1 до 12?
- 17.37.** Під час вільного падіння тіло за першу секунду проходить 4,9 м, а за кожную наступну — на 9,8 м більше, ніж за попередню, якщо не враховувати опір повітря. Знайдіть час падіння тіла з висоти 490 м (опором повітря знехтувати).



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 17.38.** Обчисліть:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3^{49}}{9^{25}}; & 3) \frac{5^4 \cdot 11^7}{55^6}; \\ 2) \frac{4^8}{8^4}; & 4) \frac{12^5}{18^3}. \end{array}$$

- 17.39.** При якому значенні k графіки функцій $y = kx - 3$ і $y = x^2$ перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює -2 ?

- 17.40.** Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{bc}}; \quad 2) \frac{d - 49}{d + 12\sqrt{d} + 36} \cdot \frac{4\sqrt{d} + 24}{3\sqrt{d} + 21}.$$



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

- 17.41.** Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = x^2 + y^2 + 2.$$

18. Геометрична прогресія



Розглянемо послідовності:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots,$$

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots,$$

$$5; -0,5; 0,05; -0,005; 0,0005; \dots$$

Їм притаманна така характерна особливість: *кожний наступний член послідовності отримано в результаті множення попереднього члена на одне й те саме число*. Для першої послідовності це число дорівнює 3, для другої це число дорівнює $\frac{1}{2}$, для третьої це число дорівнює $-0,1$.

З подібними послідовностями можна зустрітися, наприклад, під час вивчення зростання колонії бактерій, при щомісячній оцінці суми грошей на рахунку, що покладені в банк під відсотки. Такі послідовності називають **геометричними прогресіями**.

Геометрична прогресія описує ситуації, де значення певної величини щоразу змінюється в одне й те саме число разів. Наприклад, інтенсивність звуку зменшується в однакову кількість разів із кожним подвоєнням відстані від джерела. А в комп'ютерних іграх іноді трапляється, що з переходом на кожний новий рівень кількість очок за правильну дію множить на постійний коефіцієнт, — це теж приклад геометричної прогресії.

Означення:

Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Число, що дорівнює відношенню наступного і попереднього членів послідовності, називають **знаменником геометричної прогресії** та позначають буквою q (першою буквою французького слова *quotient* — частка).

Отже, якщо (b_n) — геометрична прогресія зі знаменником q , то

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots,$$

тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Звідси отримуємо формулу $b_{n+1} = b_n q$.

Таким чином, геометричну прогресію можна задати так:

$$b_1 = b, b_{n+1} = b_n q$$

Отже, щоб задати геометричну прогресію, потрібно вказати її перший член і знаменник.

Наведемо кілька прикладів.

Якщо $b_1 = 1$ і $q = 3$, то отримаємо геометричну прогресію, подану на початку пункту:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

Якщо $b_1 = 2$ і $q = 2$, то отримаємо геометричну прогресію, яка є послідовністю натуральних степенів числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$$

Зауважимо, що геометрична прогресія зі знаменником, який дорівнює 1, є послідовністю, усі члени якої рівні. Так, послідовність 5, 5, 5, 5, ... є геометричною прогресією, у якої $b_1 = 5$, $q = 1$. Разом із цим цю послідовність можна розглядати як арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 5$, $d = 0$.

Узагалі, будь-яка послідовність, усі члени якої рівні між собою та відмінні від нуля, є одночасно і геометричною, і арифметичною прогресією. Послідовність 0, 0, 0, 0, ..., усі члени якої дорівнюють нулю, є лише арифметичною прогресією.

Покажемо, як можна задати геометричну прогресію за допомогою формули n -го члена.

З означення геометричної прогресії випливає:

$$b_2 = b_1 q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4.$$

Ці приклади допомагають помітити таку закономірність: щоб знайти деякий член геометричної прогресії, можна перший член помножити на степінь з основою q і показником, який на 1 менший від номера шуканого члена. Звідси, наприклад, $b_6 = b_1 q^5$, $b_7 = b_1 q^6$, і взагалі

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Записану рівність називають **формулою n -го члена геометричної прогресії**.

Установимо важливу властивість членів геометричної прогресії (b_n).

Маємо:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}, \text{ звідси } b_2^2 = b_1 \cdot b_3;$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}, \text{ звідси } b_3^2 = b_2 \cdot b_4.$$

Узагалі, для будь-якого натурального n , більшого за 1, можна записати: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Звідси

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює добутку двох сусідніх із ним членів.

Якщо всі члени геометричної прогресії (b_n) є додатними, то рівність $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ можна переписати так:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Отже, кожний член такої послідовності, крім першого (і останнього, якщо послідовність є скінченною), є середнім геометричним двох сусідніх із ним членів.

Розглянемо дві послідовності.

Арифметична прогресія (a_n), у якій $a_1 = 1$, $d = 2$:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21,

Геометрична прогресія (b_n), у якій $b_1 = 1$, $q = 2$:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,

У цих прогресій перші члени є рівними. Обидві ці послідовності конструюються за допомогою одного й того самого числа 2 ($d = q = 2$). Разом з тим, порівнюючи відповідні члени цих послідовностей, ми бачимо, що геометрична прогресія «зростає» набагато швидше, ніж арифметична. Наприклад, в арифметичній прогресії $a_{20} = 1 + 2 \cdot 19 = 39$, у геометричній $b_{20} = 1 \cdot 2^{19} = 524\,288$.



Ви знаєте, що бактерії розмножуються поділом: одна бактерія ділиться на дві. Тепер стає зрозумілим, чому так швидко зростає чисельність бактерій, якщо їх помістити в сприятливе середовище.

Можливо, із цим прикладом пов'язано те, що нерідко в повсякденному житті, коли хочуть підкреслити швидке зростання якоїсь величини, кажуть: «зростає в геометричній прогресії».

ПРИКЛАД 1. У геометричній прогресії (b_n) зі знаменником $q = \frac{1}{3}$ знайдіть b_1 , якщо $b_6 = \frac{5}{81}$.

Розв'язання. Оскільки $b_6 = b_1 q^5$, то

$$b_1 = b_6 : q^5 = \frac{5}{81} : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{5}{3^4} \cdot 3^5 = 5 \cdot 3 = 15.$$

Відповідь: 15. ◀

ПРИКЛАД 2. Знайдіть четвертий член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Розв'язання. За властивістю геометричної прогресії $b_4^2 = b_3 b_5$, звідси

$$b_4 = \sqrt{b_3 b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42 \text{ або } b_4 = -\sqrt{b_3 b_5} = -42.$$

Якщо $b_4 = 42$, то знаменник прогресії $q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$;

якщо $b_4 = -42$, то $q = -\frac{7}{6}$.

Відповідь: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ або $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$. ◀

ПРИКЛАД 3. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 + b_6 = 504$ і $b_4 - b_5 + b_6 = 378$.

Розв'язання. Нехай q — знаменник даної прогресії. Маємо систему двох рівнянь із двома змінними b_1 і q :

$$\begin{cases} b_1 q^2 + b_1 q^5 = 504, \\ b_1 q^3 - b_1 q^4 + b_1 q^5 = 378. \end{cases}$$

Поділимо почленно ліві і праві частини рівнянь системи:

$$\frac{b_1 q^2 (1 + q^3)}{b_1 q^3 (1 - q + q^2)} = \frac{504}{378}.$$

Далі отримуємо:

$$\frac{b_1 q^2 (1 + q) (1 - q + q^2)}{b_1 q^3 (1 - q + q^2)} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{1 + q}{q} = \frac{4}{3}; \quad 4q = 3 + 3q;$$

$$q = 3.$$

Підставивши значення q у перше рівняння системи, отримуємо: $9b_1 + 243b_1 = 504$; звідси $252b_1 = 504$; $b_1 = 2$.

Відповідь: $b_1 = 2$, $q = 3$. ◀

Розглянемо прикладну задачу, яку часто доводиться розв'язувати банківським працівникам, а також тим, хто зберігає гроші в банку під відсотки.

ПРИКЛАД 4. Нехай вкладник поклав у банк 100 000 грн під 10 % річних за таких умов: раз на рік проценти нараховують на поточну суму вкладу і додають до неї.¹ Яка сума буде на його рахунку через 7 років за умови, що вкладник протягом цього строку не знімає гроші з рахунку?

Розв'язання. Нехай a_0 — початковий капітал вкладника, тобто

$$a_0 = 100\,000 \text{ грн.}$$

Позначимо через $a_1, a_2, \dots, a_7$ кількість грошей на рахунку відповідно в кінці першого, другого, ..., сьомого років. Очевидно, що послідовність $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$ є геометричною прогресією, знаменник якої дорівнює 110 %, тобто 1,1.

¹ Такий банківський вклад називають депозитним із капіталізацією процентів.

Тоді

$$a_7 = a_0 \cdot 1,1^7 = 100\,000 \cdot 1,1^7 = 194\,871,71 \text{ (грн.)}$$

Відповідь: 194 871,71 грн. ◀

Аналогічно розв'язують цю задачу в загальному вигляді, коли початковий капітал, який дорівнює a_0 , поклали в банк під p % річних. Послідовність (a_n) є геометричною

прогресією зі знаменником $1 + \frac{p}{100}$. Тоді в кінці n -го року

матимемо:

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Отриману формулу називають **формулою складних відсотків**.



1. Яку послідовність називають геометричною прогресією?
2. Яке число називають знаменником геометричної прогресії?
3. Який вигляд має формула n -го члена геометричної прогресії?
4. Як пов'язані між собою три послідовних члени геометричної прогресії?
5. Який вигляд має формула складних відсотків? Поясніть її.



ВПРАВИ

18.1.° Серед наведених послідовностей укажіть геометричні прогресії, перший член і знаменник кожної з них:

- | | |
|--------------------|---|
| 1) 2, 6, 18, 36; | 4) 2, -2, 2, -2; |
| 2) 10, 20, 30, 40; | 5) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2$; |
| 3) 81, 27, 9, 3; | 6) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$. |

18.2.° Серед наведених послідовностей укажіть геометричні прогресії, перший член і знаменник кожної з них:

- | | |
|--------------------|----------------|
| 1) 4, 8, 16, 32; | 3) 1, 2, 3, 5. |
| 2) -9, -9, -9, -9; | |

18.3.° Шостий член геометричної прогресії (b_n) дорівнює 8, а знаменник дорівнює -4. Знайдіть сьомий член прогресії.

18.4.° Знайдіть дев'ятий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_8 = 16$, а знаменник прогресії $q = 2$.

18.5.° Чому дорівнює знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_1 = 6$, $b_2 = -3$; 2) $b_7 = -9$, $b_8 = 15$?

18.6.° Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_{12} = 24$, $b_{13} = 4$; 2) $b_4 = -\frac{2}{9}$, $b_5 = \frac{4}{15}$.

18.7.° Чому дорівнює перший член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_2 = 12$, а знаменник прогресії $q = \frac{1}{3}$?

18.8.° Сьомий член геометричної прогресії дорівнює -24 , а її знаменник дорівнює 4 . Знайдіть шостий член прогресії.

18.9.° Знайдіть чотири перших члени геометричної прогресії (x_n) , якщо $x_1 = 0,2$, а знаменник прогресії $q = -5$.

18.10.° Перший член геометричної прогресії дорівнює $-\frac{1}{27}$, а знаменник дорівнює 3 . Знайдіть п'ять перших членів прогресії.

18.11.° У геометричній прогресії (y_n) перший член $y_1 = 64$, а знаменник $q = -\frac{1}{2}$. Знайдіть: 1) y_3 ; 2) y_6 .

18.12.° Перший член геометричної прогресії $b_1 = \frac{1}{125}$, а її знаменник $q = 5$. Знайдіть: 1) b_4 ; 2) b_7 .

18.13.° Знайдіть знаменник і п'ятий член геометричної прогресії $\frac{1}{216}, \frac{1}{36}, \frac{1}{6}, \dots$.

18.14.° Знайдіть знаменник і шостий член геометричної прогресії $3, 6, 12, \dots$.

18.15.* Доведіть, що коли послідовність (x_n) — геометрична прогресія, то $x_3 x_{13} = x_5 x_{11}$.

18.16.* Доведіть, що коли послідовність (y_n) — геометрична прогресія, то $y_4 y_{21} = y_8 y_{17}$.

18.17.* Виразіть члени b_8 , b_{13} і b_{60} геометричної прогресії (b_n) через b_7 і знаменник q .

18.18.* Виразіть члени c_{18} , c_{36} і c_{50} геометричної прогресії (c_n) через c_{12} і знаменник q .

↔ **18.19.*** Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$; 2) $b_6 = 75$, $b_8 = 27$.

18.20.* Знайдіть перший член геометричної прогресії (c_n) , якщо:

- 1) $c_4 = 49$, а знаменник $q = 7$; 2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\,000$.

18.21.* Число 486 є членом геометричної прогресії 2, 6, 18, Знайдіть номер цього члена.

18.22.* Число 96 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, Знайдіть номер цього члена.

18.23.* Які два числа треба вставити між числами 6 і 750, щоб вони разом із даними числами утворили геометричну прогресію?

18.24.* Які чотири числа треба вставити між числами 0,5 і 16, щоб вони разом із даними числами утворили геометричну прогресію?

18.25.* Послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Знайдіть:

- 1) b_5 , якщо $b_4 = 9$, $b_6 = 25$;
2) b_{17} , якщо $b_{16} = 2$, $b_{18} = 10$.

18.26.* При якому значенні змінної x числа x , $3x$ і 18 будуть послідовними членами геометричної прогресії?

18.27.* При якому значенні змінної y числа -1 , $2y$ і -8 будуть послідовними членами геометричної прогресії?

18.28.** Послідовність (b_n) є геометричною прогресією зі знаменником q . Як ви думаєте, чи є геометричною прогресією послідовність:

- 1) $b_1, b_3, \dots, b_{2n-1}$; 3) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, \dots, b_{n-1} + b_n$;
2) $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n$; 4) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n}$?

У разі ствердної відповіді вкажіть знаменник прогресії. Обговоріть це питання у класі.

18.29.** Послідовність (b_n) є геометричною прогресією зі знаменником q . Чи є геометричною прогресією послідовність:

- 1) $b_2, b_4, \dots, b_{2n}$; 2) $b_1 b_3, b_2 b_4, b_3 b_5, \dots, b_{n-2} b_n$?

У разі ствердної відповіді вкажіть знаменник прогресії.

18.30.** У правильний трикутник зі стороною a послідовно вписано трикутники так, що вершини кожного наступного трикутника є серединами сторін попереднього (рис. 18.1). Доведіть, що периметри цих трикутників утворюють геометричну прогресію, і запишіть формулу n -го члена цієї прогресії.

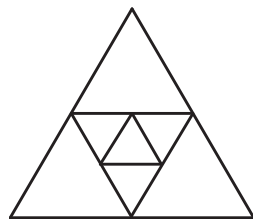


Рис. 18.1

18.31.** Між числами 80 і 5 вставте три такі числа, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію.

18.32.** Між числами 6 і 486 вставте три такі числа, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію.

18.33.** Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_5 = 9b_3$ і $b_6 - b_2 = 480$;
- 2) $b_5 - b_4 = 168$ і $b_3 + b_4 = -28$.

18.34.** Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

- 1) $b_4 - b_2 = 30$ і $b_4 - b_3 = 24$;
- 2) $b_2 - b_5 = 78$ і $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.

18.35.** При якому значенні x значення виразів $2x + 1$, $x + 5$ і $x + 11$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

18.36.** При якому значенні x значення виразів $x + 6$, $x + 2$ і $3x - 4$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

18.37.** Дано три додатних числа, які утворюють арифметичну прогресію. Їхня сума дорівнює 21. Якщо до цих чисел додати відповідно 2, 3 і 9, то отримані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть дані числа.

18.38.** Дано три числа, які утворюють арифметичну прогресію. Їхня сума дорівнює 30. Якщо від першого числа відняти 5, від другого відняти 4, а третє залишити без змін, то отримані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть дані числа.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

- 18.39.** Вкладник поклав до банку 5000 грн під 8 % річних за таких умов: раз на рік проценти нараховують на поточну суму вкладу та додають до неї. Скільки грошей буде на його рахунку через 3 роки, якщо вкладник протягом цього строку не знімає гроші з розрахунку?
- 18.40.** Чотири роки тому завод виготовляв 10 000 одиниць певного виробу за рік. Завдяки модернізації виробництва та підвищенню продуктивності праці досягли щорічного приросту обсягів виробництва на 20 %. Скільки одиниць указанного виробу буде виготовлено цього року?
- 18.41.** Після двох послідовних знижень ціни на 10 % канцелярський стіл став коштувати 2916 грн. Знайдіть початкову ціну стола.
- 18.42.** Після двох послідовних підвищень ціни на 25 % люстра стала коштувати 937 грн 50 коп. Знайдіть початкову ціну люстри.
- 18.43.** Населення міста за два роки збільшилося із 40 000 мешканців і мешканок до 44 100. Знайдіть середній щорічний відсоток приросту населення в цьому місті.
- 18.44.** Унаслідок двох послідовних знижень ціни на одну й ту саму кількість відсотків ціна стільця знизилася з 800 грн до 578 грн. На скільки відсотків кожного разу знижували ціну?
- 18.45.** Вкладниця поклала в банк 4000 грн. За перший рік їй було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 %. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка в перший рік?
- 18.46.** Вкладник поклав у банк 10 000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було зменшено на 2 %. На кінець другого року на рахунку стало 11 880 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка в перший рік?
- 18.47.** Вкладниця відкрила річний депозит на 3000 євро під 3 % річних. Яку суму матиме вкладниця за рік, якщо:
- 1) проценти нараховують у кінці строку;
 - 2) проценти нараховують щокварталу з капіталізації?

→ Якщо вам сподобалося розв’язувати задачі з цієї рубрики, то радимо прочитати оповідання на с. 177–178

і взяти участь у роботі над проектом «Елементи фінансової математики: банківські депозити». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проекті, ви можете знайти на с. 258.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.48. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{7^9}{7^{10}}$; 2) $\frac{125^3}{25^4}$; 3) $\frac{32^5}{64^4}$; 4) $\frac{39^8}{3^{10} \cdot 13^7}$.

18.49. Доведіть, що значення виразу є раціональним числом:

1) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}-3} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}+3}$; 2) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} + \frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$.



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Як уникнути неоднозначності в задачах на відсоткові розрахунки

Задачі, у яких йдеться про зміну процентних ставок, можуть викликати певні ускладнення. Типовим прикладом є задачі 18.45, 18.46, у яких ідеться про збільшення (зменшення) «банківського відсотка». Відсоткова ставка — така сама величина, як і інші змінні величини — швидкість, відстань, ціна тощо. Єдина відмінність полягає в тому, що сама ця величина виражена також у відсотках. Тому ситуація, коли доводиться говорити про зміни цієї величини, припускає неоднозначне тлумачення. Порівняємо:

Підвищення ціни x	Підвищення відсоткової ставки x	Математична модель, що описує нове значення
Ціна підвищилася на 10 грн	Відсоткова ставка підвищилася на 10 %	$x + 10$
Ціна підвищилася на 10 %	Відсоткова ставка підвищилася на 10 %	$1,1x$

Бачимо, що у випадку відсоткової ставки словесний опис для різних математичних моделей виявився однаковим.

Щоб уникнути цієї неоднозначності, в економіці та інших областях, де широко застосовуються відсоткові розрахунки, використовують поняття «процентні пункти».

Наведемо характерний приклад.

У дев'ятих класах навчається 100 дітей, з яких 20 % на початок навчального року були відмінниками.

Якщо ми скажемо, що на кінець року кількість відмінників зросла на 5 %, то ця фраза означає, що кількість відмінників (виражена кількістю людей) збільшилася на 5 % від цієї величини. Кількість відмінників у цьому прикладі становила 20 осіб; коли ця кількість зросла на 5 %, то вже становила 21 особу.

Якщо ж ми хочемо сказати, що показник «20 %» збільшився й тепер дорівнює «25 %», то потрібно вживати слова «процентних пунктів»: «на кінець року кількість відмінників збільшилася на 5 процентних пунктів». За такого формулювання кількість відмінників на кінець року становитиме 25 осіб.

Тепер ми можемо переформулювати задачі так, щоб уникнути хибного тлумачення.

18.45. Вкладниця поклала в банк 4000 грн. За перший рік їй було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 процентних пункти. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка в перший рік?

19. Сума n перших членів геометричної прогресії



Розглянемо скінченну геометричну прогресію $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$.

Суму членів цієї прогресії позначимо S_n .

Маємо:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n. \quad (*)$$

Виведемо формулу для знаходження цієї суми.

Спочатку розглянемо задачу, розв'язання якої підкаже, як вивести шукану формулу.

Розглянемо геометричну прогресію $1, 2, 2^2, \dots, 2^{62}, 2^{63}$ і знайдемо суму її членів S_{64} :

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Помножимо обидві частини записаної рівності на знаменник прогресії — число 2:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + \dots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}.$$

Знайдемо різницю $2S_{64} - S_{64}$:

$$\begin{array}{r} 2S_{64} = \quad 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64} \\ - \quad S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} \\ \hline 2S_{64} - S_{64} = -1 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 2^{64} \end{array}.$$

Звідси $S_{64} = 2^{64} - 1$.

У вас може виникнути природне запитання: чому як приклад ми обрали саме прогресію $1, 2, 2^2, \dots, 2^{62}, 2^{63}$?

Із цією послідовністю пов'язана старовинна легенда. Індійський мудрець, який придумав гру в шахи, попросив за свій винахід у раджі скромну на перший погляд винагороду: за першу клітинку шахової дошки 1 пшеничне зернято, за другу — 2, за третю — 4 і т. д. — за кожну наступну клітинку вдвічі більше зерняток, ніж за попередню.

Зрозуміло, що загальна кількість зерен, яку попросив винахідник, дорівнює $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Багатий раджа був приголомшений, коли дізнався, що він не в змозі задовольнити «скромне» бажання мудреця. Річ у тім, що значення виразу $2^{64} - 1$ дорівнює 18 446 744 073 709 551 615.

Щоб зрозуміти, наскільки величезним є це число, уявимо, що зерно зберігають у коморі площею 12 га. Тоді її висота була би більшою за відстань від Землі до Сонця.

Скористаємося описаним прийомом для знаходження суми (*).

Перепишемо рівність (*) так:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q :

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Знайдемо різницю $S_nq - S_n$:

$$\begin{array}{r} S_nq = \quad b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n \\ - \quad S_n = \quad b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} \\ \hline S_nq - S_n = -b_1 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + b_1q^n \end{array}.$$

Отже,

$$S_n q - S_n = b_1 q^n - b_1.$$

Звідси $S_n (q - 1) = b_1 (q^n - 1)$.

При $q \neq 1$ отримуємо:

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Цю рівність називають **формулою суми n перших членів геометричної прогресії** зі знаменником, відмінним від 1.

Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії дорівнюють першому члену. Тоді $S_n = nb_1$.

Формулу суми n перших членів геометричної прогресії використовують для підрахунку загального результату в процесах, де значення величин послідовно змінюються в однакову кількість разів. Наприклад, вона допомагає визначити загальний обсяг рекламного охоплення, якщо кожного наступного дня кількість переглядів зростає в кілька разів, або розрахувати загальні витрати електроенергії в процесі роботи пристрою, потужність якого зростає на кожному етапі в сталу кількість разів. Також вона корисна для оцінки сукупної кількості заражених під час епідемії, якщо кожного тижня кількість нових хворих збільшується в певне число разів.

ПРИКЛАД. При будь-якому натуральному n сума n перших членів геометричної прогресії обчислюється за формулою $S_n = 10 (2^n - 1)$. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

Розв'язання. Нехай b_1 — перший член даної прогресії, q — її знаменник.

Тоді $b_1 = S_1 = 10 (2 - 1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10 (2^2 - 1) = 30$.

Звідси $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$.

Відповідь: $b_1 = 10$, $q = 2$. ◀



1. Як знайти суму n перших членів геометричної прогресії зі знаменником, відмінним від одиниці? **2.** Чому дорівнює сума n перших членів геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює одиниці?



ВПРАВИ

19.1.° Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо:

- 1) $b_1 = 10$, $q = 3$, $n = 4$; 3) $b_1 = 0,6$, $q = 2$, $n = 5$;
2) $b_1 = -4$, $q = -1$, $n = 10$; 4) $b_1 = 16$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 4$.

19.2.° Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо:

- 1) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$; 2) $b_1 = 5$, $q = 5$, $n = 3$.

19.3.° Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії:

- 1) 3, 12, 48, ...; 2) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$,

19.4.° Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії:

- 1) $-0,6$; 3; -15 ; ...; 2) 2, 6, 18,

19.5.* Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (c_n) , якщо:

- 1) $c_4 = 216$, а знаменник прогресії $q = -3$;
2) $c_1 = 5\sqrt{5}$, $c_5 = 125\sqrt{5}$, а знаменник прогресії $q > 0$.

19.6.* Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 4$, $b_3 = 8$, а знаменник прогресії $q < 0$.

19.7.* Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (y_n) , якщо $y_2 = 6$, $y_5 = 162$.

19.8.* Знайдіть суму семи перших членів геометричної прогресії (x_n) , якщо $x_3 = 24$, $x_8 = 768$.

19.9.* Геометричну прогресію (b_n) задано формулою n -го члена $b_n = 10 \cdot 3^{n-1}$. Знайдіть суму п'яти перших членів прогресії.

19.10.* Геометричну прогресію (y_n) задано формулою n -го члена $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$. Знайдіть суму десяти перших членів прогресії.

19.11.* Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших членів дорівнює 65. Знайдіть перший член прогресії.

- 19.12.*** Знайдіть перший член геометричної прогресії, якщо сума її семи перших членів дорівнює 635, а знаменник прогресії дорівнює 2.
- 19.13.*** Знайдіть знаменник геометричної прогресії, якщо сума її трьох перших членів дорівнює 26, а перший член прогресії дорівнює 18.
- 19.14.*** Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 516, а перший член дорівнює 12. Знайдіть знаменник прогресії.
- 19.15.*** При будь-якому n сума n перших членів геометричної прогресії $S_n = 4(3^n - 1)$. Знайдіть третій член цієї прогресії.
- 19.16.*** При будь-якому n сума n перших членів геометричної прогресії $S_n = 6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$. Знайдіть четвертий член цієї прогресії.
- 19.17.*** Доведіть тотожність
- $$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$
- 19.18.*** Доведіть тотожність
- $$a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \dots + a^2 - a + 1).$$



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

- 19.19.** Бактерія, потрапляючи в сприятливе середовище, наприкінці двадцятої хвилини ділиться на дві бактерії, кожна з яких наприкінці наступних 20 хв ділиться знову на дві й т. д. Скільки бактерій утворюється з однієї бактерії протягом доби?
- 19.20.** (Задача Безу¹.) Дехто купив коня і через деякий час продав його за 24 пістолі. Після продажу він втратив стільки відсотків, скільки коштував йому кінь. Питання: за яку суму він купив коня?
- 19.21.** Упровадження нових технологій дало змогу зменшити час на виготовлення однієї деталі з 12 хв до 10 хв. На скільки відсотків буде виконуватися при цьому план, якщо норму часу не буде змінено?

¹ Безу Етьєн (1730–1783) — французький математик, основні роботи якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики».

19.22. На даху школи встановили сонячні батареї. Потужність батареї залежно від часу доби описується функцією $P(t) = -0,5(t - 12)^2 + 36$, де t — час доби (у годинах), $P(t)$ — потужність (у Ваттах).



- 1) У який час доби потужність сонячної батареї найбільша?
- 2) Протягом якого проміжку часу її потужність перевищує 28 Вт?

Знайдіть в інтернеті інформацію про те, чому сонячні батареї є екологічно чистим джерелом енергії, та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.23. Розв'яжіть систему нерівностей:

- 1)
$$\begin{cases} (x+2)(x-6) \leq (x+2)(x+1) + 4, \\ 2(6x-1) \geq 7(2x-4); \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \geq \frac{x-3}{4} - x, \\ 1-x > 0,5x-5. \end{cases}$$

19.24. Знайдіть проміжок зростання функції:

- 1) $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$; 2) $f(x) = -3x^2 - 2x + 4$.

19.25. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{16a^2}$, якщо $a < 0$ і $b > 0$;
- 2) $\sqrt{(x-y)^2} - \sqrt{9y^2}$, якщо $x > 0$ і $y < 0$.



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

19.26. На площині розташовано 100 точок. Відомо, що через кожні чотири з них проходить графік деякої квадратичної функції. Доведіть, що всі 100 точок належать графіку однієї квадратичної функції.



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Сумування

Разом з кожною послідовністю $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ можна розглядати й таку послідовність (S_n) :

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, \\ S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Знаходження формули n -го члена послідовності (S_n) називають **сумуванням перших n членів послідовності** (a_n).

Оскільки ви знаєте формули для обчислення суми n перших членів арифметичної і геометричної прогресій, то тим самим умієте сумувати перші n членів цих послідовностей.

Суму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ за допомогою грецької літери Σ (сигма) записують так: $\sum_{k=1}^n a_k$. Наприклад,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2; \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

Одним з ефективних способів сумування є використання раніше доведених формул.

ПРИКЛАД 1. Знайдіть суму $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{8} + \dots + \frac{2^n \cdot n + 1}{2^n}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = k + \frac{1}{2^k}$.

Тоді дану суму можна переписати так:

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right). \\ \text{Звідси } \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right) = \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = \\ = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Отже, } \sum_{k=1}^n \frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2. Знайдіть суму $7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_n$.

Розв'язання. Оскільки $\underbrace{77\dots7}_n = 7 \cdot \underbrace{11\dots1}_n$, то для

розв'язання задачі достатньо знайти суму $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_n$ і отриманий результат помножити на 7.

$$\begin{aligned}
 \text{Маємо: } S_n &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9} = \\
 &= \frac{1}{9} (10 + 10^2 + \dots + 10^n) - \frac{1}{9} \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_n = \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{10(10^n-1)}{10-1} - \frac{n}{9} = \frac{10(10^n-1)}{81} - \frac{n}{9}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Шукана сума дорівнює } \frac{70(10^n-1)}{81} - \frac{7n}{9}. \quad \blacktriangleleft$$

Якщо для даної послідовності (a_n) вдається знайти таку послідовність (b_n) , що $a_n = b_{n+1} - b_n$, тоді суму $\sum_{k=1}^n a_k$ знайти легко. Справді, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$.

ПРИКЛАД 3. Знайдіть суму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$.

Розв'язання. Маємо:

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!.$$

Тепер можна записати:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k \cdot k! &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \dots + ((n+1)! - n!) = \\
 &= (n+1)! - 1. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 4. Доведіть, що коли послідовність (a_n) — арифметична прогресія з ненульовими членами, то

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \cdot \frac{1}{d}$, де d — різниця прогресії. Тоді

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \\
 &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \cdot \frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) \cdot \frac{1}{d} + \dots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \cdot \frac{1}{d} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \\
 &= \frac{a_{n+1} - a_1}{da_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{a_1 + dn - a_1}{da_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 5. Знайдіть суму

$$\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{13}{2 \cdot 3} + \frac{25}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1) + 1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді можна записати:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{2k^2 + 2k + 1}{k(k+1)} &= \left(2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \\
 &+ \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(2n+3)}{n+1}. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Якщо вам сподобалося це оповідання, то радимо взяти участь у роботі над однойменним проектом «Сумування». Бажано використати у вашому проекті вправи 1–9 зі с. 186–187.



ВПРАВИ

- Знайдіть суму $\sum_{k=1}^n \frac{5^k \cdot k - 1}{5^k}$.
- Знайдіть суму $\sum_{k=1}^n \frac{3^{k+1} \cdot k^2 + 3^k \cdot k + 1}{3^k}$.
- Знайдіть суму:
 1) $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_n$; 2) $5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55 \dots 5}_n$.
- Доведіть, що коли послідовність (a_n) — арифметична прогресія з додатними членами, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

5. Знайдіть суму:

1) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;

2) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{7}{2 \cdot 3} + \frac{13}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}$;

3) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$;

4) $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

6. Знайдіть суму:

1) $\frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

2) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{13}{2 \cdot 3} + \frac{37}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^3 + n^2 + 1}{n(n+1)}$.

7. Знайдіть суму $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2 - 1}$.

8. Знайдіть суму $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

9. Знайдіть суму $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + n \cdot a^{n-1}$, де $a \neq 1$.



ЗАВДАННЯ № 4
«ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–14 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.

1. Послідовність (x_n) задано формулою n -го члена

$x_n = \frac{n-2}{n}$. Укажіть восьмий член послідовності.

А) $\frac{3}{4}$;

Б) $\frac{3}{8}$;

В) $\frac{5}{4}$;

Г) $\frac{5}{8}$.



2. Послідовність (y_n) задано формулою n -го члена $y_n = 3n^2 - 7$.
Яке з наведених чисел є членом цієї послідовності?
А) 63; В) 68;
Б) 64; Г) 69.
3. Серед поданих послідовностей укажіть арифметичну прогресію.
А) 6, 9, 12, 13; В) 2, 8, 14, 21;
Б) 2, 9, 16, 23; Г) 2, 9, 16, 21.
4. Яка з поданих послідовностей є геометричною прогресією?
А) 3, 6, 9, 12; В) 3, 6, 12, 24;
Б) 3, 5, 7, 14; Г) 5, 8, 12, 16.
5. Чому дорівнює шостий член арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 12, а різниця дорівнює 0,4?
А) 14,4; В) 13,6;
Б) 14; Г) 13.
6. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = -7$, $a_2 = 5$.
А) -2; В) -12; Г) 12.
7. Обчисліть суму десяти перших членів арифметичної прогресії, перший член якої $a_1 = -16$, а різниця $d = 3$.
А) -10; В) -15; Г) -25.
8. Чому дорівнює знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_8 = 36$, $b_9 = 9$?
А) $\frac{1}{4}$; В) 4; Г) -27.
9. Знайдіть суму п'ятнадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , заданої формулою n -го члена $a_n = -4n + 13$.
А) -300; В) -285; Г) -250.
10. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія (a_n) , якщо $a_1 = 41$ і $a_2 = 38$?
А) 13; В) 14; Г) 16.
11. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 + a_5 = 28$ і $a_2 + a_3 = 24$.
А) 4; В) 3; Г) 2.

- 12.** Вкладник поклав у банк 40 000 грн під 10 % річних за таких умов: раз на рік проценти нараховують на поточну суму вкладу і додають до неї. Скільки грошей буде на його рахунку через 2 роки?
- A) 48 400 грн; B) 40 800 грн;
B) 48 000 грн; Г) 44 400 грн.
- 13.** Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 9 і менші від 120.
- A) 810; B) 702; B) 819; Г) 882.
- 14.** При якому значенні x значення виразів $7x - 8$, $2x + 1$ і $x + 6$ є послідовними членами арифметичної прогресії?
- A) 1; B) -1;
B) 2; Г) такого значення не існує.
- У завданні 15 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.*
- 15.** Дано геометричну прогресію $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, Кожному початку речення (1-3) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення	Закінчення речення
1) Знаменник прогресії дорівнює	A) $\frac{31}{64}$
2) П'ятий член прогресії дорівнює	B) $\frac{3}{64}$
3) Сума п'яти перших членів прогресії дорівнює	B) $-\frac{1}{2}$
	Г) $\frac{33}{64}$
	Д) $\frac{1}{2}$



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

- 1.° Знайдіть шістнадцятий член і суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 8$ і $a_2 = 5$.
- 2.° Знайдіть четвертий член і суму шести перших членів геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = -\frac{1}{8}$, а знаменник $q = -2$.
- 3.* Знайдіть номер члена арифметичної прогресії (a_n) , який дорівнює 6,2, якщо $a_1 = 0,2$, а різниця $d = 0,4$.
- 4.* Чому дорівнює знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_4 = 6$ і $b_7 = 162$?
- 5.** При якому значенні x значення виразів $x + 1$, $3x - 1$ і $2x + 10$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.
- 6.** Знайдіть суму всіх натуральних чисел, що діляться на ціло на 7, які більші за 50 і менші від 150.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Послідовність

Об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами 1, 2, 3, ..., n , ..., утворюють послідовності.

Арифметична прогресія

Послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число, називають арифметичною прогресією.

Формула n -го члена арифметичної прогресії

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Властивість членів арифметичної прогресії

Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Формули суми n перших членів арифметичної прогресії

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$
$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Формула n -го члена геометричної прогресії

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Властивість членів геометричної прогресії

Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює добутку двох сусідніх із ним членів:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

Формула суми n перших членів геометричної прогресії

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$



§ 4

ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви розширите свої знання про комбінаторні задачі та способи їх розв'язання.

Розширите та поглибите свої знання про випадкові події, ймовірність випадкової події, дізнаєтеся, яку величину називають частотою випадкової події.

Ознайомитеся з початковими відомостями про статистику, дізнаєтеся про способи збирання, подання та аналізу даних, про міри центральних тенденцій сукупності даних.

20. Основні правила комбінаторики



Скількима способами учні та учениці вашого класу можуть стати одне за одним у черзі до буфету? Скількима способами можна вибрати у вашому класі старосту та його заступника? Скількима способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі на чемпіонаті світу з футболу?

Відповідаючи на ці запитання, потрібно підрахувати, скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Галузь математики, яка займається розв'язуванням подібних задач, називають **комбінаторикою**.

В основі розв'язування більшості комбінаторних задач лежать два правила: правило суми та правило добутку.

Розглянемо такий приклад. Туриста зацікавили 5 маршрутів по Наддніпрянщині та 7 маршрутів по Карпатах. З'ясуємо, скількима способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут.

Оскільки всього є $5 + 7 = 12$ різних маршрутів, то один із них можна вибрати 12 способами.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило суми.

Нехай множина A складається з m елементів, а множина B — із k елементів. Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то існує $m + k$ способів вибрати один елемент з множини A або множини B , тобто з об'єднання $A \cup B$.

Знову звернемося до прикладу з вибором маршрутів. Якщо турист має час на два маршрути та хоче побувати спочатку на Наддніпрянщині, а потім у Карпатах, то він може організувати свій відпочинок 35 способами. Справді, якщо вибрати один маршрут по Наддніпрянщині, то парою до нього може бути будь-який із 7 карпатських маршрутів. Оскільки маршрутів по Наддніпрянщині 5, то кількість пар (маршрут по Наддніпрянщині; маршрут по Карпатах) дорівнює $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Ці міркування ілюструє така таблиця:

		Маршрути по Карпатах						
		1	2	3	4	5	6	7
Маршрути по Наддні- прянщині	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило добутку.

Якщо множина A складається з m елементів, а множина B — із k елементів, то одну пару елементів (x, y) , де x — елемент множини A , а y — елемент множини B , можна вибрати mk способами.

Правила суми й добутку можна узагальнити для трьох і більше множин. Наприклад, нехай окрім 5 маршрутів по Наддніпрянщині та 7 маршрутів Карпатами мандрівника зацікавили ще 2 маршрути Херсонщиною. Тоді вибір якогось одного маршруту для відпочинку можна здійснити $5 + 7 + 2 = 14$ способами, а вибір трійки маршрутів (спочатку Наддніпрянщиною, потім Карпатами, і, нарешті, Херсонщиною) — $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$ способами.

ПРИКЛАД 1. Подружки Ася, Богдана і Віра прийшли до театру подивитися балет Михайла Скорульського «Лісова пісня». Скільки існує варіантів того, як дівчата розсядуться по трьох сусідніх місцях, указаних у квитках?

Розв'язання. Із трьох місць, указаних у квитках, на першому місці може опинитися будь-хто з дівчат (3 можливих варіанти). Для кожного із цих трьох варіантів, коли



**Народні артисти України Олександр Стоянов
і Катерина Кухар у балеті «Лісова пісня»**

перше місце вже зайняте, на друге місце може сісти хтось із двох дівчат, які залишилися (2 можливих варіанти). Тому на перші два місця дівчата можуть сісти $3 \cdot 2$ способами. І нарешті, якщо два перших місця вже зайняті, то третє місце, яке залишилося вільним, займе остання дівчина (1 можливий варіант).

Таким чином, існує $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ варіантів того, як дівчата розсядуться по місцях. ◀

ПРИКЛАД 2. На рисунку 20.1 показано схему шляхів, що прокладено з міста A до міста B . Скількома способами можна проїхати з міста A до міста B ?

Розв'язання. Скориставшись правилом добутку, доходимо висновку, що з міста A до міста B через місто M можна дістатися $3 \cdot 2 = 6$ способами, а через місто N — $4 \cdot 3 = 12$ способами. Тоді за правилом суми загальна кількість способів дорівнює: $6 + 12 = 18$ способів.

Відповідь: 18 способами. ◀

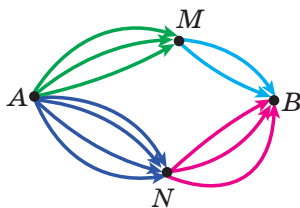


Рис. 20.1



1. Сформулюйте правило суми.
2. Сформулюйте правило добутку.



ВПРАВИ

20.1.° Говорять, що існує понад 100 різних доведень теореми Піфагора. Степан вивчив 5 із них, а Юлія — 3, причому серед цих доведень жодне не повторилося двічі. Скількома способами можна вибрати одне із цих доведень, щоб продемонструвати його на уроці?

20.2.° У Національному ботанічному саду імені М. М. Гришка створено унікальну колекцію рослин, що нараховує 10 000 видів, форм і сортів, сотні видів яких занесені до Червоної книги України. Гуляючи садом, Марина звернула увагу на 6 видів рідкісних рослин, а Сергій — на 7 видів, причому серед цих видів жоден не зустрівся двічі. Скількома способами можна вибрати одну із цих рослин, щоб сфотографувати?



Національний ботанічний сад
імені М. М. Гришка

20.3.° Підніжжя гори та її вершину сполучають три стежки. Скільки є маршрутів від підніжжя до вершини й потім униз до підніжжя?

20.4.° Команді пропонують футболки трьох кольорів: червоного, зеленого та блакитного, а також шорти двох кольорів — білого та жовтого. Скільки варіантів вибрати форму є в команди?

20.5.° Тетянка має п'ять суконь і три пари черевичків. Скільки варіантів вибрати вбрання є в Тетянки?

20.6.° Із міста X до міста Y ведуть 2 дороги, а з міста Y до міста Z — 5 доріг (рис. 20.2). Скількома способами можна проїхати з міста X до міста Z ?

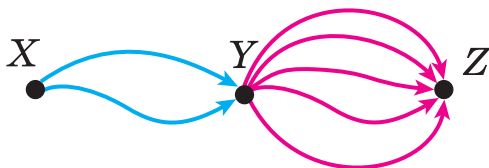


Рис. 20.2

20.7.° У класі є 10 хлопчиків і 7 дівчинок. Скільки існує способів скласти пару для танців з одного хлопчика та однієї дівчинки?

20.8.° Кафе пропонує меню з 3 перших страв, 6 других страв і 5 третіх страв. Скільки є способів вибрати обід з трьох страв (по одній страві кожного виду)?

20.9.° Будемо розглядати склади з двох букв, перша з яких позначає приголосний звук, а друга — голосний. Скільки таких різних складів можна скласти з букв слова:

- 1) Полтава; 2) Миколаїв?

20.10.° Скільки чотирицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, якщо ці числа мають починатися:

- 1) із цифри 4; 2) із запису «23»?

20.11.° Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4?

20.12.° Скільки існує двоцифрових чисел, усі цифри яких парні?

20.13.° Скільки існує двоцифрових чисел, усі цифри яких непарні?

20.14.° Гральний кубик кидають 3 рази. Скільки різних послідовностей очок можна отримати?

20.15.° Кожну клітинку квадрата 2×2 можна пофарбувати в блакитний або червоний колір. Скільки існує способів пофарбувати цей квадрат?

20.16." Щоб організувати заміну вчительки, яка захворіла, завуч міркує, як переставити уроки у понеділок у 9-А класі (рис. 20.3). Скільки існує таких перестановок?

Розклад уроків

Понеділок		9-А клас	Каб.
	1	Українська мова	24
	2	Фізика	37
	3	Інформатика	13/16
	4	Фізкультура	
	5	Географія	25
	6	Англійська мова	22/23

Рис. 20.3

20.17." Прибираючи у своїй кімнаті, Марічка вирішила розставити підручники, що стоять на її книжковій полиці, в іншому порядку (рис. 20.4). Скільки існує способів розставити підручники на полиці?



Рис. 20.4

20.18." Скільки існує парних п'ятицифрових чисел?

20.19." Скільки існує п'ятицифрових чисел, які кратні 10?

↔ Якщо вам сподобалося розв'язувати комбінаторні задачі, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Комбінаторика: перестановки, розміщення, сполуки». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

20.20. Група із 30 школярів і школярок збирається в екопоїздку в Карпати. Її можна здійснити автобусом або поїздом, причому в обох випадках треба буде проїхати 250 км. При перевезенні одного пасажирки / пасажирки на 1 км автобусом викиди вуглекислого газу становлять 180 г, а поїздом — 60 г. На скільки кілограмів будуть меншими викиди вуглекислого газу, якщо ця група поїде в Карпати поїздом?



20.21. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2(x-3) \leq 3x+4(x+1), \\ x^2-9 \leq (x-4)^2-1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x+4 \leq 2x-8, \\ (x+2)(x-1) \geq x^2+x-6. \end{cases}$$

20.22. Виразіть із даної рівності змінну x через інші змінні:

$$1) 2x - \frac{m}{n} = 2; \quad 2) \frac{1}{m} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n}.$$

20.23. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 46, \\ x + y = 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = -4, \\ x^2 + 2y^2 = 12. \end{cases}$$

21. Частота та ймовірність випадкової події



Нам нерідко доводиться проводити спостереження, брати участь в експериментах або випробуваннях, вимірювати величини. Часто подібні дослідження закінчуються деяким результатом, який заздалегідь передбачити неможливо.

Такі випробування називають **дослідами з випадковими результатами**, або просто **дослідами**.

Розглянемо кілька характерних прикладів таких експериментів.

- Якщо відкрити книжку навмання, то неможливо знати заздалегідь, який номер сторінки ви побачите.

- Неможливо до початку футбольного матчу визначити, з яким рахунком закінчиться гра.
- Ви не можете бути абсолютно впевненими в тому, що, коли натиснете на кнопку вимикача, загориться настільна лампа.
- Немає гарантії, що з курячого яйця, уміщеного в інкубатор, вилупиться курча.

Зазвичай спостереження або експеримент визначаються певним комплексом умов. Наприклад, футбольний матч має проходити за правилами; курячі яйця мають бути в інкубаторі не менше ніж 21 день із дотриманням певної методики зміни температури та вологості повітря.

Також важливою рисою розглянутих дослідів є те, що їх можна відтворювати багато разів. Наприклад, футбольні матчі проходять практично щодня.

Крім того, кожен експеримент характеризується своїми результатами. Наприклад, зробивши кілька пострілів, можна з'ясовувати кількість вибитих очок або кількість влучань у мішень. Це два різних дослідів. Щоб визначити результати експерименту, необхідно максимально чітко описати, яку величину (явище, процес) вимірюють чи спостерігають у досліді, що вивчається.

Наприклад,

- кидають гральний кубик і *записують, скільки очок випало на кубик*;
- із коробки з білими та чорними кулями навмання витягують одну кулю та *фіксують її колір*;
- на уроці фізкультури учень виконує стрибок у довжину, а вчитель *вимірює, на якій відстані від лінії відштовхування приземлився учень*.

Кожний результат експерименту прийнято називати **елементарним наслідком**. Наприклад, у досліді з киданням грального кубика маємо шість елементарних наслідків — це числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 (кількість очок, що можуть випасти на кубик). Зверніть увагу, що в результаті дослідів обов'язково відбувається *лише один* елементарний наслідок. Справді, на гральному кубикі не можуть одночасно випасти, наприклад, і число 3, і число 6.

Ознайомимося ще з одним важливим поняттям — **випадковою подією**.

Розглянемо вже знайомий нам приклад. Кидають гральний кубик і фіксують число, яке випаде на ньому. У такому досліді 6 елементарних наслідків.



Якщо кинути кубик, то настане лише один із шести елементарних наслідків, але відбудеться декілька випадкових подій. Наприклад, якщо на кубику випала «четвірка» (реалізувався один елементарний наслідок), то відбулися, наприклад, такі випадкові події:

- подія A — «на кубику випало парне число», адже «четвірка», яка випала на кубику, — це парне число;
- подія B — «на кубику випало число, більше ніж 2», бо «четвірка» більша за 2;
- подія C — «на кубику випало число, що ділиться націло на 4», оскільки 4 ділиться націло на 4.

Отже, у результаті випробування завжди відбувається один елементарний наслідок, але може відбутися декілька випадкових подій.

Зазначимо, що подія A — «на кубику випало парне число» — складається з трьох елементарних наслідків: чисел 2, 4 та 6.

Подія B — «на кубику випало число, більше ніж 2» — складається із чотирьох елементарних наслідків: 3, 4, 5 та 6.

Подія C — «на кубику випало число, що ділиться націло на 4» — складається з одного елементарного наслідку: 4.

Узагалі, випадковою подією випробування називають набір елементарних наслідків цього випробування.

Зазначимо, що елементарний наслідок не є випадковою подією. Випадкова подія відрізняється від елементарного наслідку так само, як клас учнів відрізняється від окремого учня, букет відрізняється від окремої квітки тощо.

Уявімо, що випущено 1 000 000 лотерейних білетів і розігрується один автомобіль. Чи можна, придбавши один лотерейний білет, виграти цей приз? Звісно, можна, хоча ця подія *малоймовірна*. А якщо розіграватимуться 10 авто-

мобілів? Зрозуміло, що **ймовірність** виграшу збільшиться. Якщо ж уявити, що розігруються 999 999 автомобілів, то ймовірність виграшу стає набагато більшою, а сама подія — *практично достовірною*.

Отже, **ймовірності** випадкових подій можна порівнювати. Однак для цього слід домовитися, яким чином кількісно оцінювати можливість появи тієї чи іншої події.



Підставою для такої числової оцінки можуть слугувати результати численних спостережень або експериментів. Так, люди давно помітили, що багато подій відбуваються з тією чи іншою, на подив постійною, **частотою**.

Демографам добре відоме число 0,512. Статистичні дані, отримані в різні часи та в різних країнах, свідчать про те, що на 1000 новонароджених припадає в середньому 512 хлопчиків. Число 0,512 називають **відносною частотою випадкової події** «народження хлопчика». Воно визначається формулою

$$\text{відносна частота} = \frac{\text{кількість новонароджених хлопчиків}}{\text{кількість усіх новонароджених}}.$$

Наголосимо, що це число отримано в результаті аналізу багатьох спостережень. У таких випадках говорять, що ймовірність події «народження хлопчика» приблизно дорівнює 0,512.

Ви знаєте, що куріння шкідливе для здоров'я. За даними організацій охорони здоров'я курці складають приблизно 92 % від усіх хворих на рак легенів. Число 0,92 — це відносна частота випадкової події «той, хто захворів на рак легенів, — курив», яка визначається таким співвідношенням:



$$\text{відносна частота} = \frac{\text{кількість курців серед тих, хто захворів на рак легенів}}{\text{кількість усіх людей, які захворіли на рак легенів}}.$$

У таких випадках говорять, що ймовірність натрапити на курця серед тих, хто захворів на рак легенів, приблизно дорівнює 0,92 (або 92 %).

Щоб детальніше ознайомитися з поняттям ймовірності випадкової події, звернемося до класичного прикладу з підкиданням монети.

Припустимо, що в результаті двох підкидань монети двічі випав герб. Тоді в даній серії, яка складається з двох випробувань, маємо:

$$\text{відносна частота} = \frac{\text{кількість випадів герба}}{\text{кількість підкидань}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Чи це означає, що ймовірність випадіння герба дорівнює 1 або незначно відрізняється від одиниці? Звісно, ні.

Для того щоб за відносною частотою випадкової події можна було коректно оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою.

Починаючи з XVIII ст. багато дослідників проводили серії випробувань із підкиданням монети. У таблиці наведено результати деяких таких випробувань.

Дослідник	Кількість підкидань монети	Кількість випадінь герба	Відносна частота випадіння герба
Жорж Бюффон (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Аугустус де Морган (1806–1871)	4092	2048	0,5005
Вільям Джевонс (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Карл Пірсон (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Вільям Феллер (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

За наведеними даними простежується закономірність: при багаторазовому підкиданні монети відносна частота появи герба незначно відхиляється від числа 0,5.

Отже, можна вважати, що ймовірність події «випадіння герба» приблизно дорівнює 0,5.

Звернемося знову до таблиці, наведеної вище. Чи можна на підставі її даних гарантовано стверджувати, що ймовірність випадкової події «випадіння герба» точно дорівнює 0,5? Відповідь на це запитання заперечна. Справді, з огляду на ці дані можна сказати, що відносна частота появи герба незначно відхиляється, наприклад, від числа 0,502 або від числа 0,4997, тобто число 0,5 не має жодних переваг перед числом 0,502 або числом 0,4997.

Таким чином, відносна частота випадкової події дає змогу лише *наближено оцінити* ймовірність випадкової події.

Таку оцінку ймовірності випадкової події називають **статистичною**. Її використовують у різних галузях діяльності людини: фізиці, хімії, біології, страховому бізнесі, соціології, економіці, охороні здоров'я, спорті тощо.

Підіб'ємо підсумки. Статистична оцінка ймовірності випадкової події формується на підставі результатів серії однакових випробувань. Провівши таку серію, обчислюють відносну частоту випадкової події за формулою

$$\text{відносна частота} = \frac{\text{кількість появ досліджуваної події}}{\text{кількість випробувань (спостережень)}}.$$

Знайдене число використовують як оцінку ймовірності випадкової події.

Ймовірність випадкової події позначають буквою P (першою буквою французького слова *probabilite* — ймовірність).

Якщо в першому прикладі подію «народження хлопчика» позначити буквою A , то отриманий результат записують так:

$$P(A) \approx 0,512.$$

Ураховуючи наближений характер статистичної оцінки, отримані дані можна округлити. Наприклад, коли відносна частота випадкової події дорівнює 0,512, то можна написати, що $P(A) \approx 0,51$ або $P(A) \approx 0,5$.

Якщо в досліді з підкиданням монети подію «випадіння герба» позначити буквою B , то

$$P(B) \approx 0,5.$$

Інформація про ймовірності випадкових подій дає змогу певною мірою передбачати майбутнє. Наприклад, якщо сонячного ранку прогноз погоди на вашому смартфоні показує, що ймовірність дощу становить 70–90 % (рис. 21.1), то, виходячи на вулицю у другій половині дня, варто взяти із собою парасольку. Шанси того, що вона вам знадобиться, дуже великі.



Рис. 21.1



1. За якою формулою обчислюють відносну частоту випадкової події? **2.** Чи можна вважати, що відносна частота випадкової події дорівнює її ймовірності? **3.** Чи коректно оцінювати ймовірність випадкової події за її відносною частотою, провівши лише невелику кількість випробувань? **4.** Як позначають ймовірність події A ?



ВПРАВИ

21.1.° Спираючись на свої знання та життєвий досвід, визначте, які з нижченаведених величин ви вважаєте випадковими, тобто такими, значення яких неможливо передбачити заздалегідь.

- 1) Кількість днів у четвертому місяці 2030 р.
- 2) Сума кутів навімання вибраного трикутника.
- 3) Кількість коренів навімання вибраного лінійного рівняння $ax + b = 0$.
- 4) Кількість перемог у 10 іграх у хрестики-нулики за професійної гри учасників.
- 5) Тривалість тенісного матчу.
- 6) Кількість волосин на голові довільної людини.

21.2.° Спираючись на свої знання та життєвий досвід, визначте, які з нижченаведених величин ви вважаєте випадковими.

- 1) Кількість днів у другому тижні грудня 2031 р.
- 2) Відношення довжини навімання вибраного кола до його діаметра.
- 3) Кількість натуральних дільників навімання вибраного простого числа.
- 4) Кількість супутників планети Земля.
- 5) Об'єм холодної води, що споживається сім'єю за місяць.
- 6) Тривалість одного періоду гри в баскетболі.

21.3.° Наведіть приклади експериментів, у яких може відбутися:

- 1) малоймовірна подія;
- 2) практично достовірна подія.

21.4.° Які з наведених подій ви вважаєте малоймовірними? практично достовірними? Обговоріть ваші відповіді в класі.

- 1) У результаті підкидань монети 200 разів поспіль випаде герб.

- 2) Наступного тижня вас викличуть до дошки хоча б один раз.
- 3) Матч «Динамо» (Київ) — «Шахтар» (Донецьк) завершиться з результатом 1 : 1.
- 4) Навмання вибраний українець / українка ніколи не їв / не їла борщу.
- 5) У серпні в Одесі випаде сніг.
- 6) Вік навмання вибраної людини становить 100 років.
- 7) Якщо не дотримуватися правил гігієни зубів, то в майбутньому доведеться витратити значні кошти на їх лікування.



21.5.° Які з наведених подій ви вважаєте малоймовірними? практично достовірними? Обговоріть ваші відповіді з друзями та знайомими.

- 1) Якщо підкинути кубик 300 разів, то хоча б один раз випаде шість очок.
- 2) У наступній чверті вас викликать до дошки на кожному уроці.
- 3) Натискаючи навмання клавіші клавіатури комп'ютера, отримають слово «статистика».
- 4) В один із днів червня температура повітря в Херсоні перевищить 20 °С.
- 5) Зловмисник зможе підібрати пін-код до банківської карти з першої спроби.
- 6) У навмання вибраній сім'ї є домашній улюбленець.
- 7) Якщо регулярно порушувати правила дорожнього руху, то потрапиш в аварію.



21.6.° Експеримент полягає у підкиданні кнопки. Кнопка може впасти як вістрям донизу, так і вістрям догори (рис. 21.2). Підкиньте кнопку: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 100 разів; 5) 200 разів. Результати, отримані в п'яти серіях експериментів, занесіть у таблицю на с. 206.



Рис. 21.2

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість експериментів (підкидань) у серії	10	20	50	100	200
Кількість випадіннь кнопки вістрям униз					
Кількість випадіннь кнопки вістрям догори					

У кожній із п'яти серій експериментів підрахуйте частоту випадіння кнопки вістрям догори й оцініть ймовірність настання цієї події. Яка подія більш ймовірна: «кнопка впаде вістрям униз» або «кнопка впаде вістрям догори»?



21.7.° Експеримент полягає в підкиданні двох монет. Проведіть цей експеримент: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 150 разів. Результати, отримані в кожній із чотирьох серій експериментів, занесіть у таблицю.

Номер серії	1	2	3	4
Кількість експериментів (підкидань) у серії	10	20	50	150
Кількість експериментів, у яких випало два герби				
Кількість експериментів, у яких випав рівно один герб				
Кількість експериментів, у яких не випало жодного герба				

У кожній із чотирьох серій експериментів підрахуйте частоту випадкової події:

- 1) випадіння двох гербів;
- 2) випадіння тільки одного герба;
- 3) випадіння двох чисел.

Чи можна на основі цих спостережень зробити припущення, що подія «випав рівно один герб» є більш ймовірною, ніж подія «не випало жодного герба»? На чому базується таке припущення? Чи можна на основі цих спостережень гарантувати, що перша з наведених подій є більш ймовірною, ніж друга?



21.8.° Проведіть серію, яка складається зі 100 експериментів, у яких підкидають гудзик з петлею (рис. 21.3). Знайдіть частоту події «гудзик упав петлею вниз». Оцініть



Рис. 21.3

ймовірність події «гудзик упаде петлею догори» у проведеної серії експериментів.

21.9.° У таблиці наведено дані про народження дітей у місті N за 2021 рік.

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень	Липень	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень
Кількість народжень хлопчиків	1198	1053	1220	1151	1151	1279	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Кількість народжень дівчаток	1193	1065	1137	1063	1163	1228	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Підрахуйте частоту народжень хлопчиків у кожному місяці та за весь 2021 рік. Оцініть ймовірність народження дівчинки у 2021 році.

21.10.° У таблиці наведено дані про кількість результативних і нічийних партій у престижних чоловічих шахових турнірах 2022 р.

Турнір	Chess. com Global Championship	Airthings Masters	Champions Showdown 9LX	Sinquefield Cup	Superbet Romania	FIDE Candidates	Saint Louis Rapid & Blitz
Кількість результативних партій	88	96	34	14	17	23	77
Кількість нічийних партій	65	53	11	27	31	33	58

Обчисліть відносну частоту того, що шахова партія закінчиться внічию в кожному турнірі та в усіх наведених турнірах у цілому. Оцініть ймовірність того, що шахова партія в турнірі завершиться внічию.

- 21.11.°** У довідковій службі працює один оператор, який протягом робочого дня (9:00–17:00) розмовляє по телефону в середньому 6 год. Оцініть ймовірність того, що коли зателефонувати до довідкової в цей період, телефон виявиться вільним.
- 21.12.°** За статистикою у місті Одеса протягом літа кількість сонячних днів у середньому дорівнює 70. Оцініть ймовірність того, що, приїхавши влітку в Одесу на один день, гість натрапить на похмуру погоду.
- 21.13.°** Із великої партії лампочок вибрали 1000, серед яких виявилось 5 бракованих. Оцініть ймовірність купити браковану лампочку.
- 21.14.°** Під час епідемії грипу серед обстежених 40 000 жителів і жительок деякого міста виявили 7900 хворих. Оцініть ймовірність події «навмання вибраний(-на) мешканець(-нка) міста хворий(-а) на грип».
- 21.15.°** Ймовірність купити браковану батарейку дорівнює 0,02. Чи можна стверджувати, що в будь-якій партії зі 100 батарейок є дві браковані?
- 21.16.°** Ймовірність улучити в мішень становить 85 %. Чи може бути так, що в серії зі 100 пострілів було 98 влучень у мішень?
- 21.17.°** Відомий американський баскетболіст Рік Беррі виконував штрафний кидок «з-під спідниці» (двома руками знизу). В одному з матчів Рік Беррі виконав 9 штрафних кидків. Оцініть, скільки разів при цьому він улучив у кільце, якщо ймовірність попадання штрафного кидка Ріка Беррі складала 89 %.
- 21.18.°** Відомо, що деякий медичний препарат знімає алергічну реакцію з ймовірністю 70 %. Лікар призначив цей препарат 40 своїм пацієнтам. Оцініть, скільком із них допоможуть ці ліки.
- 21.19.°** Виберіть навмання одну сторінку з повісті Марка Вовчка «Інститутка». Підрахуйте, скільки разів на цій сторінці зустрінуться букви «н», «о», «я», «ю», а також скільки всього на ній букв. Оцініть ймовірність появи цих букв у вибраному тексті. Ця оцінка дозволить зрозуміти, чому на клавіатурах друкарської машинки та комп'ютера (рис. 21.4) букви «н» і «о» розміщено ближче до центру, а букви «я» і «ю» — ближче до краю.



Рис. 21.4

21.20.* У таблиці наведено дані про кількість днів, у які на 12:00 було зафіксовано дану температуру та даний рівень вологості повітря в деякому місті.

Діапазон температури повітря	Діапазон вологості повітря						Усього днів
	Від 0 % до 40 %	Від 41 % до 60 %	Від 61 % до 70 %	Від 71 % до 80 %	Від 81 % до 90 %	Від 91 % до 100 %	
Менше від -11°C	0	1	1	3	2	0	7
Від -10° до -1°C	0	0	11	15	13	5	44
Від 0° до 10°C	10	19	12	13	19	47	120
Від 11° до 20°C	23	27	15	6	10	2	83
Від 21° до 30°C	57	32	6	2	1	0	98
Більше 31°C	9	4	0	0	0	0	13
Усього днів	99	83	45	39	45	54	365

Обчисліть відносну частоту спостереження:

- 1) температури повітря в діапазоні від 11°C до 20°C серед тих днів, коли зафіксована вологість не перевищувала 40 %;
- 2) вологості повітря в діапазоні від 71 % до 80 % серед тих днів, коли зафіксована температура була меншою від 0°C ;
- 3) температури повітря в діапазоні від 21°C до 30°C та одночасно вологості повітря в діапазоні від 41 % до 70 %.

21.21.* У таблиці наведено дані про кількість моделей смартфонів, що продавалися в українських інтернет-магазинах електроніки в 2023 р., залежно від ціни та ємності акумуляторної батареї.

Ємність акумулятора, мА · год	Діапазон цін, грн					Разом
	до 5000	5000–10 000	10 000–20 000	20 000–30 000	від 30 000	
3999 і менша	130	121	131	184	176	742
4000–4999	181	130	318	173	170	972
5000–5999	389	869	388	81	108	1835
6000 і більша	60	211	60	18	20	369
Разом	760	1331	897	456	474	3918

Обчисліть відносну частоту того, що вибрана модель смартфона:

- 1) має ємність акумуляторної батареї від 3999 мА · год і менше серед моделей смартфонів у ціновому діапазоні 20–30 тис. грн;
- 2) перебуває в ціновому діапазоні 5–10 тис. грн серед моделей смартфонів, які мають ємність акумуляторної батареї понад 4000 мА · год;
- 3) має ємність акумуляторної батареї від 4000 до 5999 мА · год та одночасно перебуває в ціновому діапазоні від 5 до 30 тис. грн.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



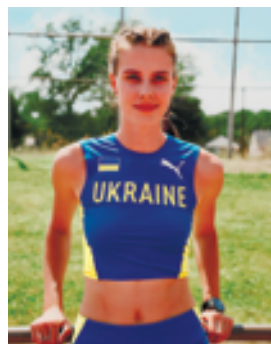
21.22. Запишіть у порядку спадання їх значень вирази $7^{-6} : 7^{-1}$ **І**,

$2\sqrt{13}$ **У**, $0,2^{-1} \cdot \sqrt{3}$ **М**, $\frac{1}{3}\sqrt{450}$ **Ч**,

$\frac{\sqrt{110}}{\sqrt{2}}$ **Г**, $\sqrt{108} - \sqrt{12}$ **Х**, $\frac{4^{-2} \cdot 32^{-1}}{16^{-3}}$ **А**.

Букви, що відповідають даним виразам, утворюють прізвище української спортсменки, олімпійської чемпіонки.

Знайдіть в інтернеті таку інформацію.



- 1) У якому виді спорту виступає ця спортсменка?
 - 2) На яких Олімпійських іграх вона виборола золоту медаль та який при цьому встановила рекорд?
 - 3) Переможницею яких ще міжнародних змагань вона є?
- 21.23. Відомо, що $a > 5$ і $b < 2$. Доведіть, що $6a - 7b > 16$.
- 21.24. При яких значеннях k значення двочлена $11k - 3$ не менші від відповідних значень двочлена $15k - 13$?
- 21.25. Побудуйте графік даної функції, укажіть її область значень і проміжки зростання та спадання:

$$y = \begin{cases} 3 - x, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -3, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

22. Класичне визначення ймовірності



Для знаходження ймовірності деяких подій не обов'язково проводити випробування або спостереження. Достатньо керуватися життєвим досвідом і здоровим глуздом.

ПРИКЛАД 1. Нехай у коробці лежать 10 червоних куль. Яка ймовірність того, що взята навмання куля буде червоного кольору? жовтого кольору?

За даних умов будь-яка взята навмання куля буде червоного кольору.

Подію, яка за даним комплексом умов обов'язково відбувається в будь-якому випробуванні, називають **достовірною (вірогідною)**. Ймовірність такої події вважають рівною 1, тобто:

якщо A — достовірна подія, то

$$P(A) = 1.$$

Отже, ймовірність того, що взята навмання куля буде червоного кольору, дорівнює 1.

Оскільки в коробці немає куль жовтого кольору, то взяти кулю жовтого кольору неможливо.

Подію, яка за даним комплексом умов не може відбутися в жодному випробуванні, називають **неможливою**. Ймовірність такої події вважають рівною 0, тобто:

якщо A — неможлива подія, то

$$P(A) = 0.$$

Отже, ймовірність того, що взята навмання куля буде жовтого кольору, дорівнює 0. ◀

ПРИКЛАД 2. Однорідну монету підкидають один раз. Яка ймовірність випадіння герба?

У цьому експерименті можна отримати тільки один із двох результатів (елементарних наслідків): випадіння цифри або випадіння герба. Причому жоден із них не має переваг. Такі результати називають **рівноможливими**, а відповідні випадкові події — **рівноймовірними**. Тоді природно вважати, що ймовірність кожної з подій «випадіння герба» і «випадіння цифри» дорівнює $\frac{1}{2}$. ◀

Сказане не означає, що в будь-якій серії експериментів з підкиданням монети рівно половиною результатів буде випадіння герба та рівно половиною — випадіння цифри. Ми можемо лише прогнозувати, що за великої кількості випробувань частота випадіння герба приблизно дорівнюватиме $\frac{1}{2}$.

Розглянемо ще кілька прикладів експериментів з таким комплексом умов, які роблять усі результати експерименту рівноможливими.

ПРИКЛАД 3. Гральний кубик (рис. 22.1) кидають один раз. Яка ймовірність випадіння цифри 4?

У цьому експерименті можна отримати один із шести результатів: випаде 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Усі ці результати рівноможливі. Тому природно вважати, що ймовірність події

«випадіння 4 очок» дорівнює $\frac{1}{6}$. ◀

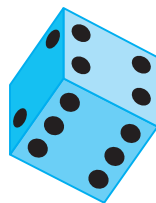


Рис. 22.1

ПРИКЛАД 4. Нехай випущено 100 000 лотерейних білетів, 20 з яких є виграшними. Яка ймовірність виграшу при купівлі одного білета?

Випробування полягає в тому, що купляють один білет. У цьому експерименті можна отримати один зі 100 000 рівноможливих результатів: купити білет з номером 1, купити білет з номером 2 і т. д. Із них 20 результатів приводять до виграшу. Природно вважати, що ймовірність виграшу при купівлі одного білета дорівнює $\frac{20}{100\,000} = \frac{1}{5000}$. ◀

ПРИКЛАД 5. У коробці лежать 15 більйардних куль, пронумерованих числами від 1 до 15. Яка ймовірність того, що вийнята навмання куля матиме номер, кратний 3?

У цьому випробуванні можна отримати один із 15 рівноможливих результатів: вийняти кулю з номером 1, вийняти кулю з номером 2 і т. д. Із них до настання події «вийнята куля має номер, кратний 3» приводять 5 результатів: вийнята куля має номер 3, або 6, або 9, або 12, або 15. Тому природно вважати, що шукана ймовірність дорівнює $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. ◀

Попри те що в прикладах 1–5 розглядають різні експерименти, їх описує одна математична модель. Пояснимо сказане.

- У кожному прикладі при випробуванні можна отримати один із n рівноможливих результатів.

Приклад 1: $n = 10$.

Приклад 2: $n = 2$.

Приклад 3: $n = 6$.

Приклад 4: $n = 100\,000$.

Приклад 5: $n = 15$.

- У кожному прикладі розглядається деяка подія A , до настання якої приводять m результатів. Називатимемо їх **сприятливими**.

Приклад 1: A — витягнули червону кулю, $m = 10$, або A — витягнули жовту кулю, $m = 0$.

Приклад 2: A — випав герб, $m = 1$.

Приклад 3: A — випала наперед задана кількість очок на грані кубика, $m = 1$.

Приклад 4: A — виграш призу, $m = 20$.

Приклад 5: A — витягнули кулю, номер якої кратний 3, $m = 5$.

- У кожному прикладі ймовірність події A можна обчислити за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Ця формула виражає важливу закономірність, яка дає змогу знаходити ймовірність випадкової події у випробуваннях із рівноможливими результатами.

Якщо випробування може закінчитися одним з n рівноможливих результатів, з яких m приводять до настання події A , то ймовірність події A дорівнює $\frac{m}{n}$.

Наголосимо, що коли комплекс умов експерименту такий, що його результати не є рівноможливими, то класичне визначення ймовірності до такого експерименту застосовувати не можна.

ПРИКЛАД 6. Кидають одночасно два гральних кубики: синій і жовтий. Яка ймовірність того, що випадуть дві шістки?

За допомогою таблиці, зображеної на рисунку 22.2, ми можемо встановити, що в даному експерименті можна отримати 36 рівноможливих результатів, з яких сприятливим є тільки один. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{36}$. ◀

		Кількість очок на жовтому кубіку					
		1	2	3	4	5	6
Кількість очок на синьому кубіку	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Рис. 22.2

ПРИКЛАД 7 (задача д'Аламбера). Кидають одночасно дві однакові монети. Яка ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб?

Ця задача схожа на задачу з прикладу 6. Різниця лише в тому, що кубики відрізнялися за кольором, а монети є нерозрізними. Щоби створити в цьому експерименті комплекс умов, за яких усі його результати стануть рівноможливими, будемо розрізняти монети, попередньо їх пронумерувавши. Тоді можна отримати чотири рівноможливих результати (рис. 22.3).

У перших трьох із цих результатів хоча б один раз випав герб. Ці результати є сприятливими. Тому ймовірність того, що при одночасному киданні двох монет хоча б один раз випаде герб, дорівнює $\frac{3}{4}$.

Перша монета	Друга монета
	
	
	
	

Рис. 22.3

ПРИКЛАД 8. Кидають одночасно два однакових гральних кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, сума яких дорівнюватиме 11?

Даний експеримент має 11 результатів. Сума чисел, які випали, може дорівнювати 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Проте тут помилкою було б вважати, що ймовірність події «сума чисел, які випали, дорівнює 11» становить $\frac{1}{11}$. Річ

у тім, що перелічені 11 результатів досліду не є рівноможливими. Наприклад, результат «сума чисел дорівнює 2» може бути отриманий тільки одним способом, а результат «сума чисел дорівнює 6» — п'ятьма способами (переконайтеся в цьому самостійно).

Щоб мати змогу скористатися класичним визначенням ймовірності, опишемо умови експерименту таким чином, щоб усі його результати були рівноможливими.

Для цього будемо умовно розрізняти кубики, наприклад за кольором. Тоді можна отримати 36 рівноможливих результатів (рис. 22.2). Із них тільки два є сприятливими.

Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. ◀

На завершення цього пункту зазначимо таке.

На перший погляд здається, що багатьма явищами, які відбуваються навколо нас, керує «його величність випадок». Проте при більш ґрунтовному аналізі з'ясовується, що через хаос випадковостей прокладає собі дорогу закономірність, яку можна кількісно оцінити. Науку, яка займається такими оцінками, називають **теорією ймовірностей**.



1. Яку подію називають достовірною? **2.** Яку подію називають неможливою? **3.** Яка ймовірність: 1) достовірної події; 2) неможливої події? **4.** За якою формулою визначають ймовірність події у випробуванні з рівноможливими результатами?



ВПРАВИ

22.1.° Наведіть приклади достовірних подій.

22.2.° Наведіть приклади неможливих подій.

22.3.° У кошику лежать 10 червоних і 15 зелених яблук. Яка ймовірність взяти навмання з кошика грушу? яблуко?

22.4.° Навмання вибирають три парні цифри. Яка ймовірність того, що число, записане цими цифрами, буде непарним?

22.5.° Навмання вибирають три непарні цифри. Яка ймовірність того, що число, записане цими цифрами, буде непарним?

22.6.° Яка ймовірність того, що, переставивши букви в слові «алгебра», ми отримаємо слово «геометрія»?

22.7.° Монету підкидають 3 рази та підраховують, скільки разів випав герб. Як ви думаєте, яка з наведених подій є достовірною? неможливою? Обговоріть це питання у класі. Кількість гербів:

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1) дорівнює 3; | 3) менша від 8; |
| 2) дорівнює 2; | 4) більша за 4. |

22.8.° Кидають два гральних кубики та підраховують суму очок на кубиках. Яка з наведених подій є достовірною? неможливою?

Сума очок:

- | | |
|----------------|------------------|
| 1) дорівнює 7; | 3) менша від 15; |
| 2) дорівнює 1; | 4) більша за 4. |

22.9.° Наведіть приклади дослідів з рівноможливими результатами.

22.10.° Наведіть приклади дослідів з нерівноможливими результатами.

22.11.° Із п'яти більярдних куль з номерами від 1 до 5 навмання беруть одну кулю. Як ви думаєте, чи є рівноймовірними події A і B :

- 1) подія A : узяли кулю з номером 1;
подія B : узяли кулю з номером 3;
- 2) подія A : узяли кулю з парним номером;
подія B : узяли кулю з непарним номером?

Обговоріть це питання у класі.

22.12.° Із шести уроків у розкладі 9-А класу навмання вибрали один шкільний предмет (рис. 22.4). Чи є рівноймовірними події A і B :

- 1) подія A : вибрали історію України;
подія B : вибрали біологію;
- 2) подія A : вибрали українську мову;
подія B : вибрали алгебру?

Розклад уроків

		9-А клас	Каб.
ПОНЕДІЛОК	1	Українська мова	24
	2	Історія України	15
	3	Біологія	31
	4	Алгебра	21
	5	Алгебра	21
	6	Англійська мова	17/19

Рис. 22.4

22.13.° Яка ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде кількість очок, що дорівнює:

- 1) одному;
- 2) трьом;
- 3) непарному числу;
- 4) числу, яке не ділиться націло на 3;
- 5) числу, яке кратне 5;
- 6) числу, яке кратне 9?

22.14.° Уяви собі, що в класі, у якому ти навчаєшся, розігрується одна безкоштовна туристична поїздка до Лондона. Яка ймовірність того, що до Лондона поїдеш ти?



22.15.° Щоб скласти іспит, потрібно вивчити 35 білетів. Студентка бездоганно вивчила тільки 30 білетів. Яка ймовірність того, що, відповідаючи на один витягнутий білет, вона отримає оцінку «відмінно»? Як ви думаєте, які припущення треба зробити про те, як проходить такий іспит? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

22.16.° Щоб скласти іспит з математики, треба вивчити 30 білетів. Учень не вивчив тільки один білет. Яка ймовірність того, що, відповідаючи на один навмання вибраний білет, він не складе іспит?

22.17.° У лотереї 20 виграшних білетів і 280 білетів без виграшу. Яка ймовірність виграти, купивши один білет?

22.18.° У коробці лежать 7 синіх і 5 жовтих кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою?

22.19.* У коробці було 23 картки, пронумерованих від 1 до 23. Із коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:

- 1) 11;
- 2) 24;
- 3) кратне 6;
- 4) кратне 5;
- 5) одноцифрове;
- 6) складене;
- 7) у записі якого є цифра 7;
- 8) у записі якого є цифра 2;
- 9) у записі якого відсутня цифра 4;
- 10) сума цифр якого ділиться націло на 3;
- 11) яке при діленні на 11 дає в остачі 2;
- 12) у записі якого відсутня цифра 1?

22.20.* З натуральних чисел від 1 до 30 навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число буде:

- 1) простим;
- 2) дільником числа 18;
- 3) квадратом натурального числа?

22.21.* Набираючи номер телефону свого товариша, Микола забув: 1) останню цифру; 2) першу й останню цифри. Яка ймовірність того, що він з першої спроби набере правильний номер?

22.22." Настя забула дві останні цифри номера телефону й набирає їх навмання. Яка ймовірність правильно набрати номер, якщо Настя тільки пам'ятає, що дві останні цифри: 1) непарні; 2) різні й парні?

22.23." Грані кубика пофарбовано в червоний або білий колір (кожну грань в один колір). Ймовірність випадіння червоної грані дорівнює $\frac{5}{6}$, а ймовірність випадіння білої грані — $\frac{1}{6}$. Скільки червоних і скільки білих граней у кубика?

22.24." У коробці лежать 4 сині кулі та кілька червоних. Скільки червоних куль у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання куля виявиться синьою, дорівнює $\frac{2}{7}$?

22.25." Картки з номерами 1, 2, 3 довільним чином покладали в ряд. Яка ймовірність того, що картки з непарними номерами опиняться поруч?

22.26." На лавочку довільним чином сідають два хлопчики й одна дівчинка. Яка ймовірність того, що хлопчики опиняться поруч?

22.27." Кидають одночасно два гральних кубики. За допомогою рисунка 22.2 установіть, яка ймовірність того, що випадуть:

- 1) дві одиниці;
- 2) два однакових числа;
- 3) числа, сума яких дорівнює 7;
- 4) числа, сума яких більша за 10;
- 5) числа, добуток яких дорівнює 6.

22.28." Гральний кубик кидають 2 рази. Яка ймовірність того, що:

- 1) першого разу випаде менше ніж 4 очки, а другого — більше ніж 4;
- 2) першого разу випаде менше очок, ніж другого;
- 3) у сумі за два кидки випаде 5 очок?

22.29." Яка ймовірність того, що при двох кидках грального кубика:

- 1) першого разу випаде число, менше від 5, а другого — більше за 4;
- 2) шістка випаде тільки другого разу;
- 3) першого разу випаде більше очок, ніж другого?

22.30.* Дмитро й Ольга одночасно кидають по одному гральному кубу. Якщо сума очок, що випали, дорівнює 6, то виграє Дмитро, а якщо в сумі випадає 7 очок, то виграє Ольга. У кого з них більше шансів виграти в цій грі?

22.31.* Двічі кидають монету. Яка ймовірність того, що випадуть: 1) два герби; 2) герб і цифра?

↔ Якщо вам сподобалося розв'язувати задачі з теорії ймовірностей, то радимо прочитати оповідання «Спочатку була гра» (с. 220–223), а також взяти участь у роботі над проектом «Застосування правил комбінаторики для розв'язування задач з теорії ймовірностей». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проекті, ви можете знайти на с. 258.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

22.32. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) (2 - y)(3 + y) \leq (4 + y)(6 - y); \quad 2) \frac{y-1}{2} - \frac{2y+1}{8} - y < 2.$$

22.33. При яких значеннях p і q вершиною параболи $y = x^2 + px + q$ є точка $A(2; 5)$?

22.34. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \quad 2) \frac{7\sqrt{3} - 21}{14\sqrt{3}}.$$



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Спочатку була гра

Ви знаєте багато ігор, у яких результат залежить від майстерності учасників. Проте є й такі ігри, у яких від умінь гравців нічого не залежить. Усе вирішує випадок. До останніх належить гра в кості. Уважають, що саме з неї розпочалася наука про випадкове.

Розповідають, що придворний французького короля Людовіка XIV, азартний гравець, філософ і літератор кавалер де Мере звернувся до видатного вченого Блеза Паскаля (1623–1662) із проханням роз'яснити такий парадокс.

З одного боку, багатий ігровий досвід де Мере свідчив, що в разі кидання трьох гральних костей (кубиків) сума в 11 очок випадає частіше, ніж у 12 очок.

З другого боку, цей факт вступав у суперечність з такими міркуваннями. Суму в 11 очок можна отримати із шести різних комбінацій кубиків:

 6-4-1	 6-3-2	 5-5-1
 5-4-2	 5-3-3	 4-4-3

Але й 12 очок теж можна отримати із шести комбінацій:

 6-5-1	 6-4-2	 6-3-3
 5-5-2	 5-4-3	 4-4-4

Тож, до появи в сумі 11 і 12 очок приводить однакова кількість сприятливих результатів. А отже, ці події мають однакові шанси, що суперечить практиці.

Паскаль зрозумів: помилка полягала в тому, що події, які розглядав де Мере, не є рівноймовірними. Наприклад, суму в 11 очок за допомогою комбінації 6-4-1 можна



Блез Паскаль
(1623–1662)

Французький релігійний філософ, письменник, математик і фізик. У ранньому віці виявив математичні здібності, увійшов в історію науки як класичний приклад підліткової геніальності. Коло його математичних інтересів було надзвичайно широким.

отримати в разі шести різних результатів кидання кубиків: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Якщо підрахувати для кожної комбінації кількість способів її виникнення, то будемо мати: для суми 11 кількість сприятливих елементарних наслідків дорівнює 27, а для суми 12 — 25. Причому всі такі елементарні наслідки є рівноможливими.

Цю та інші задачі, пов'язані з азартними іграми, Б. Паскаль обговорював у листуванні з П'єром Ферма (1607–1665). Уважають, що в цьому листуванні було закладено основи теорії ймовірностей.

У літературі зустрічається твердження, що подібної до помилки де Мере припустився видатний французький математик Жан Лерон д'Аламбер (1717–1783), розв'язуючи таку задачу: «Монету підкидають двічі. Яка ймовірність того, що хоча б раз випаде герб?». Він міркував приблизно так.

Можливі три результати: випало 2 герби, випав 1 герб, випало 0 гербів. Тоді з трьох можливих результатів випробування сприятливими є тільки два, тобто ймовірність дорівнює $\frac{2}{3}$. Проте правильною є відповідь $\frac{3}{4}$ (подумайте чому).

Помилка полягала в тому, що зазначені три результати не є рівноможливими. Швидше за все, ця помилка свідчить про те, що у XVIII ст. теорія ймовірностей була ще молодого наукою, яка потребувала уточнення самого поняття «ймовірність події».

Україна подарувала світові цілу плеяду видатних учених у галузі теорії ймовірностей. Імена Й. Гіхмана, Б. Гнеденка, А. Скорохода, М. Ядренка добре відомі міжнародній науковій спільноті.



М. Й. Ядренко
(1932–2004)



Михайло Йосипович Ядренко чималу частину своїх творчих сил віддавав також педагогічній діяльності. Він багато працював з обдарованою молоддю, був фундатором Всеукраїнських олімпіад юних математиків. Михайло Йосипович проводив значну просвітницьку діяльність. Зокрема, за його ініціативи в 1968 р. було створено першу в Україні науково-популярну збірку «У світі математики».

23. Початкові відомості про статистику



Яким тиражем слід видати підручник з алгебри для 9 класу?

Чи варто певному політику висувати свою кандидатуру на чергових виборах мера?

Скільки кілограмів риби та морепродуктів уживає в середньому за рік один житель України?

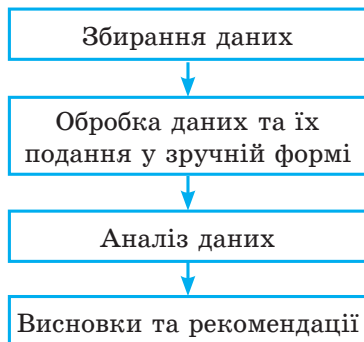
Чи вигідно для концерту даного артиста орендувати стадіон?

На ці та багато інших запитань допомагає відповідати **статистика**.

Означення:

Статистика (від латин. *status* — стан) — це наука про отримання, обробку й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища.

Статистичне дослідження складається з кількох етапів:



Зупинимось окремо на кожному етапі.

Збирання даних

Ви знаєте, що шкідливі звички, неправильне харчування, малорухомий спосіб життя призводять до серцево-судинних захворювань. Такого висновку лікарі дійшли, дослідивши, звісно, не всіх людей планети.

Зрозуміло, що дослідження мало *вибірковий*, але *масовий* характер.

У статистиці сукупність об'єктів, на основі яких проводять дослідження, називають **вибіркою**.

Варто зазначити, що статистичний висновок, заснований лише на чисельності вибірки, не завжди є достовірним. Наприклад, якщо ми, досліджуючи популярність артиста, обмежимося опитуванням людей, які прийшли на його концерт, то отримані висновки не будуть об'єктивними, адже вони прийшли на концерт саме тому, що цей артист їм подобається. Статистики говорять, що вибірка має бути **репрезентативною** (від фр. *représentatif* — показовий).

Однією з умов формування репрезентативної вибірки є випадковий вибір її елементів. Таким чином забезпечують однакові шанси для всіх досліджуваних об'єктів потрапити до вибірки.

Так, лікарі, вивчаючи фактори ризику виникнення серцево-судинних захворювань, досліджували людей різного віку, статей, професій, національностей тощо.

Іноколи вибірка може збігатися з множиною всіх об'єктів, щодо яких проводиться дослідження. Прикладом таких досліджень є національні волевиявлення чи зовнішнє незалежне оцінювання. Так, у 1991 р. було проведено загальнонаціональний референдум щодо проголошення незалежності України.

Способи подання даних

Зібрану інформацію (сукупність даних) зручно подавати у вигляді таблиць, графіків, діаграм.

Розглянемо кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1. У таблиці подано результати виступів українських школярів і школярок на міжнародних математичних олімпіадах протягом 2001–2024 рр. (Команда на міжнародних математичних олімпіадах складається не більше ніж із 6 осіб.)



Рік	Місце проведення	Кількість медалей				Без медалей
		Золоті	Срібні	Бронзові	Разом медалей	
2001	США	1	5	0	6	0
2002	Велика Британія	1	3	0	4	2
2003	Японія	1	2	3	6	0
2004	Греція	1	5	0	6	0
2005	Мексика	2	2	2	6	0
2006	Словенія	1	2	2	5	1
2007	В'єтнам	3	1	2	6	0
2008	Іспанія	2	2	2	6	0
2009	Німеччина	3	1	2	6	0
2010	Казахстан	1	2	3	6	0
2011	Нідерланди	1	2	3	6	0
2012	Аргентина	0	3	2	5	1
2013	Колумбія	1	3	1	5	1
2014	Південно-Африканська Республіка	2	3	1	6	0
2015	Таїланд	2	3	1	6	0
2016	Гонконг	0	2	4	6	0
2017	Бразилія	1	2	2	5	1
2018	Румунія	4	2	0	6	0
2019	Велика Британія	1	4	1	6	0
2020	Росія (онлайн)	0	6	0	6	0
2021	Росія (онлайн)	3	2	1	6	0
2022	Норвегія	1	1	4	6	0
2023	Японія	0	1	5	6	0
2024	Велика Британія	0	2	3	5	1

У багатьох випадках дані зручно подавати у вигляді **стовпчастої діаграми**, яку ще називають **гістограмою** (від грец. *histos* — стовп і *gramma* — написання). Така інформація легко сприймається та добре запам'ятовується.

ПРИКЛАД 2. На рисунку 23.1 подано інформацію про розподіл міст України за часом їх заснування або першої згадки.

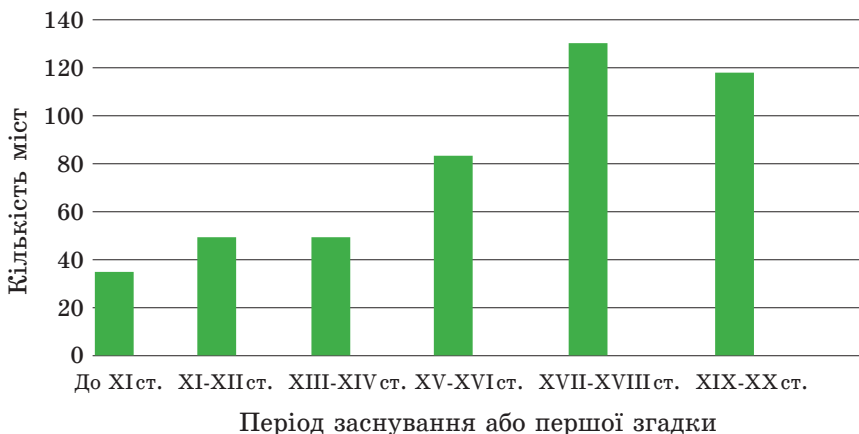


Рис. 23.1

ПРИКЛАД 3. Інформацію також можна подавати у вигляді графіків. Так, на рисунку 23.2 зображено графік щорічного відсоткового зростання кількості користувачів і користувачок інтернету у світі протягом 1995–2024 рр.

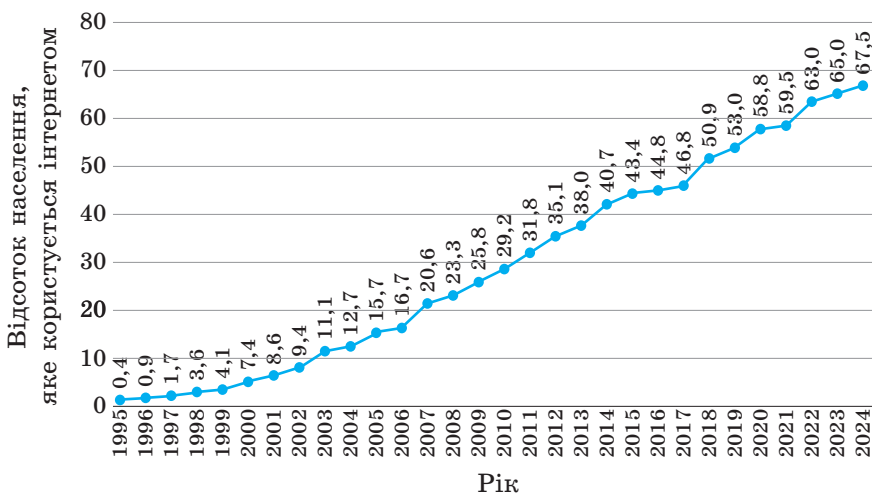


Рис. 23.2

Стовпчасті діаграми та графіки зазвичай використовують тоді, коли хочуть продемонструвати, як із плином часу змінюється деяка величина.

ПРИКЛАД 4. На рисунку 23.3 наведено розподіл медалей, отриманих українськими школярами та школярками на міжнародних олімпіадах у 2024 р. Для цього використано **кругову діаграму**: круг зображає загальну кількість медалей, а кожному предмету відповідає певний сектор круга.

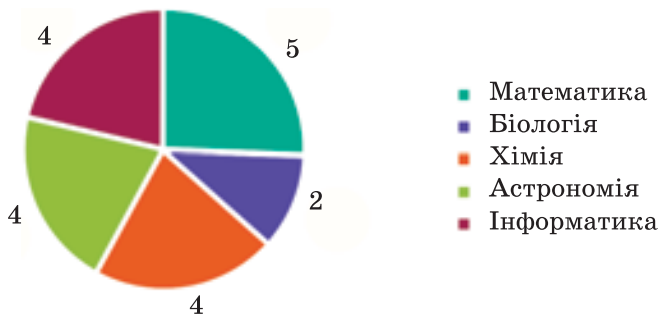


Рис. 23.3

Аналіз даних, висновки та рекомендації

Статистичні відомості надходять із різних галузей знань і діяльності людини: економіки, медицини, соціології, демографії, сільського господарства, метеорології, спорту тощо. Проте статистичні методи обробки (аналізу) даних багато в чому схожі. Ознайомимосся з деякими з них.

Звернемося до прикладу 1. Наведена таблиця дозволяє дізнатися, скільки в середньому медалей за рік виборювали школярі та школярки України на міжнародних математичних олімпіадах. Для цього потрібно кількість усіх медалей, отриманих протягом періоду, що розглядається, поділити на кількість років.

Наприклад, за період 2001–2024 рр. маємо:

$$\frac{6+4+6+6+6+6+5+6+6+6+6+6+6+5+5+6+6+6+6+5+6+6+6+6+6+6+6+5}{24} = \frac{137}{24} = 5\frac{17}{24}.$$

Оскільки за рік можна вибороти не більше ніж 6 медалей, то знайдене **середнє значення** $5\frac{17}{24}$ свідчить про те, що

команда України гідно виступає на цьому престижному форумі.

У статистичній інформації середні значення отриманих сукупностей даних трапляються досить часто. Наприклад, нижче наведено таблицю *середнього* споживання деяких продуктів харчування в Україні за п'ять років, з 2017 по 2021 рр. (у кілограмах на людину в місяць).

Продукти харчування	2017	2018	2019	2020	2021
Картопля	6,4	6,3	6,2	6,0	5,8
Фрукти, ягоди, горіхи	3,7	3,8	4,0	3,7	3,9
Молоко й молочні продукти	19,3	19,1	19,0	18,9	18,8
Риба та морепродукти	1,3	1,4	1,5	1,4	1,4

Таку таблицю можуть використовувати економісти в дослідженнях, висновках і рекомендаціях, власники магазинів і виробники продукції при плануванні своєї діяльності.

Проте середнє значення не завжди точно (адекватно) відображає ситуацію. Наприклад, якщо в країні доходи різних верств населення дуже різняться, то середній дохід на одну людину для більшості жителів може не відображати їхнього матеріального стану. Скажімо, у якійсь країні 100 жителів — дуже багаті, а решта 5 мільйонів — дуже бідні. Тоді показник середнього доходу може виявитися не низьким, а отже, неадекватно відображатиме загальну бідність населення.



У подібних випадках для аналізу даних використовують інші характеристики. Ознайомимося з ними.

За допомогою прикладу 1 складемо таблицю, яка відображає кількість медалей кожного виду:

Золоті медалі	Срібні медалі	Бронзові медалі	Без медалей
32	61	44	7

Таку таблицю називають **частотною**, а числа, записані в другому рядку, — **частотами**.

Частота 61 показує, що українські школярі та школярки найчастіше завойовували срібні медалі. Показник «срібні медалі» називають **модою** отриманих даних.

Це слово всім добре знайоме. Ми часто говоримо: «увійти в моду», «вийти з моди», «данина моді». У повсякденному житті мода означає сукупність поглядів і уподобань, яким більшість віддає перевагу в даний момент часу.

Саме мода є найважливішою характеристикою тоді, коли отримана сукупність даних не є числовою множиною. Продемонструємо це на такому прикладі.

Відома фірма, яка планує постачати джинси в Україну, провела опитування репрезентативної вибірки, що складалася з 500 осіб. У результаті отримали таку частотну таблицю:

Розмір джинсів	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Частота	52	71	145	126	59	40	7
Відносна частота (у %)	10,4	14,2	29	25,2	11,8	8	1,4

У третьому рядку цієї таблиці записано відношення відповідної частоти до величини вибірки. Це відношення, записане у відсотках, називають **відносною частотою**. Наприклад, для розміру XS маємо:

$$\frac{52}{500} \cdot 100 = 10,4 \text{ (\%)}$$

Мода даної вибірки — це розмір M, і їй відповідає відносна частота 29 %.

Тим самим фірма отримала інформацію, що найбільшу частину обсягів постачання (приблизно 29 %) мають скласти джинси розміру M.

Зауважимо, що якби в таблиці дві частоти були б рівні та набували найбільших значень, то модою були б два відповідних розміри.

Вище ми навели приклад, коли середнє значення не точно відображає матеріальний стан людей у країні. Більш повну характеристику можна отримати, якщо середнє значення доповнити результатом такого дослідження.

Утворюють репрезентативну вибірку, яка складається з людей даної країни, і отримують сукупність даних, яка складається з доходів. Далі відповідно до шкали, яка визначає рівень доходів (низький, середній, високий), розбивають отриманий ряд даних на три групи. Складають таблицю, до якої вносять значення частот і відносних частот:

Рівень доходів	Низький	Середній	Високий
Частота	m	n	k
Відносна частота	$p \%$	$q \%$	$r \%$

Мода такої сукупності даних може характеризувати рівень доходів у країні.

Дослідження сукупності даних можна порівняти з роботою лікаря, який ставить діагноз. Залежно від скарг пацієнта або симптомів, що спостерігаються, лікар вибирає певну методику пошуку причини хвороби. Зрозуміло, що ця методика визначає точність діагнозу. Так само й у статистиці: залежно від зібраної інформації та способу її отримання застосовують різні методи її обробки. Ці методи можуть доповнювати один одного, якийсь із них може точніше (адекватніше), ніж інші, відображати конкретну ситуацію. Так, аналізуючи виступи українських школярів на міжнародних математичних олімпіадах, можна встановити, що статистичні характеристики середнє значення та мода вдало узгоджуються. А в прикладі, який визначає ходовий розмір джинсів, найбільш прийнятним є пошук моди.

Чим більшим є арсенал методик обробки даних, тим об'єктивніший висновок можна отримати.

Ознайомимося ще з однією важливою статистичною характеристикою.

Сім'я вирішила зробити ремонт на кухні та цікавиться, скільки коштує покласти один квадратний метр кахляної плитки. Вивчивши прейскурант 11 будівельних фірм, вони

отримали таку інформацію (ціни записано в гривнях у порядку зростання):

400, 450, 550, 550, 550, 600, 850, 900, 1650, 1700, 1700.

Сім'я хоче вибрати фірму із середніми цінами. Середнє значення отриманої сукупності даних дорівнює 900.

Проте отримані дані показують, що ціну 900 грн скоріше можна віднести до високих, ніж до середніх.

Зазначимо, що число 600 стоїть посередині упорядкованої сукупності даних. Його називають **медіаною** цієї вибірки. У розглядуваній ситуації саме медіана допомагає вибрати фірму із середніми цінами. Справді, у послідовності з 11 чисел є п'ять менших від 600 і п'ять більших за 600.

Тепер розглянемо упорядковану сукупність даних, яка складається з парної кількості чисел, наприклад з восьми:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Тут «серединою» вибірки є одразу два числа: 7 і 8. Вважають, що медіана такої вибірки дорівнює їхньому серед-

ньому арифметичному: $\frac{7+8}{2} = 7,5$.

Середнє значення, моду та медіану називають **мірами центральної тенденції** отриманої сукупності даних.



1. Що вивчає наука статистика? **2.** Назвіть одну з умов формування репрезентативної вибірки. **3.** Як знайти середнє арифметичне ряду даних, який складається з чисел? **4.** Що називають модою ряду даних? **5.** Як визначають медіану вибірки, що складається з непарної кількості елементів? з парної кількості елементів?



ВПРАВИ

23.1.° Користуючись таблицею середніх річних температур повітря в окремих містах України, побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

Місто	Температура, °C	Місто	Температура, °C
Львів	8,9	Черкаси	9,7
Ужгород	11,1	Полтава	9,3
Київ	8,9	Донецьк	9,4
Суми	8,1	Луганськ	9,8
Одеса	11,5	Херсон	11,4

23.2.° Користуючись таблицею розвитку Київського метрополітену, побудуйте графік зростання довжини його ліній.

Рік	Кількість станцій	Довжина ліній, км	Рік	Кількість станцій	Довжина ліній, км
1960	5	5,2	2000	40	51,4
1965	10	12,7	2004	43	56,3
1971	14	18,1	2008	46	59,8
1976	17	20,42	2010	49	63,6
1981	23	27,72	2011	50	65,08
1987	28	32,6	2012	51	66
1992	35	43,1	2013	52	67,5

23.3.° Користуючись таблицею розвитку Київського метрополітену до вправи 23.2, побудуйте графік збільшення кількості його станцій.

23.4.° Як ви думаєте, чи є репрезентативною вибірка? Обговоріть це питання у класі.

- 1) Щоб дізнатися, як часто жителі / жительки міста у вихідні дні бувають на природі, було опитано членів трьох садових кооперативів.
- 2) З метою виявлення знання дев'ятикласниками / дев'ятикласницями напам'ять віршів Лесі Українки випадковим чином було опитано 4 тисячі дев'ятикласників і дев'ятикласниць у різних регіонах країни.
- 3) Для визначення відсотка користувачів / користувачок інтернету в Україні випадковим чином опитали 500 киян і киянок.
- 4) Для з'ясування рейтингу молодіжної телепрограми випадковим чином було опитано 5 тисяч юнаків і дівчат у віці від 15 до 20 років.
- 5) Щоб дізнатися, наскільки популярним є біатлон у світі, опитали випадковим чином вибраних жителів і жительок таких країн: Катар, Саудівська Аравія та Об'єднані Арабські Емірати (по 500 осіб із кожної країни).
- 6) Для об'єктивної оцінки знань професор підготував 100 запитань за пройденим курсом. На іспиті студентка випадковим чином вибирає із цього списку довільні 5 запитань.

23.5.° Районна адміністрація проводить опитування серед жителів і **жительок мікрорайону про якість комунальних послуг**. Як формували би вибірку ви, щоб відповісти на поставлене запитання? Обговоріть ваші ідеї з однокласниками й однокласницями.

23.6.° Знайдіть міри центральної тенденції ряду даних:

- 1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
- 2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

23.7.° Дівчата 9 класу на уроці фізкультури здавали залік зі стрибків у висоту. Учитель записав таку послідовність результатів:

105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см.

Знайдіть середнє значення та медіану отриманого ряду даних.

23.8.° Сергій Андрійович купив новий мобільний телефон, а старий вирішив продати через сайт безкоштовних інтернет-оголошень. Щоб не продешевити, він з'ясував, що інші люди продають аналогічну модель телефону за такими цінами:

500 грн, 500 грн, 480 грн, 850 грн, 900 грн,

1000 грн, 800 грн, 1400 грн, 1300 грн, 1560 грн.

- 1) Визначте, за якою середньою ціною люди продають цю модель телефону.
- 2) За якою ціною ви порадили б Сергію Андрійовичу продавати телефон? Обговоріть вашу пропозицію з однокласниками й однокласницями.

23.9.° Як ви думаєте, чи доцільно для оцінки наведених ситуацій використовувати такі характеристики: «у середньому», «середнє значення», «середнє арифметичне»?

- 1) З 1 по 15 травня стояла неймовірна спека, а з 16 по 31 травня було нетипово холодно та навіть двічі йшов сніг. У підсумку, погода травня в середньому виявилася характерною для даного регіону.
- 2) Туристка із Франції витратила на обід у ресторані Києва 1650 грн, а на обід у Каневі — 350 грн. У своєму блозі туристка порадила мати при собі в середньому 1000 грн, якщо ви вирушаєте до ресторану в Україні.

23.10.° Вивчаючи проблеми народжуваності в Україні, аспірант інституту демографії розглянув вибірку з декількох сімей і з'ясував кількість дітей у кожній з них. Резуль-

тати опитування він подав у формі стовпчастої діаграми (рис. 23.4). Скільки сімей містила вибірка? Знайдіть моду отриманого ряду даних.

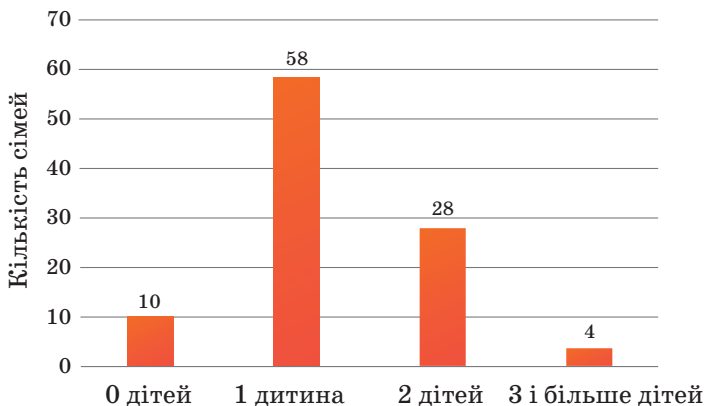


Рис. 23.4

23.11.° Для участі в шкільній вікторині на знання української мови відібрали декілька семикласників і семикласниць. Результати вікторини подано у формі стовпчастої діаграми (рис. 23.5). Скільки семикласників і семикласниць увійшло до вибірки? Знайдіть моду отриманого ряду даних.

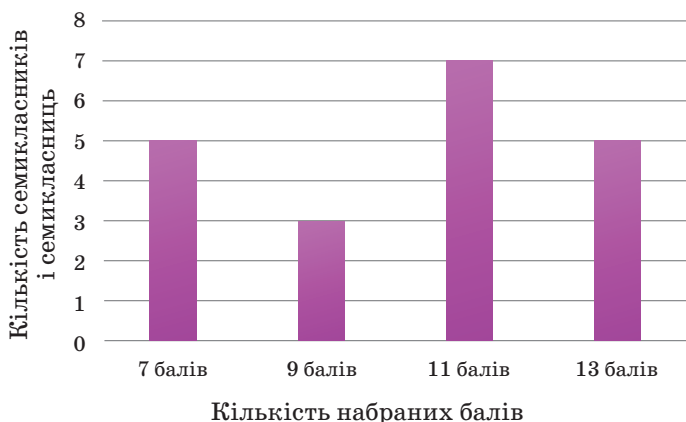


Рис. 23.5

23.12.* Класний керівник 9 класу веде облік відвідування учнями та ученицями занять. Наприкінці тижня його записи мали такий вигляд:

День тижня	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця
Кількість відсутніх	3	2	5	4	6

1) Знайдіть, скільки дітей були відсутніми в середньому в день протягом цього тижня.

2) Знайдіть моду отриманого ряду даних.

23.13.* У 9 класі, у якому навчається 23 учні та учениці, провели опитування: скільки приблизно годин на день витрачає дев'ятикласник / дев'ятикласниця на виконання домашніх завдань. Відповіді учнів та учениць подано у вигляді діаграми (рис. 23.6).

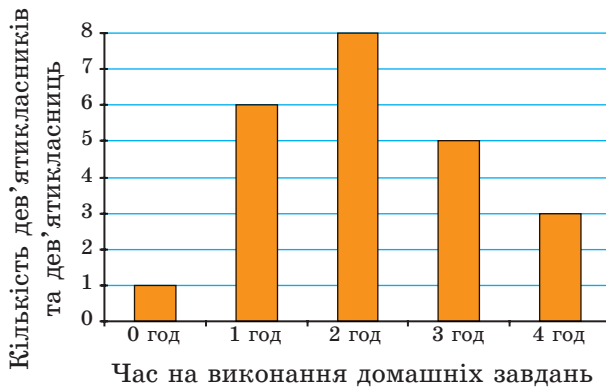


Рис. 23.6

1) Заповніть частотну таблицю:

Час, витрачений на виконання домашніх завдань, год	0	1	2	3	4
Частота					
Відносна частота					

2) Скільки часу на день у середньому витрачає учень / учениця цього класу на виконання домашнього завдання? (Знайдіть середнє значення ряду даних.)

3) Скільки часу на виконання домашнього завдання витрачає більшість дев'ятикласників / дев'ятикласниць цього класу? (Знайдіть моду ряду даних.)

Обговоріть з однокласниками й однокласницями, чи є знайдені показники характерними для вашого класу.

23.14.* На рисунку 23.7 зображено стовпчасту діаграму результатів письмової роботи з алгебри у трьох дев'ятих класах.

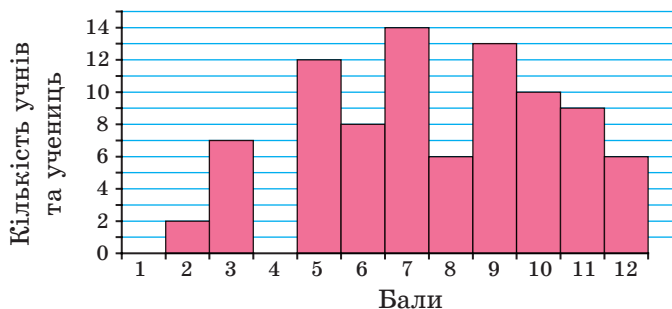


Рис. 23.7

1) Заповніть частотну таблицю:

Кількість балів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Частота												
Відносна частота												

2) Знайдіть середній бал, отриманий учнями та ученицями за цю письмову роботу.

3) Знайдіть моду отриманого ряду даних.

←→ **23.15.*** За результатами останньої контрольної роботи з алгебри, яка була проведена у вашому класі, заповніть частотну таблицю, наведену в задачі 23.14.

1) Знайдіть середній бал, отриманий учнями та ученицями за цю контрольну роботу.

2) Знайдіть моду отриманого ряду даних.

Обговоріть з учителем / учителькою, чи є знайдені показники характерними для вашого класу.

23.16.* Учнів та учениць однієї херсонської школи опитали, скільки разів у житті вони літали на літаку. Отримані дані наведено в таблиці:

Кількість здійснених польотів	0	1	2	3	4	5
Кількість учнів та учениць	530	92	46	30	8	4
Відносна частота (%)						

- 1) Заповніть третій рядок таблиці.
- 2) Подайте отримані дані у вигляді стовпчастої діаграми.
- 3) Знайдіть моду та середнє значення отриманих даних.
- 4) Як ви думаєте, чи можна вважати вибірку, що розглядається, репрезентативною для висновків щодо всіх школярів і школярок м. Херсона? Обговоріть це питання у класі.

23.17.* Випишіть усі ваші оцінки з алгебри, отримані протягом першого семестру. Знайдіть середнє значення, моду та медіану отриманого ряду даних.

23.18.* Директор фірми отримує 50 000 грн на місяць, два його заступники — по 20 000 грн, а решта 17 робітників фірми — по 4500 грн на місяць. Знайдіть середнє значення, моду, медіану заробітних плат у цій фірмі.

23.19.* Прочитайте один із найвідоміших віршів Т. Г. Шевченка:

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі з плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть.

Сім'я вечерея коло хати,
Вечірня зіронька встає.
Дочка вечереять подає,
А мати хоче научати,
Так соловейко не дає.

Поклала мати коло хати
Маленьких діточок своїх;
Сама заснула коло їх.
Затихло все, тільки дівчата
Та соловейко не затих.¹



Для букв «а», «е», «і», «ї», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» складіть частотну таблицю їх наявності в поданому вірші. Визначте моду отриманого ряду даних.

¹ Т. Г. Шевченко. Твори у 12 т. Інститут літератури ім. Т. Г. Шевченка Академії наук України. — К. : Наукова думка, 2003. — Т. 2. — С. 17.

23.20.* Протягом квітня 2025 р. температура повітря в Києві о 9 год ранку становила:

Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C
01.04.2025	8,9	11.04.2025	-1,7	21.04.2025	15,2
02.04.2025	8,1	12.04.2025	4,2	22.04.2025	17,4
03.04.2025	7,5	13.04.2025	6,6	23.04.2025	20,8
04.04.2025	11,5	14.04.2025	10,0	24.04.2025	19,6
05.04.2025	12,2	15.04.2025	7,3	25.04.2025	17,4
06.04.2025	1,8	16.04.2025	12,4	26.04.2025	9,2
07.04.2025	-0,6	17.04.2025	14,2	27.04.2025	5,2
08.04.2025	-1,0	18.04.2025	15,1	28.04.2025	8,9
09.04.2025	-0,5	19.04.2025	15,7	29.04.2025	12,8
10.04.2025	0,4	20.04.2025	15,4	30.04.2025	15,2

Знайдіть міри центральної тенденції отриманих даних.

↔ **23.21.*** Побудуйте ряд даних: 1) з п'яти чисел; 2) із шести чисел, у якого:

а) середнє значення дорівнює медіані;

б) середнє значення більше за медіану.

Порівняйте отримані вами ряди даних з тими, які придумали ваші однокласники й однокласниці.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23.22. Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

1) $x^2 + 5x \leq 0$;

2) $-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 > 0$.

23.23. Знайдіть різницю арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 8,5, а сума шістнадцяти перших членів становить 172.

23.24. Послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Знайдіть b_{20} , якщо $b_{19} = -3$, $b_{21} = -12$.



ЗАВДАННЯ № 5
«ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–14 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише **ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ**. Виберіть правильний варіант відповіді.



1. У магазині є у продажу 6 різних чашок і 4 різних блюдця. Скількома способами можна купити чашку з блюдцем?
А) 10; Б) 6; В) 24; Г) 4.
2. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 3, 7, 9 так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?
А) 6; Б) 3; В) 27; Г) 8.
3. Скількома способами можна розставити на полиці 5 різних книжок?
А) 5; Б) 20; В) 100; Г) 120.
4. Монету підкидають тричі. Скільки різних послідовностей гербів і чисел можна при цьому отримати?
А) 6; Б) 3; В) 10; Г) 8.
5. Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких різні та непарні?
А) 5; Б) 100; В) 120; Г) 110.
6. Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких різні та парні?
А) 96; Б) 48; В) 100; Г) 120.
7. У магазині є у продажу 6 різних ложок, 4 різні виделки і 3 різні ножі. Скількома способами можна купити два предмети різного найменування?
А) 24; Б) 54; В) 72; Г) 13.
8. У коробці лежать 12 білих і 16 червоних куль. Яка ймовірність того, що обрана навмання куля виявиться білою?
А) $\frac{3}{4}$; Б) $\frac{3}{7}$; В) $\frac{1}{12}$; Г) $\frac{4}{7}$.

У завданні 15 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.

15. Із натуральних чисел, які більші за 9, але менші від 20, навмання вибирають одне. Установіть відповідність між подією (1–3) та її ймовірністю (А–Д).

Подія	Ймовірність події
1) обране число є складеним	А) 0
2) обране число є двоцифровим	Б) 0,3
3) обране число ділиться націло на 3	В) 0,6
	Г) 0,8
	Д) 1



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

- 1.° У їдальні є 7 різних пиріжків і 5 різних тістечок. Скількома способами можна вибрати:
 - 1) один із цих кулінарних виробів;
 - 2) набір, який складається з пиріжка й тістечка?
- 2.° Кнопковий замок для входних дверей має 8 кнопок, пронумерованих цифрами від 1 до 8. Для відмикання дверей потрібно натиснути 4 різних кнопки в певній послідовності. Скільки існує кодів (наборів із різних кнопок), які складаються із 4 цифр для цього замка?
- 3.° У коробці лежать 6 білих і 9 синіх кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться білою?
- 4.° Знайдіть середнє значення, моду і медіану ряду даних: 4, 6, 12, 9, 9, 5, 9, 6.
- 5.° Скільки можна записати п'ятицифрових чисел за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо:
 - 1) усі цифри мають бути різними;
 - 2) цифри можуть повторюватися?
- 6.° Із двоцифрових парних чисел навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число буде кратне числу 7?

- 7.* У таблиці наведено дані про стаж роботи працівників і працівниць деякого підприємства.

Стаж роботи в роках	5	10	12	14	15	19
Кількість працівників/ць	3	6	1	5	3	2

Знайдіть:

- 1) середнє значення отриманих даних;
 - 2) медіану отриманих даних.
- 8.* Скільки існує парних чотирицифрових чисел?
- 9.* У коробці лежать чотири картки, на яких написано числа 2, 3, 5 і 7. Яка ймовірність того, що добуток чисел, записаних на двох навмання виїнятих картках, буде непарним числом?



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Правило суми

Нехай множина A складається з m елементів, а множина B — із k елементів. Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то існує $m + k$ способів вибрати один елемент з множини A або множини B , тобто з об'єднання $A \cup B$.

Правило добутку

Якщо множина A складається з m елементів, а множина B — із k елементів, то одну пару елементів (x, y) , де x — елемент множини A , а y — елемент множини B , можна вибрати mk способами.

Частота випадкової події

$$\text{Частота} = \frac{\text{Кількість появ досліджуваної події}}{\text{Кількість випробувань (спостережень)}}$$

Достовірна подія

Подію, яка за даним комплексом умов обов'язково відбудеться в будь-якому випробуванні, називають достовірною (вірогідною). Ймовірність такої події вважають рівною 1.

Неможлива подія

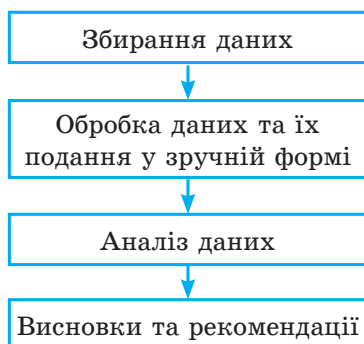
Подію, яка за даним комплексом умов не може відбутися в жодному випробуванні, називають неможливою. Ймовірність такої події вважають рівною 0.

Класичне визначення ймовірності

Якщо випробування може закінчитися одним із n рівноможливих результатів, із яких m приводять до настання події A , то ймовірність події A дорівнює $\frac{m}{n}$.

Статистика

Статистика (від латин. status — стан) — це наука про отримання, обробку й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища.

Етапи статистичного дослідження

Вправи для повторення курсу алгебри 9 класу

24.1. Запишіть у вигляді нерівності твердження:

- 1) a — додатне число;
- 2) b — від'ємне число;
- 3) модуль числа c — невід'ємне число;
- 4) модуль суми двох раціональних чисел a і b не більший за суму модулів цих чисел.

24.2. Доведіть нерівність:

- 1) $3a(a+6) < (3a+6)(a+4)$;
- 2) $(2b-1)(3b+2) < (3b-1)(2b+1)$;
- 3) $25m^2 + n^2 \geq 10mn$;
- 4) $2a^2 - 4a + 5 > 0$;
- 5) $x^2 + x + 1 > 0$;
- 6) $4y^2 - 12 \geq 12y - 21$;
- 7) $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$;
- 8) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$;
- 9) $2a^2 + 5b^2 + 2ab + 1 > 0$;
- 10) $x^2 + y^2 + 15 > 6x + 4y$.

24.3. Доведіть, що є правильною нерівність:

- 1) $a^5 - 5 \geq 5a^4 - a$, якщо $a \geq 5$;
- 2) $b^3 + b + 2 \geq 0$, якщо $b \geq -1$;
- 3) $c^3 + c \leq 3c^2 + 3$, якщо $c \leq 3$.

24.4. Відомо, що $a > 3$. Порівняйте з нулем значення виразу:

- | | | |
|----------------|-------------------|------------------------|
| 1) $2a - 6$; | 3) $2a - 4$; | 5) $\frac{a-2}{a-1}$; |
| 2) $15 - 5a$; | 4) $(a-3)(2-a)$; | 6) $\frac{-4}{3-a}$. |

24.5. Відомо, що $b < 2$. Порівняйте з нулем значення виразу:

- | | | |
|---------------|---------------------|-------------------------------|
| 1) $4b - 8$; | 2) $(b-2)^2(b-3)$; | 3) $\frac{b-3}{(2-b)(b-4)}$. |
|---------------|---------------------|-------------------------------|

24.6. Доведіть, що коли $a > b > 1$, то

$$a^2b + b^2 + a > ab^2 + a^2 + b.$$

24.7. Доведіть, що коли $a < b < 2$, то

$$a^2b + 2b^2 + 4a < ab^2 + 2a^2 + 4b.$$

24.8. Порівняйте з нулем число a , якщо:

- | | | | |
|----------------|-----------------|----------------|-------------------|
| 1) $6a < 5a$; | 2) $-2a < 2a$; | 3) $9a > 4a$; | 4) $-37a > -3a$. |
|----------------|-----------------|----------------|-------------------|

24.9. Доведіть, що коли $a > 7$ і $b > 3$, то:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| 1) $4a + b > 31$; | 2) $10a + 3b > 75$. |
|--------------------|----------------------|

24.10. Доведіть, що коли $a > 5$ і $b < -2$, то:

- 1) $3a - b > 17$; 2) $5b - 2a < -10$.

24.11. Порівняйте, якщо можливо:

- 1) $4a + b$ і 12 , якщо $a > 2$ і $b > 5$;
2) $b - 2a$ і 0 , якщо $a > 4$ і $b < 6$;
3) $b - 3a$ і 1 , якщо $a < 6$ і $b < 0$;
4) $a - 5b$ і 1 , якщо $a < 12$ і $b > 2$.

24.12. Додатні числа a , b , c і d такі, що $a > b$, $d < b$ і $c > a$.

Розташуйте в порядку зростання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ і $\frac{1}{d}$.

24.13. Відомо, що $5 < a < 8$. Оцініть значення виразу:

- 1) $0,4a$; 2) $a - 3$; 3) $2a + 1$; 4) $-3a + 2$.

24.14. Відомо, що $3,1 < \sqrt{10} < 3,2$. Оцініть значення виразу:

- 1) $2\sqrt{10}$; 2) $-4\sqrt{10}$; 3) $3\sqrt{10} - 5$.

24.15. Відомо, що $3 < m < 4$ і $-3 < n < -2$. Оцініть значення виразу:

- 1) $2m + 3n$; 2) $0,2m - n$; 3) $-5m + 4n$; 4) $m - \frac{m}{n}$.

24.16. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $16 - 4n \geq 8$; 4) $\frac{4 - 3x}{7} < 1$;
2) $10x > 13x + 6$; 5) $3x + 4 < 5x - 4$;
3) $6x + 3 > 5x - 2$; 6) $4x - 7 > 7x - 6$.

24.17. Знайдіть суму натуральних чисел, які належать області визначення функції $y = \sqrt{10 - 3x}$.

24.18. Дано функцію $f(x) = 3x + 12$. При яких значеннях аргументу функція набуває:

- 1) додатних значень;
2) від'ємних значень;
3) значень, які належать проміжку $[-4; 7]$?

24.19. Придумайте нерівність виду $ax + b > 0$, де x — змінна, a і b — деякі числа, множиною розв'язків якої є:

- 1) проміжок $(-3; +\infty)$; 3) множина дійсних чисел;
2) проміжок $(-\infty; -1,6)$; 4) порожня множина.

24.20. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $(2x - 3)^2 \leq (4x - 1)(x - 2) + 7$;
2) $(x - 2)(2 + x) \geq 2 - (x + 4)(1 - x)$;
3) $\frac{1 - x}{2} + 3 < 3x - \frac{2x + 1}{4}$;

$$4) \frac{3x-37}{2} - 9 > \frac{7-2x}{4} + 2x;$$

$$5) \frac{5x-3}{5} \geq \frac{3x+4}{3} - \frac{29}{15}.$$

24.21. Чому дорівнює найменший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{3x+5}{4} - 1 \leq \frac{x-2}{3} + x?$$

24.22. Чому дорівнює найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{3x+5}{2} < \frac{8-x}{3}?$$

24.23. Чи є рівносильними нерівності:

$$1) \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{3} < 1 \text{ і } 3(x+1) + 2(x-1) < 1;$$

$$2) (x+3)(x^2+4) > 0 \text{ і } x+3 > 0;$$

$$3) x-1 > 3 \text{ і } x-1 + \frac{1}{x-5} > 3 + \frac{1}{x-5};$$

$$4) x+2 < 1 \text{ і } x+2 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}?$$

24.24. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x-3 < 2x-3, \\ 4x+5 > 10-x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 9+2x \leq 3x+7, \\ x-2 > 2x-5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x-5)^2 - 15 \geq (x-3)(x-4) - 50, \\ 4(x+7) - 16 \geq 2-x; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x-1}{4} + \frac{x+1,7}{3} \geq \frac{3x+1}{5}, \\ \frac{x+2}{4} - \frac{x+8}{5} < \frac{3x-1}{10}. \end{cases}$$

24.25. Знайдіть суму цілих розв'язків системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} 3x-5 < 23-4x, \\ 7x-9 \leq 9x+1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2(3x-4) < 3(4x-5) + 23, \\ 4(x+1) \leq 3x+5. \end{cases}$$

24.26. Придумайте систему двох лінійних нерівностей з однією змінною, множиною розв'язків якої є:

- 1) проміжок $(-2; +\infty)$;
- 2) проміжок $\left[-4; \frac{1}{3}\right]$;
- 3) проміжок $(-\infty; -10]$;
- 4) порожня множина;
- 5) множина, яка складається з одного числа 8;
- 6) множина дійсних чисел.

24.27. Відомо, що $1 \leq a \leq 4$. Скількох цілих значень може набувати вираз $0,5a - 3$?

24.28. Розв'яжіть подвійну нерівність:

- 1) $-3 \leq 2x - 1 < 5$;
- 3) $2 < 7 - 4x < 11$;
- 2) $-1 < 3x - 9 \leq 6$;
- 4) $-2 \leq \frac{1-x}{3} \leq 1$.

24.29. При яких значеннях a має хоча б один розв'язок система нерівностей:

- 1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > a; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > a; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq a; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq a; \end{cases}$

24.30. При яких значеннях a не має розв'язків система нерівностей:

- 1) $\begin{cases} x < 6, \\ x > a; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x \leq 5, \\ x > a; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x \leq -8, \\ x \geq a; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x > 0, \\ x \leq a; \end{cases}$

24.31. При яких значеннях a множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \geq 3, \\ x > a \end{cases}$ є:

- 1) проміжок $[7; +\infty)$;
- 2) проміжок $[3; +\infty)$;
- 3) проміжок $(-2; +\infty)$;
- 4) порожня множина?

24.32. При яких значеннях a рівняння

$$x^2 - (2a + 2)x - 2a - 3 = 0$$

має два різних від'ємних корені?

24.33. При яких значеннях a рівняння

$$x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a - 6 = 0$$

має два різних корені, які належать проміжку $[-3; 2]$?

24.34. На рисунку 24.1 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись рисунком, укажіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки зростання і спадання функції;
- 3) множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$.

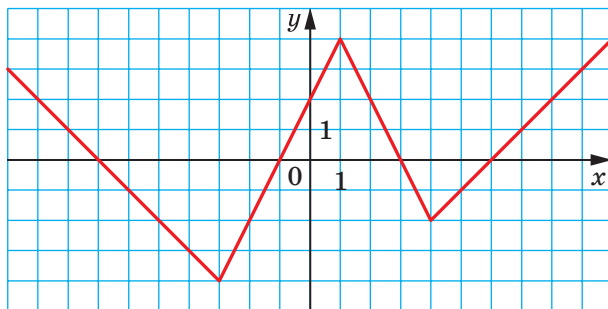


Рис. 24.1

24.35. На рисунку 24.2 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 6]$. Користуючись рисунком, укажіть:

- 1) область значень функції;
- 2) нулі функції;
- 3) проміжки зростання і спадання функції;
- 4) множину розв'язків нерівності $g(x) \leq 0$.

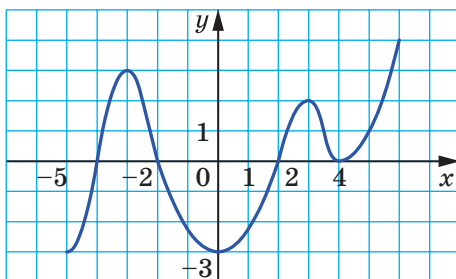


Рис. 24.2

24.36. Укажіть, які з наведених лінійних функцій є зростаючими, а які — спадними:

- 1) $y = -4x$; 2) $y = 4x - 7$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 4) $y = 4 - x$.

24.37. Яка з наведених функцій є спадною:

- 1) $y = x^2$; 2) $y = \frac{2}{x}$; 3) $y = -2x$; 4) $y = 2x$?

24.38. Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $(x+1)^2 = -\frac{2}{x}$; 2) $x^2 - 2 = -\sqrt{x}$.

24.39. Чому дорівнює абсциса вершини параболи:

- 1) $y = 4x^2 - 12x + 1$; 2) $y = -0,2x^2 - 2x + 3$?

24.40. Укажіть, вершина якої з даних парабол належить осі ординат, а якої — осі абсцис:

- 1) $y = x^2 - 4x + 3$; 3) $y = x^2 - 6x + 9$;
2) $y = x^2 - 8$; 4) $y = x^2 + 2x$.

24.41. Знайдіть значення b і c , при яких функція $y = x^2 + bx + c$:

- 1) має єдиний нуль у точці $x = -3$;
2) набуває найменшого значення, що дорівнює 4, у точці $x = 0$;
3) має нулі в точках $x = -2$ і $x = 5$.

24.42. Побудуйте графік даної функції, знайдіть її область значень, проміжки зростання і спадання:

- 1) $y = -2x^2 + 1$; 5) $y = -x^2 + 4x - 3$;
2) $y = 0,5x^2 - 2$; 6) $y = x^2 - 4x + 5$;
3) $y = x^2 + 6x + 5$; 7) $y = 2x^2 - 3x - 2$;
4) $y = 4x - x^2$; 8) $y = -3x^2 + 8x + 3$.

24.43. При якому значенні c графік функції $y = x^2 - 6x + c$:

- 1) проходить через початок координат;
2) має з віссю абсцис тільки одну спільну точку;
3) перетинає вісь ординат у точці $A(0; -4)$;
4) перетинає вісь абсцис у точці $B(2; 0)$?

24.44. При якому значенні b графік функції $y = x^2 + bx + 2$:

- 1) має з віссю абсцис тільки одну спільну точку;
2) не має з віссю абсцис спільних точок;
3) перетинає вісь абсцис у точках, відстань між якими дорівнює 4?

24.45. Графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $A(1; 1)$ і $B(2; 2)$. Чи проходить цей графік через точку:

- 1) $C(-1; -1)$; 2) $D(3; 5)$?

24.46. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходить через точку $(0; 10)$, а вершиною параболи є точка $(6; -2)$. Знайдіть коефіцієнти a , b і c .

24.47. Значення квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ у точці $x = -1$ дорівнює 0, а при $x = \frac{1}{4}$ функція набуває найменшого значення, яке дорівнює $-\frac{25}{8}$. Знайдіть коефіцієнти a , b і c .

24.48. При якому значенні m :

- 1) найменше значення функції $y = x^2 - 6x + m$ дорівнює -8 ;
- 2) найбільше значення функції $y = -x^2 + 4x - m$ дорівнює 12?

24.49. Побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}; & 3) y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}; \\ 2) y = \frac{x^3 + 8}{x + 2} - 3; & 4) y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 - 9}. \end{array}$$

24.50. При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a - 2 = 0$ набудатиме найменшого значення?

24.51. Відомо, що $a + 3b = 10$. Якого найменшого значення може набувати вираз $a^2 + b^2$ і при яких значеннях a і b ?

24.52. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 - 4x + 3 > 0$;
- 2) $x^2 - 6x - 40 \leq 0$;
- 3) $x^2 + x + 1 \geq 0$;
- 4) $x^2 - x + 1 < 0$;
- 5) $-3x^2 + 2x + 1 > 0$;
- 6) $x - x^2 < 0$;
- 7) $x^2 + 25 \geq 0$;
- 8) $0,1x^2 - 2 \leq 0$.

24.53. Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

- 1) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$;
- 2) $-4x^2 + 3x + 1 \geq 0$.

24.54. При яких значеннях c тричлен $2x^2 - 2x + 5c$ набуває додатного значення при будь-якому значенні x ?

24.55. Розв'яжіть систему нерівностей:

- 1) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > -1,2; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x \geq 6; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x \geq 6; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > 1; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -\frac{1}{3}; \end{cases}$

$$7) \begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -2; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 6x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

24.56. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2 - 16}{|x + 1|} \leq 0; \quad 2) \frac{x^2 - 5x - 14}{|x - 8|} \geq 0.$$

24.57. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} + \frac{1}{3x - 9};$$
$$2) y = \frac{6}{\sqrt{12 + x - x^2}} - \frac{2}{x^2 - 4};$$
$$3) y = \sqrt{49 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

24.58. При яких значеннях a має два різних корені рівняння:

$$1) 2x^2 + ax + a - 2 = 0;$$
$$2) (2a - 1)x^2 + (a - 3)x + 1 = 0;$$
$$3) ax^2 - (3a + 1)x + a = 0?$$

24.59. При яких значеннях a множиною розв'язків нерівності є множина дійсних чисел:

$$1) 5x^2 - x + a > 0; \quad 2) ax^2 - 10x - 5 < 0?$$

24.60. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = -x^2 + 4x - 4; \end{cases}$$
$$2) \begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -12; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 5. \end{cases}$$

24.61. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - 4y = -6, \\ x^2 + 4y^2 = 8; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x - 2y = 18, \\ xy = -12; \end{cases}$$
$$2) \begin{cases} 3x + y = -2, \\ 3x^2 - 2xy = 28; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = -3; \end{cases}$$
$$3) \begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 7) \begin{cases} (x-1)(y-1) = -2, \\ x+y = 1; \end{cases} & 9) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x+y = 12; \end{cases} \\
 8) \begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x-y = 3; \end{cases} & 10) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4}{5}, \\ y-x = 4. \end{cases}
 \end{array}$$

24.62. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2; \end{cases} & 6) \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 14, \\ xy = -6; \end{cases} \\
 2) \begin{cases} xy + x + y = 11, \\ xy(x+y) = 30; \end{cases} & 7) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{10}, \\ xy = 50; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x - xy + y = 1; \end{cases} & 8) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{16}{15}, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases} \\
 4) \begin{cases} x - y = 2, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}; \end{cases} & 9) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases} \\
 5) \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases} & 10) \begin{cases} x^2 + 2xy = 5, \\ y^2 - 4xy = -4. \end{cases}
 \end{array}$$

24.63. Знайдіть координати точок перетину:

- 1) прямої $3x - y - 5 = 0$ і параболи $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$;
- 2) прямої $2x - 3y - 3 = 0$ і гіперболи $xy = 3$;
- 3) кола $x^2 + y^2 = 13$ і гіперболи $xy = 6$.

24.64. При якому значенні a має єдиний розв'язок система рівнянь:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = a; \end{cases} & 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ x + y = a? \end{cases}
 \end{array}$$

24.65. Діагональ прямокутника дорівнює 17 см, а його площа — 120 см². Знайдіть сторони прямокутника.

- 24.66.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 41 см, а його площа — 180 см^2 . Знайдіть катети трикутника.
- 24.67.** Із двох міст, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Через 2 год після початку руху відстань між автомобілями становила 40 км, причому зустріч автомобілів уже відбулася. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо весь шлях між містами один із них проїхав на годину швидше, ніж другий.
- 24.68.** Із двох сіл, відстань між якими дорівнює 20 км, вирушили одночасно назустріч один одному два пішоходи, які зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкість, з якою йшов кожний із них, якщо один пішохід долає відстань між селами на 1 год 40 хв швидше за другого.
- 24.69.** Із пунктів A і B одночасно назустріч один одному вирушили відповідно велосипедистка й пішохід, які зустрілися через 1 год після початку руху. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо велосипедистка прибула до пункту B на 2 год 40 хв раніше, ніж пішохід до пункту A , а відстань між цими пунктами становить 16 км.
- 24.70.** Із міста A до міста B одночасно вирушили автобус і автомобіль. Через 1 год 30 хв після початку руху автомобіль випереджав автобус на 30 км. Коли автомобіль прибув у місто B , автобус знаходився на відстані 80 км від цього міста. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість автомобіля, якщо відстань між містами A і B становить 300 км.
- 24.71.** До басейну підведено дві труби. Якщо відкрити обидві труби, то басейн буде наповнено водою за 1,5 год, а якщо половину басейну наповнити через одну трубу, а решту після цього — через другу, то басейн буде наповнено за 4 год. За який час можна наповнити басейн через кожну трубу?
- 24.72.** Двоє робітниць можуть виконати певне завдання за 9 год. Якби перша робітниця пропрацювала 1 год 12 хв, а потім друга — 2 год, то було б виконано 20 % завдання. За який час може виконати самостійно це завдання кожна робітниця?
- 24.73.** Човен проходить 15 км за течією річки за той самий час, що й 12 км проти течії. Чому дорівнює швидкість течії, якщо 1 км за течією і 1 км проти течії човен проходить за 27 хв?

- 24.74.** Велосипедист проїхав від села до залізничної станції по шосе завдовжки 10 км, а повернувся по ґрунтовій дорозі завдовжки 5 км, витративши на весь шлях 1 год 5 хв. Знайдіть швидкість руху велосипедиста по шосе та його швидкість руху по ґрунтовій дорозі, якщо на зворотний шлях він витратив на 15 хв менше, ніж на дорогу до станції.
- 24.75.** Із міст A і B , відстань між якими дорівнює 180 км, виїхали одночасно назустріч один одному автобус і вантажівка. Після їхньої зустрічі автобус, який виїхав з міста A , прибув у місто B через 1 год, а вантажівка прибула в місто A через 2 год 15 хв. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість вантажівки.
- 24.76.** Послідовність (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = n^2 - 4n + 4$. Знайдіть шість перших членів цієї послідовності. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 256; 2) 361; 3) 1000; 4) 10 000? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.
- 24.77.** Знайдіть кількість членів скінченної арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 4$, різниця прогресії $d = -5$, а останній член прогресії дорівнює -36 .
- 24.78.** Останній член арифметичної прогресії, яка містить 7 членів, дорівнює 29. Знайдіть перший член цієї прогресії, якщо її різниця дорівнює 3.
- 24.79.** Який номер має перший від'ємний член арифметичної прогресії 2; 1,9; 1,8; 1,7; ...?
- 24.80.** Які номери мають члени арифметичної прогресії 8, 11, 14, ..., які більші за 100, але менші від 200?
- 24.81.** Сума скількох перших членів арифметичної прогресії 105, 98, 91, ... дорівнює нулю?
- 24.82.** Знайдіть величини кутів опуклого чотирикутника, якщо вони утворюють арифметичну прогресію з різницею 54° .
- 24.83.** Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть катети трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 4 см.
- 24.84.** Відомо, що нескінченна послідовність $a_1, a_2, a_3, \dots$ є арифметичною прогресією з різницею $d \neq 0$. Чи є арифметичною прогресією послідовність:
- 1) $-a_2, -a_4, -a_6, -a_8, \dots$; 2) $a_1 + 5, a_2 + 5, a_3 + 5, \dots$;

- 3) $1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3, \dots$; 6) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \dots$;
4) $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$; 7) $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \dots$?
5) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$;

У разі ствердної відповіді вкажіть, чому дорівнює різниця прогресії.

24.85. Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 12, а сума їхніх квадратів дорівнює 80. Знайдіть ці числа.

24.86. Знайдіть суму n перших членів послідовності:

- 1) $\frac{a-1}{a}, \frac{a-3}{a}, \frac{a-5}{a}, \dots$;
2) $\frac{a-b}{a+b}, \frac{3a-b}{a+b}, \frac{5a-b}{a+b}, \dots$.

24.87. Третій член арифметичної прогресії дорівнює 11, а сьомий дорівнює 27. Скільки членів цієї прогресії потрібно взяти, щоб їхня сума дорівнювала 253?

24.88. Нехай S_n — сума n перших членів арифметичної прогресії (a_n) . Знайдіть перший член і різницю прогресії, якщо:

- 1) $a_3 + a_5 + a_8 = 18$ і $a_2 + a_4 = -2$;
2) $a_5 - a_3 = -4$ і $a_2 a_4 = -3$;
3) $a_2 + a_4 + a_6 = 36$ і $a_2 a_3 = 54$;
4) $S_5 - S_2 - a_5 = 0,1$ і $a_7 + S_4 = 0,1$;
5) $S_4 = 9$ і $S_6 = 22,5$.

24.89. Сума трьох перших членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює 3, сума чотирьох перших членів дорівнює 16, а сума всіх членів дорівнює 220. Знайдіть кількість членів цієї прогресії.

24.90. Чому дорівнює сума сімнадцяти перших членів арифметичної прогресії, якщо її дев'ятий член дорівнює 15?

24.91. Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, а його менший катет дорівнює a . Знайдіть площу трикутника.

24.92. Знайдіть суму двадцяти перших непарних чисел, при діленні яких на 3 остача дорівнює 1.

24.93. Чому дорівнює сума всіх двоцифрових чисел, які не діляться націло ні на 3, ні на 5?

24.94. Чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника утворювати геометричну прогресію? У разі ствердної відповіді знайдіть знаменник цієї прогресії.

24.95. Після двох послідовних знижень ціни на одну й ту саму кількість відсотків ціна каструлі знизилася з 300 грн до 192 грн. На скільки відсотків знижували кожного разу ціну?

24.96. Дано геометричну прогресію (b_n) зі знаменником q . Знайдіть:

1) b_1 , якщо $b_5 = -\frac{16}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$;

2) q , якщо $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_4 = \frac{9}{32}$;

3) суму семи перших членів прогресії, якщо $b_7 = 192$, $q = 2$;

4) суму п'яти перших членів прогресії, якщо $b_5 = 9\sqrt{6}$, $q = \sqrt{3}$.

24.97. Сума трьох перших членів геометричної прогресії, яка містить 6 членів, у 8 разів менша від суми трьох останніх. Чому дорівнює знаменник прогресії?

24.98. Знайдіть 4 числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо сума її крайніх членів дорівнює $\frac{35}{3}$, а сума середніх дорівнює 10.

24.99. Відомо, що нескінченна послідовність $b_1, b_2, b_3, \dots$ є геометричною прогресією зі знаменником $q \neq 1$. Чи є геометричною прогресією послідовність:

1) $b_2, b_4, b_6, \dots$;

2) $b_1 + 1, b_2 + 1, b_3 + 1, \dots$;

3) $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots$;

4) $-b_1, -b_3, -b_5, \dots$?

У разі ствердної відповіді вкажіть, чому дорівнює знаменник цієї прогресії.

ПРОЄКТНА РОБОТА

Ця рубрика адресована передусім тим, хто бажає навчитися самостійно здобувати знання, творчо мислити, формувати, висловлювати та відстоювати свою точку зору, висувати гіпотези, знаходити найбільш раціональні та нестандартні рішення.

Першим кроком, який може допомогти в досягненні цих цілей, є участь у проектній роботі.

Проект — це самостійне дослідження за вибраною темою, яке можна виконувати як індивідуально, так і в групі.

Дамо кілька порад щодо організації роботи над проектом та оформлення результатів дослідження.

1. Під час вибору теми потрібно враховувати її актуальність, наявність джерел інформації в літературі та інтернет-ресурсах. При цьому дуже важливе ваше бажання проявити себе дослідником / дослідницею в роботі саме над вибраною темою.
2. Роботу починають зі складання попереднього плану, у якому викладають задум та етапи реалізації задуманого. Після ознайомлення з основними джерелами інформації складають остаточний план за допомогою керівника / керівниці проекту.
3. Важливо чітко сформулювати цілі дослідження. Їх можна записати, наприклад, у такий спосіб: вивчити, описати, проаналізувати, довести, порівняти тощо.
4. Роботу завершують підбиттям підсумків дослідження, роблять висновки, накреслюють перспективи подальшого вивчення теми.
5. Приблизний обсяг роботи — 10–15 сторінок. Додатково можна навести ілюстративний матеріал.
6. Робота може бути оформлена у вигляді реферату, доповіді, комп'ютерної презентації.

Виконання проектної роботи в групах дуже корисне. Ви навчитесь працювати в команді, слухати інших, розв'язувати конфлікти та знаходити компроміси. Кожен і кожна із вас має свої сильні сторони, і робота в групі дозволяє обмінюватися знаннями та досвідом. Групове обговорення часто породжує більше ідей, ніж індивідуальна робота. У майбутньому вам доведеться працювати в командах, тому групові проекти допоможуть підготуватися до цього.

Рекомендації щодо виконання проєкту в групах

1. Розподіліть між собою чітко визначені ролі у проєкті (наприклад, дослідниця, організатор, презентерка тощо). Це допомагає уникнути хаосу та забезпечує рівну участь усіх учасників та учасниць групи.
2. Створіть графік виконання завдань, щоб уникнути затягування термінів. Визначте етапи роботи та дедлайни для кожного / кожної.
3. Налагодьте регулярну комунікацію між учасниками та учасницями групи. Використовуйте онлайн-платформи (наприклад, *Google Docs*, *Zoom*) для обговорення ідей та обміну матеріалами.
4. Усі учасники й учасниці групи повинні розуміти мету проєкту та прагнути до її досягнення. Це допомагає зберегти мотивацію.
5. Після завершення проєкту обговоріть, що вдалося, а що можна покращити. Це допоможе вам вчитися на власному досвіді.

Нижче наведено рекомендований список тем, які можна вибрати для проєктної роботи.

Теми проєктів з алгебри

1. Доведення нерівностей
2. Рівняння і нерівності, які містять знак модуля
3. Паралельне перенесення і задачі з параметрами
4. Перетворення графіків функцій
5. Дослідження квадратних рівнянь і нерівностей
6. Елементи фінансової математики: банківські депозити
7. Сумування
8. Комбінаторика: перестановки, розміщення, сполуки
9. Застосування правил комбінаторики для розв'язування задач з теорії ймовірностей

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

1.13. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) ні. 1.19. Значення дробу збільшиться. 1.20. Значення дробу зменшиться або не зміниться. 1.23. 1) Ні; 2) так. 1.25. 1) *Вказівка*. $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$. 1.27. Так.

2.18. 3) Порівняти неможливо. 2.24. 4) Якщо $c > 0$, то $c^2 > -4c$; якщо $-4 < c < 0$, то $c^2 < -4c$; якщо $c = 0$, то правильну нерівність отримати не можна. 2.27. 24.

3.15. 3) Ні; 4) ні; 5) ні; 6) так; 7) так; 8) ні; 9) так; 10) ні; 11) так; 12) ні.

4.19. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. 4.20. 1) Так; 2) ні. 4.22. 6 км.

5.26. 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; 1)$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $(1; +\infty)$; 7) $(-\infty; +\infty)$; 8) $\emptyset$. 5.27. 1) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$; 2) $\emptyset$; 3) $(-\infty; -6]$; 4) $(-\infty; +\infty)$.

5.28. 1) -8 ; 2) -1 . 5.29. 1) -6 ; 2) -3 . 5.30. 5 розв'язків.

5.31. 8 розв'язків. 5.34. 1) $a < -\frac{9}{4}$; 2) $a \leq 1,6$. 5.35. 1) $b < 3$;

2) $b < -\frac{1}{8}$. 5.36. 18 куль. 5.37. 44 вишні. 5.38. 21.

5.39. 1) При $-4 \leq x < 2$ і $x > 2$; 2) при $x < -4$ і $-4 < x \leq 3$; 3) при $-3 < x < -2$, $-2 < x < 2$ і $x > 2$; 4) при $-1 < x < 1$ і $x > 1$.

5.40. 1) При $x < -3$ і $-3 < x \leq 9$; 2) при $7 < x < 8$ і $x > 8$.

5.41. 1) 9; 2) -3 . 5.42. 1) $\frac{2}{3}$; 2) -2 ; 12. 5.47. 1) При $a > -1$

і $a \neq 0$; 2) при $a < \frac{9}{16}$ і $a \neq -1$. 5.48. При $a < -\frac{1}{12}$. 5.49. 12 км.

5.53. 15 год, 10 год.

6.24. 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4,2)$; 3) $[-0,8; +\infty)$; 4) $\frac{5}{7}$; 5) $\emptyset$.

6.25. 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\emptyset$; 4) $(-\infty; +\infty)$. 6.26. 1) -3 ;

-2 ; -1 ; 0 ; 2) 7; 8; 9; 10; 11. 6.27. 1) 4 розв'язки; 2) 6 розв'язків. 6.28. 1) $[2,5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{5}{3}; 3\right)$; 3) $\emptyset$; 4) $(-\infty; 4)$.

6.29. 1) $(0; 8]$; 2) $(5; +\infty)$. 6.30. 1) $(-0,5; 6,5)$; 2) $[14; 17]$.

6.31. 1) $[-1,5; 2,5)$; 2) $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. 6.32. 3 см, 5 см або 4 см, 4 см.

6.33. 1) При $a > 3$; 2) при $a \leq 3$. **6.34.** 1) При $a \leq 4$; 2) при $a > 1$. **6.35.** 1) При $a \leq -1$; 2) при $a = 1$. **6.36.** При $10 < a \leq 11$.

6.37. При $1 < b \leq 2$. **6.38.** При $a < 3$. **6.39.** При $-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$.

6.40. При $a < -7$ або $a > 8$. **6.41.** 1) -1 ; 2) -2 ; 4.

7.17. 2) Усі числа, крім 7 і -7 ; 4) усі числа, не менші від 4, крім числа 6. **7.27.** 20 %. **7.28.** 400 %. **7.30.** 60 км/год.

8.18. $a < \frac{1}{8}$. **8.19.** $a > 9$. **8.20.** 2. **8.21.** $m < -2$. **8.28.** 10 год,

40 год.

10.14. а) $y = x^2 + 3$; б) $y = -2x^2 - 1$. **10.15.** а) $y = 2x^2 - 6$; б) $y = 4 - x^2$. **10.16.** а) $y = (x - 2)^2$; б) $y = -3(x + 3)^2$. **10.17.** а) $y = \frac{1}{2}(x + 4)^2$; б) $y = -2(x - 1)^2$.

11.17. 1) 2 корені; 2) 1 корінь. **11.18.** 3 корені. **11.21.** 1) -25 ; 2) -13 ; 3) -22 . **11.22.** 1) 26; 2) 17; 3) -10 . **11.23.** $p = 1$, $q = 4$.

11.24. $a = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{7}{6}$. **11.25.** $a = 3$, $b = 5$. **11.28.** $b = -16$. **11.29.** $b = 18$.

11.30. $a \geq \frac{9}{2}$. **11.31.** $a < -16$. **11.32.** $c = -8$. **11.33.** $c = 14$.

11.34. а) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; б) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **11.36.** а) -4 ; б) 4. **11.37.** -1 . **11.42.** 1) $a > -4$; 2) $a = -4$; 3) $a < -4$. **11.44.** Через 1 год 30 хв. **11.45.** 1600 м^2 . **11.48.** 20 хв, 30 хв.

12.10. 1) $(-2; 1)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$; 3) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; 4) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right]$.

12.11. 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; -3)$; 3) $(-\infty; -10) \cup (1; +\infty)$.

12.12. 1) -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 ; 2) 0 . **12.13.** 1) 11; 2) 4.

12.14. 1) -6 ; 2) -2 . **12.15.** 1) 1; 2) -3 . **12.20.** 1) $-4 < a < 4$;

2) $-8 < a < 12$. **12.21.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ або $b > 1$; 2) $b < 4$ або $b > 10$.

12.22. 1) $(0; 3]$; 2) $[-4; -0,5] \cup [6; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \cup (6; 10]$;

4) $(-5; -3]$. **12.23.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0] \cup [5; 9)$.

12.24. 1) $(6; +\infty)$; 2) $(-\infty; -9) \cup (-9; -2] \cup [7; 9) \cup (9; +\infty)$.

12.25. 1) $[-2; 2)$; 2) $(-5; 6) \cup (6; 7)$. **12.26.** 1) $(-11; 11)$;

2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$. **12.27.** 1) $(-\infty; -1] \cup [-0,4; 0,4] \cup [1; +\infty)$;

2) $[-2; 2]$. **12.28.** 1) $(-4; -3) \cup (5; +\infty)$; 2) $[-4; -3] \cup [5; +\infty)$;

3) $(-\infty; -4)$; 4) $(-\infty; -4] \cup \{-3; 5\}$. **12.29.** 1) $(3; 7)$; 2) $[3; 7] \cup \{-2\}$;

3) $(-2; 3)$; 4) $[-2; 3] \cup \{7\}$. **12.30.** 1) При $a > 4$; 2) при $-1 \leq a \leq \frac{3}{5}$. **12.31.** 1) При $a \geq 9$; 2) при $3 \leq a \leq 7$.

13.3. 1) $(5; 8)$, $(-3; 0)$; 2) $(4; 1)$, $(1; 4)$; 3) $(-1; 1)$, $(-3; -1)$; 4) $(6; 1)$, $(-6; -2)$; 5) $(5; 3)$, $(-1,5; -10)$; 6) $(2; -2)$.

13.4. 1) $(-4; -7)$, $(7; 4)$; 2) $(2; 4)$, $(-5; -3)$; 3) $(-1; 4)$, $(-0,5; 2,5)$; 4) $(4; 2)$, $(20; -14)$. **13.5.** 1) 2 розв'язки; 2) 3 розв'язки;

3) 1 розв'язок; 4) 2 розв'язки; 5) розв'язків немає; 6) 3 розв'язки. **13.6.** 1) 3 розв'язки; 2) розв'язків немає; 3) 2 розв'язки; 4) 4 розв'язки. **13.7.** 1) $(4; 3)$; 2) $(4; -3)$, $(17; 10)$;

3) $(9; -4)$, $(4; 1)$; 4) $(2; 2,5)$, $(-4,4; -2,3)$. **13.8.** 1) $(6; 9)$, $(-9; -6)$;

2) $(1; 0)$, $(-0,5; 0,75)$; 3) $(2; 4)$, $(3; 3)$; 4) $(1; 1)$, $\left(\frac{17}{3}; \frac{38}{3}\right)$.

13.9. 1) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, $(-2; -7)$; 2) $(2; 2)$, $(-1; -4)$; 3) $(1; 0)$, $(5; -4)$;

4) $(2; 3)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{43}{9}\right)$. **13.10.** $(-4; -1)$. **13.11.** 2) $(0,5; 5,5)$; 3) $(-4; 52)$,

$(3; 3)$. **13.12.** 1) $(3; 4)$, $(4; 6)$; 2) $(-2; 1)$, $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$. **13.13.** 1) $(2; 1)$,

$\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) $(1; 5)$, $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$. **13.14.** 1) $(-5; 1)$, $(1; -5)$, $(4; 1)$,

$(1; 4)$; 2) $(5; -2)$, $\left(\frac{6}{7}; \frac{15}{7}\right)$; 3) $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$,

$(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; 4) $(2; 3)$; 5) $(-3; 3)$, $(3; -3)$; 6) $(2; 1)$, $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$.

13.15. 1) $(6; 3)$, $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) $(2; -1)$, $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$;

4) $(-2; 1)$, $\left(\frac{29}{28}; -\frac{3}{14}\right)$; **13.16.** 1) $(1; 0)$, $(0; 1)$; 2) $(3; -1)$, $(1; -3)$;

3) $(4; 3)$, $(-4; -3)$; 4) $(-3; 2)$, $(3; -2)$. **13.17.** 1) $(4; 2)$, $(-2; -4)$;

2) $(1; 3)$, $(-1; -3)$. **13.18.** 1) $(1; 2)$, $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$; 2) $(-7; -5)$,

$(4; 6)$; 3) $(-4; -3)$, $(-4; 2)$, $(3; -3)$, $(3; 2)$; 4) $(3; 1)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

13.19. 1) $(4; 1)$, $(1; 4)$; 2) $(1; -2)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$; 3) $(6; 5)$, $(-4; -5)$;

4) $(5; 4)$, $(-5; -4)$, $(5; -4)$, $(-5; 4)$. **13.20.** 1) $\left(7; \frac{1}{6}\right)$, $\left(1; \frac{7}{6}\right)$;

2) $(-2; 4)$, $(2; -4)$, $\left(\frac{94}{7}; -\frac{8}{7}\right)$, $\left(-\frac{94}{7}; \frac{8}{7}\right)$; 3) $(4; 3)$, $(3; 4)$, $(-4; -3)$, $(-3; -4)$. *Вказівка.* Помножте обидві частини другого рівняння на 2 і додайте до першого рівняння; 4) $(1; -1)$, $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$, $(-1; 1)$, $\left(\frac{1}{3}; -3\right)$. **13.21.** 1) $(2; 1)$, $(-5; -0,4)$; 2) $(4; 0)$;

3) $(1; 3)$, $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $(-1; -3)$; 4) $(-2; 2)$, $\left(-10; \frac{2}{5}\right)$, $(2; -2)$, $\left(10; -\frac{2}{5}\right)$. **13.22.** 1) $a = 3\sqrt{2}$ або $a = -3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$;

3) $a < -3\sqrt{2}$ або $a > 3\sqrt{2}$. **13.23.** 1) $k = 2$ або $k = -2$; 2) $k < -2$ або $k > 2$; 3) $-2 < k < 2$. **13.24.** 1) Якщо $a > 0$, то 2 розв'язки; якщо $a = 0$, то 1 розв'язок; якщо $a < 0$, то розв'язків немає; 2) якщо $-4 < a < 4$, то розв'язків немає; якщо $a = -4$ або $a = 4$, то 2 розв'язки; якщо $a < -4$ або $a > 4$, то 4 розв'язки.

13.25. 1) якщо $a > 3\sqrt{2}$ або $a < -3$, то розв'язків немає; якщо $a = 3\sqrt{2}$ або $-3 < a < 3$, то 2 розв'язки; якщо $3 < a < 3\sqrt{2}$, то 4 розв'язки; якщо $a = 3$, то 3 розв'язки; якщо $a = -3$, то 1 розв'язок; 2) якщо $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, то розв'язків немає; якщо $a = -2\sqrt{2}$ або $a = 2\sqrt{2}$, то 2 розв'язки; якщо $a < -2\sqrt{2}$ або $a > 2\sqrt{2}$, то 4 розв'язки. **13.26.** $a = -2$. *Вказівка.* Очевидно, що $a \neq 0$. Розгляньте систему, що складається з двох рівнянь $ax^2 + x + 1 = 0$ і $ax^2 + a^2x + a = 0$.

13.27. 5. **13.28.** 40. **13.30.** $7\frac{2}{17}$ динарія, $9\frac{14}{17}$ динарія. **13.31.** 72 км/год, 10 км/год.

14.1. 80 м, 30 м. **14.2.** 7 см, 9 см. **14.3.** 5 см, 12 см. **14.4.** 15 см, 17 см. **14.5.** 15 см і 12 см або 18 см і 10 см. **14.6.** 15 см, 6 см. **14.7.** 18 см, 12 см. **14.8.** 80 км/год, 60 км/год. **14.9.** 6 км/год, 9 км/год. **14.10.** 80 км/год, 60 км/год. **14.11.** 12 днів, 24 дні або 40 днів, 10 днів. **14.12.** 6 год, 12 год. **14.13.** 16 год, 48 год. **14.14.** 10 год, 15 год. **14.15.** 60 Ом, 90 Ом. **14.16.** 4 Ом, 6 Ом або 3,6 Ом, 7,2 Ом. **14.17.** 2 км/год. **14.18.** 27 км/год, 3 км/год. **14.19.** 15 Н, 20 Н. **14.20.** 60 км/год. **14.21.** 12 км/год. **14.22.** 24 км/год, 16 км/год. **14.23.** 50 км/год, 40 км/год. **14.24.** 2 км/год, 12 км/год. **14.26.** 3. **14.27.** $-0,5 \leq x \leq 2,4$.

14.28. 1) $(-\infty; -2,5]$; 2) $\left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$. **14.29.** 13 і 6 або 67 і 66.

15.14. 8 членів. 15.15. 13. 15.16. 1, 2, 3, 4, 5. 15.17. 8.
15.18. 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$.

15.19. 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. 15.22. 60 кг. 15.24.
2) $[-6; 1)$.

16.17. 1) Так, $n = 16$; 2) ні. 16.18. 15. 16.21. 23.
16.22. -6. 16.24. 18. 16.25. 16. 16.26. -0,6. 16.27. -6; -4,5;
-3; -1,5; 0; 1,5; 3. 16.28. 2,2; 0,4; -1,4; -3,2. 16.29. 1) $a_1 = 5$,
 $d = 2,5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ або $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$. 16.30. 1) $a_1 = -2$,
 $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ або $a_1 = 51,5$, $d = -11,5$. 16.32. 60° .
16.33. 1) Так, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) ні. 16.34. 1) Так, $a_1 = 13$,
 $d = 7$; 2) так, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 16.39. При $x = -1$ маємо: $a_1 = -3$,
 $a_2 = -2$, $a_3 = -1$; при $x = 8$ маємо: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$.
16.40. $y = 3$; $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. 16.44. 150 000 грн.
16.46. -4. 16.47. 1) $120\sqrt{2}$; 2) $150 - 30\sqrt{2}$.

17.9. 1) 204; 2) 570. 17.10. -310. 17.11. 1400. 17.12. 710.
17.13. 1188. 17.14. 8, 14, 20. 17.15. -17. 17.16. $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$,
20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. 17.17. 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2 . 17.18. $n(n+1)$.
17.19. 3. 17.20. -67,2. 17.21. 63. 17.22. 5880. 17.23. 2112.
17.24. 1632. 17.25. 61 376. 17.26. 70 336. 17.27. -1976.
17.28. 348. 17.29. 1) 12; 2) 26. 17.30. 1) 10; 2) 69. 17.31.
 $a_1 = 1$, $d = 2$. 17.33. $a_1 = -2$, $d = 2$. Вказівка. $a_n = S_n - S_{n-1}$.

17.36. 156 ударів. 17.37. 10 с. 17.40. 1) $\frac{a - \sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$; 2) $\frac{4\sqrt{d} - 28}{3\sqrt{d} + 18}$.

18.19. 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ або $-\frac{3}{5}$. 18.20. 1) $\frac{1}{7}$; 2) 0,001. 18.21. 6.
18.22. 9. 18.23. 30 і 150. 18.24. 1; 2; 4; 8. 18.25. 1) 15 або
-15; 2) $2\sqrt{5}$ або $-2\sqrt{5}$. 18.26. 2. 18.27. $\sqrt{2}$ або $-\sqrt{2}$.
18.28. 3) Послідовність є геометричною прогресією, якщо
 $q \neq -1$. 18.30. $P_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$. 18.31. 80, 40, 20, 10, 5 або 80, -40,
20, -10, 5. 18.32. 6, 18, 54, 162, 486 або 6, -18,
54, -162, 486. 18.33. 1) $b_1 = 2$, $q = 3$ або $b_1 = -2$, $q = -3$;

2) $b_1 = 7$, $q = -2$ або $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **18.34.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$;
 2) $b_1 = -1$, $q = 3$. **18.35.** При $x = 1$ маємо 3, 6, 12; при $x = -14$
 маємо -27, -9, -3. **18.36.** При $x = 2$ маємо 8, 4, 2; при $x = -7$
 маємо -1, -5, -25. **18.37.** 3, 7, 11. **18.38.** 8, 10, 12 або
 17, 10, 3. **18.39.** 6298,56 грн. **18.40.** 20 736 одиниць.
18.41. 3600 грн. **18.42.** 600 грн. **18.43.** 5 %. **18.44.** На 15 %.
18.45. 6 %. **18.46.** 10 %.

19.5. 1) 1456; 2) $155(5 + \sqrt{5})$. **19.8.** 762. **19.9.** 1210.
19.10. -68,2. **19.11.** 27. **19.12.** 5. **19.13.** $\frac{1}{3}$ або $-\frac{4}{3}$. **19.14.** -7
 або 6. **19.15.** 72. **19.16.** $\frac{9}{8}$. **19.19.** $(2^{72} - 1)$ бактерій.
19.20. 40 пістолів або 60 пістолів. **19.21.** 120 %. **19.23.**
 1) $\left[-\frac{18}{7}; 13\right]$; 2) $[-1; 4)$. **19.25.** 1) $b - 5a$; 2) $x + 2y$.

20.3. 9 маршрутів. **20.4.** 6 варіантів. **20.5.** 15 варіантів.
20.7. 70. **20.8.** 90. **20.9.** 1) 8; 2) 16. **20.10.** 1) 6; 2) 2. **20.11.**
 100. **20.12.** 20. **20.13.** 25. **20.14.** 6^3 . **20.15.** 16. **20.18.**
 $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$. **20.19.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$. **20.23.** 1) $(7; -1)$, $(11; -5)$;
 2) $(2; 2)$, $(2; -2)$, $(-2; 2)$, $(-2; -2)$.

21.13. $\approx 0,005$. **21.15.** Не можна. **21.17.** 8 разів. **21.18.** ≈ 28 .
21.24. При $k \leq 2,5$.

22.22. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{5}$. **22.24.** 10 куль. **22.25.** $\frac{2}{3}$. **22.26.** $\frac{2}{3}$.
22.28. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$. *Вказівка.* Сприятливі події визна-
 чено на рисунку на с. 265 зеленим кольором. **22.29.** 1) $\frac{2}{9}$;
 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Вказівка.* Кинути кубик двічі — це те саме,
 що незалежно один від одного кинути два кубики. Далі
 скористайтесь рисунком 22.2. **22.30.** В Ольги. **22.31.** 1) $\frac{1}{4}$;
 2) $\frac{1}{2}$. **22.32.** 1) $[-6; +\infty)$; 2) $(-3,5; +\infty)$. **22.33.** $p = -4$, $q = 9$.

		2-й раз					
		1	2	3	4	5	6
1-й раз	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

1)

		2-й раз					
		1	2	3	4	5	6
1-й раз	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

2)

		2-й раз					
		1	2	3	4	5	6
1-й раз	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

3)

До задачі 22.28

23.8. 1) 929 грн. **23.10.** Вибірка містила 100 сімей.
23.11. До вибірки увійшло 20 семикласників і семикласниць.
23.22. 1) $-5, -4, -3, -2, -1, 0$; 2) $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
23.23. 0,3. **23.24.** 6 або -6 .

24.17. 6. **24.24.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[2; 3]$; 3) $[-2; 16]$; 4) $(-4; 7]$.
24.25. 1) -9 ; 2) -2 . **24.27.** 2. **24.29.** 1) $a < 4$; 2) $a < 2$;
 3) $a \leq -3$; 4) $a \geq 1$. **24.30.** 1) $a \geq 6$; 2) $a \geq 5$; 3) $a > -8$;
 4) $a \leq 0$. **24.32.** $a < -1,5$ і $a \neq -2$. **24.33.** $a = 0$. **24.41.** 1) $b = 6$,
 $c = 9$; 2) $b = 0$, $c = 4$; 3) $b = -3$, $c = -10$. **24.44.** 3) $-2\sqrt{6}$ або
 $2\sqrt{6}$. **24.46.** $a = \frac{1}{3}$, $b = -4$, $c = 10$. **24.47.** $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$.
24.48. 1) 1; 2) -8 . **24.50.** 1. **24.51.** 10 при $a = 1$ і $b = 3$.
24.54. При $c > 0,1$. **24.58.** 1) $a \neq 4$; 2) $a < \frac{1}{2}$, або $\frac{1}{2} < a < 1$, або

$a > 13$; 3) $a < -1$, або $-\frac{1}{5} < a < 0$, або $a > 0$. **24.59.** 1) $a > \frac{1}{20}$;
 2) $a < -5$. **24.60.** 1) $(1; 4)$, $(-2; 7)$; 2) $(3; -4)$, $(4; -3)$; 3) $(2; 0)$,
 $(0; -4)$; 4) $(0; -5)$, $(3; 4)$, $(-3; 4)$. **24.61.** 1) $(-2; 1)$, $(-0,4; 1,4)$;
 2) $(-2; 4)$, $\left(\frac{14}{9}; -\frac{20}{3}\right)$; 3) $(3; 5)$, $(10; 1,5)$; 4) $(4; -3)$, $(2; -6)$;
 5) $(-5; 2)$; 6) $(3; 2)$, $(-2; -3)$; 7) $(2; -1)$, $(-1; 2)$; 8) $(1; -2)$, $(3; 0)$;
 9) $(8; 4)$, $(4; 8)$; 10) $(1; 5)$, $(-5; -1)$. **24.62.** 1) $(2; 1)$, $(-2; -1)$,
 $(1; 2)$, $(-1; -2)$; 2) $(5; 1)$, $(1; 5)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$; 3) $(2; 1)$, $(1; 2)$;
 4) $(6; 4)$, $\left(\frac{4}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; 5) $(4; 1)$, $\left(-\frac{1}{4}; 5\frac{1}{4}\right)$, $(-4; -1)$, $\left(\frac{1}{4}; -5\frac{1}{4}\right)$;
 6) $(3; -2)$, $(-3; 2)$; 7) $(5; 10)$, $(-10; -5)$; 8) $(5; 3)$, $(-5; -3)$;
 9) $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(-3; -4)$, $(-4; -3)$; 10) $(1; 2)$, $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $(-1; -2)$,
 $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **24.63.** 1) $(3; 4)$, $(4,5; 8,5)$; 2) $(3; 1)$, $(-1,5; -2)$; 3) $(3; 2)$,

- (2; 3), (-3; -2), (-2; -3). **24.64.** 1) $a = -1$; 2) $a = 2\sqrt{3}$ або $a = -2\sqrt{3}$.
24.65. 8 см, 15 см. **24.66.** 9 см, 40 см. **24.67.** 80 км/год, 60 км/год. **24.68.** 6 км/год, 4 км/год. **24.69.** 12 км/год, 4 км/год. **24.70.** 55 км/год, 75 км/год. **24.71.** 2 год, 6 год. **24.72.** 36 год, 12 год. **24.73.** 0,5 км/год. **24.74.** 15 км/год, 12 км/год. **24.75.** 72 км/год, 48 км/год. **24.78.** 11. **24.80.** 3 тридцять другого по шістдесят четвертий. **24.83.** 2,4 см, 3,2 см. **24.84.** 6) Так, $2d$; 7) так, $4d$. **24.85.** 0, 4, 8. **24.86.** 1) $\frac{n(a-n)}{a}$; 2) $\frac{n(na-b)}{a+b}$. **24.87.** 11. **24.88.** 1) $a_1 = -7$, $d = 3$; 2) $a_1 = 5$, $d = -2$ або $a_1 = 3$, $d = -2$; 3) $a_1 = d = 3$ або $a_1 = -33$, $d = 15$; 4) $a_1 = -0,7$, $d = 0,3$; 5) $a_1 = 0$, $d = 1,5$. **24.89.** 10. **24.90.** 255. **24.91.** $\frac{2a^2}{3}$. **24.92.** 1160. **24.93.** 2610.
Вказівка. Шукана сума $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$, де S_1 — сума всіх двоцифрових чисел; S_2 — сума двоцифрових чисел, які кратні 3; S_3 — сума двоцифрових чисел, які кратні 5; S_4 — сума двоцифрових чисел, які кратні 15. **24.94.** Так, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **24.95.** 20 %. **24.97.** 2. **24.98.** $2\frac{2}{3}$, 4, 6, 9. **24.99.** 3) Так, q^2 .

Відповіді та вказівки до вправ оповідання «Сумування» рубрики «Коли зроблено уроки»

1. $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5^n}$. 2. $n(n+1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$.
 3. 1) $\frac{10(10^n - 1)}{9} - n$; 2) $\frac{50(10^n - 1)}{81} - \frac{5n}{9}$. 5. 1) $\frac{n-1}{4n-3}$; 2) $\frac{n(n+2)}{n+1}$;
 3) $1 - \frac{1}{(n+1)!}$. *Вказівка.* $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; 4) $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.
Вказівка. $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. 6. 1) $\frac{n}{2(5n+2)}$; 2) $\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$.
Вказівка. $\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + n$. 7. $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$.

Вказівка. $\frac{1}{(n+1)^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$. 8. $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. *Вказівка.* $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$.

9. $S_n = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n - 1}{(a-1)^2}$. *Вказівка.* Розгляньте рівність $aS_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \dots + n \cdot a^n$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Номер завдання	Номер задачі														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Б	Г	Б	В	Б	А	В	Б	Г	Г	А	Г	Б	Б	1-Б; 2-А; 3-Г
2	Г	В	Б	Б	Г	Г	В	В	В	В	Г	А	В	А	1-А; 2-Б; 3-Д
3	В	А	В	Г	А	А	В	В	А	Б	Г	В	А	Г	1-Г; 2-В; 3-А
4	А	В	Б	В	Б	Г	Г	А	Б	Б	А	А	В	А	1-Б; 2-Б; 3-Г
5	В	А	Г	Г	В	А	Б	Б	В	Г	А	В	Б	Б	1-В; 2-Д; 3-Б

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- А**ргумент функції 64
- В**ибірка 224
— репрезентативна 224
- Відносна частота випадкової події 201
- Властивості числових нерівностей 14
- Г**рафічний метод розв'язування нерівностей 111
- Доведення нерівностей 8
- Е**лементарний наслідок 199
- З**наки нерівності 8
- Знаменник геометричної прогресії 167
- Значення функції 64
- М**атематична модель 130
- Математичне моделювання 130
- Медіана 231
- Межі значення величини 23
- Метод додавання 121
— заміни змінних 122
— підстановки 120
- Множина розв'язків нерівності 32
— — системи нерівностей 46
- Мода 229
- Н**ерівність лінійна з однією змінною 39
— нестрога 8
— строга 8
- Нерівності квадратні 111
— однакового знака 22
— протилежних знаків 22
— рівносильні 33
— числові 6
- Нуль функції 74
- О**б'єднання проміжків 111
- Область визначення виразу 46
— — функції 64
— значень функції 64
- Оцінювання значення виразу 23
- П**арабола 86
- Перетин проміжків 48
- Подія випадкова 200
— достовірна 211
— неможлива 211
— рівноймовірна 212
- Порівняння чисел 6
- Порожня множина 32
- Послідовність 143
— нескінченна 144
— скінченна 144
— числова 144
- Початкові умови 146
- Правило добутку 193
— суми 192
- Прикладна задача 130
- Прогресія арифметична 153
— геометрична 167
- Проміжок знакосталості функції 75
— зростання функції 75
— спадання функції 75
- Процентні пункти 178
- Р**ізниця арифметичної прогресії 154
- Розв'язок нерівності з однією змінною 32

- системи нерівностей з однією змінною 46
- Середнє геометричне** 9
- Середнє значення** 227
- Система нерівностей** 46
- Спосіб задання послідовності**
 - описовий 144
 - — — рекурентний 146
 - — функції аналітичний 65
- Статистика** 223
- Сумування перших n членів послідовності** 184
- Формула рекурентна** 146
 - складних відсотків 172
 - суми n перших членів арифметичної прогресії 161
 - — — — — геометричної прогресії 180
 - n -го члена арифметичної прогресії 155
 - — — геометричної прогресії 169
 - — — послідовності 145
- Функція** 63
 - зростаюча 75
 - — на проміжку 76
 - квадратична 97
 - спадна 75
 - — на проміжку 76
- Числова пряма** 39
- Числовий проміжок** 36
- Член послідовності** 143

ЗМІСТ

<i>Від авторів</i>	3
<i>Умовні позначення</i>	5
§ 1. Нерівності.....	6
1. Числові нерівності.....	6
2. Основні властивості числових нерівностей.....	14
3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу	21
• Про деякі способи доведення нерівностей	29
4. Нерівності з однією змінною.....	32
5. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки.....	36
6. Системи лінійних нерівностей з однією змінною.....	46
<i>Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	57
<i>Готуємося до перевірки знань.....</i>	60
<i>Головне в параграфі 1</i>	61
§ 2. Квадратична функція.....	63
7. Повторення та розширення відомостей про функцію ...	63
• З історії розвитку поняття функції	71
8. Властивості функції.....	73
9. Побудова графіка функції $y = ax^2$	83
10. Побудова графіків функцій $y = x^2 + b$ і $y = (x + a)^2$	89
11. Квадратична функція, її графік і властивості.....	97
• Про деякі перетворення графіків функцій	107
<i>Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	108
<i>Готуємося до перевірки знань.....</i>	110
12. Розв'язування квадратних нерівностей	111
• Софі Жермен: жінка, яка підкорила математику	118
13. Системи рівнянь із двома змінними	119
• Перша Всеукраїнська олімпіада юних математиків	128
14. Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель прикладної задачі	130
• Наші розумниці	136

<i>Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	<i>138</i>
<i>Готуємося до перевірки знань.....</i>	<i>141</i>
<i>Головне в параграфі 2</i>	<i>141</i>
§ 3. Числові послідовності.....	143
15. Числові послідовності.....	143
• Про кролів, соняшники, соснові шишки та золотий переріз	150
16. Арифметична прогресія	153
17. Сума n перших членів арифметичної прогресії	160
18. Геометрична прогресія	167
• Як уникнути неоднозначності в задачах на відсотковій розрахунки	177
19. Сума n перших членів геометричної прогресії	178
• Сумування	183
<i>Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	<i>187</i>
<i>Готуємося до перевірки знань.....</i>	<i>190</i>
<i>Головне в параграфі 3</i>	<i>190</i>
§ 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики	192
20. Основні правила комбінаторики	192
21. Частота та ймовірність випадкової події.....	198
22. Класичне визначення ймовірності.....	211
• Спочатку була гра	220
23. Початкові відомості про статистику	223
<i>Завдання № 5 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	<i>239</i>
<i>Готуємося до перевірки знань.....</i>	<i>241</i>
<i>Головне в параграфі 4</i>	<i>242</i>
Вправи для повторення курсу алгебри 9 класу	244
<i>Проектна робота</i>	<i>257</i>
<i>Відповіді та вказівки до вправ</i>	<i>259</i>
<i>Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	<i>267</i>
<i>Предметний покажчик</i>	<i>268</i>

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

*У підручнику з навчальною метою використано фотоматеріали,
розміщені у вільному доступі в мережі «Інтернет»,
зокрема сайтів uk.wikipedia.org, depositphotos.com,
а також з особистих архівів авторів.*

Головна редакторка *Т. Г. Левченко*
Редакторка *М. В. Москаленко*
Обкладинка *Н. О. Мінеєва*
Технічна редакторка *О. В. Гулькевич*
Комп'ютерне верстання,
художнє оформлення *С. І. Северин*
Коректорка *А. Ю. Венза*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 17,00. Обл.-вид. арк. 15,13.
Тираж 0000 прим. Зам. №

ТОВ ТО «Гімназія», вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua, www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано в друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003