

Аркадій Мерзляк
Михайло Якір

ГЕОМЕТРІЯ 9



Аркадій **Мерзляк**
Михайло **Якір**

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

Інтерактивний електронний додаток до підручника:

<https://qrua.xyz/geom9>



*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Харків
«Гімназія»
2026

УДК 373.167.1:514
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 27.01.2026 № 110)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає модельній навчальній програмі
«Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П.,
Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 9 кл. закладів заг. серед.
освіти / А. Г. Мерзляк, М. С. Якір. — Х. : Гімна-
зія, 2026. — 272 с. : іл.
ISBN 978-966-474-395-9.

УДК 373.167.1:514

ISBN 978-966-474-395-9

© А. Г. Мерзляк, М. С. Якір, 2026
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-ма-
кет, художнє оформлення, 2026

ВІД АВТОРІВ

Любі дев'ятикласники та дев'ятикласниці!

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу і красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, *жирним курсивом* і *курсивом*; так у книжці виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, що позначено «зірочкою» (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі, розміщені в кінці кожного параграфа. Також там розміщені добірки задач, які допоможуть вам у підготовці до перевірки знань.

У рубриці «Говоримо та пишемо українською правильно» наведено приклади правильної математичної мови.

Частина пунктів підручника завершується рубрикою «Рисуйте, конструйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили! У цій рубриці також подано оповідання з історії геометрії, зокрема про внесок української ученої спільноти в розвиток цієї науки.

Бажаємо успіху!

Шановні колеги та колежанки!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книжці дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Блакитним кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **пурпуровим** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

У деяких пунктах частину тексту **розміщено на зеленому фоні**. Так виокремлено матеріал, який на ваш розсуд можна віднести до необов'язкового для вивчення. Доведення теорем позначено точкою (⊙), двома точками (⊘) або зірочкою (⊛) відповідно до рівня складності. Із доведеннями деяких фактів можна ознайомитися, перейшовши за відповідними QR-кодами.

Вправи або завдання, позначені піктограмою , на ваш розсуд можна використовувати для роботи в парах або групах.

Підручник підтримано інтерактивним електронним додатком, перехід до частин якого забезпечують QR-коди біля заголовків відповідних пунктів, а також біля завдань «Перевірте себе» в тестовій формі» (два QR-коди на два варіанти підсумкових завдань). В електронному додатку є рубрика «Жива Геометрія», яка допомагає учням візуалізувати роботу з вивчення властивостей геометричних фігур. Це робить навчання більш цікавим і ефективним. Відповідні місця в підручнику позначено піктограмою .

Поновити в пам'яті матеріал, вивчений у попередні роки, допоможуть посилання на підручники в електронному вигляді або QR-коди:

- 7 клас: <https://qrua.xyz/jtjq0m>

- 8 клас: <https://books.gymnasia.com.ua/qr/a1cbtc>

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.



Умовні позначення

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\cdot}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
n^{**}	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^*	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;
	закінчення доведення теореми;
	закінчення розв'язання задачі;
	запитання для самоперевірки;
	рубрика «Практичні завдання»;
	рубрика «Вправи»;
	домашня практична робота;
	вправи для роботи в парах або групах;
	рубрика «Вправи для повторення»;
	рубрика «Рисуйте, конструйте, фантазуйте»;
	рубрика «Учимося застосовувати геометрію»;
	рубрика «Готуємося до вивчення нової теми»;
	рубрика «Говоримо та пишемо українською правильно»;
	рубрика «Коли зроблено уроки»;
	завдання «Перевірте себе» в тестовій формі»;
	завдання «Готуємося до перевірки знань»;
	рубрика «Головне в параграфі»;
	інтерактивні ілюстрації «Жива Геометрія»;
	QR-код для переходу до інтерактивного електронного додатка.

Рівні відрізки на кресленнях позначено однаковою кількістю рисочок, рівні кути — однаковою кількістю дужок, за винятком відрізків і кутів, які треба знайти.



РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У цьому параграфі ви дізнаєтеся, що являють собою синус, косинус і тангенс кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Ви навчитеся за двома сторонами трикутника та кутом між ними знаходити третю сторону, а також за стороною та двома прилеглими до неї кутами знаходити дві інші сторони трикутника.

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Вивчивши матеріал цього параграфа, ви зможете розв'язувати будь-які трикутники.

Ви дізнаєтеся про нові формули, за допомогою яких можна знаходити площу трикутника.

1. Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°



Перед вивченням цього пункту радимо повторити зміст п. 17 із підручника «Геометрія. 8 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

Поняття синуса, косинуса і тангенса гострого кута вам знайомі з курсу геометрії 8 класу. У фізиці, інженерії та навігації часто використовують кути, більші за 90° . Щоб моделювати реальні процеси, потрібно вміти працювати з такими кутами, тому розширимо ці поняття для будь-якого кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

У верхній півплощині координатної площини розглянемо півколо із центром у початку координат, радіус якого дорівнює 1 (рис. 1.1). Таке півколо називають **одиничним**.

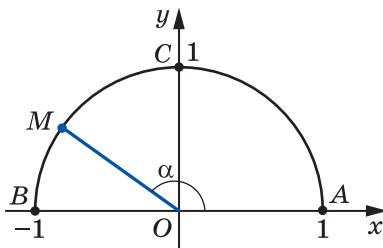


Рис. 1.1

Будемо говорити, що куту α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) відповідає точка M одиничного півкола, якщо $\angle MOA = \alpha$, де точки O і A мають відповідно координати $(0; 0)$ і $(1; 0)$ (рис. 1.1). Наприклад, на рисунку 1.1 куту, який дорівнює 90° , відповідає точка C ; куту, який дорівнює 180° , — точка B ; куту, який дорівнює 0° , — точка A .

Нехай α — гострий кут. Йому відповідає деяка точка $M(x; y)$ дуги AC одиничного півкола (рис. 1.2). У прямокутному трикутнику OMN маємо:

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM},$$

$$\sin \alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Оскільки $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то

$$\cos \alpha = x, \sin \alpha = y.$$

Отже, косинус і синус гострого кута α , якому відповідає точка M одиничного півкола, — це відповідно абсциса й ордината точки M .

Отриманий результат підказує, як означити синус і косинус довільного кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

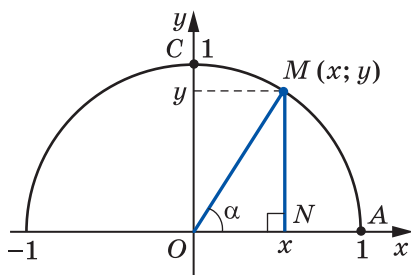


Рис. 1.2

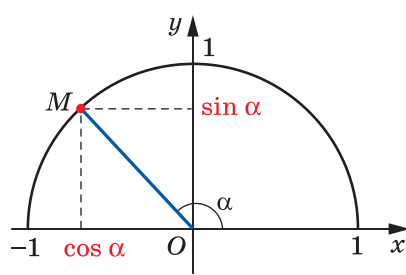


Рис. 1.3



Означення:

Косинусом і синусом кута α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), якому відповідає точка M одиничного півкола, називають відповідно абсцису й ординату точки M (рис. 1.3).

Користуючись цим означенням, можна, наприклад, установити, що $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$.

Якщо $M(x; y)$ — довільна точка одиничного півкола, то $-1 \leq x \leq 1$ і $0 \leq y \leq 1$. Отже, для будь-якого кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, маємо:

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1,$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Якщо α — тупий кут, то абсциса точки, що відповідає цьому куту, є від'ємною. Отже, косинус тупого кута є від'ємним числом. Справедливе й таке твердження: якщо $\cos \alpha < 0$, то α — тупий або розгорнутий кут.

Із курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що для будь-якого гострого кута α виконуються рівності:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

Ці формули залишаються справедливими також для $\alpha = 0^\circ$ і для $\alpha = 90^\circ$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай кутам α і $180^\circ - \alpha$, де $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$ і $\alpha \neq 180^\circ$, відповідають точки $M(x_1; y_1)$ і $N(x_2; y_2)$ одиничного півкола (рис. 1.4).

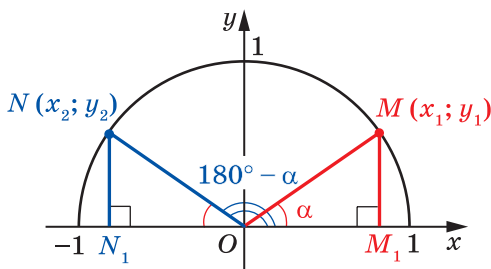


Рис. 1.4

Прямокутні трикутники OMM_1 і ONN_1 рівні за гіпотенузою та гострим кутом ($OM = ON = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Звідси $y_2 = y_1$ і $x_2 = -x_1$. Отже,

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \end{aligned}$$

Переконайтеся самостійно, що ці рівності залишаються правильними для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.

Якщо α — гострий кут, то, як ви знаєте з курсу геометрії 8 класу, є справедливою тотожність, яку називають **основною тригонометричною тотожністю**:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Ця рівність залишається правильною для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай α — тупий кут. Тоді кут $180^\circ - \alpha$ є гострим. Маємо:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= (\sin (180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos (180^\circ - \alpha))^2 = \\ &= \sin^2 (180^\circ - \alpha) + \cos^2 (180^\circ - \alpha) = 1.\end{aligned}$$

Отже, рівність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ виконується для всіх $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Означення:

Тангенсом кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ і $\alpha \neq 90^\circ$, називають

відношення $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, тобто

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Оскільки $\cos 90^\circ = 0$, то $\operatorname{tg} \alpha$ не визначений для $\alpha = 90^\circ$.

Очевидно, що кожному куту α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) відповідає *єдина* точка одиничного півкола. Отже, кожному куту α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90^\circ$). Тому залежність значення синуса (косинуса, тангенса) від величини кута є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin \alpha$, $g(\alpha) = \cos \alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями кута α** .

ЖГ2 Як змінюється значення тригонометричних функцій синус і косинус залежно від значень кута можна подивитися, перейшовши за QR-кодом.





ЗАДАЧА 1. Доведіть, що $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Розв'язання.

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha. \blacktriangleleft$$

ЗАДАЧА 2. Знайдіть $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ$.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}. \blacktriangleleft$$



1. Яке півколо називають одиничним? **2.** Поясніть, у якому разі говорять, що куту α відповідає точка M одиничного півкола. **3.** Що називають синусом кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$? **4.** Що називають косинусом кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$? **5.** Чому дорівнює $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\sin 180^\circ$, $\cos 180^\circ$? **6.** У яких межах знаходяться значення $\sin \alpha$, якщо $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$? **7.** У яких межах знаходяться значення $\cos \alpha$, якщо $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$? **8.** Яким числом — додатним чи від'ємним — є синус гострого кута? синус тупого кута? косинус гострого кута? косинус тупого кута? **9.** Яким кутом є кут α , якщо $\cos \alpha < 0$? **10.** Чому дорівнює $\sin(180^\circ - \alpha)$? $\cos(180^\circ - \alpha)$? **11.** Як пов'язані між собою синус і косинус одного й того самого кута? **12.** Що називають тангенсом кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ і $\alpha \neq 90^\circ$? **13.** Чому $\operatorname{tg} \alpha$ не визначений для $\alpha = 90^\circ$? **14.** Яку загальну назву мають функції $f(\alpha) = \sin \alpha$, $g(\alpha) = \cos \alpha$ і $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.1.° Накресліть одиничне півколо, узявши за одиничний такий відрізок, довжина якого в **5 разів більша за сторону клітинки зошита**. Побудуйте кут, вершиною якого є початок координат, а однією зі сторін — додатна піввісь осі абсцис:

1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{5}$;

2) косинус якого дорівнює $-0,4$;

- 3) синус якого дорівнює 0,6;
- 4) синус якого дорівнює 1;
- 5) косинус якого дорівнює 0;
- 6) косинус якого дорівнює -1 .

1.2.° Накресліть одиничне півколо, узявши за одиничний такий відрізок, довжина якого в 6 разів більша за сторону клітинки зошита. Побудуйте кут, вершиною якого є початок координат, а однією зі сторін — додатна піввісь осі абсцис:

- 1) синус якого дорівнює $\frac{1}{3}$;
- 2) косинус якого дорівнює $\frac{1}{6}$;
- 3) косинус якого дорівнює $-\frac{2}{3}$.

1.3.° Накресліть одиничне півколо і позначте на ньому точки, що відповідають кутам, сума синуса і косинуса яких дорівнює нулю. Як ви думаєте, скільки існує таких точок?

Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.



ВПРАВИ

1.4.° Чи може синус кута α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, дорівнювати числу:

- 1) $\frac{1}{2}$;
- 2) 0,3;
- 3) $-0,4$;
- 4) 1,001?

1.5.° Як ви думаєте, чи може косинус тупого кута дорівнювати числу:

- 1) 0,7;
- 2) $-\frac{5}{6}$;
- 3) $-1,1$;
- 4) $-0,99$?

Обговоріть свої відповіді у класі.

1.6.° Яким кутом, гострим чи тупим, є кут α , якщо:

- 1) $\cos \alpha = 0,24$;
- 3) $\sin \alpha = \frac{6}{11}$;
- 5) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$;
- 2) $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$;
- 4) $\operatorname{tg} \alpha = -5$;
- 6) $\sin \alpha = 0,1$?

1.7.° Як ви думаєте, чи існує трикутник:

- 1) синуси двох кутів якого дорівнюють 1;
- 2) синус одного з кутів дорівнює 1;
- 3) косинус кута якого дорівнює 1 або -1 ;
- 4) косинус кута якого від'ємний?

Обговоріть ваші відповіді у класі.

1.8.° Відомо, що $\sin A = 0,9$, $\cos B = \frac{2}{9}$, $\operatorname{tg} C = -0,48$,

$\operatorname{tg} D = 10$, $\sin E = \frac{3}{4}$, $\cos F = -0,36$. Заповніть таблицю:

	Вид кутів		
	Гострі	Тупі	Встановити неможливо
Назви кутів			

1.9.° Чи є правильною рівність:

- 1) $\sin 170^\circ = \sin 10^\circ$;
- 2) $\sin 40^\circ = -\sin 140^\circ$;
- 3) $\cos 105^\circ = \cos 75^\circ$;
- 4) $\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ$;
- 5) $\operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{tg} 175^\circ$;
- 6) $\operatorname{tg} 178^\circ = -\operatorname{tg} 2^\circ$?

1.10.° Скориставшись формулою $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, виразіть через синус гострого кута синус кута: 1) 145° ; 2) 92° ; 3) 171° .

1.11.° Виразіть через синус гострого кута синус кута: 1) 112° ; 2) 125° ; 3) 159° .

1.12.° Виразіть через косинус гострого кута косинус кута: 1) 100° ; 2) 136° ; 3) 163° .

Як ви думаєте, якою формулою треба скористатися для розв'язання цієї задачі?

1.13.° Виразіть через косинус гострого кута косинус кута: 1) 160° ; 2) 104° ; 3) 141° .

1.14.° Чому дорівнює:

- 1) $\sin(180^\circ - \alpha)$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{3}$;
- 2) $\cos(180^\circ - \alpha)$, якщо $\cos \alpha = 0,7$;
- 3) $\cos(180^\circ - \alpha)$, якщо $\cos \alpha = -\frac{4}{9}$;
- 4) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -5$?

1.15.° Кути α і β суміжні, $\cos \alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Знайдіть $\cos \beta$.

2) Який із кутів α і β є гострим, а який — тупим?

1.16.° Знайдіть значення виразу:

1) $2 \sin 90^\circ + 3 \cos 0^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 23^\circ \cdot \operatorname{tg} 0^\circ \cdot \operatorname{tg} 106^\circ$;

2) $3 \sin 0^\circ - 5 \cos 180^\circ$;

4) $\cos^2 165^\circ + \sin^2 165^\circ$.



1.17.° Обчисліть:

1) $6 \operatorname{tg} 180^\circ + 5 \sin 180^\circ$;

4) $-\cos^2 126^\circ - \sin^2 126^\circ$;

2) $4 \cos 90^\circ + 2 \cos 180^\circ$;

5) $\frac{\sin 0^\circ + \sin 90^\circ}{\cos 0^\circ - \cos 90^\circ}$.

3) $\cos 0^\circ - \cos 180^\circ + \sin 90^\circ$;

Використовуючи знайдені значення виразів, розшифруйте назву українського музичного інструмента. Номер завдання відповідає місцю, на якому стоїть буква у слові.

Відповідь	-2	3	1	-1	0
Буква	О	Б	А	З	К



Знайдіть в інтернеті інформацію про цей інструмент, його історію, зокрема про його популярність серед українського козацтва.

1.18.° Чому дорівнює синус кута, якщо його косинус дорівнює: 1) 1; 2) 0?

1.19.° Чому дорівнює косинус кута, якщо його синус дорівнює: 1) 1; 2) 0?

1.20.° Знайдіть $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$.

1.21.° Знайдіть $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$.

1.22.° Знайдіть кути рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$),

якщо $\cos C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.23.° Знайдіть кути паралелограма $ABCD$, якщо $\operatorname{tg} B = -1$.

1.24.* Знайдіть:

1) $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ і $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$;

2) $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$;

- 3) $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;
4) $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,8$;
5) $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ і $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

1.25.* Знайдіть:

- 1) $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{5}{13}$;
2) $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{6}$;
3) $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ і $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

1.26.* Як ви вважаєте, чи є правильним твердження:

- 1) косинус гострого кута більший за косинус тупого кута;
 - 2) існує тупий кут, синус і косинус якого рівні;
 - 3) існує кут, синус і косинус якого дорівнюють нулю;
 - 4) синус кута, відмінного від прямого, менший від синуса прямого кута;
 - 5) косинус розгорнутого кута менший від косинуса кута, відмінного від розгорнутого;
 - 6) синуси суміжних кутів рівні;
 - 7) косинуси нерівних суміжних кутів є протилежними числами;
 - 8) якщо косинуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
 - 9) якщо синуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
 - 10) тангенс гострого кута більший за тангенс тупого кута?
- Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

1.27.* Як ви думаєте, чи можуть косинуси двох кутів трикутника дорівнювати від'ємним числам? Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

1.28.* Порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $\sin 110^\circ \cos 140^\circ$;
- 2) $\sin 80^\circ \cos 100^\circ \cos 148^\circ$;
- 3) $\sin 128^\circ \cos^2 130^\circ \operatorname{tg} 92^\circ$;
- 4) $\sin 70^\circ \cos 90^\circ \operatorname{tg} 104^\circ$.

1.29.* Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 95^\circ \sin 180^\circ \cos 105^\circ$; 2) $\sin 138^\circ \cos 54^\circ \operatorname{tg} 124^\circ$.

1.30.* Знайдіть значення виразу:

1) $2 \sin 120^\circ + 4 \cos 150^\circ - 2 \operatorname{tg} 135^\circ$;
2) $2 \cos^2 120^\circ - 8 \sin^2 150^\circ + 3 \cos 90^\circ \cos 162^\circ$;
3) $\cos 180^\circ (\sin 135^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \cos 135^\circ)^2$.

1.31.* Чому дорівнює значення виразу:

1) $2 \sin 150^\circ - 4 \cos 120^\circ$;
2) $\sin 90^\circ (\operatorname{tg} 150^\circ \cos 135^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ \cos 135^\circ)^2$

 **1.32.*** Знайдіть значення виразу, не користуючись калькулятором:

1) $\frac{\sin 18^\circ}{\sin 162^\circ}$; 2) $\frac{\cos 18^\circ}{\cos 162^\circ}$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 18^\circ}{\operatorname{tg} 162^\circ}$.

1.33.* Знайдіть значення виразу, не користуючись калькулятором:

1) $\frac{\sin 28^\circ}{\sin 152^\circ}$; 2) $\frac{\cos 49^\circ}{\cos 131^\circ}$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 14^\circ}{\operatorname{tg} 166^\circ}$.

1.34.* Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\cos B = 0$,
 $\sin C = \frac{1}{2}$.

1.35.* Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Обговоріть з однокласниками й однокласницями, скільки розв'язків має задача.

1.36.* Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} C = 1$.

1.37.* Знайдіть суму квадратів синусів усіх кутів прямокутного трикутника.

1.38.* Знайдіть суму квадратів косинусів усіх кутів прямокутного трикутника.

1.39.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 60^\circ$, точка O — центр вписаного кола. Чому дорівнює косинус кута AOC ?

1.40.* Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC ,
 $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут A трикутника.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

- 1.41. Довжина торговельного залу дорівнює 17 м, а ширина — 9 м. На стелі залу розташували два ряди електричних світильників, які мають форму прямокутників завдовжки 2 м і завширшки 1,2 м. На рисунку 1.5 частково наведена схема розташування світильників, які зображено у вигляді прямокутників блакитного кольору. Скільки світильників розташували на стелі залу?

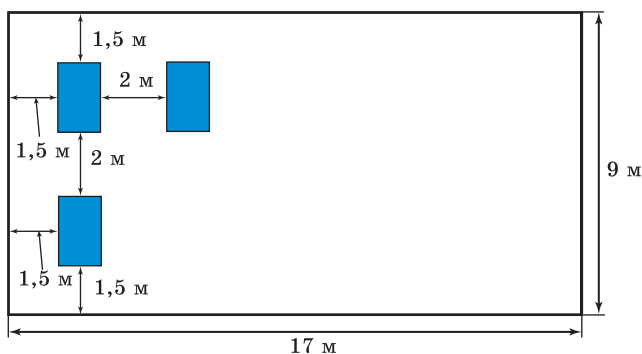


Рис. 1.5

- 1.42. Дах будинку з мансардою має два схили завдовжки 6 м, кут нахилу яких дорівнює 50° (рис. 1.6). Два інших схили завдовжки 4 м утворюють між собою на конику даху кут величиною 120° . Висота стін будинку дорівнює 4 м. Скільки метрів становить: 1) ширина фасаду будинку; 2) відстань від землі до коника даху? Відповідь округліть до десятих.

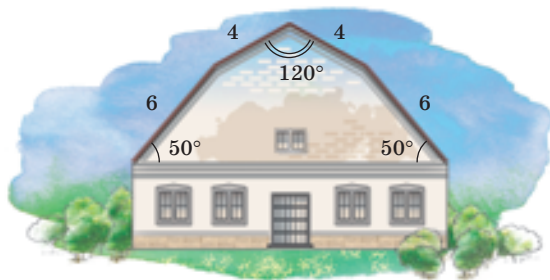


Рис. 1.6



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 1.43. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 5 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Гострий кут паралелограма дорівнює 30° . Знайдіть діагональ паралелограма, проведену з вершини тупого кута, і кути, які вона утворює зі сторонами паралелограма.
- 1.44. Пряма CE паралельна бічній стороні AB трапеції $ABCD$ і ділить основу AD на відрізки AE і DE такі, що $AE = 7$ см, $DE = 10$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 18 із підручника «Геометрія. 8 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

- 1.45. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 11 см. Чи може кут, протилежний стороні завдовжки 8 см, бути: 1) тупим; 2) прямим? Відповідь обґрунтуйте.
- 1.46. У трикутнику ABC проведено висоту BD , $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AB = 10$ см. Знайдіть сторону BC .
- 1.47. Знайдіть висоту BD трикутника ABC і проєкцію сторони AB на пряму AC , якщо $\angle BAC = 150^\circ$, $AB = 12$ см.



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 1.48. Покажіть, що будь-який трикутник можна розрізати на 3 частини так, що з отриманих частин можна скласти прямокутник.

2. Теорема косинусів



Із першої ознаки рівності трикутників випливає, що дві сторони та кут між ними однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна, наприклад, знайти третю сторону трикутника. Такі розрахунки часто використовують на практиці, зокрема під час вимірювання відстаней на місцевості або проектування споруд, коли

доступ безпосередньо до всіх точок обмежених. І це лише кілька прикладів — подібні задачі трапляються у найрізноманітніших сферах. Як це зробити, показує така теорема.

Теорема 2.1 (теорема косинусів):

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.

Доведення. ☺ Розглянемо трикутник ABC . Доведемо, наприклад, що

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Можливі три випадки:

- 1) кут A гострий;
- 2) кут A тупий;
- 3) кут A прямий.

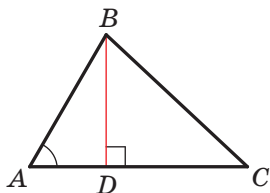


Рис. 2.1

Перший випадок. Нехай кут A гострий. Тоді хоча б один із кутів B або C є гострим.

Нехай $\angle C < 90^\circ$. Проведемо висоту BD . Вона повністю належатиме трикутнику ABC (рис. 2.1).

У прямокутному трикутнику ABD :

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

$$\begin{aligned} \text{У прямокутному трикутнику } BDC: BC^2 &= BD^2 + CD^2 = \\ &= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A = \\ &= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A. \end{aligned}$$

Нехай $\angle B < 90^\circ$. Проведемо висоту трикутника ABC із вершини C . Вона повністю належатиме трикутнику ABC . Доведення для цього випадку аналогічне розглянутому. Проведіть його самостійно.

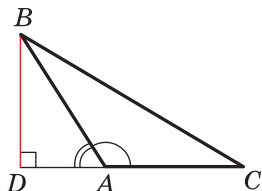


Рис. 2.2

Другий випадок. Нехай кут A тупий. Проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 2.2).

У прямокутному трикутнику ABD :

$$BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$$

$$= AB \cdot \sin(180^\circ - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180^\circ - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

$$\begin{aligned} \text{У прямокутному трикутнику } BDC: BC^2 &= BD^2 + CD^2 = \\ &= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC. \end{aligned}$$

Третій випадок. Нехай кут A прямий (рис. 2.3). Тоді $\cos A = 0$. Треба довести, що $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Ця рівність випливає з теореми Піфагора для трикутника ABC . ●

Доведення теореми косинусів показує, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів, а теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.

Якщо скористатися позначеннями для довжин сторін і величин кутів трикутника ABC (див. форзац на початку підручника), то, наприклад, для сторони, довжина якої дорівнює a , можна записати:

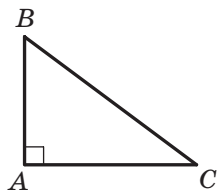


Рис. 2.3

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

За допомогою теореми косинусів, знаючи три сторони трикутника, можна визначити, чи є він гострокутним, тупокутним або прямокутним.

Теорема 2.2 (наслідок з теореми косинусів):

Нехай a, b і c — довжини сторін трикутника, причому a — довжина його найбільшої сторони.

Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним.

Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним.

Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.

Доведення. ☺ Нехай кут, протилежний найбільшій стороні даного трикутника, дорівнює α .

За теоремою косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Звідси $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Нехай $a^2 < b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Звідси $2bc \cos \alpha > 0$, тобто $\cos \alpha > 0$. Тому кут α гострий.

Оскільки a — довжина найбільшої сторони трикутника, то проти цієї сторони лежить найбільший кут, який, як

ми довели, є гострим. Отже, у цьому випадку трикутник є гострокутним.

Нехай $a^2 > b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Звідси $2bc \cos \alpha < 0$, тобто $\cos \alpha < 0$. Тому кут α тупий. Отже, у цьому випадку трикутник є тупокутним.

Нехай $a^2 = b^2 + c^2$. Тоді $2bc \cos \alpha = 0$. Звідси $\cos \alpha = 0$. Отже, $\alpha = 90^\circ$. У цьому випадку трикутник є прямокутним. ●



ЗАДАЧА 1.

Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

Розв'язання. На рисунку 2.4 зображено паралелограм $ABCD$.

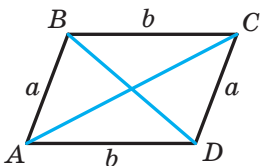


Рис. 2.4

Нехай $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тоді $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$.

Із трикутника ABD за теоремою косинусів отримуємо:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \quad (1)$$

Із трикутника ACD за теоремою косинусів отримуємо:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \alpha).$$

Звідси

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \quad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо:

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. \quad \blacktriangleleft$$

ЗАДАЧА 2. У трикутнику ABC сторона AB на 4 см більша за сторону BC , $\angle B = 120^\circ$, $AC = 14$ см. Знайдіть сторони AB і BC .

Розв'язання. За теоремою косинусів

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B.$$

Нехай $BC = x$ см, $x > 0$, тоді $AB = (x + 4)$ см.

Маємо:

$$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x(x + 4) \cos 120^\circ;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x + 4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0; \quad x^2 + 4x - 60 = 0;$$

$$x_1 = 6; \quad x_2 = -10.$$

Корінь -10 не задовольняє умову $x > 0$.

Отже, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см.

Відповідь: 10 см, 6 см. ◀

ЗАДАЧА 3. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD : AD = 1 : 2$. Знайдіть відрізок BD , якщо $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Розв'язання. За теоремою косинусів з трикутника ABC (рис. 2.5) отримуємо:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

$$\begin{aligned} \text{Звідси } \cos C &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \\ &= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}. \end{aligned}$$

Оскільки $CD : AD = 1 : 2$, то

$$CD = \frac{1}{3}AC = 5 \text{ (см)}.$$

Тоді з трикутника BCD отримуємо:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

$$\text{Отже, } BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $8\sqrt{2}$ см. ◀

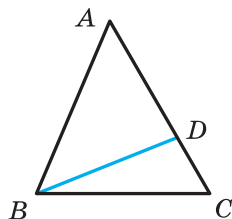


Рис. 2.5

ЗАДАЧА 4 Дві сторони трикутника дорівнюють 23 см і 30 см, а медіана, проведена до більшої з відомих сторін, — 10 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC відомо, що $AC = 23$ см, $BC = 30$ см, відрізок AM — медіана, $AM = 10$ см.

На продовженні відрізка AM за точку M відкладемо відрізок MD , який дорівнює медіані AM (рис. 2.6). Тоді $AD = 20$ см.

У чотирикутнику $ABDC$ діагоналі AD і BC точкою M перетину діляться навпіл ($BM = MC$ за умовою, $AM = MD$ за побудовою). Отже, чотирикутник $ABDC$ — паралелограм.

Оскільки сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін (див. ключову задачу 1), то

$$AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2).$$

Тоді

$$20^2 + 30^2 = 2(AB^2 + 23^2);$$

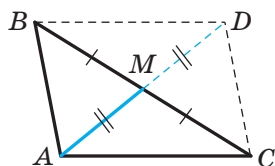


Рис. 2.6

$$400 + 900 = 2(AB^2 + 529);$$

$$AB^2 = 121; \quad AB = 11 \text{ см.}$$

Відповідь: 11 см. ◀



1. Сформулюйте теорему косинусів. **2.** Гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами a , b і c , де a — довжина його найбільшої сторони, якщо: 1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$? **3.** Як пов'язані між собою діагоналі та сторони паралелограма?



ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Пригадайте. У словах на позначення довжини зі складовою частиною «метр» наголошуємо останній склад: *міліметр, сантиметр, дециметр, кілометр*. А в назвах вимірювальних приладів — передостанній склад: *дозіметр, спідометр, термометр, колориметр, тахометр*.

Назви одиниць вимірювання називаємо повністю і відмінюємо всі слова такого словосполучення, наприклад: 20 см² — *двадцять квадратних сантиметрів, на двадцяти квадратних сантиметрах*; 45 м³ — *сорок п'ять кубічних метрів, сорока п'яти кубічним метрам*.



ВПРАВИ

2.1.° На рисунку 2.7 зображено трикутник DEF . Які з наведених рівностей є правильними:

- 1) $DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF \cdot \cos E$;
- 2) $DF^2 = DE^2 + EF^2 - 2DE \cdot EF \cdot \cos E$;
- 3) $EF^2 = DE^2 + DF^2 + 2DE \cdot DF \cdot \cos D$;
- 4) $DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF \cdot \cos F$?

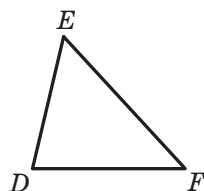


Рис. 2.7

2.2.° На рисунку 2.8 зображено трикутник MPK . Запишіть теорему косинусів для:

- 1) сторони PK ;
- 2) сторони MP .

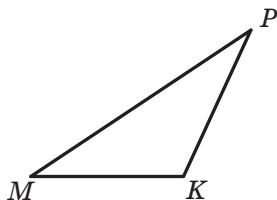
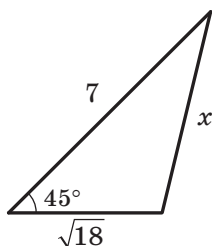
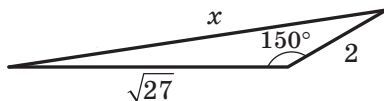


Рис. 2.8

2.3.° Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 2.9 (довжини відрізків дано в сантиметрах).



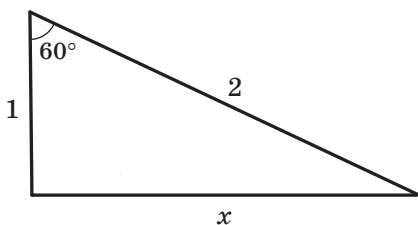
(a)



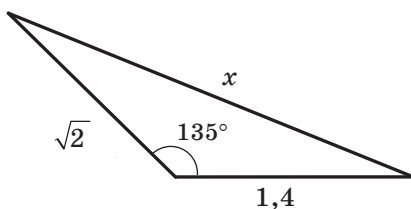
(б)

Рис. 2.9

2.4.° Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 2.10 (довжини відрізків дано в сантиметрах).



(a)



(б)

Рис. 2.10

2.5.° Знайдіть невідому сторону трикутника ABC , якщо:

- 1) $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\cos C = -\frac{11}{24}$;
- 2) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60^\circ$;
- 3) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135^\circ$.

2.6.° Знайдіть невідому сторону трикутника DEF , якщо:

- 1) $DE = 2$ см, $EF = 8$ см, $\cos E = \frac{19}{32}$;
- 2) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30^\circ$;
- 3) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120^\circ$.

- 2.7.° Сторони паралелограма дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см, а один із кутів дорівнює 45° . Знайдіть діагоналі паралелограма.
- 2.8.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60^\circ$. Знайдіть діагоналі трапеції.
- 2.9.° Знайдіть косинуси кутів трикутника зі сторонами 3 см, 10 см і 11 см.
- 2.10.° Знайдіть косинуси кутів трикутника зі сторонами 5 см, 7 см і 8 см.
- 2.11.° Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см. Знайдіть найбільший кут трикутника.
- 2.12.° Сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{18}$ см, 5 см і 7 см. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.
- 2.13.° Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють:
1) 5 см, 7 см і 9 см; 3) 10 см, 15 см і 18 см.
2) 5 см, 12 см і 13 см;
- 2.14.° Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 12 см. Чи є даний трикутник гострокутним?
- 2.15.° Доведіть, що трикутник зі сторонами 8 см, 15 см і 17 см є прямокутним.
- 2.16.° Як ви думаєте, чи доцільно для розв'язання наступної задачі застосовувати теорему косинусів?
Дві сторони трикутника дорівнюють по 7 см, а кут між ними дорівнює 60° . Знайдіть третю сторону.
Обговоріть це питання у класі.
- 2.17.° На стороні AB рівностороннього трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DB = 2 : 1$. Знайдіть відрізок CD , якщо $AB = 6$ см.
- 2.18.° На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : BM = 1 : 3$. Знайдіть відрізок CM , якщо $AC = BC = 4$ см.
- 2.19.° Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 7 см. Якому найменшому натуральному числу має дорівнювати довжина третьої сторони, виражена в сантиметрах, щоб кут між даними сторонами був тупим?
- 2.20.° Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 6 см. Якому найбільшому натуральному числу має дорівнювати довжина третьої сторони, виражена в сантиметрах, щоб кут між даними сторонами був гострим?

- 2.21.*** Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Знайдіть третю сторону трикутника.
Обговоріть з однокласниками й однокласницями, скільки розв'язків має задача.
- 2.22.*** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороні AB позначено точку M так, що $BM = 4$ см. Знайдіть відрізок CM .
- 2.23.*** На продовженні гіпотенузи AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC за точку B позначено точку D так, що $BD = BC$. Знайдіть відрізок CD , якщо катет трикутника ABC дорівнює a .
- 2.24.*** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продовженні гіпотенузи AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 26$ см. Знайдіть відрізок CD .
- 2.25.*** Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, знаходиться на відстанях a і b від кінців гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
- 2.26.*** Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC , $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120^\circ$. Знайдіть сторону AB .
- 2.27.*** Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 60° , відносяться як $5 : 8$, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.
- 2.28.*** Дві сторони трикутника відносяться як $1 : 2\sqrt{3}$ і утворюють кут, величина якого становить 30° . Третя сторона трикутника дорівнює $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.
- 2.29.*** Сума двох сторін трикутника, які утворюють кут величиною 120° , дорівнює 8 см, а довжина третьої сторони — 7 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.
- 2.30.*** Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 120° , відносяться як $5 : 3$. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.
- 2.31.*** Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 14 см, а кут, протилежний меншій із відомих сторін, дорівнює 60° . Знайдіть невідому сторону трикутника.

- 2.32.*** Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 35 см, а кут, протилежний більший із відомих сторін, дорівнює 120° . Знайдіть периметр трикутника.
- 2.33.*** Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату суми двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює 120° .
- 2.34.*** Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату різниці двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює 60° .
- 2.35.*** Дві сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна з діагоналей — 12 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.
- 2.36.*** Діагоналі паралелограма дорівнюють 13 см і 11 см, а одна зі сторін — 9 см. Знайдіть периметр паралелограма.
- 2.37.*** Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 14 см, а одна зі сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть сторони паралелограма.
- 2.38.*** Сторони паралелограма дорівнюють 11 см і 23 см, а його діагоналі відносяться як 2 : 3. Знайдіть діагоналі паралелограма.
- 2.39.*** У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 7 см, а кут між бічними сторонами — 50° . Треба знайти основу трикутника.
Звісно, що цю задачу можна розв'язати за допомогою теореми косинусів. Подумайте, як її розв'язати, не застосовуючи цю теорему. Висловіть свою думку, яке розв'язання вам подобається більше, і обговоріть її у класі.
-  **2.40.**** На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD = 14$ см. Знайдіть відрізок AD , якщо $AB = 37$ см, $BC = 44$ см і $AC = 15$ см.
- 2.41.**** На стороні AB трикутника ABC позначено точку K , а на продовженні сторони BC за точку C — точку M . Знайдіть відрізок MK , якщо $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.
- 2.42.**** Одна зі сторін трикутника у 2 рази більша за другу, а кут між цими сторонами становить 60° . Доведіть, що даний трикутник є прямокутним.

- 2.43.** У трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Знайдіть сторону CD трапеції.
- 2.44.** У трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Знайдіть косинус кута D трапеції.
- 2.45.** Знайдіть діагональ AC чотирикутника $ABCD$, якщо навколо нього можна описати коло і $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.
- 2.46.** Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см і $\angle C = 30^\circ$?
-  2.47.** Доведіть, що проти більшого кута паралелограма лежить більша діагональ. Сформулюйте та доведіть обернене твердження.
- 2.48.** Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його найбільшого кута.
- 2.49.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона — 20 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при його основі.
- 2.50.** Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 18 см та 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.
- 2.51.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.
- 2.52.** Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 14 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 7 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.
- 2.53.** У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$. На продовженні відрізка AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 2AB$. Доведіть, що трикутник ACD рівнобедрений.
Цю задачу можна розв'язати, не використовуючи теорему косинусів. Який спосіб обрали ви? Обговоріть його з однокласниками й однокласницями.

 Якщо вам подобається знаходити декілька розв'язань однієї задачі, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Задача одна, а розв'язувань багато». Зміст

проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проєкті, ви можете знайти на с. 259.

2.54.* Доведіть, що в трикутнику зі сторонами a , b і c



виконується рівність $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, де m_c —

медіана трикутника, проведена до сторони, довжина якої дорівнює c .



2.55.* Якщо не змінювати довжини двох сторін трикутника й при цьому збільшувати кут між ними, то буде збільшуватися третя сторона трикутника. Цей факт є наочно очевидним. У цьому ви можете переконатися, перейшовши за QR-кодом. Подумайте, як можна обґрунтувати цей факт за допомогою теореми косинусів. Обговоріть ваші ідеї у класі.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

2.56. На березі озера стоять дві старовинні вежі A і B . Для знаходження відстані між ними за допомогою віх, рулетки та приладу для вимірювання кутів (теодоліту) позначили на місцевості точку C таку, що $AC = 30$ м, $BC = 40$ м, $\angle ACB = 40^\circ$ (рис. 2.11). Як знайти відстань між вежами A і B ? Знайдіть цю відстань.

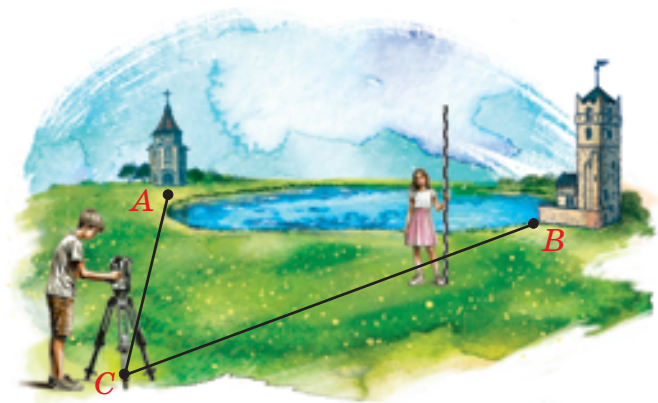


Рис. 2.11

2.57. Столяру Ігореві Івановичу потрібно розпилити дошку, ширина якої не перевищує 20 см, на чотири рейки однакової ширини. Рулетка, якою користується пан Ігор, стара. Нею не можна виміряти ширину дошки, оскільки деякі поділки та цифри стерлися. На рулетці чітко видно числа 0, 2, 3, 7, 11, 12, 15, 17, 19, 22, 23, 27 і відповідні їм поділки. Пан Ігор дуже любить геометрію і ще зі шкільних років пам'ятає теорему Фалеса, яку нерідко використовує у своїй роботі. Тож він зміг зробити необхідну розмітку на дошці. Подумайте, як саме він це зробив. Запропонуйте свої варіанти й обговоріть їх у класі.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.58. У колі проведено діаметр AC і хорду AB , яка дорівнює радіусу кола. Знайдіть кути трикутника ABC .

2.59. Один із кутів, утворених при перетині бісектриси кута паралелограма з його стороною, дорівнює одному з кутів паралелограма. Знайдіть кути паралелограма.

ЖГ2



2.60. Дві вершини квадрата ковзають по сторонах прямого кута (рис. 2.12). Доведіть, що при цьому точка перетину діагоналей квадрата лежатиме на бісектрисі прямого кута.

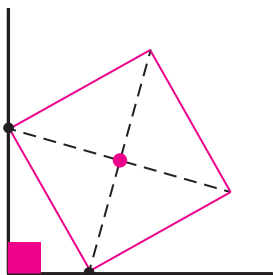


Рис. 2.12



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 9 із підручника «Геометрія. 8 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

2.61. Знайдіть кут ADC (рис. 2.13), якщо $\angle ABC = 140^\circ$.

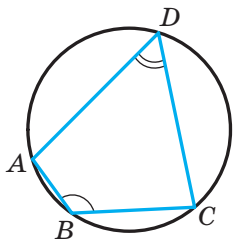


Рис. 2.13

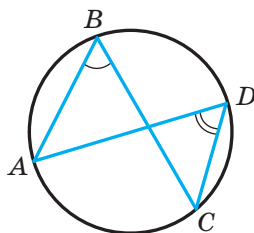


Рис. 2.14

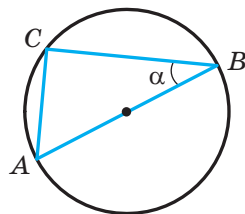


Рис. 2.15

2.62. Знайдіть кут ABC (рис. 2.14), якщо $\angle ADC = 43^\circ$.

2.63. Відрізок AB — діаметр кола, радіус якого дорівнює R , $\angle ABC = \alpha$ (рис. 2.15). Знайдіть хорду AC .

3. Теорема синусів



Уявіть, що об'єкти A і B розташовані на березі круглого озера (рис. 3.1). Як визначити відстань між ними, якщо відомі діаметр озера та кут, під яким спостерігач із точки C (що також розташована на березі) бачить відрізок AB ?

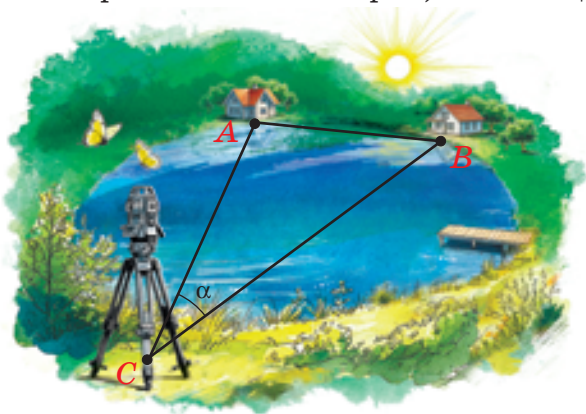


Рис. 3.1

Подібні задачі нерідко виникають на практиці, наприклад у геодезії, будівництві чи навігації. Допомогти в їх розв'язанні може така лема про хорду.

Лема:

Хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.

Доведення. ☉ На рисунку 3.2 відрізок MN — хорда кола із центром у точці O . Проведемо діаметр MP . Тоді $\angle MNP = 90^\circ$ як вписаний кут, що спирається на діаметр. Нехай величина вписаного кута MPN дорівнює α . Тоді з прямокутного трикутника MPN отримуємо:

$$MN = MP \sin \alpha. \quad (1)$$

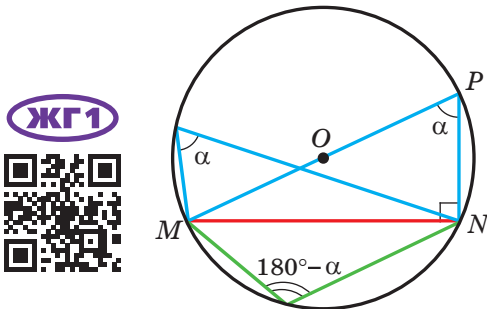


Рис. 3.2

Усі вписані кути, які спираються на хорду MN , дорівнюють α або $180^\circ - \alpha$. Отже, їхні синуси рівні. Тому отримана рівність (1) справедлива для всіх вписаних кутів, які спираються на хорду MN . ●

Із другої ознаки рівності трикутників випливає, що сторона та два прилеглих до неї кути однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти дві інші сторони трикутника. Як це зробити, підказує така теорема.

Теорема 3.1 (теорема синусів):

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

Доведення. ☉ Нехай у трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Нехай радіус описаного кола трикутника ABC дорівнює R . Тоді за лемою $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Звідси

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Наслідок:

Радіус кола, описаного навколо трикутника, можна обчислити за формулою

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

де a — довжина сторони трикутника, α — величина протилежного цій стороні кута.

ЗАДАЧА 1. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45^\circ$. Знайдіть кут A .

Розв'язання. За теоремою синусів

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

$$\text{Тоді} \quad \sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Отже, кут A — гострий. Звідси, ураховуючи, що $\sin A = \frac{1}{2}$, отримуємо $\angle A = 30^\circ$.

Відповідь: 30° . ◀

ЗАДАЧА 2. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть кут B .

Розв'язання. За теоремою синусів $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Тоді

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тоді кут B може бути як гострим, так і тупим. Звідси $\angle B = 45^\circ$ або $\angle B = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Відповідь: 45° або 135° . ◀

ЗАДАЧА 3. На стороні AB трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle BDC = \gamma$, $AD = m$ (рис. 3.3). Знайдіть відрізок BD , якщо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Розв'язання. Кут BDC — зовнішній кут трикутника ADC . Тоді $\angle ACD + \angle A = \angle BDC$, звідси $\angle ACD = \gamma - \alpha$.

Із трикутника ADC за теоремою синусів отримуємо:

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}.$$

Отже,

$$CD = \frac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \frac{m \sin \alpha}{\sin (\gamma - \alpha)}.$$

Із трикутника BCD за теоремою синусів отримуємо:

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} BD &= \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} = \\ &= \frac{m \sin \alpha \sin (180^\circ - (\beta + \gamma))}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)} = \frac{m \sin \alpha \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{m \sin \alpha \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)}$. ◀

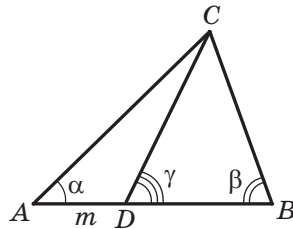


Рис. 3.3

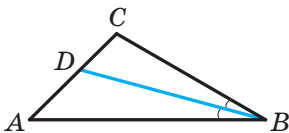


Рис. 3.4

ЗАДАЧА 4. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC , $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ (рис. 3.4). Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , якщо радіус кола, описаного навколо трикутника BDC , дорівнює $8\sqrt{6}$ см.

Розв'язання. Нехай R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника BDC , $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

Оскільки відрізок BD — бісектриса трикутника ABC , то

$$\angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 15^\circ.$$

Із трикутника BDC отримуємо:

$$\angle BDC = 180^\circ - (\angle CBD + \angle C) = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ.$$

За наслідком з теореми синусів $\frac{BC}{2 \sin \angle BDC} = R_1$. Звідси

$$BC = 2R_1 \sin \angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60^\circ = 24\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Із трикутника ABC отримуємо:

$$\angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C) = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ.$$

Нехай R — шуканий радіус кола, описаного навколо трикутника ABC .

$$\text{Тоді } R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{24\sqrt{2}}{2 \sin 45^\circ} = 24 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 24 см. ◀



1. Як знайти хорду кола, якщо відомо діаметр кола та вписаний кут, який спирається на цю хорду? **2.** Сформулюйте теорему синусів. **3.** Як знайти радіус кола, описаного навколо трикутника зі стороною a та протилежним цій стороні кутом α ?



ВПРАВИ

3.1.° На рисунку 3.5 зображено трикутник DEF . Який вираз треба підставити замість зірочки, щоб утворилася правильна рівність:

$$1) \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{p}{*}; \quad 3) \frac{m}{n} = \frac{*}{\sin \beta}?$$

$$2) \frac{\sin \gamma}{p} = \frac{*}{n};$$

3.2.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0,2$. Знайдіть синус кута C трикутника.

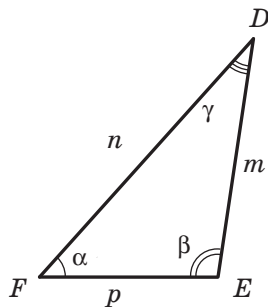


Рис. 3.5

3.3.° Знайдіть сторону AC трикутника ABC , якщо $AB = 9$ см, $\sin B = 0,4$, $\sin C = 0,6$.

3.4.° Знайдіть сторону BC трикутника ABC , зображеного на рисунку 3.6 (довжину відрізка дано в сантиметрах).

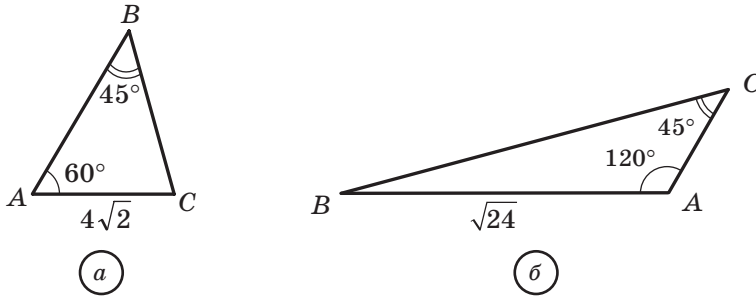


Рис. 3.6

3.5.° Знайдіть сторону AC трикутника ABC , зображеного на рисунку 3.7 (довжину відрізка дано в сантиметрах).

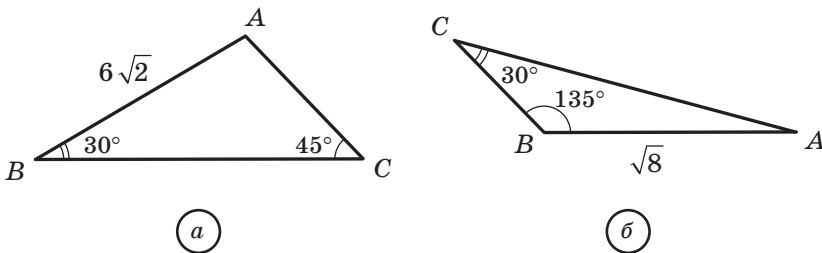


Рис. 3.7

3.6.° У трикутнику DEF відомо, що $DE = 16$ см, $\angle F = 50^\circ$, $\angle D = 38^\circ$. Знайдіть сторону EF .

3.7.° У трикутнику MKP відомо, що $KP = 8$ см, $\angle K = 106^\circ$, $\angle P = 32^\circ$. Знайдіть сторону MP .

3.8.° Знайдіть гострий кут A трикутника ABC , якщо:

- 1) $AB = 6$ см, $BC = 3\sqrt{6}$ см, $\angle C = 45^\circ$;
- 2) $AC = 3$ см, $BC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120^\circ$.

3.9.° Знайдіть гострий кут C трикутника ABC , якщо $AB = 5\sqrt{3}$ см, $BC = 15$ см, $\angle A = 60^\circ$.

3.10.° Знайдіть радіус кола, зображеного на рисунку 3.8.

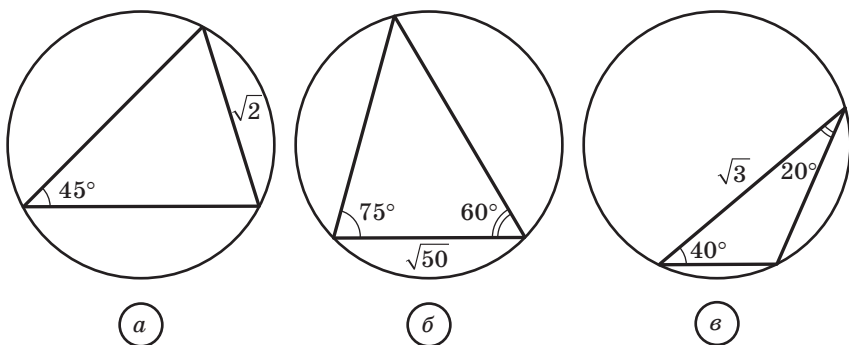


Рис. 3.8

3.11.° Радіус кола, описаного навколо трикутника MKP , дорівнює 5 см, $\sin M = 0,7$. Знайдіть сторону KP .

3.12.° У трикутнику DEF відомо, що $DE = 8$ см, $\sin F = 0,16$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника DEF .

3.13.° Як ви думаєте, чи доцільно для розв'язання наступної задачі застосовувати лему про хорду?

Навколо прямокутного трикутника описано коло діаметром 14 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника. Обговоріть це питання в класі.

3.14.° Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 15,5 м, а один із її кутів — 150° . Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо даної трапеції? Розв'язавши цю задачу, ви дізнаєтеся, скільки метрів становив світовий рекорд у потрійному стрибку, який встановила в 1995 році видатна українська спортсменка-легкоатлетка, олімпійська чемпіонка Інеса Кравець. Знайдіть в інтернеті, скільки років протримався цей рекорд.

3.15.° Василь міркує так: «Мені відомо багато пар кутів, які не рівні один одному, а при цьому їхні синуси рівні. Нехай кути A і B трикутника ABC



Інеса Кравець,
олімпійська
чемпіонка

такі, що $\angle A \neq \angle B$, але $\sin A = \sin B$. Застосуємо теорему синусів. Маємо: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. Звідси отримуємо, що $a = b$.

Виходить, що трикутник ABC рівнобедрений, у якого кути при основі нерівні. Як таке може бути?»

Як ви думаєте, де помилився Василь? Обговоріть з однокласниками й однокласницями це питання.

Міркування, яке зовні виглядає правильним, але містить приховану помилку, що навмисно вводить в оману або створює хибне враження істинності, називають **софізмом**.

↔ Якщо вам подобається розгадувати софізми, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Математичні софізми». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо для роботи над ним ви об'єднаєтеся в групи.

3.16.* У трикутнику ABC відомо, що $BC = 5$ см, $AB = 7$ см. Обговоріть з однокласниками й однокласницями, чи може бути так, що $\sin A = 1$.

3.17.* У трикутнику ABC відомо, що $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть сторони AB і AC .

3.18.* Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює з його сторонами кути α і β . Знайдіть сторони паралелограма.

3.19.* Знайдіть кут A трикутника ABC , якщо:

1) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135^\circ$;

2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45^\circ$.

Обговоріть з однокласниками й однокласницями, скільки розв'язків у кожному з випадків має задача.

3.20.* Чи існує трикутник ABC такий, що $\sin A = 0,4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Відповідь обґрунтуйте.

↔ **3.21.*** На продовженні сторони AB трикутника ABC за точку B позначили точку D . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ACD , якщо $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$, а радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , дорівнює 4 см.

3.22.* Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC , де O — точка перетину бісектрис трикутника ABC , якщо $\angle ABC = 60^\circ$.

3.23.* Сторона трикутника дорівнює 24 см, а радіус описаного кола — $8\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює кут трикутника, протилежний даній стороні?

Обговоріть з однокласниками й однокласницями, скільки розв'язків має задача.

3.24.** Використовуючи дані рисунка 3.9, знайдіть відрізок AD , якщо $CD = a$, $\angle BAC = \gamma$, $\angle DBA = \beta$.

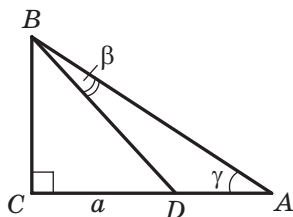


Рис. 3.9

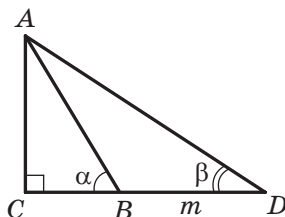


Рис. 3.10

3.25.** Використовуючи дані рисунка 3.10, знайдіть відрізок AC , якщо $BD = m$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.

3.26.** На стороні AB трикутника ABC позначили точку M так, що $\angle AMC = \varphi$. Знайдіть відрізок CM , якщо $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

3.27.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороні BC позначили точку D так, що $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Знайдіть сторону BC .

3.28.** Доведіть, що бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, довжини яких обернено пропорційні синусам прилеглих до цієї сторони кутів.

3.29.** Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 12 см, а висота, проведена до третьої сторони, — 4 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

3.30.** Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 16 см і бічною стороною 10 см.

3.31.** У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть бісектрису BD трикутника.

3.32.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , протилежний їй кут дорівнює α . Знайдіть бісектрису трикутника, проведenu з вершини кута при основі.

3.33." Доведіть, користуючись теоремою синусів, що бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам¹.

↔ **3.34."** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота — 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

3.35." Медіана AM трикутника ABC дорівнює m і утворює зі сторонами AB і AC кути α і β відповідно. Знайдіть сторони AB і AC .

3.36." Медіана CD трикутника ABC утворює зі сторонами AC і BC кути α і β відповідно, $BC = a$. Знайдіть медіану CD .

3.37." Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H . Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників AHB , BHC , AHC і ABC , рівні.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

3.38. Для знаходження відстані від точки A до вежі B , яка розташована на другому березі річки (рис. 3.11), за допомогою віх, рулетки та приладу для вимірювання кутів (теодоліту) позначили на місцевості точку C таку, що $\angle BAC = 42^\circ$, $\angle ACB = 64^\circ$, $AC = 20$ м. Як знайти відстань від точки A до вежі B ? Знайдіть цю відстань.



Рис. 3.11

¹ Нагадаємо, що твердження з використанням теореми про пропорційні відрізки було доведено в підручнику «Геометрія. 8 клас», посилання на який ви знайдете на с. 4.

- 3.39.** Велотраса має форму трикутника, два кути якого дорівнюють 50° і 100° . Меншу сторону цього трикутника одна з велосипедисток проїжджає за 1 год. За який час вона проїде всю трасу? Відповідь подайте в годинах, округливши її до десятих.
- 3.40.** Дороги, які сполучають села A , B і C (рис. 3.12), утворюють трикутник, причому дорога із села A до села C заасфальтована, а дороги із села A до села B та із села B до села C — ґрунтові. Дороги, які ведуть із села A до сіл B і C , утворюють кут, величина якого 15° , а дороги, які ведуть із села B до сіл A і C , — кут, величина якого 5° . Швидкість руху автомобіля по асфальтованій дорозі у 2 рази більша за швидкість його руху по ґрунтовій. Який шлях вибрати водію автомобіля, щоб якнайшвидше дістатися із села A до села B ?

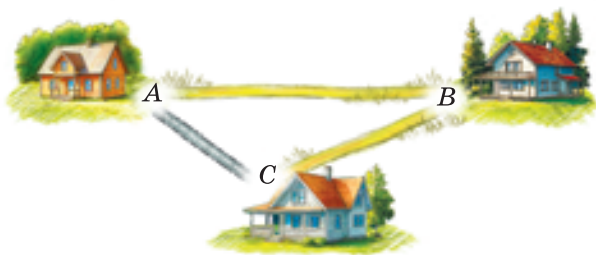


Рис. 3.12

- 3.41.** Дороги із сіл A і B сходяться біля розвилки C (рис. 3.13). Дорога із села A до розвилки утворює з дорогою із села A в село B кут, величина якого 30° , а дорога із села B до розвилки утворює з дорогою із села B в село A кут, величина якого 70° . Одночасно із села A до розвилки виїхав автомобіль зі швидкістю 90 км/год, а із села B — автобус зі швидкістю 60 км/год. Хто з них першим доїде до розвилки?

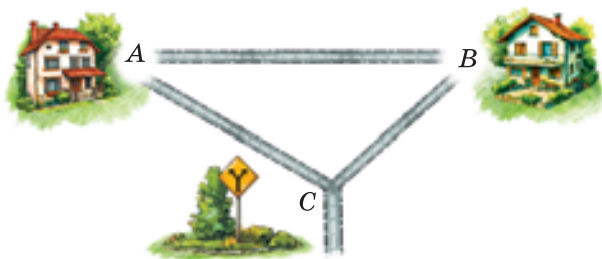


Рис. 3.13



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 3.42. Бісектриси кутів B і C прямокутника $ABCD$ перетинають сторону AD у точках M і K відповідно. Доведіть, що $BM = CK$.
- 3.43. На рисунку 3.14 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$.
Укажіть, які трикутники на цьому рисунку подібні.
- 3.44. На стороні AB квадрата $ABCD$ позначено точку K , а на стороні CD — точку M так, що $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Знайдіть сторону квадрата, якщо $MK = 13$ см.

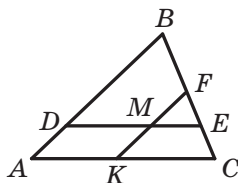


Рис. 3.14



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 18 із підручника «Геометрія. 8 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

- 3.45. Розв'яжіть прямокутний трикутник:
- 1) за двома катетами $a = 7$ см і $b = 35$ см;
 - 2) за гіпотенузою $c = 17$ см і катетом $a = 8$ см;
 - 3) за гіпотенузою $c = 4$ см і гострим кутом $\alpha = 50^\circ$;
 - 4) за катетом $a = 8$ см і протилежним кутом $\alpha = 42^\circ$.



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 3.46. У коло радіуса 1 см вписано п'ятикутник. Доведіть, що сума довжин його сторін і діагоналей менша від 17 см.

4. Розв'язування трикутників



Трикутник має шість основних елементів: три сторони і три кути. Нехай відомо три основних елементи, хоча б один із яких є стороною. **Розв'язати трикутник** означає знайти решту три елементи трикутника.

Трикутник — жорстка фігура, яка не деформується без зміни довжин сторін, тому вона широко використовується

в інженерії та будівництві (рис. 4.1). Уміння розв'язувати трикутники допомагає розраховувати розміри та кути конструкцій, забезпечуючи їхню міцність і надійність.

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Теорема косинусів і синусів дають змогу розв'язати будь-який трикутник.

У наступних задачах значення тригонометричних функцій будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до сотих. Величини кутів будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до одиниць. Обчислюючи довжини сторін, результат будемо округлювати до десятих.¹



Стріла
будівельного крана



Дерев'яний каркас
покрівлі будівлі

Рис. 4.1. Жорсткі конструкції

ЗАДАЧА 1. Розв'яжіть трикутник (рис. 4.2) за стороною $a = 12$ см і двома кутами $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 119^\circ$.

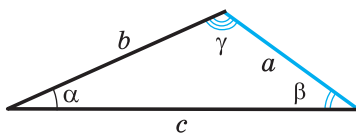


Рис. 4.2

Розв'язання. Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$.

За теоремою синусів $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$. Звідси $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$.

¹ У задачах цього пункту та вправах 4.2–4.11 прийнято позначення: a , b і c — довжини сторін трикутника, α , β і γ — величини кутів, протилежних відповідно сторонам з довжинами a , b і c .

Маємо:

$$b = \frac{12 \sin 36^\circ}{\sin 25^\circ} \approx \frac{12 \cdot 0,59}{0,42} \approx 16,9 \text{ (см)}.$$

Знову застосовуючи теорему синусів, запишемо:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Звідси } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Маємо:

$$c = \frac{12 \sin 119^\circ}{\sin 25^\circ} = \frac{12 \sin 61^\circ}{\sin 25^\circ} \approx \frac{12 \cdot 0,87}{0,42} \approx 24,9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $b \approx 16,9$ см, $c \approx 24,9$ см, $\alpha = 25^\circ$. ◀

ЗАДАЧА 2. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами $a = 14$ см, $b = 8$ см і кутом $\gamma = 38^\circ$ між ними.

Розв'язання. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Звідси

$$c^2 = 196 + 64 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cos 38^\circ \approx 260 - 224 \cdot 0,79 = 83,04;$$

$$c \approx 9,1 \text{ см}.$$

Далі маємо:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos \alpha \approx \frac{8^2 + 9,1^2 - 14^2}{2 \cdot 8 \cdot 9,1} \approx -0,34.$$

Звідси $\alpha \approx 110^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma);$$

$$\beta \approx 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ.$$

Відповідь: $c \approx 9,1$ см, $\alpha \approx 110^\circ$, $\beta \approx 32^\circ$. ◀

ЗАДАЧА 3. Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Розв'язання. За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Звідси

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos \alpha = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0,59.$$

Отримуємо: $\alpha \approx 54^\circ$.

За теоремою синусів $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$. Звідси

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}; \quad \sin \beta \approx \frac{2 \sin 54^\circ}{7} \approx \frac{2 \cdot 0,81}{7} \approx 0,23.$$

Оскільки b — довжина найменшої сторони даного трикутника, то кут β є гострим. Тоді знаходимо, що $\beta \approx 13^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta); \quad \gamma \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ.$$

Відповідь: $\alpha \approx 54^\circ$, $\beta \approx 13^\circ$, $\gamma \approx 113^\circ$. $\blacktriangleleft$

ЗАДАЧА 4. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, протилежним одній зі сторін:

1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156^\circ$;

2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65^\circ$;

3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50^\circ$.

Розв'язання. 1) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$. Звідси $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$; $\sin \beta = \frac{6 \sin 156^\circ}{17} = \frac{6 \sin 24^\circ}{17} \approx \frac{6 \cdot 0,41}{17} \approx 0,14$.

Оскільки кут α даного трикутника тупий, то кут β є гострим. Тоді знаходимо, що $\beta \approx 8^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 16^\circ$.

За теоремою синусів $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

$$\text{Звідси } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}; \quad c \approx \frac{17 \sin 16^\circ}{\sin 156^\circ} \approx \frac{17 \cdot 0,28}{0,41} \approx 11,6 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\beta \approx 8^\circ$, $\gamma \approx 16^\circ$, $c \approx 11,6$ см.

2) За теоремою синусів $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

$$\text{Звідси } \sin \gamma = \frac{c \sin \beta}{b}; \quad \sin \gamma = \frac{8 \sin 65^\circ}{7} \approx \frac{8 \cdot 0,91}{7} = 1,04.$$

Оскільки $1,04 > 1$, то кут γ не існує.

Відповідь: задача не має розв'язку.

3) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$. Звідси

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}; \quad \sin \alpha = \frac{6 \sin 50^\circ}{5} \approx \frac{6 \cdot 0,77}{5} \approx 0,92.$$

Можливі два випадки: $\alpha \approx 67^\circ$ або $\alpha \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

Розглянемо випадок, коли $\alpha \approx 67^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta); \gamma \approx 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ.$$

За теоремою синусів $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

$$\text{Звідси } c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}; c \approx \frac{5 \sin 63^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,89}{0,77} \approx 5,8 \text{ (см)}.$$

Розглянемо випадок, коли $\alpha \approx 113^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta); \gamma \approx 180^\circ - 163^\circ = 17^\circ.$$

$$\text{Оскільки } c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}, \text{ то } c \approx \frac{5 \sin 17^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,29}{0,77} \approx 1,9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\alpha \approx 67^\circ$, $\gamma \approx 63^\circ$, $c \approx 5,8$ см або $\alpha \approx 113^\circ$, $\gamma \approx 17^\circ$, $c \approx 1,9$ см. ◀

ЖГ1 Сьогодні існує чимало комп'ютерних програм, що вміють розв'язувати трикутники. Достатньо задати програмі кілька елементів трикутника, і вона обчислить усі інші.



Перейшовши за QR-кодом, ви зможете побачити розв'язання деяких задач параграфа за допомогою цієї програми.



Що означає розв'язати трикутник?



ВПРАВИ

4.1.° Обговоріть з однокласниками й однокласницями, за якими теоремами можна знайти невідомі сторони і кути трикутника, у якому дано:

- 1) дві сторони та кут між ними;
- 2) сторона та прилеглі до неї кути;
- 3) дві сторони та кут, протилежний до однієї із цих сторін.

4.2.° Розв'яжіть трикутник за стороною та двома кутами:

- 1) $a = 10$ см, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 85^\circ$; 2) $b = 16$ см, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 110^\circ$.

4.3.° Розв'яжіть трикутник за стороною та двома кутами:

- 1) $b = 9$ см, $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 70^\circ$; 2) $c = 14$ см, $\beta = 132^\circ$, $\gamma = 24^\circ$.

4.4.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом між ними:

- 1) $b = 18$ см, $c = 22$ см, $\alpha = 76^\circ$;
- 2) $a = 20$ см, $b = 15$ см, $\gamma = 104^\circ$.

4.5.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом між ними:

- 1) $a = 8$ см, $c = 6$ см, $\beta = 15^\circ$;
- 2) $b = 7$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 145^\circ$.

4.6.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:

- 1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см;
- 2) $a = 26$ см, $b = 19$ см, $c = 42$ см.

4.7.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:

- 1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см;
- 2) $a = 21$ см, $b = 17$ см, $c = 32$ см.

4.8.° Розв'яжіть трикутник, у якому:

- 1) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10^\circ$, кут α гострий;
- 2) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10^\circ$, кут α тупий.

4.9.° На рисунку 4.3 позначено три відомі елементи трикутника. Розгляньте цей рисунок і обговоріть з однокласниками й однокласницями, у яких випадках може існувати більше ніж один трикутник із такими елементами.

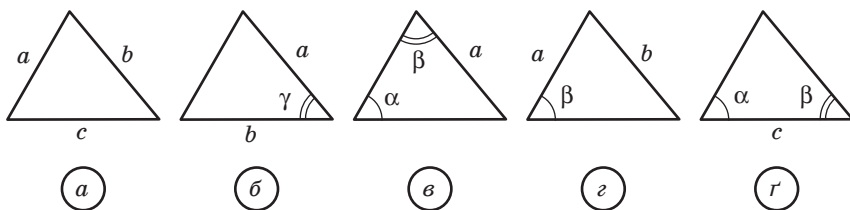


Рис. 4.3

4.10.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:

- 1) $a = 7$ см, $b = 11$ см, $\beta = 46^\circ$;
- 2) $b = 15$ см, $c = 17$ см, $\beta = 32^\circ$;
- 3) $a = 7$ см, $c = 3$ см, $\gamma = 27^\circ$.

4.11.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:

- 1) $a = 23$ см, $c = 30$ см, $\gamma = 102^\circ$;
- 2) $a = 18$ см, $b = 25$ см, $\alpha = 36^\circ$.

4.12.* Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 8 см, $\angle CAD = 38^\circ$, $\angle BAD = 72^\circ$. Знайдіть:

- 1) сторони трапеції;
- 2) радіус описаного кола трикутника ABC .



4.13.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 10$ см, $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть:

- 1) сторону AC ;
- 2) медіану CM ;
- 3) бісектрису AD ;
- 4) радіус описаного кола трикутника ABC .

Використовуючи знайдені довжини відрізків, розшифруйте прізвище видатної сучасної української науковиці, докторки технічних наук, професорки, авторки понад 400 наукових праць. Номер завдання відповідає місцю, на якому стоїть буква у прізвищі.



Відповідь	$5\sqrt{7}$ см	10 см	$5\sqrt{6}$ см	$10\sqrt{3}$ см
Буква	Л	М	И	К

Знайдіть в інтернеті інформацію про наукову та викладацьку діяльність цієї науковиці, зокрема, в яких галузях науки вона спеціалізується.

4.14.** Основи трапеції дорівнюють 12 см і 16 см, а бічні сторони — 7 см і 9 см. Знайдіть кути трапеції.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.15. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає його сторону AD у точці M , а продовження сторони CD за точку D — у точці K . Знайдіть відрізок DK , якщо $AM = 8$ см, а периметр паралелограма дорівнює 50 см.

4.16. Периметр одного з двох подібних трикутників на 18 см менший від периметра другого трикутника, а дві відповідні сторони цих трикутників дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть периметри даних трикутників.



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 22 із підручника «Геометрія. 8 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

4.17. Точка M — середина сторони CD прямокутника $ABCD$ (рис. 4.4), $AB = 6$ см, $AD = 5$ см. Чому дорівнює площа трикутника ACM ?

4.18. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle ADB = \alpha$.

Доведіть, що $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$.

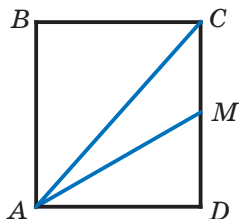


Рис. 4.4



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Тригонометрія — наука про вимірювання трикутників

Ви знаєте, що стародавні мандрівники орієнтувалися за зорями та планетами. Вони могли досить точно визначити місцезнаходження корабля в океані або каравану в пустелі за розташуванням світил на небосхилі. При цьому одним з орієнтирів була висота, на яку піднімалося над горизонтом те або інше небесне світило в даній місцевості в певний момент часу.¹

Зрозуміло, що безпосередньо виміряти цю висоту неможливо. Тому вчені стали розробляти методи непрямих вимірювань. Тут істотну роль відігравало розв'язування трикутника, дві вершини якого лежали на поверхні Землі, а третя була зорею або планетою (рис. 4.5) — відома вам задача 3.24.

Для розв'язування подібних задач стародавнім астрономам потрібно було навчитися знаходити взаємозв'язки між елементами трикутника. Так виникла **тригонометрія** — наука, яка вивчає залежність між сторонами та кутами трикутника. Термін «тригонометрія» (від грецьких слів «тригон» — трикутник і «метрео» — вимірювати) означає «вимірювання трикутників».

¹ Якщо ви бажаєте дізнатися більше про те, як у стародавні часи за допомогою геометрії проводили астрономічні дослідження, то рекомендуємо взяти участь у проєкті «Геометрія та астрономія» (див. с. 259).

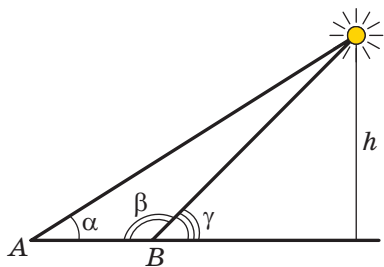


Рис. 4.5

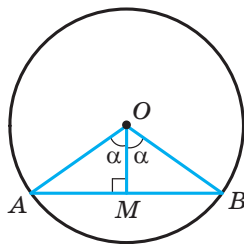


Рис. 4.6

На рисунку 4.6 зображено центральний кут AOB , який дорівнює 2α . Із прямокутного трикутника OMB маємо: $MB = OB \sin \alpha$. Отже, якщо в одиничному колі виміряти половини довжин хорд, на які спираються центральні кути з величинами 2° , 4° , 6° , ..., 180° , то таким чином ми обчислимо значення синусів кутів 1° , 2° , 3° , ..., 90° відповідно.

Вимірюючи довжини півхорд, давньогрецький астроном Гіппарх (II ст. до н. е.) склав перші тригонометричні таблиці.

Значний внесок у розвиток тригонометрії зробила Гіпатія Александрійська (бл. 350–370 — 415), яка разом зі своїм батьком Теоном Александрійським склала коментарі до вчення Птолемея про тригонометрію хорд. Гіпатія займалася обчисленням астрономічних таблиць, створенням астролябії — приладу для визначення широт і довгот в астрономії, яка використовувалася для визначення положення Сонця, зірок та планет.

Поняття синуса й косинуса з'являються в тригонометричних трактатах індійських учених у IV–V ст. н. е.

У X ст. арабські вчені оперували поняттям тангенса, яке виникло з потреб гномоніки — учення про сонячний годинник (рис. 4.7).



Рис. 4.7

У Європі першою роботою, у якій тригонометрія розглядалася як окрема наука, був трактат «П'ять книг про трикутники всіх видів», уперше надрукований у 1533 р. Його автором був німецький учений Регіомонтан (1436–1476). Цей же вчений відкрив і теорему тангенсів:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

де a , b і c — довжини сторін трикутника, α , β і γ — величини кутів трикутника, протилежних відповідно сторонам з довжинами a , b і c .

Сучасного вигляду тригонометрія набула в роботах великого математика Леонарда Ейлера.



Леонард Ейлер
(1707–1783)

Видатний математик, фізик, механік і астроном, автор понад 860 наукових праць, член Берлінської, Паризької академій наук, Лондонського королівського товариства, багатьох інших академій та наукових товариств.

Ім'я Ейлера зустрічається майже в усіх областях математики: теореми Ейлера, тотожності Ейлера, кути, функції, інтеграли, формули, рівняння, підстановки тощо.

5. Формули для знаходження площі трикутника



Із курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що площу S трикутника зі сторонами a , b і c та проведеними до цих сторін відповідно висотами h_a , h_b і h_c можна обчислити за формулами

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

Нерідко в задачах на реальні ситуації незручно або неможливо знайти висоту трикутника. Наприклад, під час вимірювання на місцевості чи в кресленнях частин конструкцій часто відомі лише довжини деяких сторін або кути трикутника. У таких випадках на допомогу приходять інші формули площі трикутника, які дають змогу виконувати обчислення без побудови висот. Це особливо важливо для інженерів, архітекторів і геодезистів.

Тепер завдяки матеріалу з попередніх пунктів у нас з'явилася можливість отримати ще кілька формул для знаходження площі трикутника.

Теорема 5.1:

Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін і синуса кута між ними.

Доведення. ☺ Розглянемо трикутник ABC , площа якого дорівнює S , такий, що $BC = a$, $AC = b$ і $\angle C = \gamma$. Доведемо, що

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Можливі три випадки:

- 1) кут γ гострий (рис. 5.1);
- 2) кут γ тупий (рис. 5.2);
- 3) кут γ прямий.

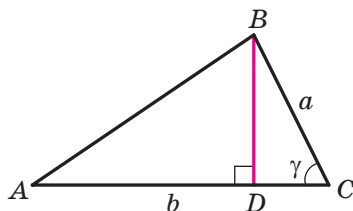


Рис. 5.1

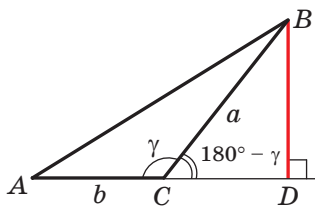


Рис. 5.2

На рисунках 5.1 і 5.2 проведемо висоту BD трикутника ABC . Тоді $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot b$.

Із прямокутного трикутника BDC у першому випадку (див. рис. 5.1) отримуємо: $BD = a \sin \gamma$, а в другому (див. рис. 5.2): $BD = a \sin (180^\circ - \gamma) = a \sin \gamma$. Звідси для двох перших випадків маємо: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Якщо кут C прямий, то $\sin \gamma = 1$. Для прямокутного трикутника ABC із катетами a і b маємо:

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \quad \bullet$$

На питання, як знайти площу трикутника, коли відомо три його сторони, дає відповідь така теорема.

Теорема 5.2 (формула Герона¹):

Площу S трикутника зі сторонами a , b і c можна обчислити за формулою

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де p — його півпериметр.

Із доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



Теорема 5.3:

Площу S трикутника зі сторонами a , b і c можна обчислити за формулою

$$S = \frac{abc}{4R},$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC , площа якого дорівнює S , такий, що $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Доведемо, що $S = \frac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола трикутника.

Нехай $\angle A = \alpha$. Запишемо формулу площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

Із леми п. 3 випливає, що $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$.

$$\text{Тоді } S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}. \quad \bullet$$

¹ Герон Александрійський — давньогрецький учений, який жив у I ст. н. е. Його математичні праці є енциклопедією прикладної математики.

Зауважимо, що доведена теорема дає змогу знаходити радіус описаного кола трикутника за формулою

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Теорема 5.4:

Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.

Доведення. ☺ На рисунку 5.3 зображено трикутник ABC , у який вписано коло радіуса r . Доведемо, що

$$S = pr,$$

де S — площа даного трикутника, p — його півпериметр.

Нехай точка O — центр вписаного кола, яке дотикається до сторін трикутника ABC у точках M , N і P . Площа трикутника ABC дорівнює сумі площ трикутників AOB , BOC і COA :

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведемо радіуси в точки дотику. Отримуємо: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Звідси:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} ON \cdot BC = \frac{1}{2} r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} OP \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC.$$

Отже,

$$S = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr. \bullet$$

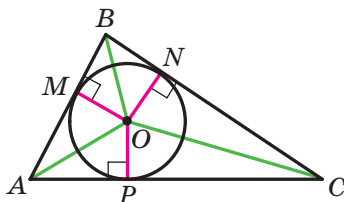


Рис. 5.3

Теорему 5.4 узагальнює така теорема.

Теорема 5.5:

Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.

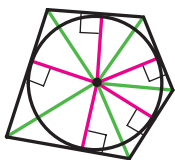


Рис. 5.4

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 5.4).
Зауважимо, що теорема 5.5 дає змогу знаходити радіус вписаного кола багатокутника за формулою

$$r = \frac{S}{p}$$

**ЗАДАЧА 1.**

Доведіть, що площу S паралелограма можна обчислити за формулою

$$S = ab \sin \alpha,$$

де a і b — довжини сусідніх сторін паралелограма, α — кут між ними.

Розв'язання. Розглянемо паралелограм $ABCD$, у якому $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 5.5). Проведемо діагональ BD .

Оскільки $\triangle ABD = \triangle CBD$, то запишемо:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha. \blacktriangleleft$$

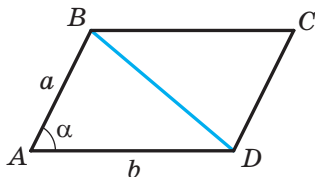


Рис. 5.5

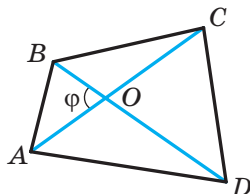


Рис. 5.6

**ЗАДАЧА 2.**

Доведіть, що площа опуклого чотирикутника дорівнює півдобутку його діагоналей і синуса кута між ними.

Розв'язання. Нехай кут між діагоналями AC і BD чотирикутника $ABCD$ дорівнює φ . На рисунку 5.6 $\angle AOB = \varphi$. Тоді $\angle BOC = \angle AOD = 180^\circ - \varphi$ і $\angle COD = \varphi$.

$$\begin{aligned} \text{Маємо: } S_{ABCD} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = \\ &= \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin (180^\circ - \varphi) + \\ &+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin (180^\circ - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} OB (OA + OC) \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD (OC + OA) \cdot \sin \varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} OB \cdot AC \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot AC \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} AC (OB + OD) \cdot \sin \varphi = \\
 &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 65 см і 80 см. Знайдіть найменшу висоту трикутника, радіуси його вписаного й описаного кіл.

Розв'язання. Нехай $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см.

Знайдемо півпериметр трикутника:

$$p = \frac{17 + 65 + 80}{2} = 81 \text{ (см)}.$$

Площу трикутника обчислимо за формулою Герона:

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} = \\
 &= \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288 \text{ (см}^2\text{)}.
 \end{aligned}$$

Найменшою висотою трикутника є висота h_c , проведена до його найбільшої сторони, довжина якої дорівнює c .

$$\text{Оскільки } S = \frac{1}{2} ch_c, \text{ то } h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7,2 \text{ (см)}.$$

Радіус r вписаного кола дорівнює $\frac{S}{p}$.

$$\text{Звідси } r = \frac{288}{81} = \frac{32}{9} \text{ (см)}.$$

Радіус R описаного кола дорівнює $\frac{abc}{4S}$.

$$\text{Звідси } R = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72} \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см. $\blacktriangleleft$



1. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо дві його сторони та кут між ними?
2. Запишіть формулу Герона для обчислення площі трикутника.
3. Як можна обчислити площу трикутника зі сторонами a , b і c та радіусом R описаного кола?
4. Як можна знайти радіус описаного кола трикутника, якщо відомо площу трикутника та його сторони?
5. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо його півпериметр і радіус вписаного кола?
6. Як можна знайти радіус вписаного кола трикутника, якщо відомо площу трикутника та його сторони?
7. Чому дорівнює площа описаного многокутника?



ВПРАВИ

5.1.° Знайдіть площу трикутника ABC , якщо:

- 1) $AB = 14$ см, $BC = 6$ см, $\sin B = \frac{2}{7}$;
- 2) $AB = 12$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 30^\circ$;
- 3) $AC = 3$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135^\circ$.

5.2.° Знайдіть площу трикутника DEF , якщо:

- 1) $DF = 5$ см, $EF = 20$ см, $\sin F = 0,6$;
- 2) $DE = 7$ см, $DF = 8$ см, $\angle D = 60^\circ$;
- 3) $DE = 10$ см, $EF = 6$ см, $\angle E = 150^\circ$.

5.3.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника з бічною стороною 16 см і кутом 15° при основі.

5.4.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника з бічною стороною 6 см і кутом 45° при вершині.

5.5.° Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть його площу.

Як ви думаєте, яку формулу для знаходження площі трикутника доцільно застосувати в цій задачі? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

5.6.° Площа трикутника MKN дорівнює 75 см^2 . Знайдіть сторону MK , якщо $KN = 15$ см, $\angle K = 30^\circ$.

5.7.° Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює $36\sqrt{3} \text{ см}^2$, а кут при вершині — 120° .

5.8.° Кут E трикутника DEF є тупим. Знайдіть цей кут, якщо $DE = 9$ см, $EF = 8$ см, а площа трикутника дорівнює 18 см^2 .

5.9.° Площа гострокутного трикутника MNK дорівнює $5\sqrt{3} \text{ см}^2$. Відомо, що $MK = 5$ см, $MN = 4$ см. Знайдіть кут M .

5.10.° Знайдіть площу трикутника зі сторонами:

- 1) 13 см, 14 см, 15 см; 2) 2 см, 3 см, 4 см.

5.11.° Знайдіть площу трикутника зі сторонами:

- 1) 9 см, 10 см, 17 см; 2) 4 см, 5 см, 7 см.

5.12.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а основа — 16 см. Знайдіть площу трикутника.

Як ви думаєте, чи доцільно для розв'язання цієї задачі застосовувати формулу Герона? Обговоріть це питання в класі.

5.13.° Периметр трикутника дорівнює 32 см, а радіус вписаного кола — 1,5 см. Знайдіть площу трикутника.

5.14.° Площа трикутника дорівнює 84 см^2 , а його периметр — 72 см. Знайдіть радіус вписаного кола трикутника.

5.15.° Кут між сусідніми сторонами паралелограма, відмінного від прямокутника, може бути як гострим, так і тупим. У ключовій задачі 1 пункту ви ознайомилися з формулою для знаходження площі паралелограма. Висловіть свою думку, чому в цій формулі не звертається увага на вид кута між сторонами паралелограма. Обговоріть її в класі.

5.16.° Знайдіть площу паралелограма за його сторонами a і b та кутом α між ними, якщо:

1) $a = 5\sqrt{2} \text{ см}$, $b = 9 \text{ см}$, $\alpha = 45^\circ$;

2) $a = 10 \text{ см}$, $b = 18 \text{ см}$, $\alpha = 120^\circ$.



5.17.° Чому дорівнює площа паралелограма, сторони якого дорівнюють 73 см і 52 см, а один із кутів — 150° ?

Числове значення знайденої вами площі паралелограма дорівнює року заснування Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», одного з найпрестижніших вищих навчальних закладів України. Знайдіть в інтернеті інформацію про історію та сьогодення цього вишу, ознайомтеся зі спеціальностями, за якими готує фахівців цей навчальний заклад. Поміркуйте, чи хотіли б ви здобути вищу освіту в цьому університеті.



**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

5.18.° Знайдіть площу ромба зі стороною $9\sqrt{3}$ см і кутом 60° .

Узагальніть розв'язання цієї задачі, сформулювавши правило обчислення площі ромба за стороною та кутом. Обговоріть свою пропозицію з однокласниками й однокласницями.

5.19.° Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними — 30° . Знайдіть площу чотирикутника.

5.20.° Знайдіть площу опуклого чотирикутника, діагоналі якого дорівнюють $3\sqrt{3}$ см і 4 см, а кут між ними — 60° .

5.21.* Знайдіть кут між даними сторонами трикутника ABC , якщо:

1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площа трикутника дорівнює $30\sqrt{3}$ см²;

2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площа трикутника дорівнює 56 см².

Обговоріть з однокласниками й однокласницями, скільки розв'язків у кожному випадку має задача.

5.22.* Площа трикутника ABC дорівнює 18 см². Відомо, що $AC = 8$ см, $BC = 9$ см. Знайдіть кут C .

5.23.* Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см.

5.24.* Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см.

5.25.* Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами:

1) 5 см, 5 см і 6 см;

2) 25 см, 29 см і 36 см.

5.26.* Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см.



5.27.* Який трикутник із двома даними сторонами має найбільшу площу?



Як змінюється площа трикутника в залежності від величини кута між його сторонами, ви можете подивитися, перейшовши за QR-кодом.

5.28.* Чи може площа трикутника зі сторонами 4 см і 6 см дорівнювати:

- 1) 6 см^2 ; 2) 14 см^2 ; 3) 12 см^2 ?

Поясніть, як ви міркували. Обговоріть свою думку в класі.

5.29.* Дві сусідні сторони паралелограма відповідно дорівнюють двом сусіднім сторонам прямокутника. Чому дорівнює гострий кут паралелограма, якщо його площа вдвічі менша від площі прямокутника?



5.30.* Площі трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно дорівнюють S і S_1 . Відомо, що кути трикутників при вершинах A і A_1 рівні. Доведіть, що $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

5.31.* Знайдіть відношення площ S_1 і S_2 трикутників, зображених на рисунку 5.7 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

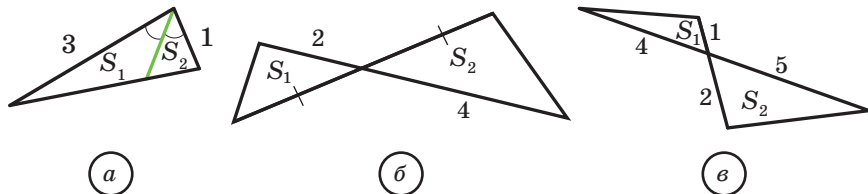


Рис. 5.7

5.32.* Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC . Площа трикутника ABD дорівнює 12 см^2 , а трикутника ACD — 20 см^2 . Знайдіть відношення сторони AB до сторони AC .

5.33.* У трикутник зі сторонами 17 см, 25 см і 28 см вписано коло, центр якого сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трикутників, які при цьому утворилися.

5.34.* Знайдіть площу трикутника, сторона якого дорівнює a , а прилеглі до неї кути дорівнюють β і γ .

5.35.* Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R , а два кути трикутника дорівнюють α і β . Знайдіть площу трикутника.

5.36.* У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть площу трикутника.

5.37.** У трикутнику ABC кут A дорівнює α , а висоти BD і CE дорівнюють відповідно h_1 і h_2 . Знайдіть площу трикутника ABC .

5.38.** Відрізок BM — висота трикутника ABC , $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Знайдіть площу трикутника ABC .

5.39.** Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC , $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 120^\circ$. Знайдіть бісектрису AD .

Незважаючи на те, що цей пункт присвячений площі трикутника, в умові задачі ви не бачите слова «площа». І це не повинно вас дивувати. Адже для розв'язання даної задачі ми радимо застосувати певну формулу для знаходження площі трикутника. У такому разі говорять, що задача розв'язується методом площ.

↔ Якщо вам сподобалася ця задача, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Метод площ». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проекті ви можете знайти на с. 259.

5.40.** Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 50 см, а бічні сторони — 13 см і 37 см.

5.41.** Основи трапеції дорівнюють 4 см і 5 см, а діагоналі — 7 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

5.42.** Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 41 см і 50 см. Знайдіть радіус кола, центр якого належить більшій стороні трикутника та яке дотикається до двох інших сторін.

5.43.** Доведіть, що $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$, де h_1 , h_2 і h_3 — довжини висот трикутника, r — радіус вписаного кола.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

5.44. Трикутний навіс над входом у музей сучасного мистецтва має розміри 6 м, 5 м і 2,2 м. Щоб пофарбувати цей навіс з однієї сторони, вирішили використати балончики з фарбою. Яку найменшу кількість балончиків можна використати, якщо одним балончиком можна пофарбувати $1,5 \text{ м}^2$ поверхні?

- 5.45. Трав'яний газон має форму трикутника (рис. 5.8). Його сторони дорівнюють 7 м, 15 м і 20 м. На цьому газоні планують зробити круглу клумбу з квітів. Яким може бути найбільший радіус цієї клумби?

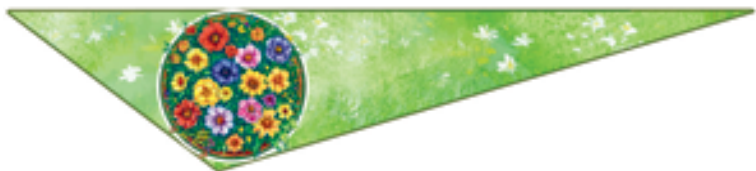


Рис. 5.8



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 5.46. Перпендикуляр, проведений із вершини прямокутника до його діагоналі, ділить його кут у відношенні 4 : 5. Визначте кут між цим перпендикуляром і другою діагоналлю.
- 5.47. Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC . Через точку D проведено пряму, яка паралельна прямій AC і перетинає сторону BC у точці E . Знайдіть відрізок DE , якщо $AC = 16$ см, $BC = 24$ см.



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 19 із підручника «Геометрія. 8 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

- 5.48. Знайдіть суму кутів опуклого семикутника.
- 5.49. Чи існує опуклий багатокутник, сума кутів якого дорівнює:
1) 1080° ; 2) 1200° ?
- 5.50. Чи існує багатокутник, кожний кут якого дорівнює:
1) 72° ; 2) 171° ?



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 5.51. Дано квадрат розміром 99×99 клітинок. Кожну клітинку квадрата пофарбовано в чорний або в білий колір. Дозволяється одночасно перефарбувати всі клітинки деякого стовпця або деякого рядка в той колір, клітинок якого в цьому стовпці або в цьому рядку до перефарбовування було найбільше. Чи завжди можна добитися того, щоб усі клітинки квадрата стали однакового кольору?

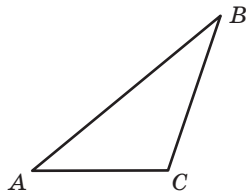


ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.



- Яка з рівностей є правильною?
 - $\cos (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;
 - $\cos (180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;
 - $\sin (180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;
 - $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.
- Яка з нерівностей є правильною?
 - $\sin 100^\circ \cos 110^\circ > 0$;
 - $\sin 100^\circ \cos 10^\circ < 0$;
 - $\sin 100^\circ \cos 110^\circ < 0$;
 - $\sin 100^\circ \cos 90^\circ > 0$.
- На рисунку зображено трикутник ABC . Укажіть серед наведених співвідношень між сторонами та кутами трикутника ABC правильне.
 - $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \sin A$;
 - $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC \cos C$;
 - $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$;
 - $\frac{AB}{\cos C} = \frac{AC}{\cos B}$.



4. Чому дорівнює косинус найменшого кута трикутника зі сторонами 3 см, 5 см і 6 см?
А) $\frac{13}{15}$; Б) $-\frac{1}{15}$; В) $\frac{1}{15}$; Г) $\frac{11}{15}$.
5. Яким є кут, що лежить проти більшої сторони трикутника зі сторонами 4 см, 7 см і 9 см?
А) Гострим;
Б) тупим;
В) прямим;
Г) установити неможливо.
6. Діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см, а його сторони відносяться як 2 : 3. Чому дорівнює периметр паралелограма?
А) 25 см; В) 40 см;
Б) 30 см; Г) 50 см.
7. Чому дорівнює відношення $AC : BC$ сторін трикутника ABC , якщо $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 30^\circ$?
А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;
Б) $\sqrt{3}$; Г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
8. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135^\circ$. Знайдіть діаметр кола, описаного навколо трикутника.
А) 4 см; Б) 8 см; В) 16 см; Г) 2 см.
9. Площа трикутника дорівнює 48 см^2 , а радіус вписаного в нього кола — 4 см. Чому дорівнює периметр трикутника?
А) 24 см; В) 16 см;
Б) 12 см; Г) визначити неможливо.
10. Якого найбільшого значення може набувати площа трикутника зі сторонами 8 см і 12 см?
А) 96 см^2 ; В) 24 см^2 ;
Б) 48 см^2 ; Г) установити неможливо.
11. Чому дорівнює площа трикутника зі сторонами 11 см, 13 см і 20 см?
А) 66 см^2 ; В) $44\sqrt{31} \text{ см}^2$;
Б) $132\sqrt{62} \text{ см}^2$; Г) 99 см^2 .

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 3$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 60^\circ$. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Д).

Відрізок	Довжина відрізка
1) сторона BC	А) 49 см
2) радіус вписаного кола трикутника ABC	Б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см
3) радіус описаного кола трикутника ABC	В) 7 см
	Г) $6\sqrt{3}$ см
	Д) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

- 1°. Дві сторони трикутника дорівнюють $2\sqrt{3}$ см і 3 см, а кут між ними — 30° . Знайдіть третю сторону трикутника та його площу.
- 2°. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$ см, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Знайдіть сторону BC .
- 3°. Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 6 см.
- 4°. Кут між двома сторонами трикутника, одна з яких на 10 см більша за другу, дорівнює 60° , а третя сторона дорівнює 14 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 5°. Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами 25 см, 33 см і 52 см.
- 6°. Дві сторони трикутника дорівнюють 11 см і 23 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 10 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

**ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1****Косинус і синус**

Косинусом і синусом кута α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), якому відповідає точка M одиничного півкола, називають відповідно абсцису й ординату точки M .

Тангенс

Тангенсом кута α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ і $\alpha \neq 90^\circ$, називають відношення $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Теорема косинусів

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Наслідок з теореми косинусів

Нехай a , b і c — довжини сторін трикутника, причому a — довжина його найбільшої сторони. Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним. Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним. Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.

Співвідношення між діагоналями і сторонами паралелограма

Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

Лема про хорду кола

Хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Формули для знаходження площі трикутника

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

$$\text{Формула Герона: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

Формула для знаходження радіуса кола, вписаного в трикутник

$$r = \frac{S}{p}$$

Формули для знаходження радіуса кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Площа многокутника, описаного навколо кола

Площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.



ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

У цьому параграфі ви дізнаєтесь, які многокутники називають правильними. Вивчите властивості правильних многокутників. Дізнаєтесь, як за допомогою циркуля та лінійки будувати деякі з них.

Навчитесь знаходити радіуси вписаного й описаного кіл правильного многокутника, довжину дуги кола, площі сектора та сегмента круга.

6. Правильні многокутники та їхні властивості



Рівносторонній трикутник і квадрат на перший погляд зовсім не схожі між собою геометричні фігури (рис. 6.1). Проте їх об'єднує важлива спільна риса — це многокутники, у яких усі сторони й усі кути рівні.



Рис. 6.1

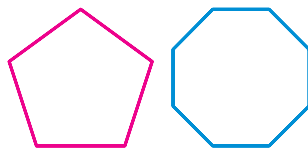


Рис. 6.2

Означення:

Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони рівні та всі кути рівні.

На рисунку 6.2 зображено правильні п'ятикутник і восьмикутник.

Правильний многокутник — це красива, гармонійна фігура. Природа прагне до гармонії, тож не дивно, що подібні форми трапляються й у довкіллі (рис. 6.3). Наприклад, у Болівії, на солончаку Уюні, можна побачити майже ідеальні правильні шестикутники, що утворюються на поверхні. Схожі форми має й структура бджолиних сот — також правильні шестикутники. Крім того, квіти деяких рослин, наприклад жасмину, яблуні, кабачка, мають пелюстки, розташовані у формі, близькій до правильного п'ятикутника. Деякі морські істоти, наприклад морські зірки, теж мають форму правильного п'ятикутника.



Солончак Уюні
(Болівія)



Квітка яблуні



Морська зірка

Рис. 6.3. Многокутники у природі

Людина також здавна тяжіє до гармонії та симетрії, тому часто використовує правильні многокутники в архітектурі та дизайні (рис. 6.4). Наприклад, в основі купола собору Санта-Марія-дель-Фйоре (Флоренція, Італія) лежить правильний восьмикутник. Фонтани на площі Ринок у Львові теж мають чаші у формі правильного восьмикутника, що гармонійно доповнюють архітектурний ансамбль історичного центру міста. Оксагони (восьмикутники) часто зустрічаються в традиційних орнаментах. Гексагональні (шестикутні) візерунки застосовуються у гуцульському килимарстві. У Національному художньому музеї України в Києві можна побачити мозаїчну підлогу з орнаментами, що містять правильні трикутники та шестикутники. Пентагон — будівля Міністерства оборони США — має форму правильного п'ятикутника. Такі форми — це не лише естетика, а й функціональність, якою користується людина в інженерії та дизайні.



Купол собору
Санта-Марія-
дель-Фйоре
(м. Флоренція)



Фонтан
на площі Ринок
(м. Львів)



Українські
писанки

**Рис. 6.4. Правильні многокутники
в архітектурі та мистецтві**

Ознайомимося з деякими властивостями, що притаманні всім правильним n -кутникам.

Теорема 6.1 :

Правильний многокутник є опуклим многокутником.

Із доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 81.

Кожний кут правильного n -кутника дорівнює $\frac{180^\circ (n - 2)}{n}$.

Справді, оскільки сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ (n - 2)$ і всі кути рівні, то кожен із них дорівнює $\frac{180^\circ (n - 2)}{n}$.

У правильному трикутнику є точка, рівновіддалена від усіх його вершин і від усіх його сторін. Це точка перетину бісектрис правильного трикутника. Точці перетину діагоналей квадрата теж притаманна аналогічна властивість. Те, що в будь-якому правильному многокутнику є точка, рівновіддалена як від усіх його вершин, так і від усіх його сторін, підтверджує така теорема.

Теорема 6.2:

Будь-який правильний многокутник є одночасно вписаним у коло і описаним навколо кола, причому центри описаного та вписаного кіл збігаються.

Доведення. ☺ На рисунку 6.5 зображено правильний n -кутник $A_1A_2A_3\dots A_n$. Доведемо, що в нього можна вписати й навколо нього можна описати кола.

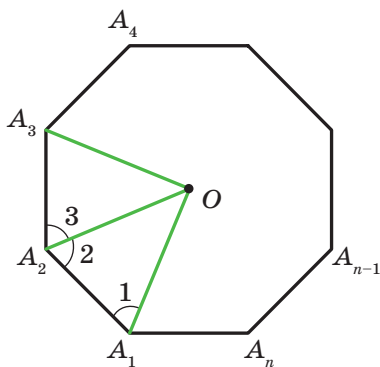


Рис. 6.5

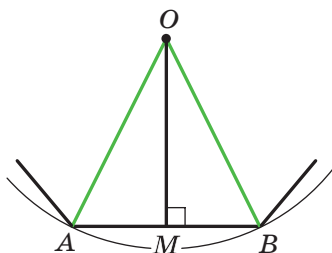


Рис. 6.6

Проведемо бісектриси кутів A_1 і A_2 . Нехай O — точка їхнього перетину. Сполучимо точки O і A_3 . Оскільки в трикутниках OA_1A_2 і OA_2A_3 кути 2 і 3 рівні, $A_1A_2 = A_2A_3$ і OA_2 — спільна сторона, то ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. Крім того, кути 1 і 2 рівні як половини рівних кутів. Звідси трикутник OA_1A_2 — рівнобедрений, отже, рівнобедреним є трикутник OA_2A_3 . Тому $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

Сполучаючи точку O з вершинами $A_4, A_5, \dots, A_{n-1}, A_n$, аналогічно можна показати, що $OA_3 = OA_4 = \dots = OA_{n-1} = OA_n$.

Таким чином, для многокутника $A_1A_2A_3\dots A_n$ існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Це точка O — центр описаного кола.

Оскільки рівнобедрені трикутники $OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, \dots, OA_{n-1}A_n, OA_nA_1$ рівні, то рівні і їхні висоти, проведені з вершини O . Звідси робимо висновок: точка O рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Отже, точка O — центр вписаного кола. ●

Точку, яка є центром описаного та вписаного кіл правильного многокутника, називають **центром правильного многокутника**.

На рисунку 6.6 зображено фрагмент правильного n -кутника із центром O та стороною AB , довжину якої позначимо a_n . Кут AOB називають **центральноним кутом правильного многокутника**. Зрозуміло, що $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.

У рівнобедреному трикутнику AOB проведемо висоту OM (рис. 6.6).

$$\text{Тоді } \angle AOM = \angle BOM = \frac{180^\circ}{n}, \quad AM = MB = \frac{a_n}{2}.$$

Із трикутника OMB отримуємо, що

$$OB = \frac{MB}{\sin \angle BOM} = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \quad \text{і} \quad OM = \frac{MB}{\operatorname{tg} \angle BOM} = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

Відрізки OB і OM — радіуси відповідно описаного та вписаного кіл правильного n -кутника. Якщо їхні довжини позначити R_n і r_n відповідно, то отримані результати можна записати у вигляді формул:

$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

Підставивши у ці формули замість n числа 3, 4, 6, отримаємо формули для знаходження радіусів описаного та вписаного кіл для правильних трикутника, чотирикутника й шестикутника зі стороною a (див. табл.).

Кількість сторін правильного n -кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_3 = \frac{a \sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a \sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \frac{a \sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a \sqrt{3}}{2}$

З отриманих результатів випливає, що сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу його описаного кола. Тепер можна записати алгоритм побудови правильного шестикутника: від довільної точки M кола потрібно послідовно відкладати хорди, які дорівнюють радіусу (рис. 6.7). Таким чином отримуємо вершини правильного шестикутника.

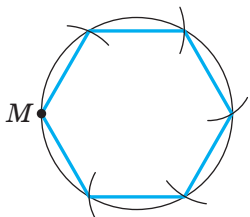


Рис. 6.7

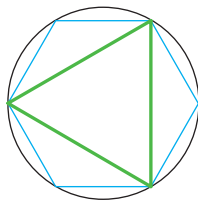


Рис. 6.8

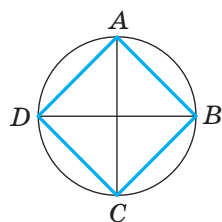


Рис. 6.9

Сполучивши через одну вершини правильного шестикутника, отримаємо правильний трикутник (рис. 6.8).

Для побудови правильного чотирикутника достатньо в колі провести два перпендикулярних діаметри AC і BD (рис. 6.9). Тоді чотирикутник $ABCD$ — квадрат (доведіть це самостійно).



Якщо побудовано правильний n -кутник, то легко побудувати правильний $2n$ -кутник. Для цього потрібно знайти середини всіх сторін n -кутника та провести радіуси описаного кола через отримані точки. Тоді кінці радіусів і вершини даного n -кутника будуть вершинами правильного $2n$ -кутника. На рисунках 6.10 і 6.11 показано побудову правильних 8-кутника та 12-кутника.

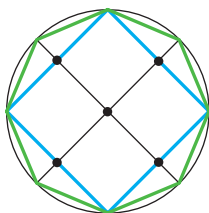


Рис. 6.10

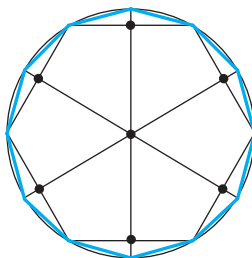


Рис. 6.11

ЗАДАЧА 1. Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 155° ; 2) 177° ? У разі ствердної відповіді вкажіть вид многокутника.

Розв'язання. 1) Нехай n — кількість сторін шуканого правильного многокутника. З одного боку, сума його кутів дорівнює $180^\circ(n-2)$. З другого боку, ця сума дорівнює $155^\circ n$. Отже, $180^\circ(n-2) = 155^\circ n$; $25^\circ n = 360^\circ$; $n = 14,4$. Оскільки n має бути натуральним числом, то такого правильного многокутника не існує.

2) Маємо: $180^\circ(n-2) = 177^\circ n$; $180^\circ n - 360^\circ = 177^\circ n$; $n = 120$.

Відповідь: 1) не існує; 2) існує, це — правильний стодвадцятикутник. ◀

ЗАДАЧА 2. У коло вписано правильний трикутник зі стороною 18 см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

Розв'язання. Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, обчислюють за формулою $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, де a — довжина сторони трикутника (рис. 6.12). Отже,

$$R_3 = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

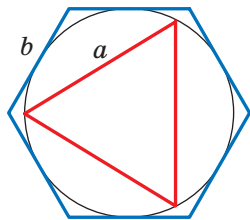


Рис. 6.12

За умовою радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює радіусу кола, описаного навколо правильного трикутника, тобто $r_6 = R_3 = 6\sqrt{3}$ см. Оскільки $r_6 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, де b — довжина сторони правильного шестикутника, то $b = \frac{2r_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ (см).

Відповідь: 12 см. ◀



1. Який многокутник називають правильним? 2. Навколо якого правильного многокутника можна описати коло?
3. У який правильний многокутник можна вписати коло? 4. Як розташовані один відносно одного центри вписаного та описаного кіл правильного многокутника? 5. Що називають

центром правильного многокутника? **6.** Запишіть формули радіусів вписаного та описаного кіл правильного n -кутника, трикутника, чотирикутника, шестикутника.



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

6.1.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см. Побудуйте вписаний у це коло:

- 1) правильний шестикутник;
- 2) правильний трикутник;
- 3) правильний дванадцятикутник.

6.2.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2,5 см. Побудуйте вписаний у це коло: 1) правильний чотирикутник; 2) правильний восьмикутник.

6.3.° Накресліть опуклий шестикутник, який не є правильним, у якому:

- 1) всі сторони рівні;
- 2) всі кути рівні.

6.4.° Накресліть на цупкому папері правильний шестикутник і розріжте його на 3 рівних ромби.



Якщо вам подобається досліджувати, із яких фігур складається дана фігура або як із даних фігур скласти нову фігуру, то пропонуємо вам узяти участь у роботі над проектом «Склеювання і розрізання геометричних фігур».



ВПРАВИ

6.5.° Як на вашу думку, чи є правильним твердження:

- 1) якщо всі кути трикутника рівні, то він є правильним;
- 2) якщо всі кути чотирикутника рівні, то він є правильним;
- 3) якщо всі сторони чотирикутника рівні, то він є правильним?

Обґрунтуйте свою думку, обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

6.6.° На рисунку 6.13 зображено правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O — центр шестикутника. Серед зображених на рисунку відрізків укажіть:

- 1) діагоналі шестикутника;
- 2) радіуси описаного кола;
- 3) радіус вписаного кола.

Який із кутів CAD , DOE , FOM , DOF є центральним кутом шестикутника?

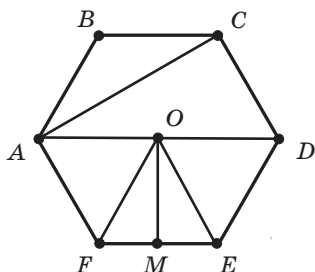


Рис. 6.13

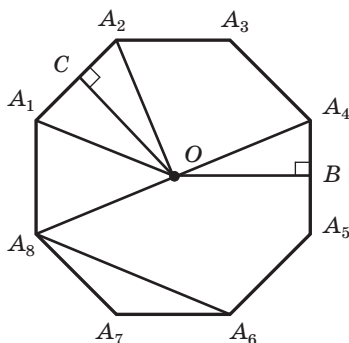


Рис. 6.14

6.7.° На рисунку 6.14 зображено правильний восьмикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, точка O — центр восьмикутника.

Серед зображених на рисунку відрізків укажіть:

- 1) діагоналі восьмикутника;
- 2) радіуси описаного кола;
- 3) радіуси вписаного кола.

Які з кутів A_1OA_8 , A_1OC , A_2OA_4 , A_1OA_2 є центральними кутами восьмикутника?

6.8.° Чому дорівнює периметр правильного 16-кутника, сторона якого дорівнює 3 см?

6.9.° Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, сторона якого дорівнює 6 см, а периметр — 90 см.

6.10.° Периметр правильного семикутника на 42 см більший за його сторону. Знайдіть сторону семикутника.

6.11.° Сторона правильного десятикутника на 90 см менша від його периметра. Чому дорівнює периметр десятикутника?

6.12.° Яка градусна міра центрального кута правильного 30-кутника?

6.13.° Скільки сторін має правильний многокутник, вписаний у коло, якщо градусна міра дуги описаного кола, яку стягує сторона многокутника, дорівнює:

- 1) 90° ;
- 2) 24° ?

- 6.14.°** Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, центральний кут якого дорівнює:
 1) 120° ; 2) 72° .
- 6.15.°** Знайдіть кути правильного n -кутника, якщо:
 1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 15$.
- 6.16.°** Знайдіть кути правильного:
 1) восьмикутника; 2) десятикутника.
- 6.17.°** Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює:
 1) 160° ; 2) 171° ?
- 6.18.°** Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює:
 1) 108° ; 2) 175° ?
- 6.19.°** Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює:
 1) 140° ; 2) 130° ?
- 6.20.°** Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кут, суміжний із кутом многокутника, становить $\frac{1}{9}$ кута многокутника?
- 6.21.°** Визначте кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут на 168° більший за суміжний із ним кут.
- 6.22.°** Нехай a — довжина сторони правильного трикутника, R і r — відповідно радіуси його описаного та вписаного кіл. Заповніть таблицю (довжини відрізків дано в сантиметрах):

a	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

- 6.23.°** Нехай a — довжина сторони квадрата, R і r — відповідно радіуси його описаного та вписаного кіл. Заповніть таблицю (довжини відрізків дано в сантиметрах):

a	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

6.24.° Висота правильного трикутника дорівнює 15 см. Чому дорівнює радіус:

- 1) описаного кола; 2) вписаного кола?

6.25.° Діагональ квадрата дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Чому дорівнює радіус:

- 1) описаного кола; 2) вписаного кола?

6.26.° Радіус кола дорівнює 12 см. Знайдіть сторону вписаного в це коло правильного шестикутника.

6.27.° Радіус кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону описаного навколо цього кола правильного шестикутника.



6.28.° Периметр правильного шестикутника $ABCDEF$ дорівнює 72 см. Знайдіть: 1) радіус описаного кола шестикутника; 2) діагональ AD ; 3) радіус вписаного кола шестикутника; 4) діагональ AC ; 5) відстань від вершини B до прямої AC .

Використовуючи знайдені величини, розшифруйте назву українського міста. Номер завдання відповідає місцю, на якому стоїть буква у слові.

Відповідь	24 см	$12\sqrt{3}$ см	$6\sqrt{3}$ см	6 см	12 см
Буква	А	Я	Д	Ч	Г

Знайдіть в інтернеті інформацію про історію та сьогодення цього древнього міста, зокрема про зв'язок із ним українського вченого, суспільного діяча Михайла Драгоманова та письменниці, етнографки Олени Пчілки.



6.29.° Доведіть, що радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, удвічі більший за радіус кола, яке вписане в цей трикутник.

6.30.° Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, на 4 см більший за радіус вписаного кола. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл та сторону трикутника.

6.31.° Сторона правильного многокутника дорівнює a , радіус описаного кола дорівнює R . Знайдіть радіус вписаного кола.

6.32.° Радіуси вписаного й описаного кіл правильного многокутника дорівнюють відповідно r і R . Знайдіть сторону многокутника.

6.33.° Сторона правильного многокутника дорівнює a , радіус вписаного кола дорівнює r . Знайдіть радіус описаного кола.

6.34.* Навколо кола описано правильний шестикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см (рис. 6.15). Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

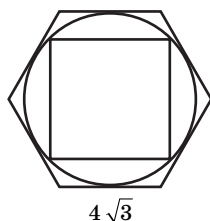


Рис. 6.15

6.35.* У коло вписано квадрат зі стороною $6\sqrt{2}$ см (рис. 6.16). Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

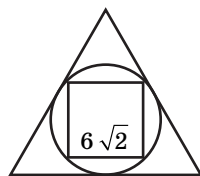


Рис. 6.16

6.36.* Діаметр круга дорівнює 16 см. Чи можна з нього вирізати квадрат зі стороною 12 см?

6.37.* Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого на 36° більший за його центральний кут?

6.38.* Кут між радіусами вписаного кола правильного многокутника, проведеними в точки дотику цього кола до сусідніх сторін многокутника, дорівнює 20° . Знайдіть кількість сторін многокутника.

6.39.* Доведіть, що всі діагоналі правильного п'ятикутника рівні.

Після розв'язання цієї задачі Дарина сказала: «Я впевнена, що існує такий опуклий многокутник, будь-які три вершини якого є вершинами рівнобедреного трикутника». Як ви думаєте, чи має рацію Дарина? Обговоріть це питання у класі.

- 6.40.*** Доведіть, що кожна діагональ правильного п'ятикутника паралельна одній із його сторін.
- 6.41.*** Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною квадрата, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює a . Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать:
- 1) по різні боки від хорди;
 - 2) по один бік від хорди.
- 6.42.*** Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною правильного шестикутника, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює a . Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать:
- 1) по різні боки від хорди;
 - 2) по один бік від хорди.
- 6.43.*** Доведіть, що сторона правильного восьмикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, де R — радіус його описаного кола.
- 6.44.*** Доведіть, що сторона правильного дванадцятикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, де R — радіус його описаного кола.
- 6.45.*** Знайдіть площу правильного восьмикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює R .
- 6.46.*** Знайдіть площу правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a .
- 6.47.**** Кути квадрата зі стороною 6 см зрізали так, що отримали правильний восьмикутник. Знайдіть сторону утвореного восьмикутника.
- 6.48.**** Кути правильного трикутника зі стороною 24 см зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайдіть сторону утвореного шестикутника.
- 6.49.**** Знайдіть діагоналі правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a .
- 6.50.**** У правильному дванадцятикутнику, сторона якого дорівнює a , послідовно сполучили середини шести сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону правильного шестикутника, який утворився при цьому.
- 6.51.**** У правильному восьмикутнику, сторона якого дорівнює a , послідовно сполучили середини чотирьох сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону квадрата, який утворився при цьому.

- 6.52.* Дано правильний шестикутник, сторона якого дорівнює 1 см. Користуючись тільки лінійкою, побудуйте відрізок завдовжки $\sqrt{7}$ см.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

- 6.53. Яким має бути найменший діаметр круглої колоди, щоб із неї можна було виготовити брус, поперечним перерізом якого є правильний трикутник зі стороною 15 см?
- 6.54. Яким має бути найменший діаметр круглої колоди, щоб із неї можна було виготовити брус, поперечним перерізом якого є квадрат зі стороною 14 см?
- 6.55. Який розмір отвору ключа для шестигранної гайки, основи якої мають форму правильного шестикутника (рис. 6.17), якщо ширина грані гайки дорівнює 25 мм, а зазор між гранями гайки й ключа — 0,5 мм?

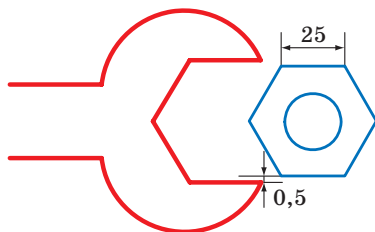


Рис. 6.17



- 6.56. Форму яких рівних правильних многокутників можуть мати дощечки паркету, щоб ними можна було вистелити підлогу? Приклади паркетів, складених з різних правильних многокутників, ви можете подивитися, перейшовши за QR-кодом.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 6.57. Коло поділено на 5 рівних дуг: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup AE$. Знайдіть:
 1) $\angle BAC$; 2) $\angle BAD$; 3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAD$; 5) $\angle DAE$.
- 6.58. Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть площу трикутника.

6.59. Через точку A до кола проведено дві дотичні. Відстань від точки A до точки дотику дорівнює 12 см, а відстань між точками дотику — 14,4 см. Знайдіть радіус кола.



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Про побудову правильних n -кутників

Доведемо, що будь-який правильний n -кутник є опуклим многокутником. Для цього достатньо показати, що в будь-якому многокутнику є хоча б один кут, менший від 180° . Тоді з того, що в правильному n -кутнику всі кути рівні, випливатиме, що всі вони менші від 180° , тобто многокутник буде опуклим.

Розглянемо довільний многокутник і пряму a , яка не має з ним спільних точок (рис. 6.18). Із кожної вершини многокутника опустимо перпендикуляр на пряму a .

Порівнявши довжини цих перпендикулярів, ми зможемо вибрати вершину многокутника, яка найменше віддалена від прямої a (якщо таких вершин кілька, то виберемо будь-яку з них). Нехай цю властивість має вершина A (рис. 6.18). Через точку A проведемо пряму b , паралельну прямій a . Тоді кут A многокутника лежить в одній півплощині відносно прямої b . Отже, $\angle A < 180^\circ$.

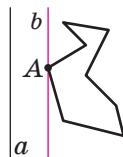


Рис. 6.18

Ви вмієте за допомогою циркуля та лінійки будувати правильний 4-кутник, а отже, і 8-кутник, 16-кутник, 32-кутник, тобто будь-який 2^n -кутник (n — натуральне число, $n > 1$). Уміння побудувати правильний трикутник дає можливість побудувати такий ланцюжок із правильних многокутників: 6-кутник, 12-кутник, 24-кутник і т. д., тобто будь-який $3 \cdot 2^n$ -кутник (n — натуральне число).

Задачу побудови правильних многокутників за допомогою циркуля та лінійки вивчали ще давньогрецькі геометри. Зокрема, крім зазначених вище многокутників, вони вміли будувати правильні 5-кутник і 15-кутник, що є досить непростю справою.

Стародавні вчені, які вміли будувати будь-який із правильних n -кутників, де $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, намагалися розв'язати цю задачу і для $n = 7, 9$. Їм це не вдалося.

Узагалі, понад дві тисячі років математики не могли зрушитися з місця у вирішенні цієї проблеми. Лише в 1796 р. видатний німецький математик Карл Фрідріх Гаусс зміг довести, що за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильні семикутник і дев'ятикутник неможливо. У 1801 р. Гаусс довів, що циркулем та лінійкою можна побудувати правильний n -кутник тоді й тільки тоді, коли $n = 2^k$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, або



**Карл Фрідріх
Гаусс**
(1777–1855)

$n = 2^k \cdot p_1 p_2 \dots p_t$, де k — ціле невід'ємне число, $p_1, p_2, \dots, p_t$ — різні прості числа виду $2^{2^m} + 1$, де m — ціле невід'ємне число, які називають простими числами Ферма¹. Зараз відомо лише п'ять простих чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Гаусс надавав своєму відкриттю настільки великого значення, що заповів зобразити 17-кутник на своєму надгробку. На могильній плиті Гаусса цього рисунка немає, проте пам'ятник Гауссу в Брауншвейзі стоїть на сімнадцятикутному постаменті.

7. Довжина кола. Площа круга



Круглі та прямі лінії оточують нас щодня. Книжки, вікна, телефони, дахи домівок — це все приклади прямокутників і трикутників. А от колеса, тарілки, піца, люки на тротуарах — це вже зразки кіл і кругів. Також у природі нерідко можна знайти «круглі» форми: зріз яблука, сонце на небі (рис. 7.1) чи квітку ромашки.

Щоб усе це виміряти, порахувати, дослідити, побудувати або виготовити, треба навчитися вимірювати довжину кола та площу круга. Тож настав час розібратися з цими важливими поняттями.

¹ П'єр Ферма (1601–1665) — французький математик, один із фундаторів теорії чисел.

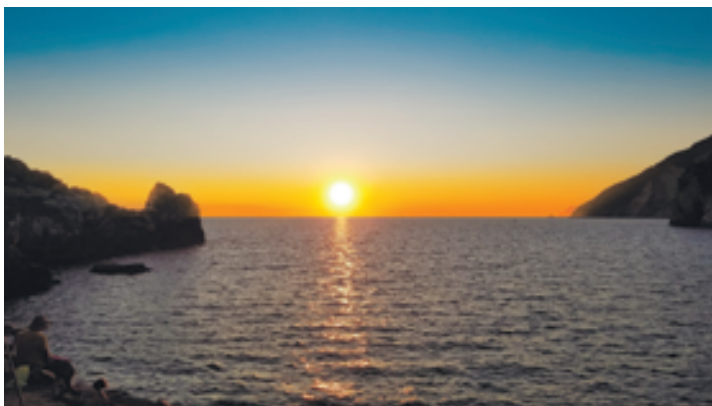


Рис. 7.1

На рисунку 7.2 зображено правильні 4-кутник, 8-кутник і 16-кутник, вписані в коло.

Ми бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n -кутника його периметр P_n усе менше й менше відрізняється від довжини C описаного кола.

Так, для нашого прикладу можна записати:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}.$$

ЖГ1 При необмеженому збільшенні кількості сторін правильного многокутника його периметр буде як завгодно мало відрізнятися від довжини кола. Це означає, що різницю $C - P_n$ можна зробити меншою від, наприклад, 10^{-6} , 10^{-9} і взагалі меншою від будь-якого додатного числа.

Тому можна вважати, що периметр правильного многокутника, вписаного в коло, приблизно дорівнює довжині кола.

Із курсу математики 6 класу ви знаєте, що *для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є одним і тим самим числом*, яке прийнято позначати буквою π (читають: «пі»):

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

де R — радіус кола, C — його довжина.

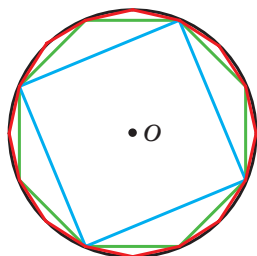


Рис. 7.2

Наведемо деякі обґрунтування цього факту.

Розглянемо два правильних n -кутники зі сторонами a_n і a'_n , вписаних у кола, радіуси яких дорівнюють R і R' відповідно (рис. 7.3). Тоді їхні периметри P_n і P'_n можна обчислити за формулами

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

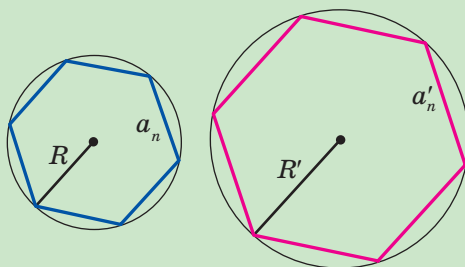


Рис. 7.3

Звідси
$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \quad (*)$$

Ця рівність справедлива при будь-якому значенні n (n — натуральне число, $n \geq 3$). При необмеженому збільшенні значення n периметри P_n і P'_n відповідно будуть як завгодно мало відрізнятися від довжин C і C' описаних кіл.

Тоді при необмеженому збільшенні n відношення $\frac{P_n}{P'_n}$ буде

як завгодно мало відрізнятися від відношення $\frac{C}{C'}$. З ураху-

ванням рівності (*) доходимо висновку, що число $\frac{2R}{2R'}$ як

завгодно мало відрізняється від числа $\frac{C}{C'}$. А це можливо

лише тоді, коли $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, тобто $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Остання рівність означає, що для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є одним і тим самим числом.

З рівності $\frac{C}{2R} = \pi$ отримуємо формулу для обчислення довжини кола:

$$C = 2\pi R$$

Число π є ірраціональним, отже, його не можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу. Зазвичай при розв'язуванні задач за наближене значення π приймають число 3,14.

Видатний давньогрецький учений Архімед (III ст. до н. е.), виразивши через діаметр описаного кола периметр правильного 96-кутника, установив, що $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Звідси й випливає, що $\pi \approx 3,14$.

За допомогою сучасних комп'ютерів і спеціальних програм можна обчислити число π з величезною точністю. Наведемо запис числа π із 43 цифрами після коми:

$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693\dots$

У 2024 р. було встановлено своєрідний рекорд — обчислено 202 112 290 000 000 цифр числа π . Ситуація з подібними рекордами змінюється дуже швидко, тому, якщо вам цікаво, радимо слідкувати за ними у статті «Число π » вікіпедії:

https://uk.wikipedia.org/wiki/Число_pi



Знайдемо формулу для обчислення довжини дуги кола з градусною мірою n° . Оскільки градусна міра всього кола дорівнює 360° , то довжина дуги в 1° дорівнює $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$.

Тоді довжину l дуги в n° можна обчислити за формулою

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Із курсу математики 6 класу ви знаєте, що площу круга обчислюють за формулою

$$S = \pi R^2,$$

де S — площа круга, R — його радіус.

Наведемо деякі обґрунтування цього факту.

Звернемося знову до рисунка 7.2. Бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n -кутника його площа S_n усе менше й менше відрізняється від площі S круга.

При необмеженому збільшенні кількості сторін його площа наближається до площі круга.

На рисунку 7.4 зображено фрагмент правильного n -кутника із центром у точці O , зі стороною $AB = a_n$ і радіусом описаного кола, який дорівнює R . Опустимо перпендикуляр OM на сторону AB . Маємо:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

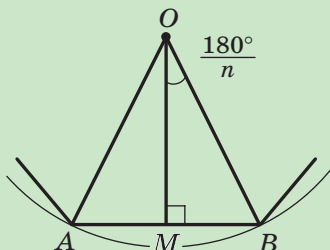


Рис. 7.4

Оскільки радіуси, проведені у вершини правильного n -кутника, розбивають його на n рівних трикутників, то площа n -кутника S_n у n разів більша за площу трикутника AOB . Тоді $S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}$. Звідси

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}, \quad (**)$$

де P_n — периметр даного правильного n -кутника.

При необмеженому збільшенні значення n величина $\frac{180^\circ}{n}$ буде як завгодно мало відрізнятися від 0° , а отже,

$\cos \frac{180^\circ}{n}$ наближатиметься до 1. Периметр P_n наближатиметься до довжини C кола, а площа S_n — до площі S круга.

Тоді з урахуванням рівності (**) можна записати: $S = \frac{1}{2} C \cdot R$.

Із цієї рівності отримуємо формулу для знаходження площі круга: $S = \pi R^2$.

На рисунку 7.5 радіуси OA і OB ділять круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну із цих частин разом із радіусами OA і OB називають **круговим сектором** або **сектором**.

Зрозуміло, що круг радіуса R можна поділити на 360 рівних секторів, кожен з яких міститиме дугу в 1° . Площа такого сектора дорівнює $\frac{\pi R^2}{360}$. Тоді **площу S сектора**, який містить дугу кола в n° , можна обчислити за формулою

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

На рисунку 7.6 хорда AB ділить круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну із цих частин разом із хордою AB називають **круговим сегментом** або **сегментом**. Хорду AB при цьому називають **основною сегмента**.

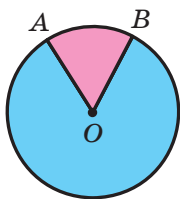


Рис. 7.5

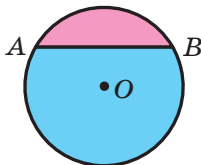


Рис. 7.6

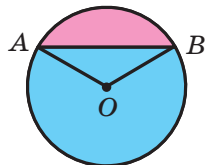


Рис. 7.7

Щоб знайти площу сегмента, зафарбованого в **рожевий** колір (рис. 7.7), треба від площі сектора, який містить хорду AB , відняти площу трикутника AOB (точка O — центр круга). Щоб знайти площу сегмента, зафарбованого в **блакитний** колір, треба до площі сектора, який не містить хорду AB , додати площу трикутника AOB .

Якщо хорда AB є діаметром круга, то вона ділить круг на два сегменти, які називають **півкругами**. Площу S півкруга обчислюють за формулою $S = \frac{\pi R^2}{2}$, де R — радіус круга.

ЗАДАЧА 1. Довжина дуги кола, радіус якого 25 см, дорівнює π см. Знайдіть градусну міру дуги.

Розв'язання. Із формули $l = \frac{\pi R n}{180}$ отримуємо: $n = \frac{180l}{\pi R}$.

Отже, шукана градусна міра

$$n^\circ = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25} \right)^\circ = 7,2^\circ.$$

Відповідь: $7,2^\circ$. ◀

ЗАДАЧА 2. У коло із центром O , радіус якого дорівнює 8 см, вписано правильний восьмикутник $ABCDEFGMK$ (рис. 7.8). Знайдіть площі сектора та сегмента, які містять дугу AB .

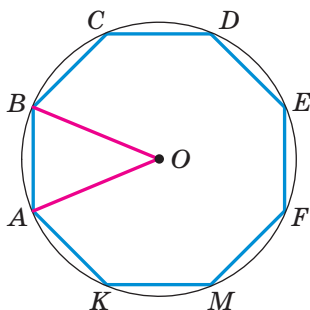


Рис. 7.8

Розв'язання. Кут AOB — центральний кут правильного восьмикутника, тому $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Тоді площа сектора, яку треба знайти, обчислюється так:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi \text{ (см}^2\text{)},$$

площа сегмента так:

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\triangle AOB} = 8\pi - \frac{1}{2}OA^2 \sin \angle AOB = (8\pi - 16\sqrt{2}) \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $8\pi \text{ см}^2$, $(8\pi - 16\sqrt{2}) \text{ см}^2$. ◀



1. Яке відношення позначають буквою π ? **2.** Назвіть наближене значення числа π з точністю до сотих. **3.** За якою формулою обчислюють довжину кола? **4.** За якою формулою обчислюють довжину дуги кола? **5.** За якою формулою обчислюють площу круга? **6.** Поясніть, яку геометричну фігуру називають круговим сектором. **7.** За якою формулою обчислюють площу кругового сектора? **8.** Поясніть, яку геометричну фігуру називають круговим сегментом. **9.** Поясніть, як можна знайти площу кругового сегмента.



ВПРАВИ

7.1.° Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює:

- 1) 1,2 см; 2) 3,5 см.

7.2.° Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:

- 1) 6 см; 2) 1,4 м.

7.3.° Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

- 1) 4 см; 2) 14 дм.

7.4.° Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює:

- 1) 20 см; 2) 3,2 дм.

7.5.° Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:

- 1) 8π см; 2) 19π см.

7.6.° Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює:

- 1) $25\pi \text{ см}^2$; 2) $3\pi \text{ см}^2$.

7.7.° Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює $18\pi \text{ см}$.

7.8.° Нехай R — радіус кола, C — довжина цього кола, S — площа круга, який обмежує це коло. Заповніть таблицю:

R	C	S
5 см		
	$12\pi \text{ см}$	
		$16\pi \text{ см}^2$

7.9.° Як на вашу думку зміниться довжина кола, якщо його радіус:

- 1) збільшити вдвічі; 2) зменшити втричі?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

7.10.° Як на вашу думку зміниться площа круга, якщо його радіус:

- 1) збільшити в 4 рази; 2) зменшити в 5 разів?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

7.11.° Радіуси двох кіл відносяться як $3:7$. Як відносяться:

- 1) довжини цих кіл;
2) площі кругів, що обмежені цими колами?

7.12.° Радіуси двох кругів відносяться як $5:8$. Чому дорівнює відношення площ цих кругів?

7.13.° Знайдіть довжину кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною a .

7.14.° Знайдіть довжину кола, вписаного у квадрат зі стороною a .

7.15.° Знайдіть площу круга, описаного навколо квадрата зі стороною a .

7.16.° Знайдіть площу круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною a .

7.17.° Знайдіть площу круга, вписаного в правильний трикутник зі стороною a .

7.18.° Радіус кола дорівнює 8 см. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює:

- 1) 4° ; 2) 320° .

7.19.° Радіус кола дорівнює 6 см. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює:

- 1) 48° ; 2) 216° .

7.20.° Розгляньте рисунок 7.9 та вкажіть, у якому випадку зафарбована фігура є сектором, а в якому — сегментом.

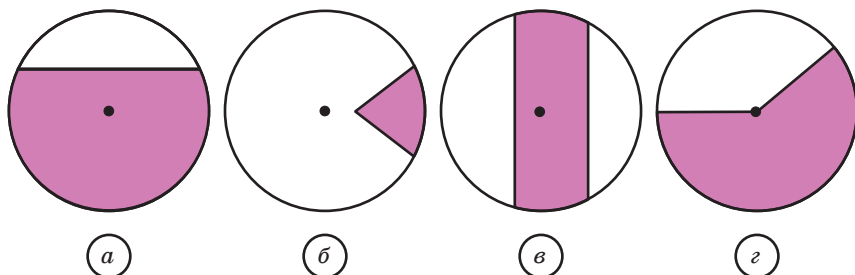


Рис. 7.9

7.21.° Як ви думаєте, чи може сектор круга бути його сегментом?

Обговоріть це питання у класі.

7.22.° Радіус круга дорівнює 6 см. Знайдіть площу сектора, якщо градусна міра його дуги дорівнює:

- 1) 15° ; 2) 280° .

7.23.° Радіус круга дорівнює 10 см. Чому дорівнює площа сектора, градусна міра дуги якого становить:

- 1) 70° ; 2) 300° ?

7.24.° Знайдіть площу круга, описаного навколо прямокутника зі сторонами a і b .

7.25.° Знайдіть площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною b і кутом α при основі.

7.26.° Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника зі стороною a і кутом α між даною стороною та діагоналлю прямокутника.

7.27.° Обчисліть довжину червоної лінії, зображеної на рисунку 7.10.

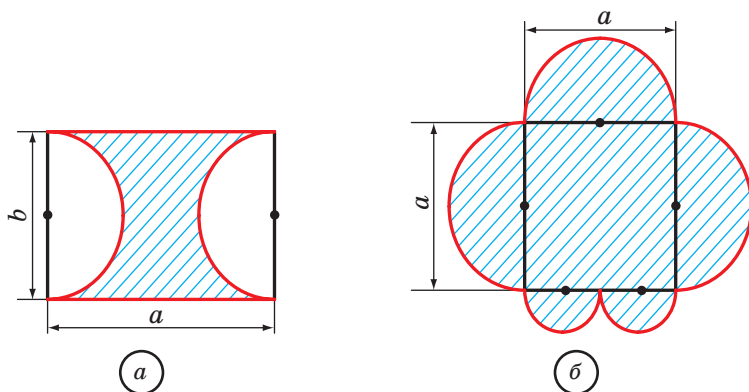


Рис. 7.10

7.28.* Обчисліть довжину червоної лінії, зображеної на рисунку 7.11, якщо довжина сторони клітинки дорівнює 1 см.

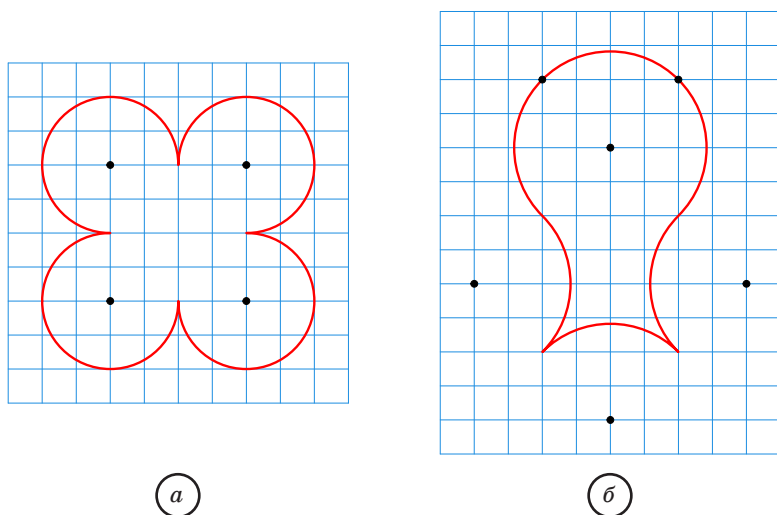
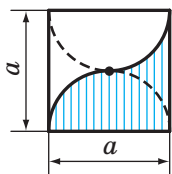


Рис. 7.11

Як ви думаєте, чи можна для знаходження довжини лінії на рисунку 7.11, а не використовувати формулу довжини дуги кола, а лише застосувати формулу довжини кола? Обговоріть це питання з однокласниками й одно-класницями.

7.29.* Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 7.12.

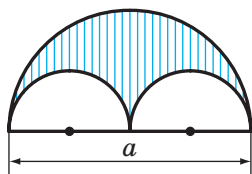
Як ви думаєте, чи можна обчислити площу фігури на рисунку 7.12, *а*, не використовуючи формулу площі круга? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.



а



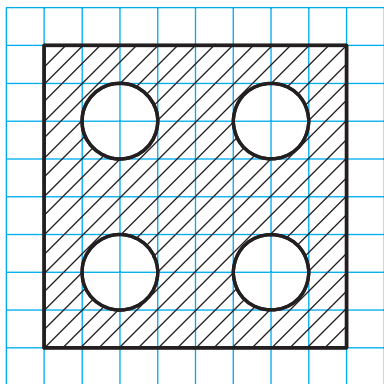
б



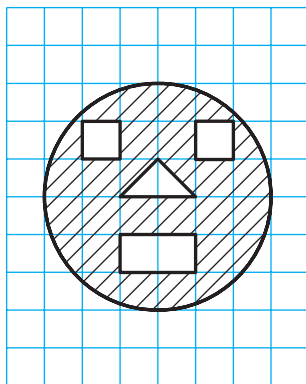
в

Рис. 7.12

7.30.* Обчисліть площу заштрихованої фігури (рис. 7.13), якщо довжина сторони клітинки дорівнює a .



а



б

Рис. 7.13

↔ **7.31.*** Довжина дуги кола дорівнює 12π см, а її градусна міра — 27° . Знайдіть радіус кола.

7.32.* Довжина дуги кола радіуса 24 см дорівнює 3π см. Знайдіть градусну міру дуги.

7.33.* Нехай R — радіус кола, l — довжина його дуги, градусна міра якої дорівнює n° . Заповніть таблицю:

R	n°	l
20 см	160°	
	40°	16π см
15 см		3π см

7.34.* Площа сектора становить $\frac{5}{8}$ площі круга. Знайдіть градусну міру його дуги.

7.35.* Площа сектора дорівнює 6π дм². Знайдіть градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 12 дм.

7.36.* Площа сектора дорівнює $\frac{5\pi}{4}$ см², а градусна міра дуги цього сектора становить 75°. Знайдіть радіус круга, частиною якого є даний сектор.

7.37.* Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 5 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює:
1) 45°; 2) 150°; 3) 330°.

7.38.* Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 2 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює:
1) 60°; 2) 300°.

7.39.* Доведіть, що площа півкруга, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника як на діаметрі (рис. 7.14), дорівнює сумі площ півкругів, побудованих на його катетах як на діаметрах.

7.40.* У круг вписано квадрат зі стороною a . Знайдіть площу меншого із сегментів, основою яких є сторона квадрата.

7.41.* У круг вписано правильний трикутник зі стороною a . Знайдіть площу меншого із сегментів, основою яких є сторона трикутника.

7.42.** Сторона трикутника дорівнює 6 см, а прилеглі до неї кути дорівнюють 50° і 100°. Знайдіть довжини дуг, на які вершини трикутника ділять описане навколо нього коло.

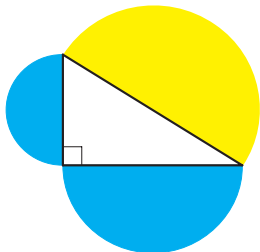


Рис. 7.14

7.43.** Сторона трикутника дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а прилеглі до неї кути дорівнюють 35° і 25° . Знайдіть довжини дуг, на які вершини трикутника ділять описане навколо нього коло.

↔ **7.44.**** На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику, якщо $\angle A = 24^\circ$, $AC = 20$ см.

7.45.** Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70° . На висоті трикутника, яка проведена до основи і дорівнює 27 см, як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги кола, яка належить трикутнику.

7.46.** Відрізок AB розбили на n відрізків. На кожному з них як на діаметрі побудували півколо. Цю дію повторили, розбивши даний відрізок на m відрізків. Знайдіть відношення сум довжин півкіл, отриманих у першому й другому випадках.

Як ви думаєте, чи залежить сума довжин півкіл від кількості та довжин відрізків, на які розбивається відрізок AB ? Зробіть свій висновок і обговоріть його у класі.

7.47.** (Задача Гіппократа¹). Навколо прямокутника описали коло та на кожній його стороні як на діаметрі побудували півколо (рис. 7.15). Доведіть, що сума площ зафарбованих фігур (серпиків Гіппократа) дорівнює площі прямокутника.

Серпики Гіппократа цікаві тим, що вони є прикладом фігур з округлими контурами, площа яких дорівнює площі певного многокутника. Причому серпики Гіппократа — не єдиний приклад таких фігур.

↔ Якщо вам сподобалася ця задача, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Фігури з криволінійними межами, площа яких дорівнює площі многокутників». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо для роботи над ним ви об'єднаєтеся в групи.

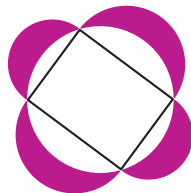


Рис. 7.15

¹ Гіппократ Хіоський — давньогрецький геометр (V ст. до н. е.).

- 7.48.* Знайдіть площу розетки (заштрихованої фігури), яка зображена на рисунку 7.16, якщо сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a .

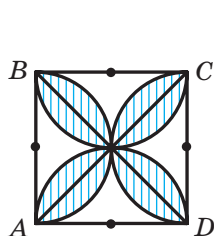


Рис. 7.16

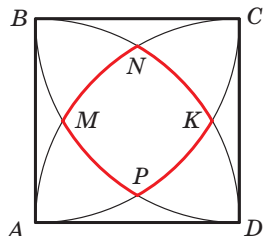


Рис. 7.17

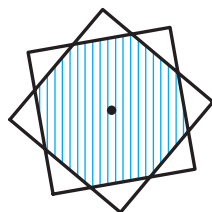


Рис. 7.18

- 7.49.* При побудові чотирьох дуг із центрами у вершинах квадрата $ABCD$ і радіусами, які дорівнюють стороні квадрата, утворилася фігура, обмежена червоною лінією (рис. 7.17). Знайдіть довжину цієї лінії, якщо довжина сторони квадрата дорівнює a .
- 7.50.* Два квадрати зі сторонами 1 см мають спільний центр (рис. 7.18). Доведіть, що площа їхньої спільної частини більша за $\frac{3}{4}$.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

- 7.51. Обчисліть площу поперечного перерізу дерева, яке в обхваті становить 125,6 см.
- 7.52. Довжина земного екватора наближено дорівнює 40 000 000 м. Вважаючи, що Земля має форму кулі, обчисліть її радіус у кілометрах.
- 7.53. Продаються млинці двох видів: діаметром 30 см і 20 см. Якщо всі млинці мають однакову товщину, то у якому випадку покупець з'їсть більше: коли з'їсть один великий млинець чи два менших?
- 7.54. Обчисліть довжину дуги екватора Землі, градусна міра якої дорівнює 1° , якщо радіус екватора наближено дорівнює 6400 км.
- 7.55. Колеса автомобіля мають діаметр 65 см. Автомобіль їде з такою швидкістю, що колеса роблять 6 обертів щосекунди. Знайдіть швидкість автомобіля в кілометрах за годину. Відповідь округліть до десятих.

7.56. Довжина маленької (годинної) стрілки годинника, встановленого на вежі Львівської ратуші, становить 1,7 м, а довжина великої (хвилинної) — 2,15 м. Визначте:

- 1) скільки метрів становить довжина дуги, яку описує кінець маленької стрілки протягом 2 год (відповідь округліть до десятих);
- 2) за скільки хвилин кінець великої стрілки опише дугу завдовжки 4,5 м (відповідь округліть до одиниць).



Львівська ратуша

7.57. Дві труби, внутрішні діаметри яких дорівнюють 30 см і 40 см, потрібно замінити однією трубою з такою ж пропускною здатністю¹. Яким має бути внутрішній діаметр цієї труби?

7.58. З листа жерсті, який має форму круга, вирізали правильний шестикутник найбільшої площі. Скільки відсотків жерсті пішло у відходи?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.59. Знайдіть сторону ромба, якщо його висота дорівнює 6 см, а кут між стороною ромба та однією з діагоналей дорівнює 15° .

7.60. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ ділить його сторону BC на відрізки BM і MC завдовжки 10 см і 14 см відповідно. На відрізки якої довжини ця бісектриса ділить діагональ прямокутника?

7.61. Сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює 90° . Доведіть, що відстань між серединами основ трапеції дорівнює піврізниці основ.

¹ Пропускна здатність водопровідної труби — це маса води, яка проходить через поперечний переріз труби за одиницю часу.



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

- 7.62.** Чому дорівнює відстань між точками A і B координатної прямої, якщо:
- 1) $A(3)$ і $B(7)$;
 - 2) $A(-2)$ і $B(4)$;
 - 3) $A(-2)$ і $B(-6)$;
 - 4) $A(a)$ і $B(b)$?
- 7.63.** Накресліть на координатній площині відрізок AB , знайдіть за рисунком координати середини відрізка та порівняйте їх із середнім арифметичним відповідних координат точок A і B , якщо:
- 1) $A(-1; -6)$, $B(5; -6)$;
 - 2) $A(3; -5)$, $B(-1; 3)$.
- 7.64.** Побудуйте на координатній площині трикутник ABC і знайдіть його сторони, якщо $A(5; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(-3; -1)$.
- 7.65.** У якій координатній чверті знаходиться точка:
- 1) $A(3; -4)$;
 - 2) $B(-3; 1)$;
 - 3) $C(-4; -5)$;
 - 4) $D(1; 9)$?
- 7.66.** У якій координатній чверті знаходиться точка M , якщо:
- 1) її абсциса додатна, а ордината від'ємна;
 - 2) добуток її абсциси та ординати — від'ємне число;
 - 3) її абсциса й ордината від'ємні?
- 7.67.** Що можна сказати про координати точки A , якщо:
- 1) точка A лежить на осі абсцис;
 - 2) точка A лежить на осі ординат;
 - 3) точка A лежить на бісектрисі четвертого координатного кута;
 - 4) точка A лежить на бісектрисі третього координатного кута?
- 7.68.** Знайдіть координати вершин B і D прямокутника $ABCD$ (рис. 7.19).

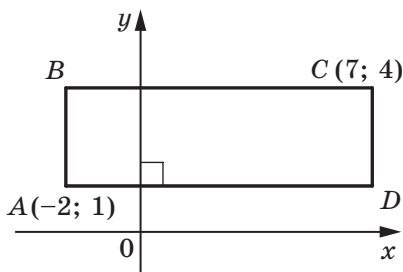


Рис. 7.19



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 7.69. На площині позначили кілька точок. Деякі з них пофарбували червоним кольором, решту — синім. Відомо, що точок кожного кольору не менше трьох і жодні три точки одного кольору не лежать на одній прямій. Доведіть, що якісь три точки одного кольору є вершинами трикутника, на сторонах якого може лежати не більше двох точок іншого кольору.

ЗАВДАННЯ № 2
«ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.



- Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює 170° .
А) 30; В) 36;
Б) 32; Г) такого многокутника не існує.
- Чому дорівнює центральний кут правильного десятикутника?
А) 18° ; Б) 36° ; В) 144° ; Г) 10° .
- Який найбільший центральний кут може мати правильний многокутник?
А) 90° ; В) 150° ;
Б) 120° ; Г) не можна вказати.
- Чому дорівнює радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, менша діагональ якого дорівнює 12 см?
А) 6 см; Б) $6\sqrt{3}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) 12 см.
- Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює 207° , якщо радіус кола — 4 см.
А) 23 см; Б) 4,6 см; В) 23π см; Г) $4,6\pi$ см.

6. Яку частину площі круга становить площа сектора, центральний кут якого дорівнює 140° ?

А) $\frac{7}{9}$; Б) $\frac{7}{12}$; В) $\frac{7}{15}$; Г) $\frac{7}{18}$.

7. Вписаний у коло кут, який дорівнює 40° , спирається на дугу завдовжки 8 см. Яка довжина даного кола?

А) 72 см; Б) 72π см; В) 36 см; Г) 36π см.

8. Якою має бути довжина хорди кола, радіус якого дорівнює R , щоб довжини дуг, на які кінці цієї хорди ділять коло, відносилися як 2 : 1?

А) R ; Б) $2R$; В) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; Г) $R\sqrt{3}$.

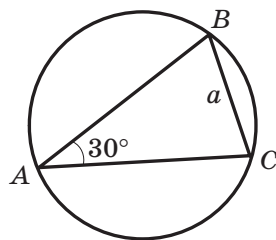
9. На рисунку зображено вписаний у коло трикутник ABC , $\angle A = 30^\circ$, $BC = a$. Чому дорівнює площа сегмента, основа якого стягує дугу BAC ?

А) $\frac{a^2 (2\pi + 3\sqrt{3})}{12}$;

Б) $\frac{a^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$;

В) $\frac{a^2 (10\pi + 3\sqrt{3})}{12}$;

Г) $\frac{a^2 (10\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.



10. У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AC = 14$ см. Коло із центром у точці A дотикається до прямої BC . Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику ABC .

А) $\frac{7\pi}{18}$ см; Б) $\frac{7\pi}{9}$ см; В) $\frac{7\pi}{12}$ см; Г) $\frac{7\pi}{6}$ см.

11. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а радіус вписаного в нього кола — 9 см. Скільки сторін має многокутник?

А) 6; Б) 12; В) 9; Г) 18.

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Сторона правильного шестикутника $ABCDEF$ дорівнює 6 см. Установіть відповідність між дугами (1–3) кола, описаного навколо шестикутника, та їхніми довжинами (А–Д).

Дуга	Довжина дуги
1) ABC	А) 12π см
2) BCE	Б) 4π см
3) AEB	В) 10π см
	Г) 2π см
	Д) 6π см



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

- 1.° Яка градусна міра кута правильного вісімнадцятикутника?
- 2.° Знайдіть площу круга, у який вписано правильний трикутник зі стороною 6 см.
- 3.° Радіус круга дорівнює 4 см. Знайдіть площу сектора, якщо градусна міра його дуги дорівнює 144° .
- 4.° У коло вписано правильний шестикутник, сторона якого дорівнює a . Знайдіть сторону трикутника, описаного навколо цього кола.
- 5.° Хорда кола завдовжки $4\sqrt{3}$ см стягує дугу, градусна міра якої дорівнює 120° . Знайдіть довжину кола.
- 6.° У трикутнику ABC відомо, що $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 65^\circ$. Знайдіть довжину дуги BC кола, описаного навколо даного трикутника.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Правильний багатокутник

Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони рівні та всі кути рівні.

Властивості правильного багатокутника

- Правильний багатокутник є опуклим багатокутником.
- Будь-який правильний багатокутник є одночасно вписаним у коло і описаним навколо кола, причому центри описаного та вписаного кіл збігаються.

Формули для знаходження радіусів описаного та вписаного кіл правильного багатокутника

Кількість сторін правильного n -кутника зі стороною a	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_n = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$R_3 = \frac{a \sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a \sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_n = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	$r_3 = \frac{a \sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a \sqrt{3}}{2}$

Довжина кола

$$C = 2\pi R$$

Довжина дуги кола в n°

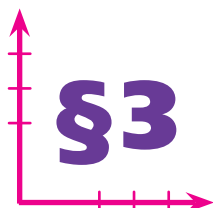
$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Площа круга

$$S = \pi R^2$$

Площа сектора, який містить дугу кола в n°

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$



§3

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви розширите свої знання про координатну площину.

Ви навчитеся знаходити довжину відрізка та координати його середини, знаючи координати його кінців.

Отримаєте уявлення про рівняння фігури, виведете рівняння прямої та кола.

Ознайомитеся з методом координат, який дає змогу розв'язувати геометричні задачі засобами алгебри.

8. Відстань між двома точками із заданими координатами. Координати середини відрізка



У 6 класі ви ознайомилися з координатною площиною, тобто з площиною, на якій зображено дві перпендикулярні координатні прямі (вісь абсцис і вісь ординат) зі спільним початком відліку (рис. 8.1). Ви вмієте позначати на ній точки за їхніми координатами і, навпаки, **знаходити координати точки, позначеної на координатній площині.**

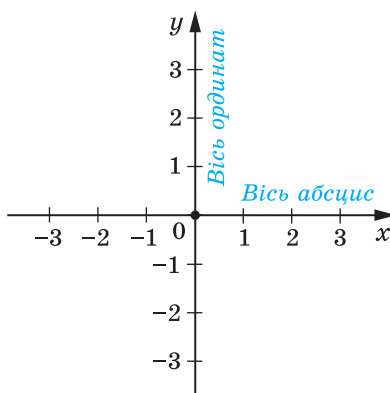


Рис. 8.1

У 9 класі ми продовжимо вивчення цієї теми. Зокрема навчимося описувати різні фігури за допомогою координат і рівнянь. Це допоможе встановити тісний зв'язок між

алгеброю та геометрією, адже математика — єдина наука. Уміння працювати з координатами важливе і на практиці: воно використовується в навігаційних системах, інженерії, архітектурі, комп'ютерному моделюванні та багатьох інших сферах. Тож продовжимо подорож у світ «координатної» геометрії.

Домовилися координатну площину з віссю x (віссю абсцис) і віссю y (віссю ординат) називати **площиною xu** .

Координати точки на площині xu називають **декартовими координатами** на честь французького математика Рене Декарта (див. оповідання на с. 133).

Ви знаєте, як знаходити відстань між двома точками, заданими своїми координатами на координатній прямій. Для точок $A(x_1)$ і $B(x_2)$ (рис. 8.2) маємо:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Навчимося знаходити відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, заданими на площині xu .

Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 8.3).

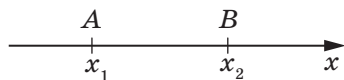


Рис. 8.2

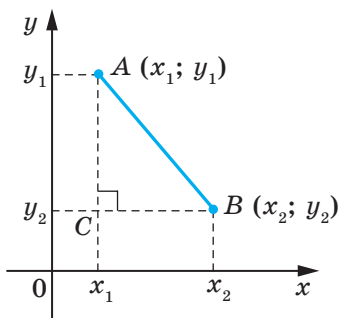


Рис. 8.3

Через точки A і B проведемо прямі, перпендикулярні до координатних осей. Отримаємо прямокутний трикутник ACB , у якому $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$.

Звідси $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Тоді **формулу відстані між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$** можна записати так:



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Доведіть самостійно, що ця формула залишається правильною і для випадку, коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат.

Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — точки площини xy . Знайдемо координати $(x_0; y_0)$ точки M — середини відрізка AB .

Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 8.4). Вважатимемо, що $x_2 > x_1$ (випадок, коли $x_2 < x_1$, розглядається аналогічно). Через точки A , M і B проведемо прямі, перпендикулярні до осі абсцис, які перетнуться цю вісь відповідно в точках A_1 , M_1 і B_1 . За теоремою Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$, тоді $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Оскільки $x_2 > x_0 > x_1$, то можемо записати: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Звідси

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

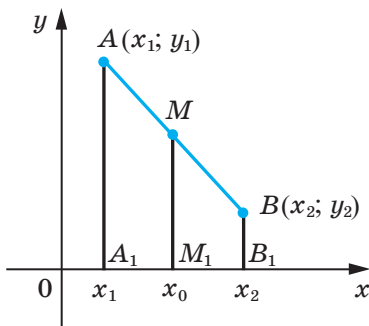


Рис. 8.4

Аналогічно можна показати, що

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Формули для знаходження координат середини відрізка залишаються правильними й у випадку, коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат. Доведіть це самостійно.

ЗАДАЧА 1. Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A(-1; 7)$, $B(1; 3)$ і $C(5; 5)$, є рівнобедреним прямокутним.

Розв'язання. Використовуючи формулу відстані між двома точками, знайдемо сторони даного трикутника:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$

$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Отже, $AB = BC$, тобто трикутник ABC рівнобедрений.

Оскільки $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, то трикутник ABC прямокутний. ◀

ЗАДАЧА 2. Точка $M(2; -5)$ — середина відрізка AB , $A(-1; 3)$. Знайдіть координати точки B .

Розв'язання. Позначимо $(x_B; y_B)$ — координати точки B , $(x_A; y_A)$ — координати точки A , $(x_M; y_M)$ — координати точки M .

Оскільки $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$, то отримуємо:

$$\frac{-1 + x_B}{2} = 2; \quad -1 + x_B = 4; \quad x_B = 5.$$

$$\text{Аналогічно } \frac{y_A + y_B}{2} = y_M; \quad \frac{3 + y_B}{2} = -5; \quad y_B = -13.$$

Відповідь: $B(5; -13)$. ◀

ЗАДАЧА 3. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2; -1)$, $B(1; 3)$, $C(-3; 2)$ і $D(-2; -2)$ є прямокутником.

Розв'язання. Нехай точка M — середина діагоналі AC . Тоді

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad x_M = \frac{2-3}{2} = -0,5;$$
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2}; \quad y_M = \frac{-1+2}{2} = 0,5.$$

Отже, $M(-0,5; 0,5)$.

Нехай точка K — середина діагоналі BD . Тоді

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2}; \quad x_K = \frac{1-2}{2} = -0,5;$$
$$y_K = \frac{y_B + y_D}{2}; \quad y_K = \frac{3-2}{2} = 0,5.$$

Отже, $K(-0,5; 0,5)$.

Таким чином, точки M і K збігаються, тобто діагоналі чотирикутника $ABCD$ мають спільну середину. Звідси випливає, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Знайдемо діагоналі паралелограма:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34},$$

$$BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Отже, діагоналі паралелограма $ABCD$ рівні. Звідси випливає, що цей паралелограм є прямокутником. ◀



1. Як знайти відстань між двома точками, якщо відомо їхні координати? **2.** Як знайти координати середини відрізка, якщо відомо координати його кінців?



ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

У слові «вісь» в однині відбувається чергування голосних і-о: Р. в. *перпендикулярно до осі координат*, Д. в. *належить осі абсцис*, М. в. *лежить на осі ординат*, а також подовження звука [с]: Ор. в. *збігається з віссю абсцис*.

Водночас у множині чергування та подовження звуків не відбувається: *осі, осей, осям, осі, осями, на осях*.



ВПРАВИ

- 8.1.° Знайдіть відстань від початку координат до точки:
1) $A(0; 2)$; 2) $B(15; 8)$; 3) $C(-1; 2)$.
- 8.2.° Знайдіть відстань між точками A і B , якщо:
1) $A(10; 14)$, $B(5; 2)$; 2) $A(-1; 2)$, $B(4; -3)$.
- 8.3.° Знайдіть відстань між точками C і D , якщо:
1) $C(-2; -4)$, $D(4; -12)$; 2) $C(6; 3)$, $D(7; -1)$.
- 8.4.° Вершинами трикутника є точки $A(-1; 3)$, $B(5; 9)$, $C(6; 2)$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.
- 8.5.° Доведіть, що точка $M(0; -1)$ є центром кола, описаного навколо трикутника ABC , якщо $A(6; -9)$, $B(-6; 7)$, $C(8; 5)$.
- 8.6.° Доведіть, що кути B і C трикутника ABC рівні, якщо $A(5; -7)$, $B(-3; 8)$, $C(-10; -15)$.
- 8.7.° Дано точки $O(0; 0)$, $M(10; 4)$, $K(6; -8)$. Знайдіть координати середини відрізка: 1) OM ; 2) OK .
- 8.8.° Знайдіть координати середини відрізка BC , якщо:
1) $B(5; 4)$, $C(3; 2)$; 2) $B(-2; -1)$, $C(-1; 7)$.

8.9.° Точка C — середина відрізка AB . Знайдіть координати точки B , якщо:

- 1) $A(3; -4)$, $C(2; 1)$; 2) $A(-1; 1)$, $C(0,5; -1)$.

8.10.° Точка K — середина відрізка AD . Заповніть таблицю:

Точка	Координати точки		
A	$(-3; 1)$	$(-8; 2)$	
D	$(-1; -3)$		$(-9; 2)$
K		$(-4; 6)$	$(1; 2)$

8.11.° Знайдіть медіану BM трикутника, вершинами якого є точки $A(3; -2)$, $B(2; 3)$ і $C(7; 4)$.

8.12.° Дано точки $A(-2; 4)$ і $B(2; -8)$. Знайдіть відстань від початку координат до середини відрізка AB .

8.13.* Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(2; 7)$, $B(-1; 4)$ і $C(1; 2)$ є прямокутним.

Яку з двох теорем — теорему Піфагора чи обернену до неї — ви застосували під час розв'язання цієї задачі? Обговоріть це питання у класі.

8.14.* Точки $A(-1; 2)$ і $B(7; 4)$ є вершинами прямокутного трикутника. Чи може третя вершина трикутника мати координати:

- 1) $(7; 2)$; 2) $(2; -3)$?

8.15.* Чи лежать на одній прямій точки:

- 1) $A(-2; -7)$, $B(-1; -4)$ і $C(5; 14)$;
2) $D(-1; 3)$, $E(2; 13)$ і $F(5; 21)$?

У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

8.16.* Доведіть, що точки $M(-4; 5)$, $N(-10; 7)$ і $K(8; 1)$ лежать на одній прямій, та вкажіть, яка з них лежить між двома іншими.

8.17.* При якому значенні x відстань між точками $C(3; 2)$ і $D(x; -1)$ дорівнює 5?

8.18.* При якому значенні y відстань між точками $M(-2; y)$ і $K(6; -4)$ дорівнює 10?

8.19.* На осі абсцис знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок $A(-1; -1)$ і $B(2; 4)$.

8.20.* Знайдіть координати точки, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок $D(-2; -3)$ і $E(4; 1)$.

- ↔ **8.21.*** Знайдіть координати точки, яка ділить відрізок AB у відношенні $1:3$, рахуючи від точки A , якщо $A(5; -3)$ і $B(-3; 7)$.
- 8.22.*** Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $A(-5; 1)$, $B(-4; 4)$, $C(-1; 5)$. Знайдіть координати вершини D .
- 8.23.*** Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $A(-2; -2)$, $C(4; 1)$, $D(-1; 1)$. Знайдіть координати вершини B .
- 8.24.*** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2; 8)$, $B(3; -3)$, $C(6; 2)$ і $D(1; 13)$ є паралелограмом.
- 8.25.*** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(1; -2)$ і $D(-1; -6)$ є ромбом. Подумайте, чи можна під час розв'язання цієї задачі не знаходити довжини всіх сторін чотирикутника. Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.
- 8.26.*** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2; 6)$, $B(-8; -2)$, $C(0; -8)$ і $D(6; 0)$ є квадратом.
- ↔ **8.27.*** Точки $D(1; 4)$ і $E(2; 2)$ — середини сторін AC і BC трикутника ABC відповідно. Знайдіть координати вершин A і C , якщо $B(-3; -1)$.
Поміркуйте, як не знаходячи координати вершин трикутника, можна знайти його сторону AB . Обговоріть це питання у класі.
- 8.28.*** Знайдіть довжину відрізка, кінці якого належать осям координат, а серединою є точка $M(-3; 8)$.
- 8.29.**** Знайдіть координати вершини C рівностороннього трикутника ABC , якщо $A(2; -3)$ і $B(-2; 3)$.
- 8.30.**** Знайдіть координати вершини E рівностороннього трикутника DEF , якщо $D(-6; 0)$ і $F(2; 0)$.
- 8.31.**** Про точки A , B і C відомо, що $AB=BC$, $A(5; 9)$, $C(1; -3)$, модулі координат точки B рівні. Знайдіть координати точки B .



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

- 8.32.** На плані парку із координатною сіткою показано розташування різних об'єктів, зокрема входу до парку, фонтана, входу на дитячий майданчик, які позначено

точками $A(0; 0)$, $B(6; 4)$, $C(18; 9)$ відповідно. Одиничний відрізок координатної сітки відповідає 5 м на місцевості. Скільки метрів становить відстань:

- 1) від входу в парк до фонтана;
- 2) від фонтана до входу на дитячий майданчик?



8.33. Місто, у якому живе Олена, має сітчасте планування. На план міста Олена нанесла таку систему координат, що будинку, у якому вона живе, відповідає точка $M(1; 1)$, бібліотеці — точка $A(3; 5)$, кафе — точка $B(-1; 2)$.

- 1) Який із цих об'єктів, бібліотека чи кафе, розташований ближче до будинку Олени?
- 2) Олена планує зустрітися зі своїм другом Дмитром на півдорозі до бібліотеки. Які координати місця зустрічі?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.34. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $AB = 9$ см, $BC = 3$ см. На гіпотенузі AB позначено точку M так, що $AM : MB = 1 : 2$. Знайдіть відрізок CM .

8.35. Знайдіть кути ромба, якщо кут між висотою та діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28° .



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 20 із підручника «Геометрія. 7 клас» та п. 24 із підручника «Алгебра. 7 клас» за посиленнями або QR-кодами на с. 4.

- 8.36. Зобразіть на координатній площині геометричне місце точок, віддалених від точки $M(2; -3)$ на 6 одиничних відрізків.
- 8.37. Точка $A(1; -6)$ — центр кола, точка $B(10; 6)$ належить цьому колу. Чому дорівнює радіус кола?
- 8.38. Відрізок CD — діаметр кола. Знайдіть координати центра кола та радіус кола, якщо $C(6; -4)$, $D(-2; 10)$.
- 8.39. Яка фігура є графіком рівняння:
- | | |
|-------------------|----------------------------------|
| 1) $y = 1$; | 4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$; |
| 2) $y = 3x - 4$; | 5) $xy = 1$; |
| 3) $x = -2$; | 6) $y = \sqrt{x}$? |

9. Рівняння фігури. Рівняння кола



Коли ми чуємо назву фігури, — наприклад «коло» чи «трикутник», — у нашій уяві одразу виникає її образ. Так само можна уявити фігуру, якщо побачити її рівняння. Рівняння фігури — це ніби її особливий підпис або код, за яким можна «побачити» фігуру без рисунка. Саме про це йтиметься у цьому пункті.

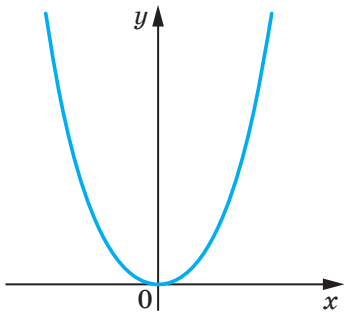


Рис. 9.1

Координати $(x; y)$ кожної точки параболи, зображеної на рисунку 9.1, є розв'язком рівняння $y = x^2$. І навпаки, кожний розв'язок рівняння з двома змінними $y = x^2$ є координатами точки, яка лежить на цій параболі. У цьому разі говорять, що рівняння параболи, зображеної на рисунку 9.1, має вигляд $y = x^2$.

Означення:

Рівнянням фігури F , заданої на площині xy , називають рівняння з двома змінними x і y , яке має такі властивості:

- 1) якщо точка належить фігурі F , то її координати є розв'язком даного рівняння;
- 2) будь-який розв'язок $(x; y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F .

Наприклад, рівняння прямої, зображеної на рисунку 9.2, має вигляд $y = 2x - 1$, а рівняння гіперболи, зображеної на рисунку 9.3, має вигляд $y = \frac{1}{x}$.

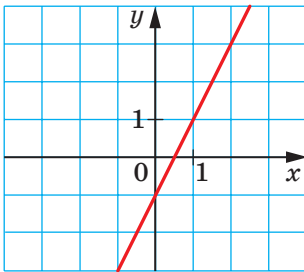


Рис. 9.2

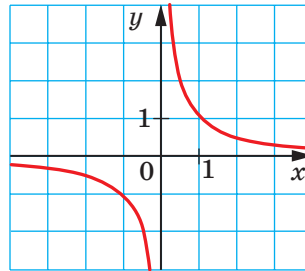


Рис. 9.3

Прийнято говорити, що, наприклад, рівняння $y = 2x - 1$ і $y = \frac{1}{x}$ задають пряму та гіперболу відповідно.

ЖГ1 Перейшовши за QR-кодом, ви зможете побачити чимало рівнянь, які задають певні геометричні фігури.



Якщо дане рівняння є рівнянням фігури F , то цю фігуру можна розглядати як геометричне місце точок (ГМТ), координати яких задовольняють дане рівняння.

Користуючись цими міркуваннями, виведемо рівняння кола радіуса R із центром у точці $A(a; b)$.

Нехай $M(x; y)$ — довільна точка даного кола (рис. 9.4). Тоді $AM = R$. Використовуючи формулу відстані між точками, отримаємо: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

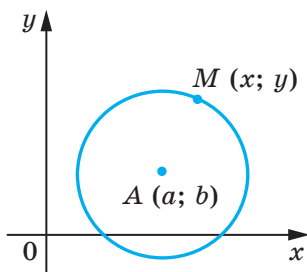


Рис. 9.4

Звідси

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (*)$$

Ми показали, що координати $(x; y)$ довільної точки M даного кола є розв'язком рівняння (*). Тепер покажемо, що будь-який розв'язок рівняння $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, де $R > 0$, є координатами точки, яка належить даному колу.

Нехай пара чисел $(x_1; y_1)$ — довільний розв'язок рівняння (*).

$$\text{Тоді } (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2.$$

$$\text{Звідси } \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = R.$$

Ця рівність показує, що точка $N(x_1; y_1)$ віддалена від центра кола $A(a; b)$ на відстань, що дорівнює радіусу кола, а отже, точка $N(x_1; y_1)$ належить даному колу.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 9.1

Рівняння кола радіуса R із центром у точці $A(a; b)$ має вигляд

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Зауважимо, що правильним є і таке твердження: *будь-яке рівняння виду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, де a, b і R — деякі числа, причому $R > 0$, є рівнянням кола радіуса R із центром у точці з координатами $(a; b)$.*

Якщо центром кола є початок координат (рис. 9.5), то $a = b = 0$. У цьому разі рівняння кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

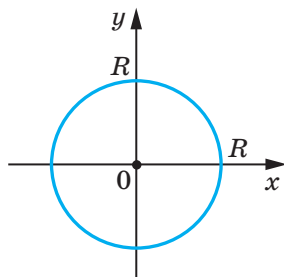


Рис. 9.5

ЗАДАЧА 1. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB , якщо $A(-5; 9)$, $B(7; -3)$.

Розв'язання. Оскільки центр кола є серединою діаметра, то можемо знайти координати $(a; b)$ центра C кола:

$$a = \frac{-5+7}{2} = 1, \quad b = \frac{9-3}{2} = 3.$$

Отже, $C(1; 3)$.

Радіус кола R дорівнює відрізку AC . Тоді $R^2 = (1+5)^2 + (3-9)^2 = 72$.

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 72.$$

Відповідь: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 72$. ◀

ЗАДАЧА 2. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задає коло. Знайдіть координати центра та радіус цього кола.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 &= 0; \\ (x+3)^2 + (y-7)^2 &= 8. \end{aligned}$$

Отже, дане рівняння є рівнянням кола із центром у точці $(-3; 7)$ і радіусом $2\sqrt{2}$.

Відповідь: $(-3; 7)$, $2\sqrt{2}$. ◀

ЗАДАЧА 3. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(-2; -3)$, $B(1; 3)$ і $C(5; 1)$ є прямокутним, і складіть рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC .

Розв'язання. Використовуючи формулу відстані між двома точками, знайдемо квадрати сторін даного трикутника:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (1+2)^2 + (3+3)^2 = 45; \\ AC^2 &= (5+2)^2 + (1+3)^2 = 65; \\ BC^2 &= (5-1)^2 + (1-3)^2 = 20. \end{aligned}$$

Оскільки $AB^2 + BC^2 = AC^2$, то даний трикутник є прямокутним із прямим кутом при вершині B . Центром описаного кола є середина гіпотенузи AC — точка $(1,5; -1)$, радіус

$$\text{кола } R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{65}}{2}.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$(x-1,5)^2 + (y+1)^2 = \frac{65}{4}.$$

Відповідь: $(x-1,5)^2 + (y+1)^2 = \frac{65}{4}$. ◀



1. Що називають рівнянням фігури, заданої на площині xy ?
 2. Який вигляд має рівняння кола із центром у точці $(a; b)$ і радіусом R ?
 3. Який вигляд має рівняння кола із центром у початку координат і радіусом R ?



ВПРАВИ

9.1.° Як ви думаєте, чи є рівнянням кола таке рівняння:

- 1) $(x - 7)^2 + (y - 6)^2 = 49$; 4) $(x + 3)^2 + (y - 9)^2 = -25$;
 2) $x^2 - y^2 = 16$; 5) $(x - 10)^2 + (y + 10)^2 = 0$;
 3) $x^2 + y^2 = 16$; 6) $(x - 1)^2 + y^3 = 36$?

Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

9.2.° Визначте за рівнянням кола координати його центра та радіус:

- 1) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$; 3) $x^2 + y^2 = 7$;
 2) $(x + 5)^2 + y^2 = 9$; 4) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$.

9.3.° Заповніть таблицю:

Рівняння кола	Координати центра кола	Радіус кола
$(x + 9)^2 + (y + 2)^2 = 100$		
$x^2 + (y - 6)^2 = 4$		
$(x - 12)^2 + (y + 13)^2 = 5$		

9.4.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра A і радіус R :

- 1) $A (3; 4)$, $R = 4$; 3) $A (7; -6)$, $R = \sqrt{2}$;
 2) $A (-2; 0)$, $R = 1$; 4) $A (0; 5)$, $R = \sqrt{7}$.

9.5.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра B і радіус R :

- 1) $B (-1; 9)$, $R = 9$; 2) $B (-8; -8)$, $R = \sqrt{3}$.

9.6.° Визначте координати центра та радіус кола, зображеного на рисунку 9.6, і запишіть рівняння цього кола.

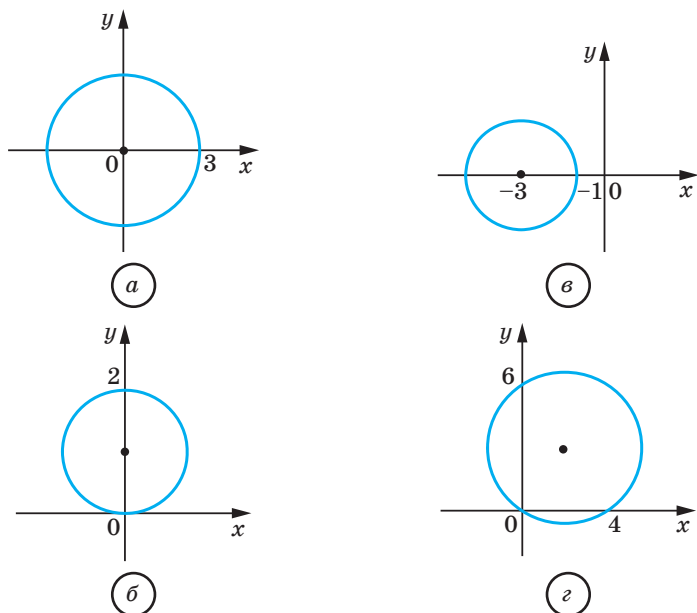


Рис. 9.6

9.7.° Радіус кола із центром у точці A дорівнює 4 (рис. 9.7). Складіть рівняння цього кола.

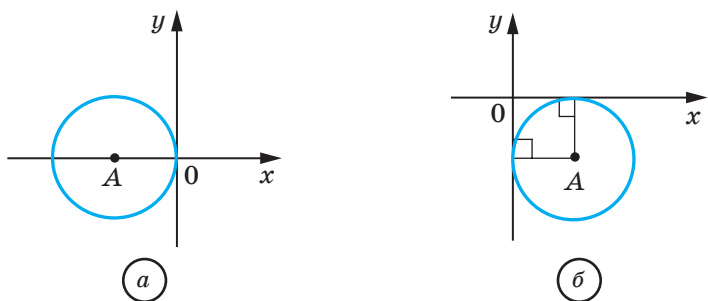


Рис. 9.7

9.8.° Побудуйте на координатній площині коло, рівняння якого має вигляд:

1) $x^2 + y^2 = 4$;

2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

9.9.° Побудуйте на координатній площині коло, рівняння якого має вигляд $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

9.10.° Коло задано рівнянням $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$. З'ясуйте, які з точок $A (-3; 0)$, $B (-5; -2)$, $C (1; 0)$, $D (-4; 3)$, $E (-7; -3)$, $F (-9; 0)$ лежать: 1) на колі; 2) усередині кола; 3) поза колом.

9.11.° Чи належить колу $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ точка:

1) $A (8; -8)$; 2) $B (6; -9)$; 3) $C (-3; 7)$; 4) $D (-4; 6)$?

9.12.° На колі, заданому рівнянням $x^2 + y^2 = 100$, знайдіть точки: 1) з абсцисою 6; 2) з ординатою 9.

Скільки, на вашу думку, має це коло спільних точок з осями координат? Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями та знайдіть ці точки.

9.13.° Коло задано рівнянням $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 13$. Чи перетинає це коло: 1) вісь абсцис; 2) вісь ординат? У разі ствердної відповіді знайдіть координати точок перетину.

9.14.° Складіть рівняння кола із центром у точці $M (-3; 1)$, яке проходить через точку $K (-1; 5)$.

9.15.° Складіть рівняння кола із центром у точці $A (4; -2)$, яке проходить через точку $C (1; 0)$.

9.16.° Заповніть таблицю:

Координати кінців діаметра кола	Координати центра кола	Радіус кола	Рівняння кола
$(6; -1); (-2; 3)$			
$(-3; 7); (9; -7)$			

9.17.° Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB , якщо $A (2; -7)$, $B (-2; 3)$.

9.18.* Доведіть, що відрізок AB є діаметром кола $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$, якщо $A (1; -5)$, $B (9; -3)$.

Цю задачу можна розв'язати кількома способами. Який спосіб обрали ви? Обговоріть його у класі.

9.19.* Доведіть, що відрізок CD є хордою кола $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, якщо $C (5; -3)$, $D (-12; 4)$.

 **9.20.*** Складіть рівняння кола, центром якого є точка $P (-6; 7)$ та яке дотикається до осі ординат.

- 9.21.*** Складіть рівняння кола, центр якого знаходиться на прямій $y = -5$ та яке дотикається до осі абсцис у точці $S(2; 0)$.
- 9.22.*** Доведіть, що коло $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:
- 1) дотикається до осі ординат;
 - 2) перетинає вісь абсцис;
 - 3) не має спільних точок із прямою $y = 10$.
- 9.23.**** Скільки існує кіл, які проходять через точку $(3; 5)$, радіуси яких дорівнюють $3\sqrt{5}$ і центри яких належать осі ординат? Запишіть рівняння кожного такого кола.
- 9.24.**** Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(-4; 1)$ і $B(8; 5)$ і центр якого належить осі абсцис.
- 9.25.**** Установіть, чи є дане рівняння рівнянням кола. У разі ствердної відповіді вкажіть координати центра та радіус R цього кола:
- 1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;
 - 2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;
 - 3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;
 - 4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.
- 9.26.**** Доведіть, що дане рівняння є рівнянням кола, і вкажіть координати центра та радіус R цього кола:
- 1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$;
 - 2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.
- 9.27.**** Доведіть, що трикутник із вершинами в точках $A(-1; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(5; 2)$ є прямокутним, і складіть рівняння кола, описаного навколо цього трикутника.
- 9.28.**** Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $y = -4$.
- 9.29.**** Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $x = 2$.
- 9.30.*** Складіть рівняння кола, яке проходить через точки:
- 1) $A(-3; 7)$, $B(-8, 2)$, $C(-6, -2)$;
 - 2) $M(-1; 10)$, $N(12; -3)$, $K(4; 9)$.

**УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ**

- 9.31.** Садовий розприскувач поливає всі рослини в радіусі 4 м. На плані саду із координатною сіткою положенню розприскувача відповідає точка $S(3; 2)$. Одиничний відрізок координатної сітки відповідає 1 м на місцевості.

- 1) Запишіть рівняння межі зони поливу.
- 2) Чи потрапляє в зону поливу кущ, положенню якого відповідає на плані саду точка $T(6; 5)$?



- 9.32.** Вежа стільникового зв'язку має радіус покриття 5 км. На плані місцевості із координатною сіткою положенню вежі відповідає точка $C(0; 0)$. Одиничний відрізок координатної сітки відповідає 1 км на місцевості. Вашому будинку на плані відповідає точка $H(3; 4)$, а будинку вашого друга або подруги — точка $D(5; 1)$. Чи досягає сигнал зв'язку до:
- 1) вашого дому;
 - 2) місця проживання вашого друга або подруги?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 9.33.** Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає його сторону AD у точці E , $AB = BE = 12$ см, $ED = 18$ см. Знайдіть площу паралелограма.
- 9.34.** Перпендикуляр, опущений із вершини прямокутника на його діагональ, ділить цю діагональ на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть периметр прямокутника.



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 9.35.** На площині позначили точки A і B . За допомогою лише циркуля побудуйте точку C таку, щоб точка B була серединою відрізка AC .

10. Рівняння прямої



Пряма — одна з найпростіших, але водночас найважливіших фігур у геометрії. Її рівняння дозволяє описувати положення лінії на площині, знаходити точки перетину з іншими фігурами та розв'язувати різноманітні практичні задачі. У цьому пункті ми з'ясуємо, як виглядає рівняння прямої та як його скласти.

ЖГ1

Теорема 10.1:

Рівняння прямої має вигляд

$$ax + by = c,$$

де a , b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.



Із доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



Зауважимо, що є правильним і таке твердження: *будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a , b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.*

Якщо $a = b = c = 0$, то графіком рівняння $ax + by = c$ є вся площина $xу$. Якщо $a = b = 0$ і $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків.

Із курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння виду $ax + by = c$ називають лінійним рівнянням з двома змінними. Рівняння прямої є окремим видом лінійного рівняння. Схема, зображена на рисунку 10.1, ілюструє сказане.

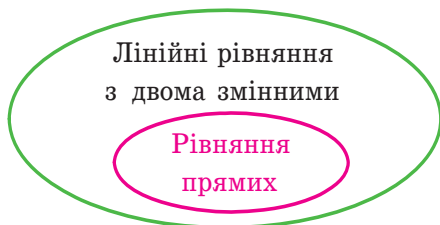


Рис. 10.1

Також на уроках алгебри в 7 класі ми прийняли без доведення той факт, що графіком лінійної функції $y = kx + p$ є пряма. Зараз ми можемо це довести.

Перепишемо рівняння $y = kx + p$ так: $-kx + y = p$. Ми отримали рівняння виду $ax + by = c$ для випадку, коли $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Оскільки в цьому рівнянні $b \neq 0$, то ми отримали рівняння прямої.

А чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$? Відповідь на це запитання заперечна.

Річ у тім, що пряма, перпендикулярна до осі абсцис, не може бути графіком функції, а отже, не може бути задана рівнянням виду $y = kx + p$.

Разом з тим, якщо в рівнянні прямої $ax + by = c$ покласти $b = 0$, то його можна подати у вигляді $x = \frac{c}{a}$. Ми отримали

окремий вид рівняння прямої, усі точки якої мають однакові абсциси. Отже, ця пряма перпендикулярна до осі абсцис. Її називають вертикальною.

Також зазначимо, що коли $b \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ можна записати так: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, отримаємо рівняння $y = kx + p$.

Отже, якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ задає вертикальну пряму; якщо $b \neq 0$, то це рівняння задає неvertикальну пряму.

Рівняння неvertикальної прямої зручно записувати у вигляді $y = kx + p$.

У наведеній таблиці узагальнено матеріал, розглянутий у цьому пункті.

Рівняння	Значення a, b і c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	Неvertикальна пряма
	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	Вертикальна пряма
	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

ЗАДАЧА 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:

- 1) $A(-3; 5)$ і $B(-3; -6)$; 2) $C(6; 1)$ і $D(-18; -7)$.

Розв'язання. 1) Оскільки дані точки мають рівні абсциси, то пряма AB є вертикальною. Її рівняння має вигляд $x = -3$.

2) Оскільки дані точки мають різні абсциси, то пряма CD не є вертикальною. Тоді можна скористатися рівнянням прямої у вигляді $y = kx + p$.

Підставивши координати точок C і D у рівняння $y = kx + p$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Відповідь: 1) $x = -3$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$. ◀

ЗАДАЧА 2. Знайдіть периметр і площу трикутника, обмеженого прямою $5x + 12y = -60$ та осями координат.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даної прямої з осями координат.

З віссю абсцис: при $y = 0$ отримуємо $5x = -60$; $x = -12$.

З віссю ординат: при $x = 0$ отримуємо $12y = -60$; $y = -5$.

Отже, дана пряма й осі координат обмежують прямокутний трикутник AOB (рис. 10.2) з вершинами $A(-12; 0)$, $B(0; -5)$ і $O(0; 0)$.

Знайдемо сторони трикутника:

$$OA = 12, \quad OB = 5, \quad AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13.$$

Знайдемо периметр трикутника:

$$P = OA + OB + AB, \quad P = 30.$$

Знайдемо площу трикутника:

$$S = \frac{1}{2}OA \cdot OB, \quad S = 30.$$

Відповідь: $P = 30$, $S = 30$. ◀

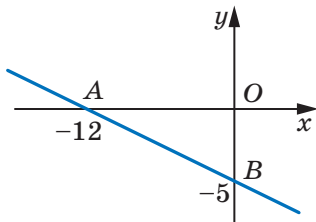


Рис. 10.2



1. Який вигляд має рівняння прямої на площині xy ? **2.** Як прийнято називати пряму, усі точки якої мають однакові абсциси? Як розташована ця пряма відносно осі абсцис? **3.** Чи будь-яке лінійне рівняння з двома змінними є рівнянням прямої? **4.** У якому вигляді зручно записувати рівняння неvertикальної прямої? **5.** Чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$? **6.** За якої умови рівняння прямої $ax + by = c$ є рівнянням вертикальної прямої? неvertикальної прямої?



ВПРАВИ

10.1.° Як ви думаєте, які з даних рівнянь є рівняннями прямої:

- | | |
|----------------------|--------------------|
| 1) $2x - 3y = 5$; | 5) $-3y = 5$; |
| 2) $2x - 3y = 0$; | 6) $2x + 0y = 0$; |
| 3) $2x^2 - 3y = 5$; | 7) $0x + 0y = 0$; |
| 4) $2x = 5$; | 8) $0x + 0y = 5$? |

Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

10.2.° Знайдіть координати точок перетину прямої $4x - 5y = 20$ з осями координат. Чи належить цій прямій точка:

- | | |
|-----------------|---------------------|
| 1) $A(10; 4)$; | 3) $C(-1,5; 5,2)$; |
| 2) $B(6; 1)$; | 4) $D(-1; 5)$? |

10.3.° Знайдіть координати точок перетину прямої $3x + 4y = 12$ з осями координат. Яка з точок $M(-2; 4)$ і $K(8; -3)$ належить цій прямій?

10.4.° Складіть рівняння прямих a і b , зображених на рисунку 10.3.

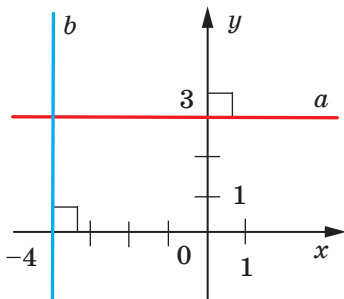


Рис. 10.3

10.5.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(6; -3)$ і перпендикулярна до осі x . Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю x ?

10.6.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $B(5; -8)$ і перпендикулярна до осі y . Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю y ?

10.7.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $C(-4; 9)$ паралельно:

- 1) осі абсцис;
- 2) осі ординат.

10.8.° Складіть рівняння:

- 1) осі абсцис;
- 2) осі ординат;
- 3) прямої, на якій лежить бісектриса третього координатного кута;
- 4) прямої, на якій лежить бісектриса другого координатного кута.

10.9.° Знайдіть координати точки перетину прямих:

- 1) $y = 3x - 7$ і $y = 5x + 9$;
- 2) $2x - 7y = -16$ і $6x + 11y = 16$.

10.10.° Знайдіть координати точки перетину прямих $3x + 2y = 5438$ і $x - 10y = 1610$.

Додавши абсцису й ординату знайденої точки, ви дізнаєтеся рік, коли відбулася перша вистава «Наталка Полтавка» за п'єсою Івана Котляревського.

10.11.* Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:

- 1) $A(1; -3)$ і $B(-2; -9)$;
- 2) $C(3; 5)$ і $D(3; -10)$;
- 3) $E(-4; -1)$ і $F(9; -1)$;
- 4) $M(3; -3)$ і $K(-6; 12)$.

10.12.* Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:

- 1) $A(2; -5)$ і $B(-3; 10)$;
- 2) $C(6; -1)$ і $D(24; 2)$.

10.13.* Точки $A(-6; -1)$, $B(1; 2)$ і $C(-5; -8)$ — вершини трикутника ABC . Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AK трикутника.



**Народна артистка
України
Наталія Сумська
в ролі Наталки
Полтавки**

- 10.14.*** Точки $A(-3; -4)$, $B(-2; 2)$, $C(1; 3)$ і $D(3; -2)$ — вершини трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Складіть рівняння прямої, яка містить середню лінію трапеції.
- 10.15.*** Абсциси середин бічних сторін трапеції рівні. Як ви вважаєте, чи можна стверджувати, що основи трапеції перпендикулярні до осі абсцис?
Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.
- 10.16.*** Знайдіть периметр трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x - 3y = 12$.
- 10.17.*** Знайдіть площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $7y - 2x = 28$.
- 10.18.*** Доведіть, що коло $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ і пряма $x + y = 7$ перетинаються, та знайдіть координати точок їхнього перетину.
- 10.19.*** Доведіть, що пряма $x + y = 5$ є дотичною до кола $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$, і знайдіть координати точки дотику.
- 10.20.*** Доведіть, що коло $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ і пряма $3x + y = 3$ не мають спільних точок.
- 10.21.**** Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими $3x + 2y = 6$ і $y = -\frac{9}{4}x$ та віссю ординат.
- 10.22.**** Знайдіть відстань від початку координат до прямої $5x - 2y = 10$.
- 10.23.**** Знайдіть відстань від початку координат до прямої $x + y = -8$.
- 10.24.**** Знайдіть довжину хорди кола $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, яка лежить на прямій $y = 3x$.
-  **10.25.**** Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки $A(1; -7)$ і $B(-3; 5)$.
- 10.26.**** Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки $C(2; 3)$ і $D(-5; -2)$.
- 10.27.*** Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки $A(3; 6)$.
- 10.28.*** Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки $B(-4; 2)$.
- 10.29.*** Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(2; 0)$ та $B(4; 0)$ і центр якого належить прямій $2x + 3y = 18$.

- 10.30.* Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, радіус яких дорівнює 5 та які відтинають на осі абсцис хорду завдовжки 6.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 10.31. Одна зі сторін трикутника на 15 см більша за другу, а висота, проведена до третьої сторони, ділить її на відрізки завдовжки 32 см і 7 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 10.32. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на її більшій основі. Знайдіть радіус кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а висота — 12 см.

11. Кутовий коефіцієнт прямої



Розглянемо рівняння $y = kx$. Воно задає невертикальну пряму, яка проходить через початок координат.

Покажемо, що прямі $y = kx$ та $y = kx + b$, де $b \neq 0$, паралельні.

Точки $O(0; 0)$ і $C(1; k)$ належать прямій $y = kx$, а точки $A(0; b)$ і $B(1; k + b)$ належать прямій $y = kx + b$ (рис. 11.1). Легко переконатися (зробіть це самостійно), що середини діагоналей AC і OB чотирикутника $OABC$ збігаються. Отже, чотирикутник $OABC$ — паралелограм. Звідси $AB \parallel OC$.

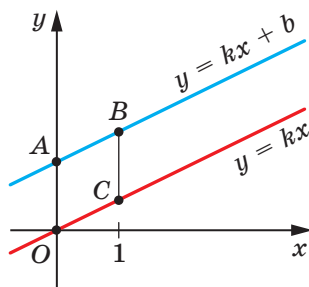


Рис. 11.1

Тепер ми можемо зробити такий висновок:

якщо $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$, то прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні (1).

Справедливим є і обернене твердження, а саме:

якщо прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні, то $k_1 = k_2$ (2).

Властивості (1) і (2) об'єднаємо в одну теорему:

Теорема 11.1:

Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є паралельними тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.



Наочну ілюстрацію цієї теореми ви можете знайти, перейшовши за QR-кодом.



Нехай пряма $y = kx$ перетинає одиничне півколо в точці $M(x_0; y_0)$ (рис. 11.2). Кут AOM називають **кутом між прямою та додатним напрямком осі абсцис**.

Якщо пряма $y = kx$ збігається з віссю абсцис, то кут між цією прямою та додатним напрямком осі абсцис вважають рівним 0° .

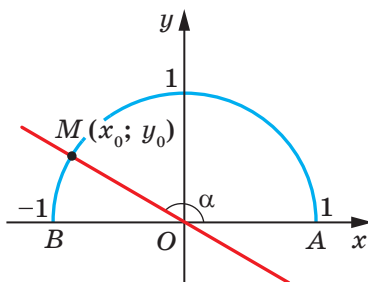


Рис. 11.2

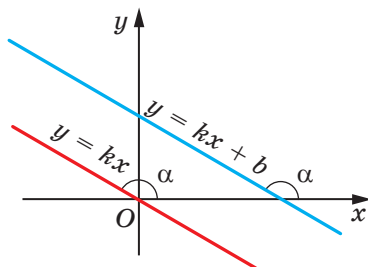


Рис. 11.3

Якщо пряма $y = kx$ утворює з додатним напрямком осі абсцис кут α , то вважають, що й пряма $y = kx + b$, яка паралельна прямій $y = kx$, також утворює кут α з додатним напрямком осі абсцис (рис. 11.3).

У рівнянні прямої $y = kx + b$ коефіцієнт k називають **кутовим коефіцієнтом**. Ця назва пов'язана з тим, що має місце така рівність:

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α — кут, який утворює ця пряма з додатним напрямком осі абсцис.



Наочну ілюстрацію цієї теореми ви можете знайти, перейшовши за QR-кодом.



Наведемо пояснення цього твердження.

Розглянемо пряму MO , рівняння якої має вигляд $y = kx$ (рис. 11.2). Якщо $\angle MOA = \alpha$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Оскільки точка $M(x_0; y_0)$ належить прямій $y = kx$, то $\frac{y_0}{x_0} = k$. Звідси $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Таким чином, для прямої $y = kx + b$ отримуємо, що $k = \operatorname{tg} \alpha$.

ЗАДАЧА. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4; 3)$ і паралельна прямій $y = 0,5x - 4$.

Розв'язання. Нехай рівняння шуканої прямої $y = kx + p$. Оскільки ця пряма й пряма $y = 0,5x - 4$ паралельні, то їхні кутові коефіцієнти рівні, тобто $k = 0,5$.

Отже, шукане рівняння має вигляд $y = 0,5x + p$. Ураховуючи, що дана пряма проходить через точку $A(-4; 3)$, отримуємо:

$$0,5 \cdot (-4) + p = 3.$$

Звідси $p = 5$.

Шукане рівняння має вигляд $y = 0,5x + 5$.

Відповідь: $y = 0,5x + 5$. ◀



1. Поясніть, що називають кутом між прямою та додатним напрямком осі абсцис.
2. Чому вважають рівним кут між прямою, яка паралельна осі абсцис або збігається з нею, та додатним напрямком осі абсцис?
3. Що називають кутовим коефіцієнтом прямої?
4. Як пов'язані кутовий коефіцієнт прямої та кут між прямою й додатним напрямком осі абсцис?
5. Сформулюйте необхідну і достатню умову паралельності двох невертикальних прямих на координатній площині.



ВПРАВИ

11.1.° Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої:

- | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------|
| 1) $y = 2x - 7$; | 3) $y = x + 10$; | 5) $y = 4$; |
| 2) $y = -3x$; | 4) $y = 5 - x$; | 6) $y = 0,8x$? |

11.2.° Чи паралельні прямі:

1) $y = 6x - 5$ і $y = 6 - 5x$; 3) $y = 7 + 2x$ і $y = 7 + 3x$;

2) $y = 2 - 6x$ і $y = -6x$; 4) $y = \frac{1}{2}x$ і $y = 0,5x - 3$?

11.3.° Яке число треба підставити замість зірочки, щоби були паралельними прямі:

1) $y = 8x - 14$ і $y = *x + 2$;

2) $y = *x - 1$ і $y = 3 - 4x$?

11.4.° Який кут, гострий чи тупий, утворює з додатним напрямком осі абсцис пряма:

1) $y = 4x$;

3) $y = 3 - 2x$;

2) $y = -\frac{1}{3}x$;

4) $y = 0,7x - 6$?

11.5.° Яка градусна міра кута, утвореного з додатним напрямком осі абсцис прямою:

1) $y = x$;

2) $y = x\sqrt{3}$;

3) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 9$?

11.6.° Яка градусна міра кута, утвореного з додатним напрямком осі абсцис прямою:

1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) $y = -x + 5$?

11.7.° Подайте рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$ та знайдіть її кутовий коефіцієнт:

1) $7x + y = 6$;

2) $y - x = 1$;

3) $3x - 2y = 4$.

11.8.° Подайте рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$ та знайдіть її кутовий коефіцієнт:

1) $x + y = 9$;

2) $y + 9x = 0$;

3) $5x - 3y = 1$.

11.9.° Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій:

1) $y = 14x - 11$;

2) $y = -1,15x + 2$.

11.10.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3; 7)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює:

1) 4;

2) -3;

3) 0.

11.11.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $B(2; -5)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює $-0,5$.

11.12.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1; 9)$ і паралельна прямій:

1) $y = -7x + 3$;

2) $3x - 4y = -8$.

11.13.* Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $K\left(-\frac{1}{3}; 10\right)$ і паралельна прямій:

1) $y = 9x - 16$;

2) $6x + 2y = 7$.

11.14.* Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 6)$ та утворює з додатним напрямком осі абсцис кут:

1) 60° ;

2) 120° .

11.15.* Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $B(3; -2)$ та утворює з додатним напрямком осі абсцис кут:

1) 45° ;

2) 135° .

11.16.* Складіть рівняння прямої, зображеної на рисунку 11.4.

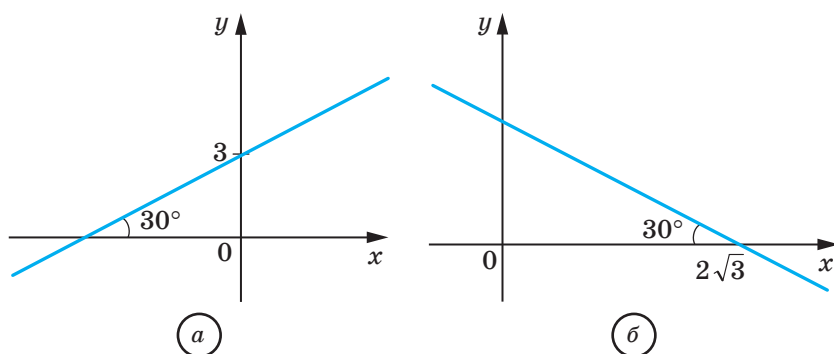


Рис. 11.4

11.17.* Визначте, чи паралельні прямі:

1) $2x - 5y = 9$ і $5y - 2x = 1$;

2) $8x + 12y = 15$ і $4x + 6y = 9$;

3) $7x - 2y = 12$ і $7x - 3y = 12$;

4) $3x + 2y = 3$ і $6x + 4y = 6$.

11.18.* Доведіть, що прямі $7x - 6y = 3$ і $6y - 7x = 6$ паралельні.

11.19.** Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 4x + 2$ і перетинає пряму $y = -8x + 9$ у точці, що належить осі ординат.

11.20.** Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 3x + 4$ і перетинає пряму $y = -4x + 16$ у точці, що належить осі абсцис.



11.21.* Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $y = -x + 3$ і проходить через точку $A(1; 5)$.

Знайдіть добуток кутових коефіцієнтів даної прямої та отриманої. Виявляється, що таку властивість мають кутові коефіцієнти будь-яких перпендикулярних прямих, які не паралельні осям координат.



Якщо ви бажаєте розширити і поглибити свої знання про рівняння прямої, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Рівняння прямої: від теорії до практики». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо для роботи над ним ви об'єднаєтеся в групи.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.22. Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, ділить сторону ромба на відрізки 7 см і 18 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть діагоналі ромба.

11.23. Медіани рівнобедреного трикутника дорівнюють 15 см, 15 см і 18 см. Знайдіть площу трикутника.



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

11.24. Якого найменшого значення може набувати радіус круга, з якого можна вирізати трикутник зі сторонами 2 см, 3 см, 4 см?



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Метод координат

Ми часто говоримо: пряма $y = 2x - 1$, парабола $y = x^2$, коло $x^2 + y^2 = 1$, тим самим ототожнюючи фігуру з її рівнянням. Такий підхід дає змогу зводити задачу про пошук властивостей фігури до задачі про дослідження її рівняння. У цьому й полягає суть методу координат.

Метод координат — один з найуніверсальніших інструментів математики, без якого складно уявити багато сфер діяльності людини: він лежить в основі навігаційних систем, використовується в картографії, архітектурі, ін-

женерії, комп'ютерній графіці, 3D-моделюванні, створенні анімації, робототехніці, геодезії, будівництві та навіть у медицині (наприклад, під час обробки зображень із томографів).

Наведемо декілька прикладів того, як метод координат дозволяє знаходити й описувати властивості геометричних фігур за допомогою формул.

Із наочних міркувань очевидно, що пряма й коло мають не більше двох спільних точок. Проте це твердження не є аксіомою, тому його потрібно доводити.

Ця задача зводиться до дослідження кількості розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2, \end{cases}$$

де числа a і b одночасно не дорівнюють нулю і $R > 0$.

Розв'язуючи цю систему методом підстановки, ми отримаємо квадратне рівняння, яке може мати два розв'язки, один розв'язок або взагалі не мати розв'язків. Отже, для даної системи існує три можливих випадки:

- 1) система має два розв'язки — пряма й коло перетинаються у двох точках;
- 2) система має один розв'язок — пряма дотикається до кола;
- 3) система не має розв'язків — пряма й коло не мають спільних точок.

З кожним із цих випадків ви зустрічалися, розв'язуючи задачі 10.18–10.20.

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ.

Позначимо на площині дві точки A і B . Ви добре знаєте, якою фігурою є геометричне місце точок M таких, що $\frac{MA}{MB} = 1$.

Це серединний перпендикуляр відрізка AB . Цікаво з'ясувати, яку фігуру утворюють усі точки M , для яких $\frac{MA}{MB} = k$, де $k \neq 1$. Розв'яжемо цю задачу для $k = \frac{1}{2}$.

Площину, на якій позначено точки A і B , «перетворимо» в координатну. Зробимо це так: за початок відліку виберемо точку A , за одиничний відрізок — відрізок AB , вісь

абсцис проведемо так, щоб точка B мала координати $(1; 0)$ (рис. 11.5).

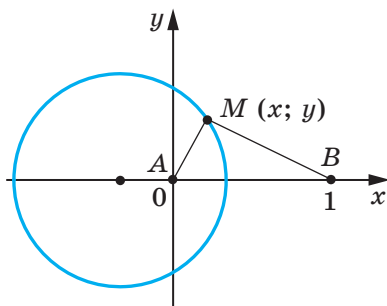


Рис. 11.5

Нехай $M(x; y)$ — довільна точка шуканої фігури F .
Тоді $2MA = MB$; $4MA^2 = MB^2$. Звідси

$$\begin{aligned} 4(x^2 + y^2) &= (x - 1)^2 + y^2; \\ 3x^2 + 2x + 3y^2 &= 1; \\ x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 &= \frac{1}{3}; \\ x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 &= \frac{4}{9}; \\ \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 &= \frac{4}{9}. \end{aligned} \quad (*)$$

Отже, якщо точка $M(x; y)$ належить фігурі F , то її координати є розв'язком рівняння (*).

Нехай $(x_1; y_1)$ — деякий розв'язок рівняння (*). Тоді легко показати, що $4(x_1^2 + y_1^2) = (x_1 - 1)^2 + y_1^2$. А це означає, що точка $N(x_1; y_1)$ є такою, що $4NA^2 = NB^2$. Тоді $2NA = NB$. Отже, точка N належить фігурі F .

Таким чином, рівнянням фігури F є рівняння (*), тобто фігура F — це коло із центром у точці $O\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ і радіусом $\frac{2}{3}$.

Ми розв'язали задачу для окремого випадку, коли $k = \frac{1}{2}$.

Можна показати, що шуканою фігурою для будь-якого додатного $k \neq 1$ буде коло. Це коло називають **колом Аполлонія**¹.

¹ Аполлоній Перзький (III–II ст. до н. е.) — давньогрецький математик і астроном.

Як будували міст між геометрією та алгеброю

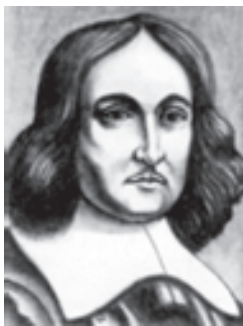
Ідея координат зародилася дуже давно. Адже ще в давнину люди вивчали Землю, спостерігали зорі, а за результатами своїх досліджень складали карти, схеми.

У II ст. до н. е. давньогрецький учений Гіппарх уперше використав ідею координат для визначення місця розташування об'єктів на поверхні Землі.

Лише в XIV ст. французький учений Нікола Орем (близько 1323–1382) уперше застосував у математиці ідею Гіппарха: він розбив площину на клітинки (як розбито аркуш вашого зошита) і почав задавати положення точок широтою й довготою.

Однак величезні можливості застосування цієї ідеї були розкриті лише в XVII ст. у роботах видатних французьких математиків П'єра Ферма і Рене Декарта. У своїх працях ці вчені показали, як завдяки системі координат можна переходити від точок до чисел, від ліній до рівнянь, від геометрії до алгебри.

Попри те що П. Ферма опублікував свою роботу на рік раніше за Р. Декарта, систему координат, якою ми сьогодні користуємося, називають **декартовою**. Це пов'язано з тим, що Р. Декарт у своїй роботі «Міркування про метод» запропонував нову зручну буквену символіку, якою з незначними змінами ми користуємося й сьогодні. Слідом за Декартом ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x , y , z , а коефіцієнти — першими: a , b , c , Звичні нам позначення степенів x^2 , y^3 , z^5 і т. д. також увів Р. Декарт.



П'єр Ферма
(1601–1665)



Рене Декарт
(1596–1650)

**ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ**

- 1°. Знайдіть довжину відрізка AB і координати його середини, якщо $A(-4; 7)$ і $B(2; -3)$.
- 2°. Складіть рівняння кола, центр якого розташований у точці $C(-1; 2)$ і яке проходить через точку $D(3; -1)$.
- 3°. Чи перетинаються прямі $y = 0,2x - 3$ і $y = 1 + 0,2x$? Відповідь обґрунтуйте.
- 4°. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Задано три його вершини: $B(-2; 3)$, $C(10; 9)$, $D(7; 0)$. Знайдіть координати вершини A .
- 5°. Які координати має точка осі ординат, рівновіддалена від точок $A(-3; 4)$ і $B(1; 8)$?
- 6°. Знайдіть абсцису точки прямої AB , ордината якої дорівнює 2, якщо $A(-7; 4)$, $B(9; 12)$.
- 7°. Складіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ і утворює кут 135° із додатним напрямком осі абсцис.

**ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3****Відстань між двома точками**

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ можна знайти за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координати середини відрізка

Координати $(x_0; y_0)$ середини відрізка з кінцями $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ можна знайти за формулами:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Рівняння фігури

Рівнянням фігури F , заданої на площині xu , називають рівняння з двома змінними x і y , яке має такі властивості:

- 1) якщо точка належить фігурі F , то її координати є розв'язком даного рівняння;
- 2) будь-який розв'язок $(x; y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F .

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R із центром у точці $A(a; b)$ має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Будь-яке рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де a , b і R — деякі числа, причому $R > 0$, є рівнянням кола радіуса R із центром у точці з координатами $(a; b)$.

Рівняння прямої

Рівняння прямої має вигляд $ax + by = c$, де a , b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно. Будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a , b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.

Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ задає вертикальну пряму; якщо $b \neq 0$, то це рівняння задає не-вертикальну пряму.

Кутовий коефіцієнт прямої

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + b$ називають кутовим коефіцієнтом прямої, і він дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямком осі абсцис.

Необхідна і достатня умова паралельності неперпендикулярних прямих

Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є паралельними тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.

§4

ВЕКТОРИ

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся, що вектори використовують не тільки у фізиці, а й у геометрії.

Ви навчитеся додавати й віднімати вектори, множити вектор на число, знаходити кут між двома векторами, застосовувати властивості векторів для розв'язування задач.

12. Поняття вектора



Ви знаєте багато величин, які визначаються своїми числовими значеннями: маса, площа, довжина, об'єм, час, температура тощо. Такі величини називають **скалярними величинами** або **скалярами**.

Із курсу фізики вам відомі величини, для задання яких недостатньо знати тільки їхні **числові значення**. Наприклад, якщо на пружину діє сила 5 Н, то не зрозуміло, чи буде пружина стискатися або розтягуватися (рис. 12.1). Потрібно ще знати, у якому напрямку діє сила.



Рис. 12.1

Величини, які визначаються не тільки числовим значенням, але й напрямком, називають **векторними величинами** або **векторами**¹.

¹ Термін «вектор» уперше з'явився в 1845 р., його ввів у вжиток ірландський математик і астроном В. Гамільтон.

Сила, переміщення, швидкість, прискорення, вага — приклади векторних величин.

Вектори застосовують не лише в механіці. Їх використовують у комп'ютерній графіці для відображення груп тривимірних об'єктів, у навігаційних системах, у геодезії та картографії. Навіть у музиці, під час моделювання звукових хвиль, послуговуються векторними величинами.

Є вектори й у геометрії.

Розглянемо відрізок AB . Якщо ми домовимося точку A вважати **початком** відрізка, а точку B — його **кінцем**, то такий відрізок буде характеризуватися не тільки довжиною, але й напрямком від точки A до точки B .

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають **напрямленим відрізком** або **вектором**.

Вектор з початком у точці A та кінцем у точці B позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (читають: «вектор AB »).

На рисунках вектор зображають відрізком зі стрілкою, яка вказує його кінець. На рисунку 12.2 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{MN}$.

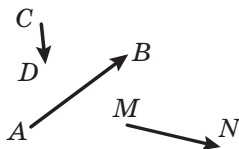


Рис. 12.2

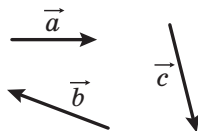


Рис. 12.3

Для позначення векторів також використовують малі букви латинського алфавіту зі стрілкою зверху. На рисунку 12.3 зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка, називають **нульовим вектором** або **нуль-вектором** і позначають $\vec{0}$. Якщо початок і кінець нульового вектора — це точка A , то його можна позначити й так: $\overrightarrow{AA}$. На рисунку нульовий вектор зображають точкою.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB . Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають так: $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нульового вектора вважають рівним нулю:
 $|\vec{0}| = 0$.



Означення:

Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

На рисунку 12.4 зображено колінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\overrightarrow{MN}$.

Той факт, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, записують так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунку 12.5 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені. Такі вектори називають **співнаправленими** й пишуть: $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

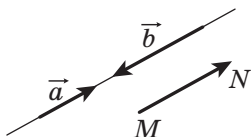


Рис. 12.4

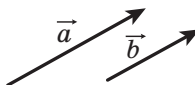


Рис. 12.5

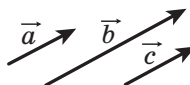


Рис. 12.6

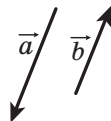


Рис. 12.7

Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і $\vec{b} \parallel \vec{c}$, то $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

Аналогічну властивість мають і співнаправлені вектори, тобто якщо $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ і $\vec{b} \uparrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow \vec{c}$ (рис. 12.6).

На рисунку 12.7 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені. Цей факт записують так: $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.



Означення:

Ненульові вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнаправлені. Будь-які два нульових вектори рівні.

На рисунку 12.8 зображено рівні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Це записують так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Рівність ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ означає, що $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

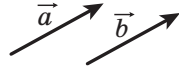


Рис. 12.8

Неважко довести, що коли $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$. Переконайтеся в цьому самостійно.

Часто, говорячи про вектори, ми не конкретизуємо, яка точка є початком вектора. Так, на рисунку 12.9 зображено вектор $\vec{a}$ та вектори, рівні вектору $\vec{a}$. Кожний із них також прийнято називати вектором $\vec{a}$.

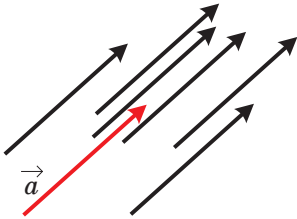


Рис. 12.9

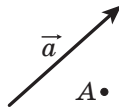


Рис. 12.10

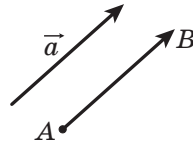


Рис. 12.11

Покажемо, як від довільної точки M відкласти вектор, рівний даному вектору $\vec{a}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ нульовий, то шуканим вектором буде вектор $\overline{MM}$.

Тепер розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$. Нехай точка M

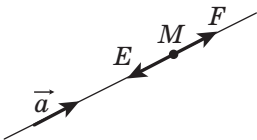


Рис. 12.12

лежить на прямій, яка містить вектор $\vec{a}$ (рис. 12.12). На цій прямій існують дві точки E і F такі, що $ME = MF = |\vec{a}|$. На вказаному рисунку вектор $\overline{MF}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$. Його й потрібно вибрати.

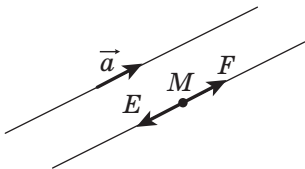


Рис. 12.13

Якщо точка M не належить прямій, яка містить вектор $\vec{a}$, то через точку M проведемо пряму, їй паралельну (рис. 12.13). Подальша побудова аналогічна вже розглянутій.

Від заданої точки можна відкласти тільки один вектор, рівний даному.

ЗАДАЧА. Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overline{AB} = \overline{DC}$ і $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. З умови $\overline{AB} = \overline{DC}$ випливає, що $AB \parallel DC$ і $AB = DC$.

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Рівність $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ означає, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ рівні. А паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. ◀



1. Що в геометрії називають векторами? 2. Як позначають вектор з початком у точці A та кінцем у точці B ? 3. Який вектор називають нульовим? 4. Що називають модулем вектора $\overline{AB}$? 5. Чому дорівнює модуль нульового вектора? 6. Які вектори називають колінеарними? 7. Які вектори називають рівними?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 12.1.° Позначте три точки A , B і C , які не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ і $\overline{CB}$.
- 12.2.° Накресліть довільний вектор $\overline{AB}$. Накресліть вектор $\overline{CD}$, співнаправлений з вектором $\overline{AB}$, і вектор $\overline{EF}$, протилежно напрямлений з вектором $\overline{AB}$.
- 12.3.° Накресліть трикутник ABC . Накресліть вектор, співнаправлений із вектором $\overline{CA}$, початком якого є точка B , і вектор, протилежно напрямлений із вектором $\overline{BC}$, початком якого є точка A .

12.4.° Дано вектор $\vec{a}$ та точку A (рис. 12.14). Відкладіть від точки A вектор, рівний вектору $\vec{a}$.

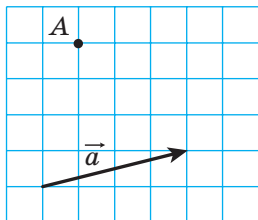


Рис. 12.14

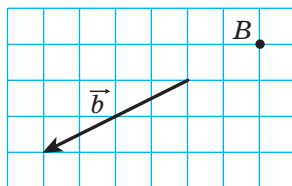


Рис. 12.15

12.5.° Дано вектор $\vec{b}$ і точку B (рис. 12.15). Відкладіть від точки B вектор, рівний вектору $\vec{b}$.

12.6.° Позначте точки A і B . Накресліть вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$.

12.7.° Накресліть вектор $\vec{a}$ та позначте точки M і N . Відкладіть від цих точок вектори, рівні вектору $\vec{a}$.



ВПРАВИ

12.8.° Назвіть вектори, зображені на рисунку 12.16.

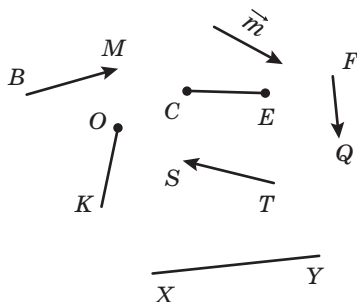


Рис. 12.16

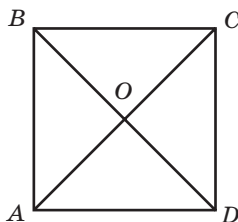


Рис. 12.17

12.9.° Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 12.17). Укажіть вектор, рівний вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{DA}$; 3) $\overrightarrow{BO}$; 4) $\overrightarrow{OC}$.

12.10.° Точки M і N — середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$ відповідно. Укажіть вектори, початки й кінці яких розміщені в точках A, B, C, D, M і N , що рівні вектору: 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AM}$; 3) $\overrightarrow{ND}$.

12.11.° Які з векторів, зображених на рисунку 12.18:

- 1) рівні;
- 2) протилежно напрямлені;
- 3) колінеарні?

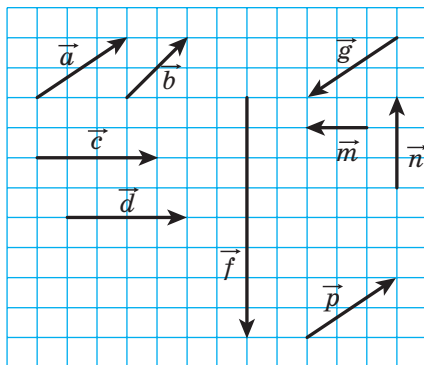


Рис. 12.18

12.12.° Точки M, N і P — відповідно середини сторін AB, BC і CA трикутника ABC . Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться в точках A, B, C, M, N і P :

- 1) рівні вектору $\overrightarrow{MN}$;
- 2) колінеарні вектору $\overrightarrow{AB}$;
- 3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{MP}$;
- 4) співнаправлені з вектором $\overrightarrow{CA}$.

12.13.° Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки й кінці яких розміщені в точках A, B, C, D і O :

- 1) рівні вектору $\overrightarrow{AO}$;
- 2) співнаправлені з вектором $\overrightarrow{OB}$;
- 3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{AD}$.

12.14.° Чи є правильним твердження:

- 1) якщо $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{n}$, то $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{n}|$;
- 2) якщо $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{n}$, то $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{n}$;
- 3) якщо $\overrightarrow{m} \neq \overrightarrow{n}$, то $|\overrightarrow{m}| \neq |\overrightarrow{n}|$?

12.15.° Знайдіть модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 12.19), якщо довжина сторони клітинки дорівнює 1 см.

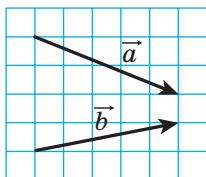


Рис. 12.19

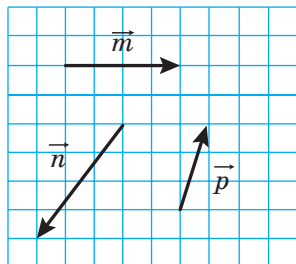


Рис. 12.20

12.16.° Знайдіть модулі векторів $\vec{m}$, $\vec{n}$ і $\vec{p}$ (рис. 12.20), якщо довжина сторони клітинки дорівнює 1 см.

12.17.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть модулі векторів $\vec{CA}$, $\vec{BO}$ і $\vec{OC}$.

12.18.° У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . Відомо, що $|\vec{AB}| = 5$ см, $|\vec{AO}| = 6,5$ см. Знайдіть модулі векторів $\vec{BD}$ і $\vec{AD}$.

12.19.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$ і $\vec{BC} \parallel \vec{DA}$.

12.20.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо вектори $\vec{BC}$ і $\vec{AD}$ колінеарні і $|\vec{BC}| \neq |\vec{AD}|$.

12.21.° Що можна сказати про вектор $\vec{AB}$, якщо $\vec{AB} = \vec{BA}$? Обговоріть це питання у класі.

12.22.* Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\vec{AB} = \vec{DC}$ і $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

12.23.* Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ колінеарні та $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

 **12.24.*** Доведіть, що коли чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Як ви думаєте, чи є справедливим обернене твердження: якщо $\overline{AB} = \overline{DC}$, то точки A, B, C і D є вершинами паралелограма? Обговоріть це питання у класі.

12.25.* У прямокутному трикутнику ABC точка M — середина гіпотенузи AB і $\angle B = 30^\circ$. Знайдіть модулі векторів $\overline{AB}$ і $\overline{MC}$, якщо $AC = 2$ см.

12.26.* У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) медіана CM дорівнює 6 см. Знайдіть модулі векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, якщо $\angle A = 30^\circ$.

12.27.* Відомо, що вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні. Як ви думаєте, чи існує такий вектор $\vec{a}$, який колінеарний кожному з векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$? Обговоріть це питання у класі.

 **12.28.**** Відомо, що вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ колінеарні. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій. Чи є правильним обернене твердження: якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ колінеарні?

 **12.29.**** Для чотирьох точок A, B, C і D відомо, що $\overline{AB} = \overline{CD}$. Доведіть, що середини відрізків AD і BC збігаються. Доведіть обернене твердження: якщо середини відрізків AD і BC збігаються, то $\overline{AB} = \overline{CD}$.

12.30.** Відомо, що $\overline{MO} = \overline{ON}$. Доведіть, що точка O — середина відрізка MN . Доведіть обернене твердження: якщо точка O — середина відрізка MN , то $\overline{MO} = \overline{ON}$.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

12.31. Катер із точки A перемістився на північ на 40 км у точку B , а потім на захід на 60 км із точки B у точку C . Вибравши масштаб, накресліть вектори, які зображають переміщення з точки A в точку B , із точки B у точку C , із точки A в точку C .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 12.32.** Периметр одного з двох подібних трикутників на 8 см більший за периметр другого трикутника. Знайдіть периметри даних трикутників, якщо коефіцієнт подібності дорівнює $\frac{1}{3}$.
- 12.33.** Один із кутів паралелограма дорівнює півсумі трьох інших його кутів. Знайдіть кути паралелограма.
- 12.34.** Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює a , а один із кутів — 60° . Знайдіть площу трапеції.

13. Координати вектора



Розглянемо на координатній площині вектор $\vec{a}$. Відкладемо від початку координат рівний йому вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 13.1). **Координатами вектора $\vec{a}$** називають координати точки A . Запис $\vec{a}(x; y)$ означає, що вектор $\vec{a}$ має координати $(x; y)$.

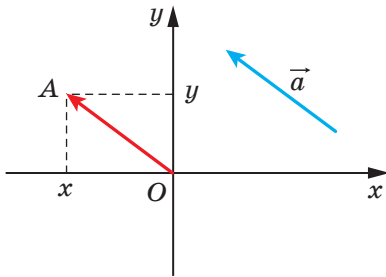
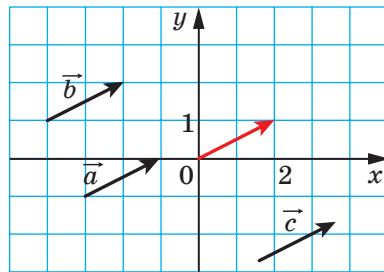


Рис. 13.1



ЖГ 1 Рис. 13.2



Числа x і y називають відповідно **першою** та **другою координатами вектора $\vec{a}$** .

З означення випливає, що **рівні вектори мають рівні відповідні координати**. Наприклад, кожний із рівних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 13.2) має координати $(2; 1)$.

Справедливе й обернене твердження:
якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.

Справді, якщо відкласти такі вектори від початку координат, то їхні кінці збігатимуться.

Очевидно, що нульовий вектор має координати $(0; 0)$.



Теорема 13.1:



Якщо точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.

Доведення. ☺ Нехай вектор $\vec{a}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$, має координати $(a_1; a_2)$. Доведемо, що $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то твердження теореми є очевидним.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$. Відкладемо від початку координат вектор $\overrightarrow{OM}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$. Тоді координати точки M дорівнюють $(a_1; a_2)$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, скориставшись результатом задачі 12.29, можемо зробити висновок, що середини відрізків OB і AM збігаються. Координати середин відрізків OB і AM відповідно дорівнюють $\left(\frac{0+x_2}{2}; \frac{0+y_2}{2}\right)$ і $\left(\frac{x_1+a_1}{2}; \frac{y_1+a_2}{2}\right)$.

Тоді $\frac{0+x_2}{2} = \frac{x_1+a_1}{2}$, $\frac{0+y_2}{2} = \frac{y_1+a_2}{2}$. Ці рівності виконуються й тоді, коли точка O збігається з точкою B або точка A збігається з точкою M .

Звідси $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ●

Із формули відстані між двома точками випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ЗАДАЧА. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(3; -2)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; -3)$. Знайдіть координати вершини D .

Розв'язання. Оскільки чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Отже, координати цих векторів рівні.

Нехай координати точки D дорівнюють $(x; y)$. Для знаходження координат векторів $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ скористаємося теоремою 13.1.

Маємо: $\overline{AB}(-4 - 3; 1 - (-2)) = \overline{AB}(-7; 3)$; $\overline{DC}(-2 - x; -3 - y)$.

Звідси

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Відповідь: $D(5; -6)$. ◀



1. Поясніть, що називають координатами даного вектора.
2. Що можна сказати про координати рівних векторів?
3. Що можна сказати про вектори, відповідні координати яких рівні?
4. Як знайти координати вектора, якщо відомо координати його початку та кінця?
5. Як знайти модуль вектора, якщо відомо його координати?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

13.1.° Відкладіть від початку координат вектори $\vec{a}(-3; 2)$, $\vec{b}(0; -2)$ і $\vec{c}(4; 0)$.

13.2.° Відкладіть від точки $M(-1; 2)$ вектори $\vec{a}(1; -3)$, $\vec{b}(-2; 0)$ і $\vec{c}(0; -1)$.



ВПРАВИ

13.3.° Знайдіть координати векторів, що зображені на рисунку 13.3.

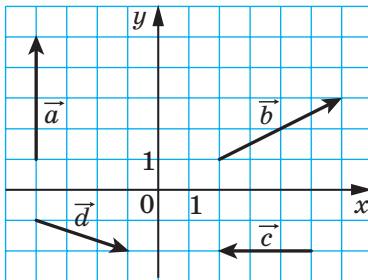


Рис. 13.3

13.4.° Знайдіть координати векторів, що зображені на рисунку 13.4.

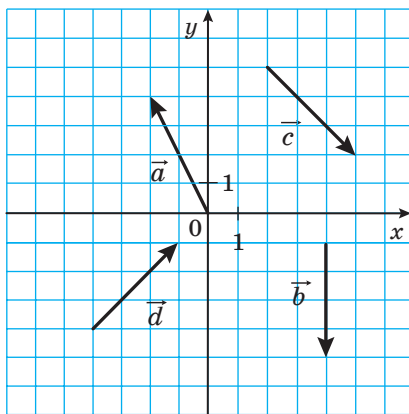


Рис. 13.4

13.5.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

- 1) $A(2; 3), B(-1; 4);$ 3) $A(0; 0), B(-2; -8);$
- 2) $A(3; 0), B(0; -3);$ 4) $A(m; n), B(p, k).$

13.6.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{MK}$, якщо:

- 1) $M(5; 3), K(7; -1);$ 2) $M(9; -4), K(4; -10).$

13.7.° При яких значеннях x і y рівні вектори $\vec{a}(x; -8)$ і $\vec{b}(6; y)$?

13.8.° Знайдіть модуль вектора:

- 1) $\vec{m}(8; -6);$ 2) $\vec{n}(-3; 1).$



13.9.° Знайдіть модуль вектора $\vec{a}(-20; 2\sqrt{21})$. Знайде-не число дорівнює кількості золотих медалей, які здобули наші співвітчизники та співвітчизниці на Паралімпійських іграх 2024 року в Парижі. Знайдіть в інтернеті інформацію про історію Паралімпійських ігор, змагання з яких видів спорту на них проводяться, скільки срібних і бронзових медалей здобули українські спортсмени і спортсменки на Паралімпійських іграх 2024 року та в яких видах спорту.



13.10.° Дано точку $A(1; 3)$ і вектор $\vec{a}(-2; 1)$. Знайдіть координати точки B такої, що $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

13.11.° Дано точки $A(3; -7)$, $B(4; -5)$ і $C(5; 8)$. Знайдіть координати точки D такої, що $\overline{AB} = \overline{CD}$.

13.12.° Від точки $A(4; -3)$ відкладено вектор $\overline{m}(-1; 8)$. Знайдіть координати кінця вектора.

13.13.° Дано точки $A(3; -4)$, $B(-2; 7)$, $C(-4; 16)$ і $D(1; 5)$. Доведіть, що $\overline{CB} = \overline{DA}$.

13.14.° Серед векторів $\overline{a}(3; -4)$, $\overline{b}(-4; 2)$, $\overline{c}(3; \sqrt{11})$, $\overline{d}(-2; -4)$, $\overline{e}(-1; -2\sqrt{6})$ і $\overline{f}(-4; 5)$ знайдіть такі, що мають рівні модулі.

13.15.° Дано точки $A(1; -4)$, $B(-2; 5)$, $C(4; -2)$ і $D(-4; 2)$. Доведіть, що $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$.

13.16.° Знайдіть усі значення x , при яких модуль вектора $\overline{a}(x; -8)$ дорівнює 10.

13.17.° При яких значеннях y модуль вектора $\overline{b}(12; y)$ дорівнює 13?

13.18.* Відрізок BM — медіана трикутника ABC із вершинами $A(3; -5)$, $B(2; -3)$ і $C(-1; 7)$. Знайдіть координати та модуль вектора $\overline{BM}$.

←→ 13.19.* Доведіть, використовуючи вектори, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1; -5)$, $B(2; 3)$, $C(-3; 1)$ і $D(-4; -7)$ є паралелограмом.

13.20.* Точка F ділить сторону BC прямокутника $ABCD$ у відношенні 1 : 2, рахуючи від вершини B (рис. 13.5). Знайдіть координати векторів $\overline{AF}$ і $\overline{FD}$.

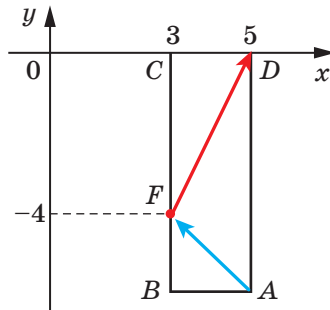


Рис. 13.5

- 13.21.*** Точка E — середина сторони AC прямокутника $OACD$ (рис. 13.6). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{DE}$ і $\overrightarrow{EO}$.

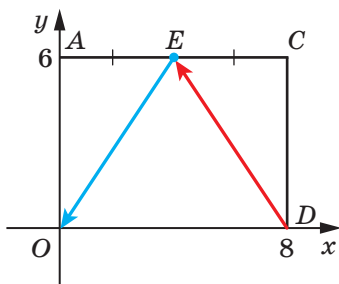


Рис. 13.6

- 13.22.*** Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 10. Його перша координата на 2 більша за другу. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.
- 13.23.*** Модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює 2, а його координати рівні. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$.
- 13.24.**** Точки $A(2; 5)$ і $B(7; 5)$ — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 13. Знайдіть координати точок C і D .
- 13.25.*** Точки $A(1; 2)$ і $D(1; -6)$ — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнює 17. Знайдіть координати вершин B і C .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 13.26.** Два рівних рівнобедрених трикутники ADB і CBD ($AB = BD = CD$) мають спільну бічну сторону (рис. 13.7). Визначте вид чотирикутника $ABCD$.
- 13.27.** Периметр трикутника дорівнює 48 см, а його бісектриса ділить сторону трикутника на відрізки завдовжки 5 см і 15 см. Знайдіть сторони трикутника.

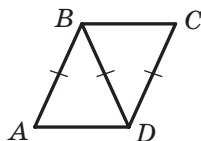


Рис. 13.7



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 13.28.** Чи можна з квадрата зі стороною 10 см вирізати кілька кругів, сума діаметрів яких більша за 5 м?

14. Додавання і віднімання векторів



У математиці ми звикли виконувати різні дії над числами: додавати, віднімати, множити тощо. Те саме стосується й фізичних величин: наприклад, щоб знайти загальне переміщення або рівнодійну силу, ми виконуємо певні операції. Векторні величини також потребують таких дій. Тож важливо навчитися виконувати дії і над векторами.

Якщо тіло перемістилося з точки A в точку B , а потім із точки B у точку C , то сумарне переміщення з точки A в точку C природно подати у вигляді вектора $\overrightarrow{AC}$, вважаючи цей вектор сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, тобто $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 14.1).

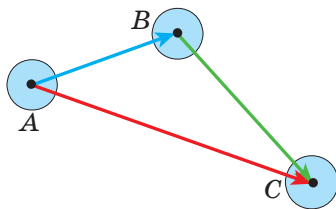


Рис. 14.1

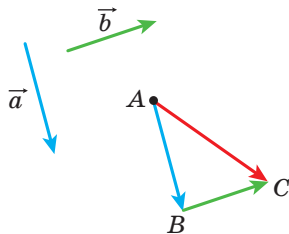


Рис. 14.2



Цей приклад підказує, як ввести поняття суми векторів, тобто як додати два даних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$. Далі від точки B відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ називають сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 14.2) і записують: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають **правилом трикутника**.

Ця назва пов'язана з тим, що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, то точки A , B і C є вершинами трикутника (рис. 14.2).

За правилом трикутника можна додавати й колінеарні вектори. На рисунку 14.3 вектор $\overrightarrow{AC}$ дорівнює сумі колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

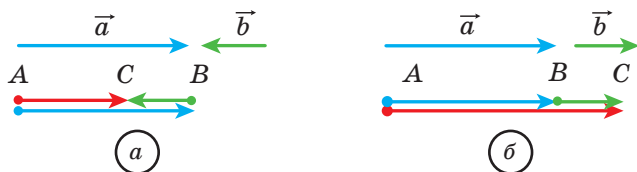


Рис. 14.3

Отже, для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, яка виражає правило трикутника для додавання векторів.

Теорема 14.1:

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Доведення. ☺ Нехай точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$ такі, що $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

Маємо: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Доведемо, що координати вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Знайдемо координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$\vec{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\vec{b}(x_3 - x_2; y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$.

Маємо:

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}(x_3 - x_1; y_3 - y_1) = \overrightarrow{AC}(x_3 - x_2 + x_2 - x_1; y_3 - y_2 + y_2 - y_1)$.

З урахуванням того, що $x_2 - x_1 = a_1$, $x_3 - x_2 = b_1$, $y_2 - y_1 = a_2$, $y_3 - y_2 = b_2$, отримуємо: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$. ●

Зауваження. Описуючи правило трикутника для знаходження суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, ми відклали вектор $\vec{a}$ від довільної точки. Якщо точку A замінити точкою A_1 , то замість вектора $\overrightarrow{AC}$, який дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, отримаємо деякий вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. Із теореми 14.1 випливає, що координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, отже,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Це означає, що сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не залежить від того, від якої точки відкладено вектор $\vec{a}$.

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

- 1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переставна властивість;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — сполучна властивість.

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Суму трьох і більше векторів знаходять так: спочатку додають перший і другий вектори, потім до отриманого вектора додають третій вектор і т. д.

Наприклад, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

З переставної та сполучної властивостей додавання векторів випливає, що при додаванні кількох векторів можна міняти місцями доданки та розставляти дужки у будь-який спосіб.

У фізиці часто доводиться додавати вектори, відкладені від однієї точки. Так, якщо до тіла прикладено сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ (рис. 14.4), то рівнодійна цих сил дорівнює сумі $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Для знаходження суми двох неколінеарних векторів, відкладених від однієї точки, зручно користуватися **правилом паралелограма для додавання векторів**.

Нехай потрібно знайти суму неколінеарних векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ (рис. 14.5). Відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{AD}$.

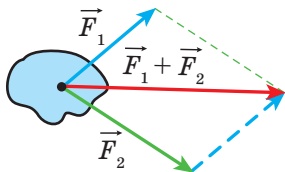


Рис. 14.4

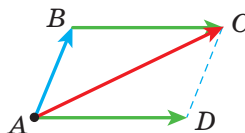


Рис. 14.5

Тоді $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Оскільки вектори $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$ рівні, то чотирикутник $ABCD$ — паралелограм з діагоналлю AC .

Наведені міркування дозволяють сформулювати правило паралелограма для додавання неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overline{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overline{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$. Побудуємо паралелограм $ABCD$ (рис. 14.6). Тоді шукана сума $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнює вектору $\overline{AC}$.

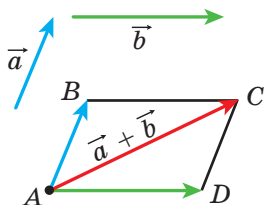


Рис. 14.6

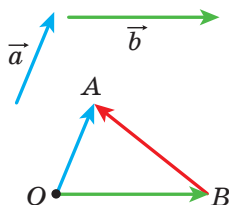


Рис. 14.7

Операції з векторами не обмежуються лише додаванням. Уявімо, що гелікоптер летить проти вітру. Щоб визначити його вектор швидкості, нам потрібно вміти віднімати вектори. Віднімання векторів дозволяє також визначити різницю між векторами переміщень, прискорень, сил. Узагалі, це ключовий інструмент для аналізу та моделювання реальних процесів. Введемо операцію різниці векторів.

Означення:

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Пишуть: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажемо, як побудувати вектор, рівний різниці заданих векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Від довільної точки O відкладемо вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 14.7). Тоді вектор $\overline{BA}$ дорівнює різниці $\vec{a} - \vec{b}$. Справді, $\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}$. Отже, за

означенням різниці двох векторів $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

На рисунку 14.7 вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ неколінеарні. Проте описаний алгоритм можна застосовувати й для знаходження різниці колінеарних векторів. На рисунку 14.8 вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Рис. 14.8

Отже, для будь-яких трьох точок O , A і B виконується рівність $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, яка виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки.

Теорема 14.2:

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Скориставшись ідеєю доведення теореми 14.1, доведіть цю теорему самостійно.

Із теореми 14.2 випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ існує єдиний вектор $\vec{c}$ такий, що $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Означення:

Два ненульових вектори називають протилежними, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежні, то говорять, що вектор $\vec{a}$ протилежний вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ протилежний вектору $\vec{a}$.

Вектором, протилежним нульовому вектору, вважають нульовий вектор.

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають так: $-\vec{a}$.

З означення випливає, що протилежним вектору $\vec{AB}$ є вектор $\vec{BA}$. Тоді *для будь-яких точок A і B виконується рівність $\vec{AB} = -\vec{BA}$.*

Із правила трикутника випливає, що

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

А із цієї рівності випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ має координати $(-a_1; -a_2)$.

Теорема 14.3:

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

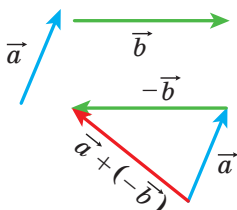


Рис. 14.9

Для доведення достатньо порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівності. Зробіть це самостійно.

Теорема 14.3 дає змогу звести віднімання векторів до додавання: щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, можна до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$ (рис. 14.9).

ЗАДАЧА. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 14.10). Виразіть вектори $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ та $\vec{CB}$ через вектори $\vec{CO} = \vec{a}$ і $\vec{BO} = \vec{b}$.

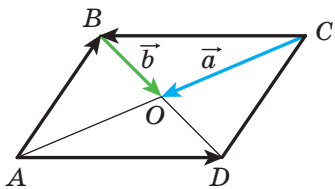


Рис. 14.10

Розв'язання. Оскільки точка O — середина відрізків AC та BD , то $\vec{OA} = \vec{CO} = \vec{a}$ і $\vec{OD} = \vec{BO} = \vec{b}$.

Маємо:

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} - \vec{BO} = -\vec{a} - \vec{b};$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a};$$

$$\vec{CB} = -\vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}. \quad \blacktriangleleft$$



1. Опишіть правило трикутника для знаходження суми векторів. 2. Яка рівність виражає правило трикутника для знаходження суми векторів? 3. Чому дорівнюють координати вектора, рівного сумі двох даних векторів? 4. Опишіть правило паралелограма для знаходження суми двох векторів. 5. Який вектор називають різницею двох векторів? 6. Яка рівність виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки? 7. Чому дорівнюють координати вектора, рівного різниці двох даних векторів? 8. Які вектори називають протилежними? 9. Як позначають вектор, протилежний вектору $\vec{a}$?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

14.1.^о За допомогою правила трикутника побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.11.

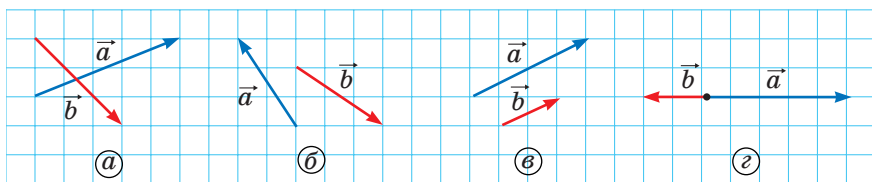


Рис. 14.11

14.2.^о За допомогою правила трикутника побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.12.

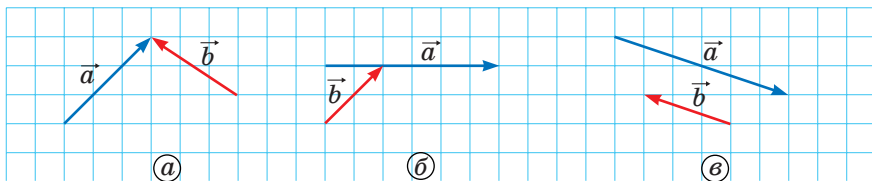


Рис. 14.12

14.3.^о За допомогою правила паралелограма побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.11, а, б.

14.4.^о За допомогою правила паралелограма побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.12, а, б.

14.5.° Побудуйте різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.11.

14.6.° Побудуйте різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 14.12.

14.7.° Накресліть трикутник ABC . Відкладіть від точки A вектор, протилежний вектору:

- 1) $\overline{AB}$; 2) $\overline{CA}$; 3) $\overline{BC}$.

14.8.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектор:

- 1) $\overline{BC} + \overline{BA}$; 3) $\overline{BC} + \overline{CA}$; 5) $\overline{AC} + \overline{DB}$.
2) $\overline{BC} + \overline{DC}$; 4) $\overline{BC} + \overline{AD}$;

14.9.° Накресліть трикутник MNP . Побудуйте вектор:

- 1) $\overline{MP} + \overline{PN}$; 2) $\overline{MN} + \overline{PN}$; 3) $\overline{MN} + \overline{MP}$.

14.10.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектор:

- 1) $\overline{BA} - \overline{BC}$; 2) $\overline{BA} - \overline{DA}$; 3) $\overline{BA} - \overline{AD}$; 4) $\overline{AC} - \overline{DB}$.

14.11.° Накресліть трикутник ABC . Побудуйте вектор:

- 1) $\overline{AC} - \overline{CB}$; 2) $\overline{CA} - \overline{CB}$; 3) $\overline{BC} - \overline{CA}$.

14.12.° Позначте чотири точки M, N, P і Q . Побудуйте вектор $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ}$.

14.13.* Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, зображених на рисунку 14.13, побудуйте вектор: 1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 2) $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

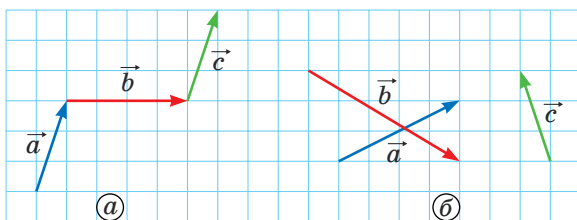


Рис. 14.13

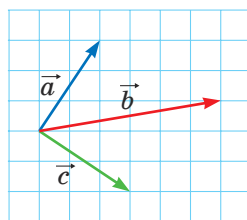


Рис. 14.14

14.14.* Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, зображених на рисунку 14.14, побудуйте вектор: 1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 2) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

➡ 14.15.* Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб сума двох із них дорівнювала третьому вектору.

14.16.* Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб їхня сума дорівнювала нуль-вектору.



ВПРАВИ

14.17.° Розгляньте рисунок 14.15. Укажіть, у яких випадках вектор $\vec{c}$ є: 1) сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 2) різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

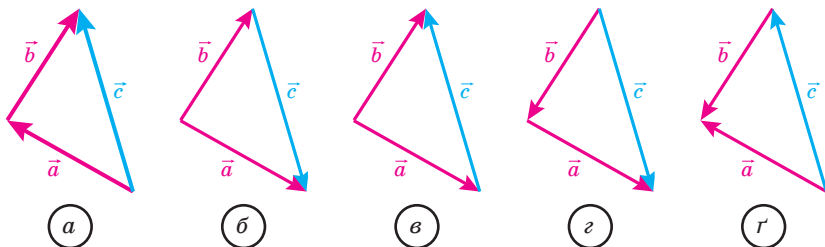


Рис. 14.15

14.18.° Знайдіть суму векторів:

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF}$; 2) $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA}$.

14.19.° Знайдіть різницю векторів:

1) $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CF}$; 2) $\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KD}$.

14.20.° Дано трикутник ABC . Виразіть вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектори:

1) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

14.21.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C і D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

2) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$;

14.22.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C і D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;

14.23.° Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 3 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$.

14.24.° Катет рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) дорівнює 4 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|$.

14.25.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . Доведіть, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

14.26.° Знайдіть суму і різницю векторів:

- 1) $\vec{a}(4; 8)$ і $\vec{b}(2; 3)$; 3) $\vec{a}(3; 9)$ і $\vec{b}(-1; -1)$;
 2) $\vec{a}(-6; 0)$ і $\vec{b}(5; 7)$; 4) $\vec{a}(-2; -3)$ і $\vec{b}(-4; -2)$.

14.27.° Знайдіть суму і різницю векторів:

- 1) $\vec{m}(-5; 4)$ і $\vec{n}(3; 7)$; 2) $\vec{m}(1; -9)$ і $\vec{n}(-8; 10)$.

14.28.° Дано точки $A(1; -3)$, $B(4; 5)$, $C(-2; -1)$ і $D(3; 0)$. Знайдіть:

- 1) координати векторів $\vec{AB} + \vec{CD}$ і $\vec{AB} - \vec{CD}$;
 2) $|\vec{AB} + \vec{CD}|$ і $|\vec{AB} - \vec{CD}|$.

14.29.° Дано вектори $\vec{a}(4; -5)$ і $\vec{b}(-1; 7)$. Знайдіть:

- 1) координати векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$;
 2) $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

14.30.° Сума векторів $\vec{a}(5; -3)$ і $\vec{b}(x; 4)$ дорівнює вектору $\vec{c}(2; y)$. Знайдіть x і y .

14.31.° Сума векторів $\vec{a}(x; -1)$ і $\vec{b}(2; y)$ дорівнює вектору $\vec{c}(-3; 4)$. Знайдіть x і y .

14.32.° Дано вектор $\vec{MN}(3; -5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{NM}$.

14.33.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O . Відомо, що $\vec{OA} - \vec{OD} = \vec{OB} - \vec{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

🔑 14.34.* Доведіть, що для будь-яких n точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ виконується рівність $\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \vec{A_3A_4} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$.

14.35.* Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C, D і E виконується рівність

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA} = \vec{0}.$$

14.36.* Виразіть вектор $\vec{AB}$ через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 14.16).

14.37.* Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ і $\vec{DA}$ через вектори $\vec{CA} = \vec{a}$ і $\vec{CD} = \vec{c}$.

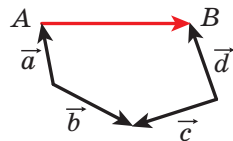


Рис. 14.16

14.38.* Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\vec{AC}$, $\vec{BD}$ і $\vec{BC}$ через вектори $\vec{BA} = \vec{a}$ і $\vec{DA} = \vec{b}$.

14.39.* Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$.

↔ **14.40.*** Точки M і N — середини відповідно сторін BA і BC трикутника ABC . Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{NB}$ через вектори $\overrightarrow{BM} = \vec{m}$ і $\overrightarrow{BN} = \vec{n}$.

14.41.* У паралелограмі $ABCD$ точки M , N і K — середини відповідно сторін AB , BC і CD . Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$ і $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$.

14.42.* У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{DO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

Зверніть увагу, що в задачах 14.37–14.42 два вектори, через які треба виразити інші вектори, є неколінеарними. Це не випадково.

↔ Якщо ви бажаєте розібратися в цьому, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Векторний базис та його застосування». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проєкті, ви можете знайти на с. 259.

14.43.** Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Висловіть свою думку, чому від векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вимагається бути неколінеарними. Обговоріть це питання з однокласниками й однокурсниками.

14.44.** Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14.45.** Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:

- 1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

14.46.** Доведіть, що для паралелограма $ABCD$ і довільної точки X виконується рівність $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

↔ **14.47.**** Дано дві точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{AB}|$.

14.48.** Дано дві точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{BX}|$.

14.49.* Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M . Доведіть, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

- 14.50. До тіла прикладено сили $\vec{F}_1(2; 7)$ і $\vec{F}_2(-5; 4)$. Знайдіть рівнодійну цих сил.
- 14.51. Пригадайте байку Леоніда Глібова «Лебідь, Щука і Рак». Як можна пояснити, використовуючи вектори, чому «хура й досі там»? Які для цього треба зробити припущення? Обговоріть це питання у класі.



- 14.52. Плавчиня зі швидкістю $\sqrt{3}$ м/с відносно води перепливає річку в напрямку, перпендикулярному до паралельних берегів. Швидкість течії дорівнює 1 м/с. Під яким кутом до напрямку, перпендикулярному до берегів, переміщається плавчиня?
- 14.53. Весляр із точки A переправляється через річку завширшки 240 м зі сталою власною швидкістю, спрямовуючи ніс човна перпендикулярно до протилежного берега. Через 4 хв човен причалює до протилежного берега в точці C , розташованій нижче за течією від точки A на 48 м. Знайдіть швидкість течії та швидкість човна відносно берегів річки.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 14.54. У трикутник ABC вписано паралелограм $CDMK$ так, що кут C у них спільний, а точки D , M і K належать відповідно сторонам AC , AB і BC трикутника. Знайдіть сторони паралелограма $CDMK$, якщо його периметр дорівнює 20 см, $AC = 12$ см, $BC = 9$ см.
- 14.55. Доведіть, що площа правильного шестикутника, вписаного в коло, становить $\frac{3}{4}$ площі правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

15. Множення вектора на число



Нехай дано ненульовий вектор $\vec{a}$. На рисунку 15.1 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a} + \vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{CD}$, рівний вектору $(-\vec{a}) + (-\vec{a}) + (-\vec{a})$. Очевидно, що

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= 2|\vec{a}| \text{ і } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{a}, \\ |\overrightarrow{CD}| &= 3|\vec{a}| \text{ і } \overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \vec{a}. \end{aligned}$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ позначають $2\vec{a}$ і вважають, що його отримано в результаті **множення вектора $\vec{a}$ на число 2**. Аналогічно вважають, що вектор $\overrightarrow{CD}$ отримано в результаті **множення вектора $\vec{a}$ на число -3** , і записують: $\overrightarrow{CD} = -3\vec{a}$.

Цей приклад підказує, як ввести поняття «множення вектора на число».

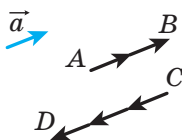


Рис. 15.1

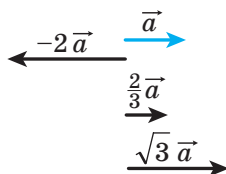


Рис. 15.2

Означення:

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k , відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

- 1) $|\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$;
- 2) якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишуть: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунку 15.2 зображено вектори $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\vec{a}$.

ЖГ 1 Якщо ви бажаєте більш наочно ознайомитися з тим, як «працює» означення множення вектора на число, то перейдіть за QR-кодом.



З означення випливає, що

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vec{a} &= \vec{a}, \\ -1 \cdot \vec{a} &= -\vec{a}. \end{aligned}$$

Також з означення випливає, що *коли $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.*

А якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то чи можна подати вектор $\vec{b}$ у вигляді добутку $k\vec{a}$? Відповідь дає така теорема.

Теорема 15.1:

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k , що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доведення. ☼ Якщо $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ отримуємо, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо $\vec{b} \neq \vec{0}$, то або $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, або $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Нехай $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Оскільки $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, отже, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Крім того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким чином, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ співнаправлені та їхні модулі рівні. Звідси $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Нехай $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Для цього випадку завершіть доведення самостійно. ●

Теорема 15.2:

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.

Із доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



Наслідок 1:

Вектори $\vec{a} (a_1; a_2)$ і $\vec{b} (ka_1; ka_2)$ колінеарні.

Наслідок 2:

Якщо вектори $\vec{a} (a_1; a_2)$ і $\vec{b} (b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k , що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.

За допомогою теореми 15.2 можна довести такі властивості множення вектора на число.

Для будь-яких чисел k, t і будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}$ виконуються рівності:

- 1) $(kt)\vec{a} = k(t\vec{a})$ — сполучна властивість;
- 2) $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$ — перша розподільна властивість;
- 3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — друга розподільна властивість.

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правих і лівих частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Ці властивості дають змогу перетворювати вирази, які містять суму векторів, різницю векторів і добуток вектора на число, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази. Наприклад,

$$2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}.$$



ЗАДАЧА 1. Доведіть, що коли $\vec{OA} = k\vec{OB}$, то точки O, A і B лежать на одній прямій.

Розв'язання. З умови випливає, що вектори $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$ колінеарні. До того ж ці вектори відкладено від однієї точки O . Отже, точки O, A і B лежать на одній прямій. ◀



ЗАДАЧА 2. Точка M — середина відрізка AB і X — довільна точка (рис. 15.3). Доведіть, що $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Розв'язання. Застосовуючи правило трикутника, запишемо:

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM}; \quad \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}.$$

Додамо ці дві рівності:

$$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BM}$ протилежні, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

Маємо: $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$. Звідси $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$. ◀

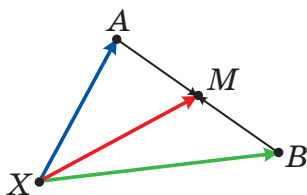


Рис. 15.3

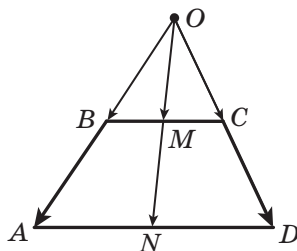


Рис. 15.4

ЗАДАЧА 3. Доведіть, що середини основ трапеції та точка перетину продовжень її бічних сторін лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай точки M і N — середини основ BC і AD трапеції $ABCD$ відповідно, O — точка перетину прямих AB і CD (рис. 15.4).

Застосовуючи ключову задачу 2, запишемо:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}).$$

Оскільки $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$, то $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, де k і k_1 — деякі числа.

Оскільки $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, то $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. Отже, $k = k_1$.

Маємо:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}) = k \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = k\overrightarrow{ON}.$$

Із ключової задачі 1 випливає, що точки O , M і N лежать на одній прямій. ◀

ЗАДАЧА 4. На сторонах AB і AD паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки M і K так, що $AM:MB=2:3$, $AK:KD=3:4$ (рис. 15.5). Виразіть вектор $\overrightarrow{MK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

Розв'язання. Маємо: $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM}$.

Оскільки $AM:MB=2:3$, то $AM:AB=2:5$.

$$\text{Тоді } \overrightarrow{AM} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} = \frac{2}{5} \vec{a}.$$

Оскільки $AK:KD=3:4$, то
 $AK:AD=3:7$.

$$\text{Тоді } \overrightarrow{AK} = \frac{3}{7} \overrightarrow{AD} = \frac{3}{7} \vec{b}.$$

$$\text{Отже, } \overrightarrow{MK} = \frac{3}{7} \vec{b} - \frac{2}{5} \vec{a}.$$

$$\text{Відповідь: } \overrightarrow{MK} = \frac{3}{7} \vec{b} - \frac{2}{5} \vec{a}. \quad \blacktriangleleft$$

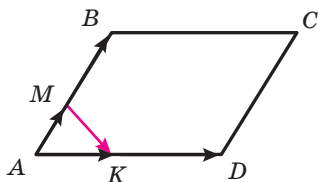


Рис. 15.5



1. Чому дорівнює добуток $k\vec{a}$, якщо $k=0$ або $\vec{a}=\vec{0}$? 2. Що можна сказати про ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{b}=k\vec{a}$, де k — деяке число? 3. Вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$. Чому дорівнюють координати вектора $k\vec{a}$? 4. Що можна сказати про вектори, координати яких дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(ka_1; ka_2)$?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

15.1.° Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 15.6). Побудуйте вектор:

- 1) $2\vec{b}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$;
- 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 4) $-\frac{5}{6}\vec{a}$.

15.2.° Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 15.6). Побудуйте вектор:

- 1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$.
- 2) $-2\vec{b}$;

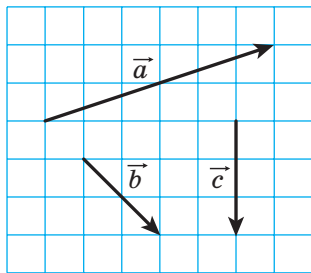


Рис. 15.6

15.3.° Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 15.7). Побудуйте вектор:

- 1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$; 3) $\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

15.4.° Побудуйте два неколінеарних вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Позначте довільну точку O . Від точки O відкладіть вектор:

- 1) $3\vec{x} + \vec{y}$; 3) $-2\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$.

- 2) $-\frac{1}{2}\vec{x} + 3\vec{y}$;

15.5.* Побудуйте три точки A , B і C такі, що:

- 1) $\overline{AB} = 2\overline{AC}$; 3) $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$;

- 2) $\overline{AB} = -3\overline{AC}$; 4) $\overline{AC} = -\frac{1}{3}\overline{BC}$.

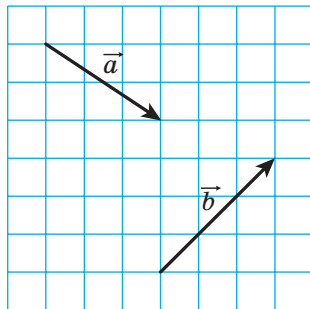


Рис. 15.7



ВПРАВИ

15.6.° Знайдіть модулі векторів $3\vec{m}$ та $-\frac{1}{2}\vec{m}$, якщо $|\vec{m}| = 4$.

15.7.° Відомо, що $|\vec{c}| = 12$. Знайдіть $|\vec{p}|$, якщо: 1) $\vec{p} = -4\vec{c}$;

- 2) $\vec{p} = \frac{2}{3}\vec{c}$.

15.8.° Відомо, що $\vec{b} = k\vec{a}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Заповніть таблицю, записавши у відповідну клітинку слово «так», якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідають указаній вимозі при даному значенні k , або слово «ні», якщо не відповідають.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$k = 3$	$k = 1$	$k = -0,4$	$k = -1$	$k = -5$	$k = 0,7$
співнаправлені						
протилежно напрямлені						
мають рівні модулі						
протилежні						
рівні						

↔ Порівняйте ваші відповіді з відповідями однокласників та однокласниць. Обговоріть із ними допущені вами помилки у разі їх наявності.

15.9.° Визначте, співнаправленими чи протилежно напрямленими є ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

$$1) \vec{b} = 2\vec{a}; \quad 2) \vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}; \quad 3) \vec{b} = \sqrt{2}\vec{a}.$$

15.10.° Виразіть вектор $\vec{p}$ з рівності:

$$1) \vec{q} = 3\vec{p}; \quad 2) \vec{AC} = -2\vec{p}; \quad 3) \frac{1}{2}\vec{p} = \vec{q}; \quad 4) 2\vec{p} = 3\vec{q}.$$

15.11.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . Виразіть:

1) вектор $\vec{AO}$ через вектор $\vec{AC}$;

2) вектор $\vec{BD}$ через вектор $\vec{BO}$;

3) вектор $\vec{CO}$ через вектор $\vec{AC}$.

15.12.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O , $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Виразіть вектор $\vec{AO}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

15.13.° У трикутнику ABC точки M і N — середини сторін AB і BC відповідно. Виразіть:

1) вектор $\vec{MN}$ через вектор $\vec{CA}$;

2) вектор $\vec{AC}$ через вектор $\vec{MN}$.

15.14.° Дано вектор $\vec{a}(-4; 2)$. Знайдіть координати та модуль вектора: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{a}$; 3) $\frac{3}{2}\vec{a}$.

15.15.° Дано вектор $\vec{b}(-6; 12)$. Знайдіть координати та модуль вектора: 1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{6}\vec{b}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{b}$.

15.16.° Чи колінеарні вектори:

1) $\vec{a}(3; -2)$ і $\vec{b}(-6; 4)$; 3) $\vec{a}(3; -2)$ і $\vec{d}(-3; -2)$?

2) $\vec{a}(3; -2)$ і $\vec{c}(1,5; -1)$;

15.17.° Чи колінеарні вектори:

1) $\vec{a}(4; -5)$ і $\vec{b}(16; 20)$; 2) $\vec{m}(-6; 8)$ і $\vec{n}(3; -4)$?

15.18.° Дано вектори $\vec{a}(3; -3)$ і $\vec{b}(-16; 8)$. Знайдіть координати вектора:

$$1) 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \quad 2) -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}; \quad 3) \vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}.$$

15.19.° Дано вектори $\vec{m}(-2; 4)$ і $\vec{n}(3; -1)$. Знайдіть координати вектора:

- 1) $3\vec{m} + 2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m} + 2\vec{n}$; 3) $\vec{m} - 3\vec{n}$.

15.20.* На відрізку AB завдовжки 18 см позначено точку C так, що $BC = 6$ см. Виразіть:

- 1) вектор $\vec{AB}$ через вектор $\vec{AC}$;
2) вектор $\vec{BC}$ через вектор $\vec{AB}$;
3) вектор $\vec{AC}$ через вектор $\vec{BC}$.

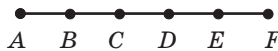


Рис. 15.8

15.21.* На рисунку 15.8 $AB = BC = CD = DE = EF$. Виразіть:

- 1) через вектор $\vec{AB}$ вектори $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, $\vec{CB}$, $\vec{FA}$;
2) через вектор $\vec{AF}$ вектори $\vec{CE}$, $\vec{DC}$, $\vec{EA}$.

15.22.* У паралелограмі $ABCD$ на діагоналі AC позначено точку M так, що $AM : MC = 1 : 3$. Виразіть вектор $\vec{MC}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AD}$.

15.23.* У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони BC , $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Виразіть вектори $\vec{AM}$ і $\vec{MD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

15.24.* На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Виразіть вектор $\vec{MN}$ через вектор $\vec{CB}$.

15.25.* Доведіть, що вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ колінеарні, якщо $A(1; 1)$, $B(3; -2)$, $C(-1; 3)$, $D(5; -6)$.

15.26.* Серед векторів $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(-3; -6)$, $\vec{c}(-4; 8)$ і $\vec{d}(-1; -2)$ укажіть пари колінеарних векторів.

15.27.* Дано вектори $\vec{m}(4; -6)$, $\vec{n}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ і $\vec{k}\left(3; -\frac{9}{2}\right)$. Укажіть пари співнаправлених і пари протилежно напрямлених векторів.

15.28.* Знайдіть значення x , при яких вектори $\vec{a}(1; x)$ та $\vec{b}\left(\frac{x}{4}; 4\right)$ колінеарні.

15.29.* При яких значеннях y вектори $\vec{a}(2; 3)$ і $\vec{b}(-1; y)$ колінеарні?

15.30.* Дано вектор $\vec{b}$ $(-3; 1)$. Знайдіть координати вектора, колінеарного вектору $\vec{b}$, модуль якого вдвічі більший за модуль вектора $\vec{b}$.

Обговоріть з однокласниками й однокласницями, скільки розв'язків має задача.

15.31.* Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, протилежно напрямленого вектору $\vec{n}$ $(5; -12)$, якщо $|\vec{m}| = 39$.

15.32.* Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, співнаправленого з вектором $\vec{b}$ $(-9; 12)$, якщо $|\vec{a}| = 5$.

15.33.* Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(14; 6)$ і $D(2; -3)$ є трапецією.

Як ви вважаєте, чи буде достатнім для розв'язання цієї задачі показати, що є пара колінеарних векторів, яка пов'язана з двома протилежними сторонами чотирикутника $ABCD$? Обговоріть це питання у класі.

15.34.* Доведіть, використовуючи вектори, що точки $A(-1; 3)$, $B(4; -7)$ і $D(-2; 5)$ лежать на одній прямій.

15.35.* Дано вектори $\vec{a}$ $(1; -4)$, $\vec{b}$ $(0; 3)$ і $\vec{c}$ $(2; -17)$. Знайдіть такі числа x і y , що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

15.36.* Дано вектори $\vec{m}$ $(-1; 2)$, $\vec{n}$ $(3; 1)$, $\vec{a}$ $(-7; 0)$. Знайдіть такі числа x і y , що $\vec{a} = x\vec{m} + y\vec{n}$.

15.37.** Точки O , A і B лежать на одній прямій. Доведіть, що існує таке число k , що $\vec{OA} = k\vec{OB}$.

До якої ключової задачі пункту 15 є оберненим твердження цієї задачі? Обговоріть це питання у класі.

15.38.** На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Виразіть вектор $\vec{NM}$ через вектори $\vec{AB} = \vec{a}$ і $\vec{AD} = \vec{b}$.

15.39.** На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки E і F так, що $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Виразіть вектор $\vec{EF}$ через вектори $\vec{AB} = \vec{a}$ та $\vec{AD} = \vec{b}$.

15.40.** У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . На стороні BC позначено точку K так, що $BK : KC = 2 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{OK}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.41.** Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O так, що $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

 **15.42.**** На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки K і F так, що $AK : KB = 1 : 2$ і $BF : FC = 2 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{KF}$ через вектори $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$ і $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

15.43.** На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MC = 1 : 3$ і $BN : NC = 4 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{NM}$ через вектори $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$ і $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

15.44.** Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M . Виразіть вектор $\overrightarrow{BM}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$.

15.45.** За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трикутника.

 **15.46.**** Точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$.

15.47.** Використовуючи задачу 15.46, доведіть теорему про середню лінію трапеції.

 Якщо вам сподобалася ця задача, то радимо прочитати додаткове оповідання на с. 175–178 і взяти участь у роботі над проектом «Векторний метод».

15.48.** На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MC = 2 : 3$. Доведіть, що $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

15.49.** На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $BD : DC = 1 : 2$. Доведіть, що $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

- 15.50.*** Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють медіанам даного трикутника.
- 15.51.*** Точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що середини відрізків A_1A_2 , M_1M_2 і B_1B_2 лежать на одній прямій.

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

- 15.52.** Менша основа та бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см. Чому дорівнює середня лінія трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60° ?
- 15.53.** Знайдіть хорду кола радіуса R , кінці якої розбивають це коло на дві дуги, довжини яких відносяться як 2 : 1.

**РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

- 15.54.** Дано квадрат розміром 101×101 клітинку. Клітинки квадрата розфарбували в шаховому порядку в чорний і білий кольори так, що центральна клітинка виявилася чорною. Для кожної пари різнокольорових клітинок відкладають вектор, початок якого збігається із центром чорної клітинки, а кінець — із центром білої. Доведіть, що сума всіх відкладених векторів дорівнює нуль-вектору.

**КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ****Векторний метод**

Векторний метод — це спосіб розв'язування геометричних задач із використанням властивостей векторів. Цей підхід часто спрощує розв'язання задач і відкриває нові способи міркувань, особливо тоді, коли класичні геометричні методи виявляються складними або неефективними.

При застосуванні векторів до розв'язування задач часто використовують таку лему.

Лема:

Нехай M — така точка відрізка AB , що $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ (рис. 15.9). Тоді для будь-якої точки X виконується рівність

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{XB}.$$

Доведення. Маємо: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Оскільки $AM = \frac{m}{m+n} AB$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}$.

Запишемо: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, то маємо:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA});$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n} \overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{XB}. \bullet$$

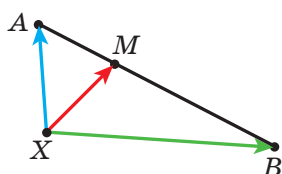


Рис. 15.9

Зауважимо, що ця лема є узагальненням ключової задачі 2 п. 15.

ЗАДАЧА. Нехай M — точка перетину медіан трикутника ABC і X — довільна точка (рис. 15.10). Доведіть, що

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$

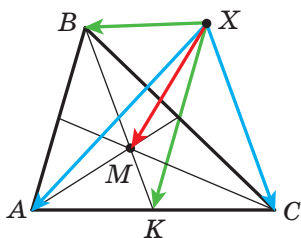


Рис. 15.10

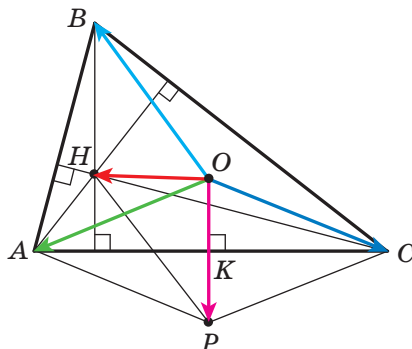


Рис. 15.11

Розв'язання. Нехай точка K — середина відрізка AC . Маємо: $BM : MK = 2 : 1$. Тоді, використовуючи лему, можна записати:

$$\begin{aligned}\overline{XM} &= \frac{1}{3}\overline{XB} + \frac{2}{3}\overline{XK} = \frac{1}{3}\overline{XB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XC}) = \\ &= \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}). \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Доведемо векторну рівність, яка пов'язує дві чудові точки¹ трикутника.

Теорема:

Якщо точка H — ортоцентр трикутника ABC , а точка O — центр його описаного кола, то

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}. \quad (*)$$

Доведення. Для прямокутного трикутника рівність $(*)$ є очевидною.

Нехай трикутник ABC не є прямокутним. Опустимо з точки O перпендикуляр OK на сторону AC трикутника ABC (рис. 15.11). У курсі геометрії 8 класу було доведено, що $BH = 2OK$.

На промені OK позначимо точку P таку, що $OK = KP$. Тоді $BH = OP$. Оскільки $BH \parallel OP$, то чотирикутник $HBO P$ — паралелограм.

За правилом паралелограма $\overline{OH} = \overline{OB} + \overline{OP}$.

Оскільки точка K є серединою відрізка AC , то в чотирикутнику $AOC P$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник — паралелограм.

Звідси $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OC}$.

Маємо: $\overline{OH} = \overline{OB} + \overline{OP} = \overline{OB} + \overline{OA} + \overline{OC}$. $\bullet$

Звернемося до векторної рівності $\overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC})$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC .

Оскільки X — довільна точка, то рівність залишається правильною, якщо за точку X вибрати точку O — центр описаного кола трикутника ABC .

¹ Матеріал про чудові точки трикутника див. у підручнику «Геометрія. 8 клас».

Маємо: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Беручи до уваги рівність (*), отримуємо: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Ця рівність означає, що точки O , M і H лежать на одній прямій, яку називають **прямою Ейлера**. Нагадаємо, що цю чудову властивість було доведено в підручнику для 8 класу, але в інший спосіб.

16. Скалярний добуток векторів



Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульових та неспівнаправлених вектори (рис. 16.1). Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$** .

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Наприклад, на рисунку 16.1 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, а на рисунку 16.2 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180^\circ$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнаправлені, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

Отже, для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має місце нерівність:

$$0^\circ \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ.$$

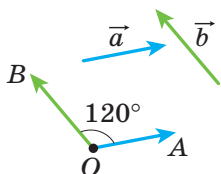


Рис. 16.1

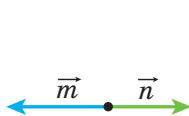


Рис. 16.2

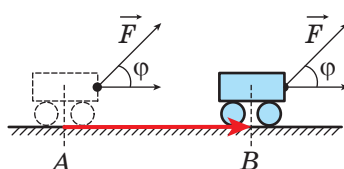


Рис. 16.3

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90° . Пишуть: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ви вмієте додавати й віднімати вектори, множити вектор на число. Також із курсу фізики ви знаєте, що коли під впливом постійної сили $\vec{F}$ тіло перемістилося з точки A в точку B (рис. 16.3), то виконана механічна робота дорівнює $|\vec{F}| |\overline{AB}| \cos \varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{F}, \overline{AB})$.

Також у різних задачах важливо не просто знати напрямки векторів, а й уміти визначати, наскільки один вектор «діє» в напрямку іншого. Саме це й дозволяє зробити нова дія — скалярний добуток. Ця операція щойно була застосована для визначення механічної роботи. Скалярний добуток широко використовується не лише в механіці, а й у комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні та інших галузях.

Викладене вище підказує, як ввести дію скалярного добутку векторів.

Означення:

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Нехай $\vec{a} = \vec{b}$. Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Ми отримали, що $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, тобто **скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля**.

Теорема 16.1;

Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Доведення. ☉ Нехай $\vec{a} \perp \vec{b}$. Доведемо, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
 Маємо: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. Звідси $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$.
 Нехай тепер $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Доведемо, що $\vec{a} \perp \vec{b}$.
 Запишемо: $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.
 Оскільки $|\vec{a}| \neq 0$ і $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.
 Звідси $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$. ●

На запитання, як знайти скалярний добуток векторів, коли відомі їхні координати, відповідає така теорема.

Теорема 16.2:

Скалярний добуток векторів $\vec{a} (a_1; a_2)$ і $\vec{b} (b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Із доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.

За допомогою теореми 16.2 легко довести такі властивості скалярного добутку векторів.



Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переставна властивість;
- 2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — сполучна властивість;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — розподільна властивість.

Для доведення цих властивостей достатньо виразити через координати векторів скалярні добутки, записані в правих і лівих частинах рівностей, та порівняти їх. Зробіть це самостійно.

Ці властивості разом із властивостями додавання векторів і множення вектора на число дають змогу перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази.

Наприклад,

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b})^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \\&= \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 1. За допомогою векторів доведіть, що діагоналі ромба перпендикулярні.

Розв'язання. На рисунку 16.4 зображено ромб $ABCD$. Нехай $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Очевидно, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. За правилом паралелограма маємо: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$. Звідси

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b}^2 - \vec{a}^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0.$$

Отже, $AC \perp BD$. $\blacktriangleleft$

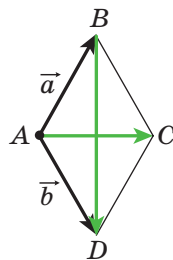


Рис. 16.4

ЗАДАЧА 2. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(3; -4)$ і $\vec{b}(1; 2)$.

Розв'язання. З означення скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -5$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5; \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Отже, } \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. $\blacktriangleleft$

ЗАДАЧА 3. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Знайдіть $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Розв'язання. Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b})^2$. Звідси

$$\begin{aligned}|2\vec{a} - 3\vec{b}| &= \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \\&= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2} = \\&= \sqrt{36 + 18 + 9} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.\end{aligned}$$

Відповідь: $3\sqrt{7}$. $\blacktriangleleft$

ЗАДАЧА 4. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30^\circ$. Знайдіть медіану BM .

Розв'язання. Застосовуючи ключову задачу 2 п. 15, запишемо: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ (рис. 16.5). Звідси

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM}^2 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2) = \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \angle ABC + |\overrightarrow{BC}|^2) = \\ &= \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49. \end{aligned}$$

Рис. 16.5

Отже, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.

Відповідь: 7 см. ◀



1. Чому дорівнює кут між двома співнаправленими векторами? 2. Чому дорівнює кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо хоча б один із них нульовий? 3. У яких межах знаходиться кут між будь-якими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$? 4. Які вектори називають перпендикулярними? 5. Що називають скалярним добутком двох векторів? 6. Що називають скалярним квадратом вектора? 7. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора? 8. Сформулюйте умову перпендикулярності двох ненульових векторів.



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

16.1.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 16.6).

16.2.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ (рис. 16.7).

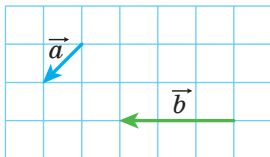


Рис. 16.6

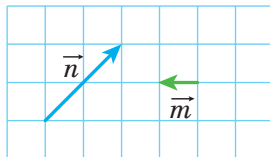


Рис. 16.7



ВПРАВИ

16.3.° На рисунку 16.8 зображено рівносторонній трикутник ABC , медіани AM і BK якого перетинаються в точці F . Знайдіть кут між векторами:

- 1) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AM}$; 7) $\overrightarrow{CF}$ і $\overrightarrow{AB}$.
- 2) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BK}$;
- 3) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AM}$; 6) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BK}$;

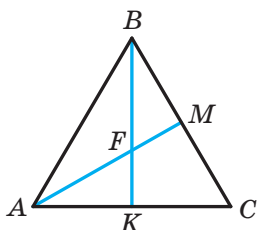


Рис. 16.8

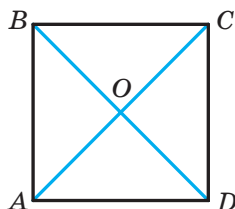


Рис. 16.9

16.4.° На рисунку 16.9 зображено квадрат $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Знайдіть кут між векторами:

- 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DA}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{CB}$;
- 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{CD}$.
- 3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CA}$;

16.5.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$;
- 2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$;
- 3) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$;
- 4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

16.6.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

- 1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ$;
- 2) $|\vec{m}| = 8$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150^\circ$.

16.7.° Чому дорівнює скалярний квадрат вектора, модуль якого дорівнює: 1) 9; 2) $\sqrt{7}$?

 **16.8.°** Обговоріть з однокласниками й однокласницями, чи може скалярний добуток векторів дорівнювати добутку їхніх модулів. У разі ствердної відповіді з'ясуйте, за якої умови це можливо.

16.9.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1) $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(1; -3)$; 3) $\vec{a}(1; -4)$, $\vec{b}(8; 2)$.
2) $\vec{a}(-5; 1)$, $\vec{b}(2; 7)$;

16.10.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

- 1) $\vec{m}(3; -2)$, $\vec{n}(1; 0)$; 2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{n}(6; 9)$.

16.11.° Чому дорівнює скалярний квадрат вектора:

- 1) $\vec{m}(-2; 1)$; 2) $\vec{n}(3; 3)$?

16.12.° Знайдіть скалярний квадрат вектора: 1) $\vec{a}(-4; 0)$;

- 2) $\vec{b}(5; 2)$.

16.13.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 1$.

Знайдіть скалярний добуток векторів:

- 1) $\vec{AC}$ і $\vec{BC}$; 2) $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$; 3) $\vec{CB}$ і $\vec{BA}$.

16.14.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $CB = 2$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

- 1) $\vec{AC}$ і $\vec{BC}$; 2) $\vec{AC}$ і $\vec{AB}$; 3) $\vec{CB}$ і $\vec{BA}$.

 **16.15.°** Який знак має скалярний добуток векторів, якщо кут між ними:

- 1) гострий; 2) тупий?

 **16.16.°** Відомо, що скалярний добуток векторів є:

- 1) додатним числом; 2) від'ємним числом.

Визначте вид кута між векторами.

 **16.17.*** Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, сторона якого дорівнює 1. Обчисліть:

- 1) $\vec{BA} \cdot \vec{CD}$; 2) $\vec{AD} \cdot \vec{CD}$; 3) $\vec{AO} \cdot \vec{ED}$; 4) $\vec{AC} \cdot \vec{CD}$.

 **16.18.*** Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O , $AB = 6$, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

- 1) $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$; 5) $\overline{BD}$ і $\overline{AC}$;
 2) $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$; 6) $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$;
 3) $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$; 7) $\overline{OC}$ і $\overline{BC}$.
 4) $\overline{BC}$ і $\overline{DA}$;



Використовуючи знайдені скалярні добутки векторів, розшифруйте прізвище професора Київського університету, першого завідувача кафедри математики Київського політехнічного інституту, автора наукової роботи «Теорія векторів на площині. Додаток до дослідження конічних перерізів». Номер завдання відповідає місцю, на якому стоїть буква у слові.

Відповідь	0	36	27	54	18	-36	-18
Буква	К	М	В	О	Є	А	Р

Знайдіть в інтернеті інформацію про те, у якому році вперше було надруковано цю працю, про наукову та викладацьку діяльність її автора.

16.19.* При якому значенні y скалярний добуток векторів $\vec{a}(4; y)$ і $\vec{b}(3; -2)$ дорівнює 14?

16.20.* При якому значенні x вектори $\vec{a}(3; x)$ і $\vec{b}(1; 9)$ перпендикулярні?

16.21.* При яких значеннях x вектори $\vec{a}(2x; -3)$ і $\vec{b}(x; 6)$ перпендикулярні?

16.22.* Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(3; -4)$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$.

16.23.* Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

16.24.* Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$.

16.25.* Знайдіть скалярний добуток $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

↔ 16.26.* Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Знайдіть $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$.

16.27.* Відомо, що $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$. Знайдіть $|2\vec{m} - 3\vec{n}|$.

16.28.* Доведіть, використовуючи вектори, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(3; -2)$, $B(4; 0)$, $C(2; 1)$ і $D(1; -1)$ є прямокутником.

16.29.* Доведіть, використовуючи вектори, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-1; 4)$, $B(-2; 5)$, $C(-1; 6)$ і $D(0; 5)$ є квадратом.

16.30.* Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(1; -2)$ і $\vec{b}(2; -3)$.

16.31.* Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{m}(5; -1)$ і $\vec{n}(2; 4)$.

16.32.* Знайдіть косинуси кутів трикутника з вершинами $A(1; 6)$, $B(-2; 3)$ і $C(2; -1)$.

16.33.* Знайдіть кути трикутника з вершинами $A(0; 6)$, $B(4\sqrt{3}; 6)$ і $C(3\sqrt{3}; 3)$.

16.34.** Знайдіть кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо $(\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (\vec{m} - \vec{n}) = -11$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$.

16.35.** Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{3}{2}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

16.36.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$. Доведіть, що його медіани AK і CM перпендикулярні.

16.37.** У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні та перетинаються в точці O . Відомо, що $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Знайдіть кут між прямими AB і DC .

16.38.** У трикутнику ABC проведено медіану BD . Відомо, що $\angle DBC = 90^\circ$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайдіть кут ABD .

- 16.39.*** На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABMN$ і $BCKF$. Доведіть, що медіана BD трикутника ABC перпендикулярна до прямої MF .



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

- 16.40.** Знайдіть роботу сили величиною 6 Н з переміщення тіла на відстань 7 м , якщо кут між напрямками сили та переміщення дорівнює 60° .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 16.41.** Точка M — середина діагоналі AC опуклого чотирикутника $ABCD$ (рис. 16.10). Доведіть, що чотирикутники $ABMD$ і $CBMD$ рівновеликі.

- 16.42.** На висоті правильного трикутника зі стороною $6\sqrt{3}\text{ см}$ як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка розташована поза трикутником.

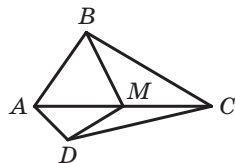


Рис. 16.10



ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.

- Яка з наведених величин є векторною?
 А) Маса; В) швидкість;
 Б) об'єм; Г) час.
- Чому дорівнює модуль вектора, початок і кінець якого збігаються?
 А) 1; В) -1 ; В) 5; Г) 0.



3. Дано паралелограм $ABCD$. Яка з даних рівностей є правильною?
А) $\overline{AB} = \overline{DC}$; В) $\overline{BC} = \overline{DA}$;
Б) $\overline{AB} = \overline{CD}$; Г) $\overline{AC} = \overline{BD}$.
4. Відомо, що $\overline{AM} = \overline{MB}$. Яке з даних тверджень є правильним?
А) Точка B — середина відрізка AM ;
Б) точка A — середина відрізка MB ;
В) точка M — середина відрізка AB ;
Г) точка M — вершина рівнобедреного трикутника AMB .
5. Дано точки $A(-3; 4)$ і $B(1; -8)$. Точка M — середина відрізка AB . Знайдіть координати вектора $\overline{AM}$.
А) $(2; -6)$; В) $(-2; -6)$;
Б) $(-2; 6)$; Г) $(6; -2)$.
6. При якому значенні x вектори $\vec{a}(x; 2)$ і $\vec{b}(-4; 8)$ колінеарні?
А) -1 ; Б) 1 ; В) 0 ; Г) $\frac{1}{2}$.
7. Яка з даних рівностей є правильною?
А) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{CA}$; В) $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{BC}$;
Б) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{DC}$; Г) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{DA}$.
8. Дано вектор $\vec{a}(\sqrt{3}; -2)$. Який із векторів дорівнює вектору $\sqrt{3}\vec{a}$?
А) $\vec{m}(1; -2\sqrt{3})$; В) $\vec{p}(3; -2)$;
Б) $\vec{n}(-3; -2\sqrt{3})$; Г) $\vec{q}(3; -2\sqrt{3})$.
9. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(2; -3)$ і $\vec{b}(3; -2)$.
А) 12 ; Б) -12 ; В) 0 ; Г) 6 .
10. При якому значенні x вектори $\vec{a}(2x; -3)$ і $\vec{b}(1; 4)$ перпендикулярні?
А) -6 ; Б) 3 ; В) 12 ; Г) 6 .
11. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(5; -12)$ та $\vec{b}(-3; 4)$.
А) $\frac{63}{65}$; Б) $\frac{65}{63}$; В) $-\frac{63}{65}$; Г) $\frac{1}{2}$.

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Установіть відповідність між характеристиками (1–3) векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та їхніми скалярними добутками (А–Д).

Характеристика векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$
1) $ \vec{a} = 3, \vec{b} = \sqrt{2}, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$	А) 6
2) $ \vec{a} = 2, \vec{b} = 3, \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$	Б) 3
3) $ \vec{a} = 4, \vec{b} = 1,5, \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$	В) –6
	Г) –3
	Д) 9



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1.° Дано точки $M(-3; 2)$, $K(0; -2)$ і $N(1; 1)$. Знайдіть:

- 1) координати векторів $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{MN}$;
- 2) модулі векторів $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{MN}$;
- 3) координати вектора $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MN}$;
- 4) скалярний добуток векторів $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{MN}$;
- 5) косинус кута між векторами $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{MN}$.

2.° Накресліть трикутник DEF . Побудуйте вектор:

- 1) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$;
- 2) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE}$;
- 3) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FE}$.

3.° Дано вектори $\vec{m}(3; 5)$ і $\vec{n}(k; -15)$. При якому значенні k вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$: 1) колінеарні; 2) перпендикулярні?

4.° Медіани AA_1 і BB_1 правильного трикутника ABC , сторона якого дорівнює 1, перетинаються в точці M . Обчисліть:

- 1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$;
- 2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

5.* На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки M і K так, що $BM:MC=2:5$, $CK:KD=3:4$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Вектор

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають напрямленим відрізком або вектором.

Колінеарні вектори

Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Рівні вектори

Ненульові вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнаправлені. Будь-які два нульових вектори рівні.

Рівні вектори мають рівні відповідні координати.

Якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.

Координати вектора

Якщо точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.

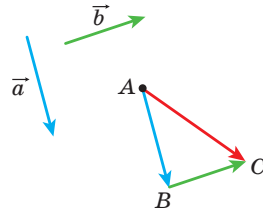
Модуль вектора

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

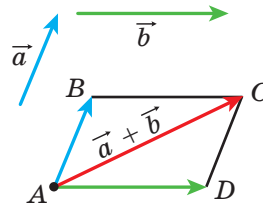
Правила додавання двох векторів**Правило трикутника**

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, а від точки B — вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ — сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Для будь-яких трьох точок A , B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

**Правило паралелограма**

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$. Побудуємо паралелограм $ABCD$. Тоді вектор $\overrightarrow{AC}$ — сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

**Координати суми векторів**

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Властивості додавання векторів

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

- 1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переставна властивість;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — сполучна властивість.

Різниця векторів

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Для будь-яких трьох точок O , A і B виконується рівність $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Координати різниці векторів

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Протилежні вектори

Два ненульових вектори називають протилежними, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.

Для будь-яких точок A і B виконується рівність $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k , відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $|\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$;

2) якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.

Властивості колінеарних векторів

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k , що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k , що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.

Властивості множення вектора на число

Для будь-яких чисел k, m і будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}$ виконуються рівності:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сполучна властивість;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — перша розподільна властивість;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — друга розподільна властивість.

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Властивості скалярного добутку

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переставна властивість;
- 2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — сполучна властивість;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — розподільна властивість.

Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.



ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

У цьому параграфі ви дізнаєтеся, що таке перетворення фігури. Ознайомитеся з такими видами перетворень, як паралельне перенесення, центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, подібність. Ви навчитеся застосовувати властивості перетворень під час розв'язування задач і доведення теорем.

17. Рух (переміщення) фігури. Паралельне перенесення



Іноді зображення поводяться так, ніби вони живі й уміють рухатися. Наприклад, кольоровий візерунок від вітражного вікна на підлозі змінює своє положення протягом дня, коли рухається сонце. А герой комп'ютерної гри може стрибати, бігати, зменшуватися або збільшуватися, але завжди залишається впізнаваним.



У цьому параграфі ви ознайомитеся з геометричними перетвореннями — розділом геометрії, де фігури нібито оживають: пересуваються, обертаються, масштабуються тощо. Ви навчитеся описувати такі дії й дізнаєтеся, які властивості фігур зберігаються, а які можуть змінюватися. Це допоможе краще розуміти не лише геометрію, а й принципи, за якими створюють анімації, візерунки, комп'ютерні ігри, інженерні креслення та архітектурні проекти.

ПРИКЛАД 1. На рисунку 17.1 зображено відрізок AB , пряму a і точку O , яка не належить ні прямій a , ні прямій AB . Кожній точці X відрізка AB поставимо у відповідність точку X_1 прямої a так, щоб точки O , X і X_1 лежали на одній прямій. Точці A відповідатиме точка A_1 , точці B — точка B_1 . Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1 .

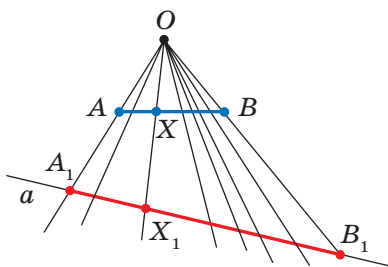


Рис. 17.1

Ми вказали правило, за допомогою якого кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність єдину точку X_1 відрізка A_1B_1 . У цьому разі говорять, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті **перетворення** відрізка AB .

ПРИКЛАД 2. На рисунку 17.2 зображено півколо AB і пряму a , паралельну діаметру AB . Кожній точці X півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої a так, щоб пряма XX_1 була перпендикулярною до прямої a . Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1 . У цьому разі говорять, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті перетворення півкола AB .

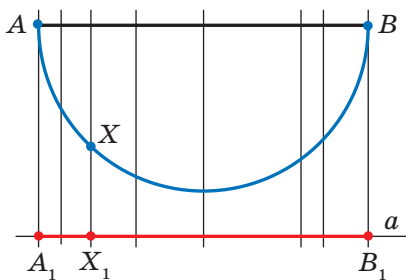


Рис. 17.2

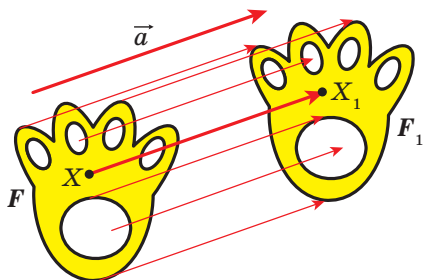


Рис. 17.3

ЖГ1

ПРИКЛАД 3. Нехай задано деяку фігуру F і вектор $\vec{a}$ (рис. 17.3). Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1 таку, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 17.3). Таке перетворення фігури F називають **паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$** .

З деякими прикладами паралельного перенесення фігур ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



Узагальнимо наведені приклади.

Нехай задано деяку фігуру F . Кожній точці фігури F поставимо у відповідність (зіставимо) за певним правилом деяку точку. Усі отримані зіставлені точки утворюють фігуру F_1 . Говорять, що **фігуру F_1 отримано в результаті перетворення фігури F** . При цьому фігуру F_1 називають **образом** фігури F , а фігуру F — **прообразом** фігури F_1 .

Так, у прикладі 1 відрізок A_1B_1 є образом відрізка AB . Точка X_1 є образом точки X . Відрізок AB — це прообраз відрізка A_1B_1 .

Звернемо увагу на те, що в прикладі 3 фігура F дорівнює своєму образу F_1 . Перетворення, описані в прикладах 1 і 2, такої властивості не мають.

Які ж властивості повинне мати перетворення, щоб образ і прообраз були рівними фігурами? Виявляється, що достатньо лише однієї властивості: перетворення має зберігати відстань між точками, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F , а точки A_1 і B_1 — їхні образи, то має виконуватися рівність $AB = A_1B_1$.

Означення:

Перетворення фігури F , яке зберігає відстань між її точками, називають рухом (переміщенням) фігури F .

Коли ви пересуваєте аркуш паперу по столу, — наприклад, зсуваєте його вбік або повертаєте, не згинаючи й не зминаючи, — усі точки на ньому зберігають свої відстані одна від одної. Це приклад руху фігури на площині.

Якщо кожній точці X фігури F поставлено у відповідність цю саму точку X , то таке перетворення фігури F називають **тотожним**. При тотожному перетворенні образом фігури F є сама фігура F . Очевидно, що тотожне перетворення є рухом.

Ми давно використовуємо поняття «рівність фігур», хоча не давали йому строгого означення.

На те, що рух пов'язаний із рівністю фігур, указують такі властивості руху.

ЖГ2 Якщо перетворення є рухом, то:

- образом прямої є пряма;
- образом відрізка є відрізок, рівний даному;
- образом кута є кут, рівний даному;
- образом трикутника є трикутник, рівний даному.



Доведення цих властивостей виходить за межі розглядуваного курсу геометрії.

Властивості руху підказують таке означення.

Означення:

Дві фігури називають рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої.

Запис $F = F_1$ означає, що фігури F і F_1 рівні.

Якщо існує рух, при якому фігура F_1 є образом фігури F , то обов'язково існує рух, при якому фігура F є образом фігури F_1 . Такі рухи називають взаємно оберненими.

Зауваження. Раніше рівними фігурами ми називали такі фігури, які збігалися при накладанні. Термін «накладання» інтуїтивно зрозумілий, і в нашому уявленні він пов'язаний із накладанням реальних об'єктів. Але геометричні фігури не можна накласти в буквальному розумінні цього слова. Тепер накладання фігури F на фігуру F_1 можна розглядати як рух фігури F , при якому її образом є фігура F_1 .

Термін «рух» також асоціюється з певною фізичною дією: зміною положення тіла без деформації. Саме із цим пов'язана поява цього терміна в математиці. Проте в геометрії предметом дослідження є не процес, який відбувається в часі, а лише властивості фігури та її образу.

Те, що зображені на рисунку 17.3 фігури F і F_1 рівні, зрозуміло з наочного сприйняття. Строге обґрунтування цього факту дає така теорема.

Теорема 17.1 (властивість паралельного перенесення):

Паралельне перенесення є рухом.

Із доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



Наслідок:

Якщо фігура F_1 — образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F_1 = F$.

Цю властивість використовують при створенні малюнків на тканинах, шпалерах, покриттях для підлоги тощо (рис. 17.4).



Рис. 17.4

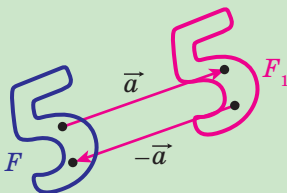


Рис. 17.5

Якщо фігура F_1 є образом фігури F при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$, то фігура F є образом фігури F_1 при паралельному перенесенні на вектор $-\vec{a}$ (рис. 17.5). Паралельні перенесення на вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ є взаємно оберненими рухами.



ЗАДАЧА 1. Кожній точці $X(x; y)$ фігури F поставлено у відповідність точку $X_1(x + m; y + n)$, де m і n — задані числа. Доведіть, що таке перетворення фігури F є паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}(m; n)$.

Розв'язання. Розглянемо вектор $\vec{a}(m; n)$. Зауважимо, що координати вектора $\overline{XX_1}$ дорівнюють $(m; n)$, тобто $\overline{XX_1} = \vec{a}$. Отже, описане перетворення фігури F — паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$. ◀

ЗАДАЧА 2. Точка $A_1(-2; 3)$ є образом точки $A(-1; 2)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$ і координати образу точки $B(-7; -3)$.

Розв'язання. З умови випливає, що $\overline{AA_1} = \vec{a}$. Звідси $\vec{a}(-1; 1)$.

Нехай точка $B_1(x; y)$ — образ точки $B(-7; -3)$. Тоді $\overline{BB_1} = \vec{a}$, тобто $x + 7 = -1$ і $y + 3 = 1$. Звідси $x = -8$, $y = -2$.

Відповідь: $\vec{a}(-1; 1)$, $B_1(-8; -2)$. ◀



1. Опишіть, що таке перетворення фігури.
2. Наведіть приклади перетворення фігур.
3. Опишіть перетворення фігури $\vec{F}$, яке називають паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$.
4. Яке перетворення фігури називають рухом?
5. Які дві фігури називають рівними?



ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Під час відмінювання деяких іменників відбувається чергування приголосних звуків [г]–[з], [к]–[ц], [х]–[с] у місцевому відмінку, наприклад: *круг — у крузі, дуга — на дузі, статистика — у статистиці, рух — при русі*.



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 17.1.^о На рисунку 17.6 зображено кут AOB і пряму p , не паралельну його сторонам. Кожній точці X сторони OA поставлено у відповідність таку точку X_1 сторони OB , що $XX_1 \parallel p$ (точці O поставлено у відповідність саму точку O). Побудуйте образ точки M і прообраз точки K при даному перетворенні променя OA . Яка фігура є образом променя OA ?

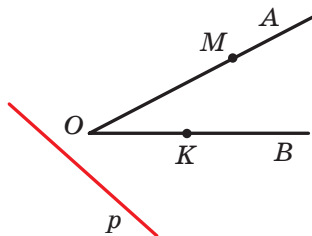


Рис. 17.6

- 17.2.°** На рисунку 17.7 зображено відрізок AB і пряму a . Кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність основу перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму a . Побудуйте образ точки E і прообраз точки F при даному перетворенні відрізка AB . Чи існують точки прямої a , які не мають прообразу? Побудуйте образ відрізка AB .

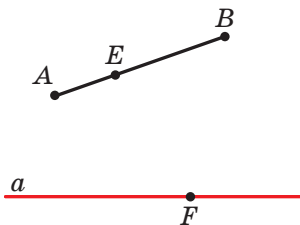


Рис. 17.7

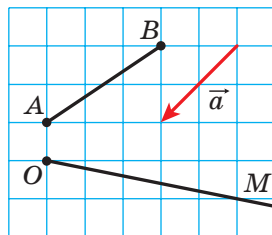


Рис. 17.8

- 17.3.°** Побудуйте образи відрізка AB і променя OM при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (рис. 17.8).

- 17.4.°** На рисунку 17.9 пряма a є образом деякої прямої при паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}$. Побудуйте прообраз прямої a .

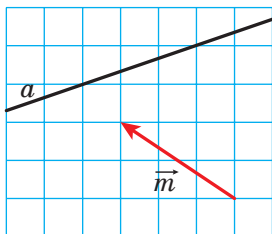


Рис. 17.9

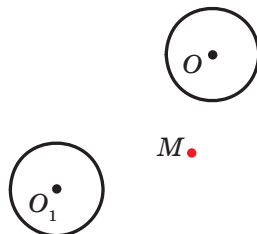


Рис. 17.10

- 17.5.°** Коло із центром O_1 є образом кола із центром O при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (рис. 17.10). Відкладіть вектор $\vec{a}$ від точки M .
- 17.6.*** Побудуйте образ кола $x^2 + y^2 = 4$ при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\vec{a}$ (2; 0); 2) $\vec{b}$ (0; -1); 3) $\vec{c}$ (2; -1). Запишіть рівняння образу кола $x^2 + y^2 = 4$ при даному паралельному перенесенні.

17.7.* Прямая a дотикається до півкола AB із центром у точці O (рис. 17.11). Задайте яке-небудь перетворення, при якому пряма a є образом півкола AB з «виколотими» точками A і B .

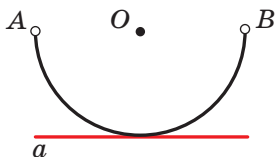


Рис. 17.11

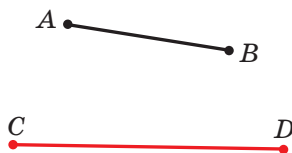


Рис. 17.12

17.8.* Задайте яке-небудь перетворення, при якому відрізок CD є образом відрізка AB (рис. 17.12).

**ВПРАВИ**

17.9.° Як ви думаєте, чи може при русі образом відрізка AB бути відрізок A_1B_1 , якщо:

- 1) $AB = 6$ см, $A_1B_1 = 7$ см;
- 2) $AB = 8$ см, $A_1B_1 = 8$ см?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

17.10.° Як ви думаєте, чи може при русі образом кута M бути кут M_1 , якщо:

- 1) $\angle M = 38^\circ$, $\angle M_1 = 38^\circ$;
- 2) $\angle M = 64^\circ$, $\angle M_1 = 65^\circ$?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

17.11.° Чотирикутник $ABCD$ є рівнобічною трапецією з основами BC і AD . Як ви думаєте, чи може при русі:

- 1) образом відрізка AB бути відрізок CD ;
- 2) образом відрізка BC бути відрізок AD ;
- 3) образом кута BAD бути кут CDA ?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

17.12.° Чотирикутник $ABCD$ є квадратом. Чи може при русі:

- 1) образом сторони AB бути сторона AD ;
- 2) образом кута ABC бути кут BAD ;
- 3) образом кута ABD бути кут BCD ?

- 17.13.°** Образом рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) при русі є трикутник $A_1B_1C_1$. Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $\angle B = 150^\circ$.
- 17.14.°** Образом трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) при русі є трикутник $A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $AB = 10$ см, $BC = 6$ см.
- 17.15.°** Розглянемо коло радіуса r із центром у точці O . Кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1 , яка належить радіусу OX , таку, що $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Як ви думаєте, яка фігура є образом заданого кола? Чи є рухом описане перетворення? Обговоріть це питання у класі.
- 17.16.°** Точки A_1 і B_1 є образами відповідно точок A і B при паралельному перенесенні відрізка AB . Знайдіть відрізок A_1B_1 , якщо $AB = 5$ см.
- 17.17.°** Як ви думаєте, чи може при паралельному перенесенні:
- 1) образом кола бути коло того самого радіуса;
 - 2) образом сторони паралелограма бути інша сторона паралелограма;
 - 3) образом прямокутного трикутника бути рівносторонній трикутник?
- Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.
- 17.18.°** Вектор $\vec{m}$ паралельний прямій a . Яка фігура є образом прямої a при її паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}$?
- 17.19.°** Дано паралелограм $ABCD$. Який вектор задає паралельне перенесення, при якому сторона AD є образом сторони BC ?
- 17.20.°** Скільки існує паралельних перенесень прямої a , при яких її образом є: 1) сама пряма a ; 2) пряма b , паралельна прямій a ?
- 17.21.°** Знайдіть точки, які є образами точок $A(-2; 3)$ і $B(1; -4)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-1; -3)$.
-  **17.22.°** Чи існує паралельне перенесення, при якому образом точки $A(1; 3)$ є точка $A_1(4; 0)$, а образом точки $B(-2; 1)$ — точка $B_1(1; 4)$?
- 17.23.°** При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(2; -1)$ образом точки A є точка $A_1(-3; 4)$. Знайдіть координати точки A .

17.24.* Точка $M_1(x; 2)$ є образом точки $M(3; y)$ при паралельному перенесенні, при якому точка $A(2; 3)$ є образом початку координат. Знайдіть x і y .



17.25.* Точки A_1 і B_1 не належать прямій AB і є образами відповідно точок A і B при паралельному перенесенні прямої AB . Доведіть, що прямі AB і A_1B_1 паралельні.

Поміркуйте, чому в задачі вимагається, щоби точки A_1 і B_1 не належали прямій AB . Обговоріть це у класі.

17.26.* Як ви думаєте, чи існує паралельне перенесення рівностороннього трикутника ABC , при якому сторона AB є образом сторони BC ?

Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

17.27.* Дано точки $A(3; -2)$ і $B(5; -4)$. При паралельному перенесенні відрізка AB образом його середини є точка $M_1(-4; 3)$. Знайдіть образи точок A і B при такому паралельному перенесенні.

17.28.* Точки $A(1; 3)$, $B(2; 6)$, $C(-3; 1)$ є вершинами паралелограма $ABCD$. При паралельному перенесенні паралелограма $ABCD$ образом точки перетину його діагоналей є точка $O_1(-2; -4)$. Знайдіть образи точок A , B , C і D при такому паралельному перенесенні.

17.29.* Знайдіть рівняння кола, яке є образом кола $x^2 + y^2 = 1$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-3; 4)$.

17.30.* Знайдіть рівняння параболи, яка є образом параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(2; -3)$.

17.31.** Відомо, що при перетворенні фігури F її образом є ця сама фігура F . Поміркуйте, чи можна стверджувати, що це перетворення є тотожним?

Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

17.32.** Побудуйте трапецію за основами та діагоналями.

17.33.** Побудуйте трапецію за чотирма сторонами.

17.34.* У якому місці потрібно побудувати міст MN через річку, яка розділяє два населених пункти A і B (рис. 17.13), щоби шлях $AMNB$ був найкоротшим (береги річки вважаємо паралельними прямими, міст перпендикулярний до берегів річки)?

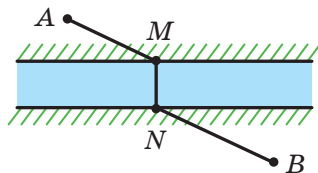


Рис. 17.13



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

- 17.35.** На рисунку 17.14 зображено фрагмент візерунка української вишиванки. Перерисуйте цей фрагмент у зошит і, використовуючи паралельне перенесення, дорисуйте такі візерунки ліворуч і праворуч від нього.

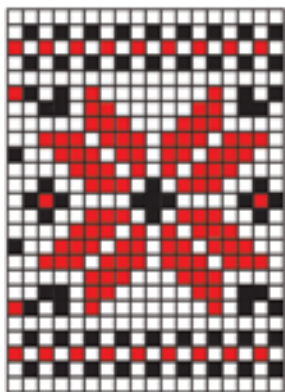


Рис. 17.14



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 17.36.** Через кожну вершину трикутника проведено пряму, паралельну протилежній стороні. Чому дорівнює периметр трикутника, який утворився при цьому, якщо периметр даного трикутника дорівнює 18 см?
- 17.37.** Доведіть, що чотирикутник з вершинами $A(-3; -4)$, $B(0; 3)$, $C(7; 6)$ і $D(4; -1)$ є ромбом, і знайдіть його площу.
- 17.38.** У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику поділяє більшу з бічних сторін трапеції на відрізки завдовжки 4 см і 25 см. Знайдіть площу трапеції.



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 17.39.** У середині правильного шестикутника зі стороною 1 м розташовано 7 точок. Доведіть, що серед них знайдуться 2 точки, відстань між якими не більша за 1 м.

18. Осьова симетрія



Зображення на рисунку 18.1 складаються з двох однакових частин — рівних фігур, розташованих по різні боки від червоної прямої. Про такі зображення кажуть, що вони мають вісь симетрії або складаються з двох симетричних частин. У цьому пункті ми ознайомимося з таким видом геометричного перетворення, яке дозволяє побачити, як одна частина фігури «віддзеркалюється» відносно прямої та переходить в іншу частину.



Рис. 18.1

Означення:

Точки A і A_1 називають симетричними відносно прямої l , якщо пряма l є серединним перпендикуляром відрізка AA_1 (рис. 18.2). Якщо точка A належить прямій l , то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l .

Наприклад, точки A і A_1 , у яких ординати рівні, а абсциси — протилежні числа, симетричні відносно осі ординат (рис. 18.3).

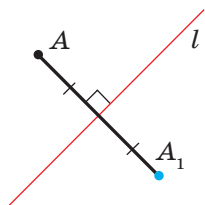


Рис. 18.2

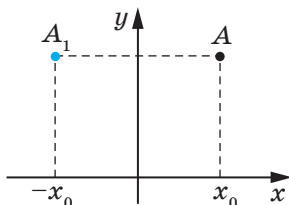


Рис. 18.3

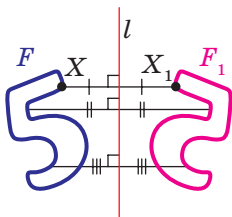


Рис. 18.4

Розглянемо фігуру F і пряму l . Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно прямої l точку X_1 . Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 18.4). Таке перетворення фігури F називають **осьовою симетрією відносно прямої l** . Пряму l називають **віссю симетрії**. Говорять, що фігури F і F_1 **симетричні відносно прямої l** .

Теорема 18.1 (властивість осьової симетрії):

Осьова симетрія є рухом.

Доведення. ☉ Виберемо систему координат так, щоб вісь симетрії збігалася з віссю ординат. Нехай $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ — довільні точки фігури F . Тоді точки $A_1(-x_1; y_1)$ і $B_1(-x_2; y_2)$ — їхні відповідні образи при осьовій симетрії фігури F відносно осі ординат. Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Ми отримали, що $AB = A_1B_1$, тобто осьова симетрія зберігає відстань між точками. Отже, осьова симетрія є рухом. ●

Наслідок:

Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно прямої, то $F = F_1$.

На початку цього пункту (рис. 18.1) ми навели приклади зображень, які мають вісь симетрії. Ознайомимось з цим поняттям детальніше.

Означення:

Фігуру називають симетричною відносно прямої l , якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно прямої l , також належить цій фігурі.

Пряму l називають **віссю симетрії фігури**. Також говорять, що **фігура має вісь симетрії**.

Наведемо приклади фігур, які мають вісь симетрії.

На рисунку 18.5 зображено рівнобедрений трикутник. Пряма, яка містить його висоту, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.

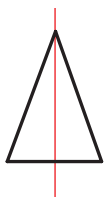


Рис. 18.5

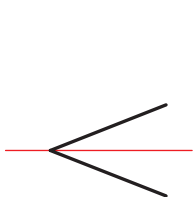


Рис. 18.6

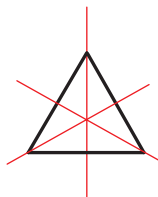


Рис. 18.7

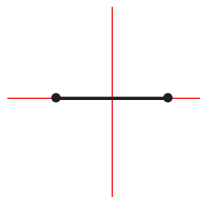


Рис. 18.8

Будь-який кут має вісь симетрії — це пряма, яка містить його бісектрису (рис. 18.6).

Рівносторонній трикутник має три осі симетрії (рис. 18.7).

Дві осі симетрії має відрізок: це його серединний перпендикуляр і пряма, яка містить цей відрізок (рис. 18.8).

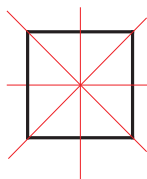


Рис. 18.9

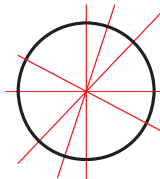


Рис. 18.10

Квадрат має чотири осі симетрії (рис. 18.9).

Існують фігури, які мають безліч осей симетрії, наприклад коло. Будь-яка пряма, що проходить через центр кола, є його віссю симетрії (рис. 18.10).

Безліч осей симетрії має і пряма: сама пряма та будь-яка пряма, перпендикулярна до неї, є її осями симетрії.

ЖГ1 З деякими прикладами побудови симетричних фігур ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



З проявами осьової симетрії ви зустрічаєтеся не лише в природі, а й у техніці, архітектурі та повсякденному житті. Симетричними є багато дорожніх знаків, орнаментів, логотипів, малюнків на прапорах, а також герби держав,

фасади будівель тощо (рис. 18.11). Осьова симетрія часто використовується для створення зручних привабливих і гармонійних зображень.



Рис. 18.11

ЗАДАЧА 1. Накреслили нерівнобедрений трикутник ABC . Провели пряму l , яка містить бісектрису кута C . Потім рисунок витерли, залишивши лише точки A і B та пряму l . Відновіть трикутник ABC .

Розв'язання. Оскільки пряма l є віссю симетрії кута ACB , то точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої l — належить променю CB . Тоді перетином прямих l і BA_1 є вершина C шуканого трикутника ABC (рис. 18.12).

Ці міркування підказують, як побудувати шуканий трикутник: будемо точку A_1 , симетричну точці A відносно прямої l . Знаходимо вершину C як точку перетину прямих l і BA_1 . ◀

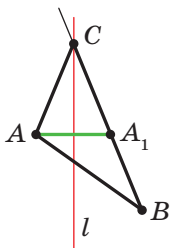


Рис. 18.12

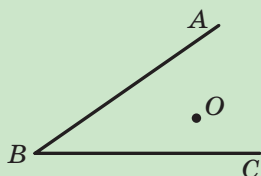


Рис. 18.13

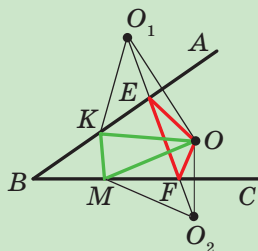


Рис. 18.14

ЗАДАЧА 2. Точка O належить гострому куту ABC (рис. 18.13). На сторонах BA і BC кута знайдіть такі точки E і F , щоби периметр трикутника OEF був найменшим.

Розв'язання. Нехай точки O_1 і O_2 — образи точки O при симетриях відносно прямих BA і BC відповідно (рис. 18.14),

а пряма O_1O_2 перетинає сторони BA і BC у точках E і F відповідно. Доведемо, що точки E і F — шукані.

Зауважимо, що відрізки EO_1 і EO симетричні відносно прямої BA . Отже, $EO_1 = EO$. Аналогічно $FO = FO_2$. Тоді периметр трикутника OEF дорівнює довжині відрізка O_1O_2 .

Покажемо, що побудований трикутник має найменший периметр з можливих. Розглянемо трикутник KOM , де K і M — довільні точки відповідно променів BA і BC , причому точка K не збігається з точкою E або точка M не збігається з точкою F . Зрозуміло, що $KO = KO_1$ і $MO = MO_2$. Тоді периметр трикутника KOM дорівнює сумі $O_1K + KM + MO_2$.

Проте $O_1K + KM + MO_2 \geq O_1O_2$. ◀



1. Які точки називають симетричними відносно прямої l ? Як називають пряму l ? **2.** Які фігури називають симетричними відносно прямої l ? **3.** Яку властивість мають фігури, симетричні відносно прямої? **4.** Про яку фігуру кажуть, що вона має вісь симетрії? **5.** Наведіть приклади фігур, які мають вісь симетрії.



ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Запам'ятайте! В іменниках «симетрія» та «асиметрія» (протилежне значення до симетрії) завжди наголошуємо склад *-трі-*: *осьова симетрія, вісь симетрії, центральною симетрією; асиметрія тіла, асиметрії фігури, асиметрією об'єктів.*



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

18.1.° Побудуйте образи фігур, зображених на рисунку 18.15, при симетрії відносно прямої l .

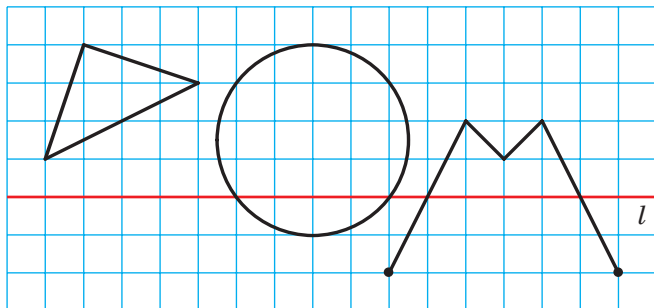


Рис. 18.15

- 18.2.°** Накресліть трикутник. Побудуйте трикутник, симетричний йому відносно прямої, яка містить одну з його середніх ліній.
- 18.3.°** Побудуйте на координатній площині відрізок, кінцями якого є точки $A(4; -1)$ і $B(-3; 5)$, та відрізок, симетричний відрізку AB відносно осі абсцис. Запишіть координати кінців образу відрізка AB при вказаній симетрії. Висловіть гіпотезу, які координати має точка A_1 , що є образом точки $A(x_0; y_0)$ при симетрії відносно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат. Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.
- 18.4.°** Побудуйте на координатній площині відрізок, кінцями якого є точки $D(-4; -2)$ і $E(-3; 4)$, та образ відрізка DE при симетрії відносно осі ординат.
- 18.5.°** Добудуйте фігуру, зображену на рисунку 18.16, так, щоб утворилася фігура, для якої пряма a є віссю симетрії.

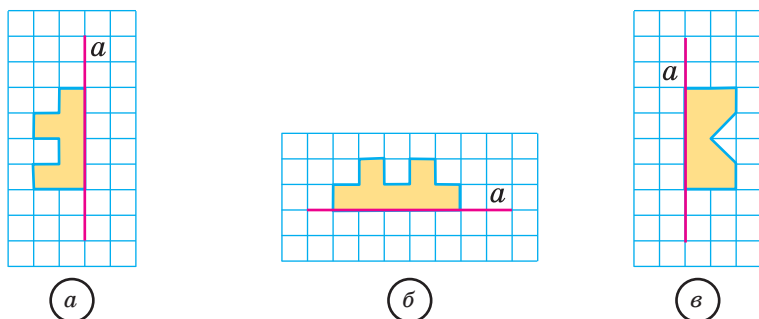


Рис. 18.16

- 18.6.°** Добудуйте фігуру, зображену на рисунку 18.17, так, щоб утворилася фігура, для якої пряма a є віссю симетрії.

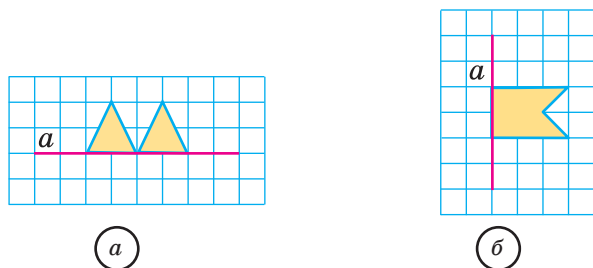


Рис. 18.17

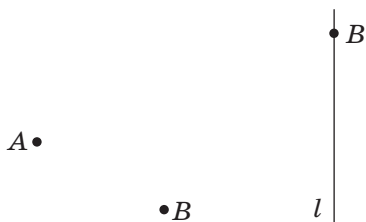


Рис. 18.18

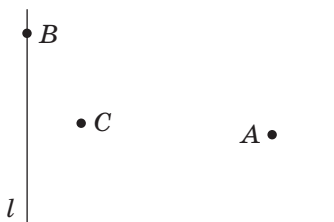


Рис. 18.19

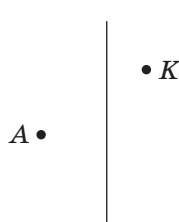


Рис. 18.20

18.7.^о Точки A і B симетричні відносно прямої l (рис. 18.18). Побудуйте пряму l .

18.8.* Проведіть прямі a і a_1 , які перетинаються. Побудуйте пряму, відносно якої пряма a_1 буде симетричною прямій a . Скільки розв'язків має задача?

18.9.* Проведіть паралельні прямі a і a_1 . Побудуйте пряму, відносно якої пряма a_1 буде симетричною прямій a .

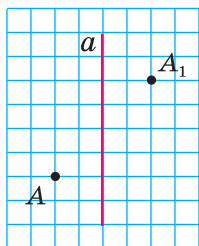
18.10.** Побудуйте ромб $ABCD$ за його вершинами B і C та прямою l , яка містить його діагональ BD (рис. 18.19).

18.11.** Побудуйте рівнобедрений трикутник ABC за вершиною A , точкою K , яка належить бічній стороні BC , і прямою, яка містить висоту, проведену до основи AB (рис. 18.20).

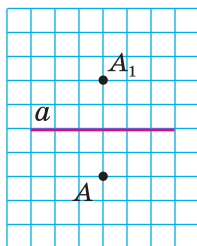


ВПРАВИ

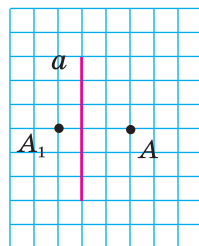
18.12.^о Розгляньте рисунок 18.21 та вкажіть, у якому випадку точки A і A_1 симетричні відносно прямої a .



а



б



в

Рис. 18.21

Обговоріть свою відповідь з однокласниками й однокласницями.

- 18.13.°** Прямая l проходить через середину відрізка AB . Чи обов'язково точки A і B є симетричними відносно прямої l ?
- 18.14.°** У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено бісектрису BK . Яка пряма є віссю симетрії цього трикутника? Обґрунтуйте вашу думку й обговоріть її у класі.
- 18.15.°** На рисунку 18.22 зображено рівнобедрений трикутник ABC і пряму l , яка містить його висоту, проведену до основи AC . Відрізки AM і CN — медіани трикутника. Укажіть образи точок A і B , медіани CN і сторони AC при симетрії відносно прямої l .

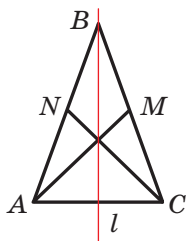


Рис. 18.22

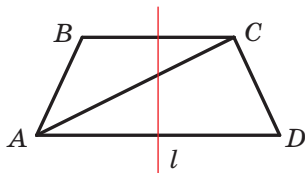


Рис. 18.23

- 18.16.°** На рисунку 18.23 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$ і пряму l , яка проходить через середини її основ. Укажіть образи точок B і D , діагоналі AC і основи BC при симетрії відносно прямої l .
- 18.17.°** Точки A_1 і B_1 є відповідно образами точок A і B при осевій симетрії. Відомо, що $AB = 5$ см. Знайдіть відрізок A_1B_1 .
- 18.18.°** Знайдіть координати точок, симетричних точкам $A(-2; 1)$ і $B(0; -4)$ відносно осей координат.
- 18.19.°** Точки $A(x; 3)$ і $B(-2; y)$ симетричні відносно:
1) осі абсцис; 2) осі ординат.
Знайдіть x і y .
- 18.20.*** Образом прямої a при симетрії відносно прямої l є сама пряма a . Як ви думаєте, яке взаємне розміщення прямих a і l ? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

18.21.* Доведіть, що прямі, які містять діагоналі ромба, є його осями симетрії.

18.22.* Доведіть, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін прямокутника, є його осями симетрії.

18.23.* Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.

18.24.* Доведіть, що трикутник, який має вісь симетрії, є рівнобедреним.

18.25.* Доведіть, що трикутник, який має дві осі симетрії, є рівностороннім. Як ви думаєте, чи може трикутник мати рівно дві осі симетрії?

Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.

18.26.* Кола із центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B . Доведіть, що точки A і B симетричні відносно прямої O_1O_2 .

ЖГ2



18.27.** Точка M належить прямому куту ABC (рис. 18.24). Точки M_1 і M_2 — образи точки M при симетрії відносно прямих BA і BC відповідно. Доведіть, що точки M_1 , B і M_2 лежать на одній прямій.

18.28.** Знайдіть координати точок, симетричних точкам $A(-2; 0)$ і $B(3; -1)$ відносно прямої, яка містить бісектриси: 1) першого та третього координатних кутів; 2) другого та четвертого координатних кутів.

18.29.** Точки $A(x; -1)$ і $B(y; 2)$ симетричні відносно прямої, яка містить бісектриси першого та третього координатних кутів. Знайдіть x і y .

18.30.* Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a . Знайдіть на прямій a таку точку X , щоб сума $AH + XB$ була найменшою.

18.31.* Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a . Знайдіть на прямій a таку точку X , щоби промені XA і XB утворювали із цією прямою рівні кути.

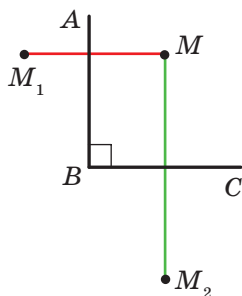


Рис. 18.24

18.32.* Точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB (рис. 18.25). На прямій AB знайдіть таку точку X , що $\angle AXC = \frac{1}{2} \angle DXB$.

18.33.* Дано трикутник ABC . Знайдіть точку, симетричний образ якої відносно будь-якої сторони трикутника лежить на колі, описаному навколо цього трикутника.

↔ Якщо вам сподобалися задачі 1 і 2 з пункту 18, а також задачі 18.30–18.33, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Застосування осьової симетрії». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проєкті, ви можете знайти на с. 259.

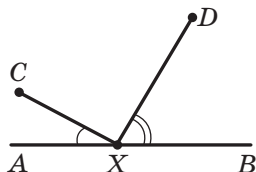


Рис. 18.25

**СЕЗОН
ДОЩІВ**

Рис. 18.26



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

18.34. Подивіться на рисунок 18.26 через розташовану горизонтально скляну пробірку, заповнену водою. Чому деякі букви в другому слові виявилися перевернутими, а в першому — ні?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.35. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 48 см, $AD = 7$ см. Яку сторону паралелограма перетинає бісектриса кута B ? Знайдіть відрізки, на які бісектриса ділить сторону паралелограма.

18.36. Дано точки $A(5; 2)$, $B(-7; 1)$ і $C(1; -5)$, відрізок AM — медіана трикутника ABC . Складіть рівняння прямої AM .

**КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ****Перша Всеукраїнська олімпіада юних математиків**

Сподіваємося, що задача 18.33 вам сподобалася і ви відчували радість успіху, розв'язавши її. Ця задача варта уваги ще й тому, що в 1961 р. її було запропоновано учасникам першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків.

Узагалі, математичні олімпіади в Україні мають давню традицію. Перша міська олімпіада юних математиків відбулася в 1935 р. у Києві. Серед організаторів Першої всеукраїнської математичної олімпіади в 1936 р. була математикиня К. Я. Латишева. Відтоді минуло понад 80 років, і за цей час математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі всьому науковому світові. Усі вони в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.



**Клавдія
Яківна
Латишева**
(1897–1956)

Хочемо із задоволенням зазначити, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів і школярок нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. До організації та проведення олімпіад залучають найкращих представників і представниць наукової й освітньої спільноти. Саме завдяки їхньому ентузіазму та професіоналізму команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.



**Олексій
Васильович
Погорєлов**
(1919–2002)



**Селім
Григорович
Крейн**
(1917–1999)



**Марк
Олександрович
Красносельський**
(1920–1997)



**Володимир
Гершонович
Дрінфельд**
(1954 р. н.)

Радимо й вам, любі діти, брати участь у математичних олімпіадах. Нижче ми наводимо деякі задачі першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Випробуйте свої сили.

1. Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до його сторін у точках K, L, M . Нехай точки O_1, O_2, O_3 є центрами кіл, зовнівписаних у цей самий трикутник. Довести, що трикутники KLM і $O_1O_2O_3$ подібні.
2. Усередині прямокутника, площа якого 4 м^2 , розміщено 7 прямокутників, причому площа кожного з них дорівнює 1 м^2 . Довести, що принаймні два прямокутники мають спільну частину, площа якої не менша ніж $\frac{1}{7} \text{ м}^2$.
3. Нехай сторони чотирикутника відповідно дорівнюють a, b, c, d , а його площа дорівнює S . Довести, що

$$S \leq \frac{1}{4} (a + c) (b + d).$$

19. Центральна симетрія. Поворот



Розгляньте зображені на рисунку 19.1 сніжинку, ромашку, медузу, металеву фрезу, азулежу¹. Здається, ці об'єкти дуже різні за формою, призначенням і походженням. Проте їх об'єднує одна цікава геометрична властивість. Саме про неї йтиметься в цьому пункті.



Рис. 19.1

¹ Азулежу — це традиційна португальська керамічна плитка з візерунками, яку використовують для оздоблення будівель.

Означення:

Точки A і A_1 називають симетричними відносно точки O , якщо точка O є серединою відрізка AA_1 (рис. 19.2). Точку O вважають симетричною самій собі.

Наприклад, точки A і A_1 , у яких як абсциси, так і ординати — протилежні числа, симетричні відносно початку координат (рис. 19.3).

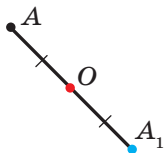


Рис. 19.2

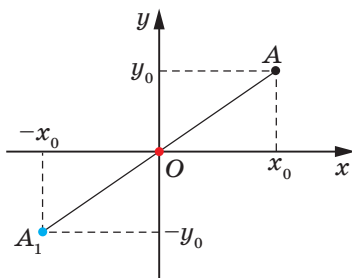


Рис. 19.3

Розглянемо фігуру F і точку O . Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно точки O точку X_1 . Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 19.4). Таке перетворення фігури F називають **центральною симетрією відносно точки O** . Точку O називають **центром симетрії**. Також говорять, що фігури F і F_1 симетричні відносно точки O .

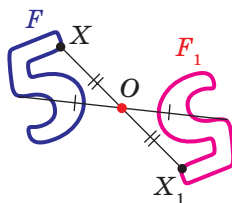


Рис. 19.4

ЖГ1 З деякими прикладами побудови симетричних фігур ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.



Теорема 19.1 (властивість центральної симетрії):

Центральна симетрія є рухом.

Доведення. ☉ Виберемо систему координат так, щоб центр симетрії збігався з початком координат. Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — довільні точки фігури F . Точки $A_1(-x_1; -y_1)$ і $B_1(-x_2; -y_2)$ — відповідно їхні образи при центральній симетрії відносно початку координат. Маємо:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ A_1B_1 &= \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \\ &= \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB. \end{aligned}$$

Ми отримали, що $AB = A_1B_1$, тобто центральна симетрія зберігає відстань між точками. Отже, центральна симетрія є рухом. ●

Наслідок:

Якщо фігури F і F_1 є симетричними відносно точки, то $F = F_1$.

Означення:

Фігуру називають симетричною відносно точки O , якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно точки O , також належить цій фігурі.

Точку O називають центром симетрії фігури. Також говорять, що фігура має центр симетрії.

Наведемо приклади фігур, які мають центр симетрії.



Рис. 19.5

Центром симетрії відрізка є його середина (рис. 19.5).

Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії (рис. 19.6).

Існують фігури, які мають безліч центрів симетрії. Наприклад, кожна точка прямої є її центром симетрії.

Також безліч центрів симетрії має фігура, яка складається з двох паралельних прямих. Будь-яка точка прямої, рівновіддаленої від двох даних, є центром симетрії розглядуваної фігури (рис. 19.7).

До речі, всі зображення на рисунку 19.1 мають центр симетрії.

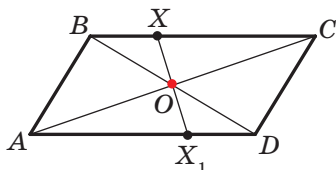


Рис. 19.6

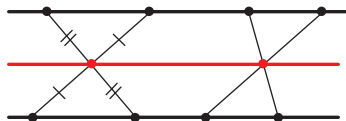


Рис. 19.7

ЗАДАЧА 1. Доведіть, що образом даної прямої l при симетрії відносно точки O , яка не належить прямій l , є пряма, паралельна даній.

Розв'язання. Оскільки центральна симетрія — це рух, то образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки.

Виберемо на прямій l довільні точки A і B (рис. 19.8). Нехай точки A_1 і B_1 — їхні образи при центральній симетрії відносно точки O . Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої l .

Оскільки $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, кути AOB і A_1OB_1 рівні як вертикальні, то трикутники AOB і A_1OB_1 рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 19.8). Отже, за ознакою паралельних прямих $l \parallel A_1B_1$. ◀

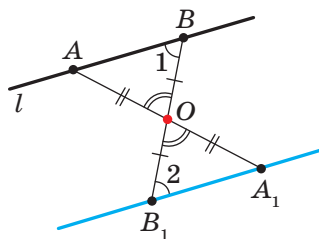


Рис. 19.8

ЗАДАЧА 2. Точка M належить куту ABC (рис. 19.9). На сторонах BA і BC кута побудуйте такі точки E і F , щоб точка M була серединою відрізка EF .

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при центральній симетрії відносно точки M (рис. 19.10). Позначимо буквою F точку перетину прямих A_1B_1 і BC .

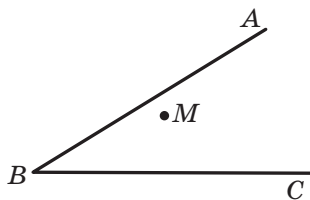


Рис. 19.9

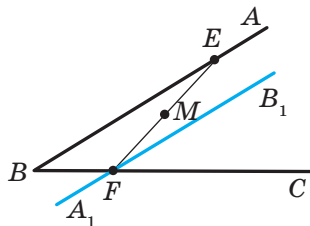


Рис. 19.10

Знайдемо прообраз точки F . Очевидно, що він лежить на прямій AB . Тому достатньо знайти точку перетину прямих FM і AB . Позначимо цю точку буквою E . Тоді E і F — шукані точки. ◀

На рисунку 19.11 зображено дві фігури, симетричні відносно точки O . Уявімо, що кожну точку фігури F перемістили по дузі півкола із центром у точці O . Отримуємо фігуру F_1 . Тоді ми можемо уявити, начебто фігуру F повернули на 180° навколо точки O .

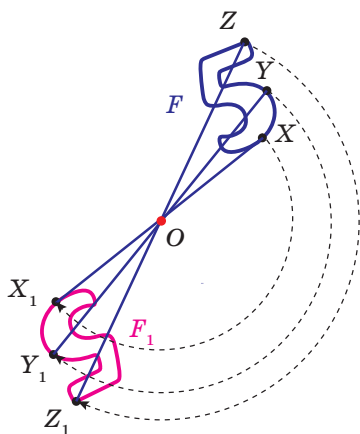


Рис. 19.11

Це схоже на те, як лопаті вітрової турбіни, кабінки колеса огляду, сидіння на дитячій каруселі обертаються навколо нерухомого центра (рис. 19.12).



Рис. 19.12

У цьому пункті ми ознайомимося з новим перетворенням — поворотом фігури навколо точки.

На рисунку 19.13 зображено точки O , X , X_1 і X_2 такі, що $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Говорять, що точ-

ка X_1 є образом точки X при **повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α** . Також говорять, що точка X_2 — це образ точки X при **повороті навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут α** .

Точку O називають **центром повороту**, кут α — **кутом повороту**.

Розглянемо фігуру F , точку O та кут α . Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1 , яка є образом точки X при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α (якщо точка O належить фігурі F , то їй зіставляється вона сама). Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 19.14). Таке перетворення фігури F називають **поворотом навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α** . Точку O називають **центром повороту**.

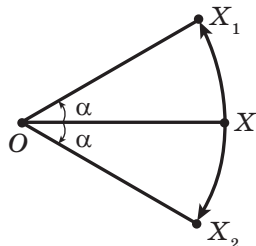
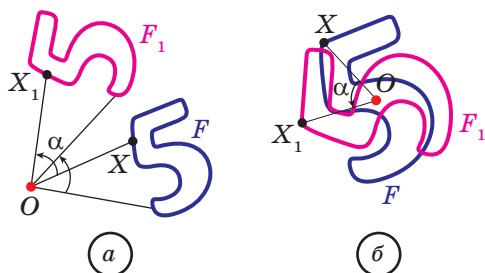
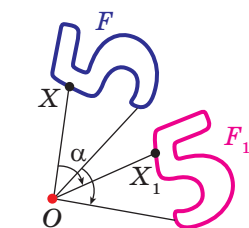


Рис. 19.13



ЖГ2 Рис. 19.14



ЖГ2 Рис. 19.15

Аналогічно означають перетворення повороту фігури F за годинниковою стрілкою на кут α (рис. 19.15).

З прикладами повороту фігур навколо точки ви можете ознайомитися, перейшовши за QR-кодом.

Зауважимо, що центральна симетрія є поворотом навколо центра симетрії на кут 180° .



Теорема 19.2 (властивість повороту):

Поворот є рухом.

Використовуючи першу ознаку рівності трикутників, доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок:

Якщо фігура F_1 — образ фігури F при повороті, то $F = F_1$.

ЗАДАЧА 3. Дано пряму a і точку O поза нею. Побудуйте образ прямої a при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45° .

Розв'язання. Оскільки поворот — це рух, то образом прямої a буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки. Виберемо на прямій a довільні точки A і B (рис. 19.16). Побудуємо точки A_1 і B_1 — їхні образи при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45° . Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої a . ◀

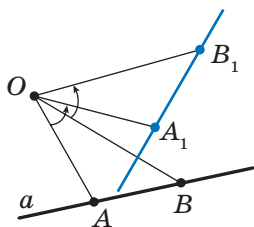


Рис. 19.16

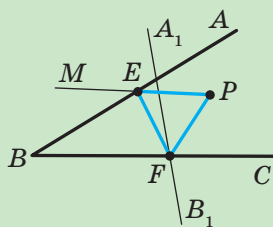


Рис. 19.17

ЗАДАЧА 4. Точка P належить куту ABC , але не належить його сторонам. Побудуйте рівносторонній трикутник, одна вершина якого є точкою P , а дві інші належать сторонам BA і BC кута ABC .

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут 60° (рис. 19.17). Позначимо буквою F точку перетину прямих A_1B_1 і BC .

Нехай точка E — прообраз точки F при розглядуваному повороті. Точка E належить стороні BA кута ABC .

Ці міркування підказують, як побудувати шуканий трикутник.

Будуємо пряму A_1B_1 як образ прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут 60° . Нехай F — точка перетину прямих A_1B_1 і BC .

Будуємо кут MPF , що дорівнює 60° . Нехай прямі MP і AB перетинаються в точці E . Ця точка і є прообразом точки F .

Маємо: $PF = PE$ і $\angle FPE = 60^\circ$. Отже, трикутник EPF рівносторонній. ◀



1. Які точки називають симетричними відносно точки O ? Як називають точку O ?
2. Які фігури називають симетричними відносно точки O ?
3. Сформулюйте властивість центральної симетрії.
4. Про яку фігуру говорять, що вона має центр симетрії?
5. Опишіть перетворення повороту навколо точки.
6. Сформулюйте властивість повороту.



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

19.1.° Накресліть трикутник ABC і позначте точку O , яка не належить йому. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно точки O .

19.2.° Накресліть трикутник ABC . Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно середини сторони AB .

19.3.° Накресліть коло й позначте на ньому точку. Побудуйте коло, симетричне даному відносно позначеної точки.

19.4* Побудуйте образ відрізка AB при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут 45° (рис. 19.18).

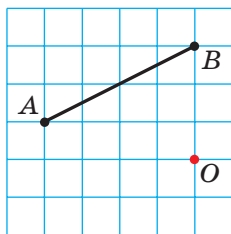


Рис. 19.18

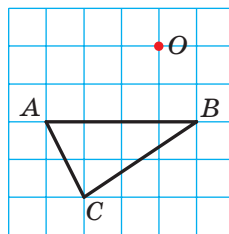


Рис. 19.19

19.5.* Побудуйте образ трикутника ABC при повороті навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут 90° (рис. 19.19).

- 19.6.*** Побудуйте паралелограм $ABCD$ за його вершинами A і B та точкою O перетину його діагоналей (рис. 19.20).
- 19.7.*** Дано дві паралельні прямі a і b (рис. 19.21). Знайдіть точку, відносно якої пряма a буде симетричною прямій b .
- 19.8.**** На рисунку 19.22 зображено два рівних відрізки AB і BC , причому $\angle ABC = 60^\circ$. Знайдіть точку O таку, щоб відрізок AB був образом відрізка BC при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 120° .

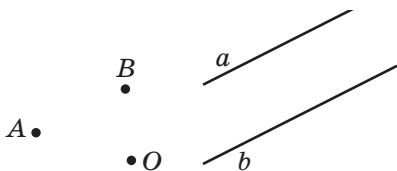


Рис. 19.20

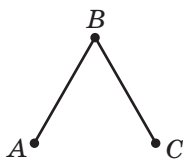


Рис. 19.21

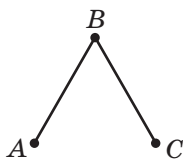


Рис. 19.22

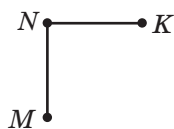


Рис. 19.23

- 19.9.*** На рисунку 19.23 зображено два рівних перпендикулярних відрізки MN і NK . Знайдіть точку O таку, щоб відрізок NK був образом відрізка MN при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут 90° .



ВПРАВИ

- 19.10.°** Розгляньте рисунок 19.24 та вкажіть, у якому випадку точки A і A_1 симетричні відносно точки O . Обговоріть свою відповідь з однокласниками й однокласницями.

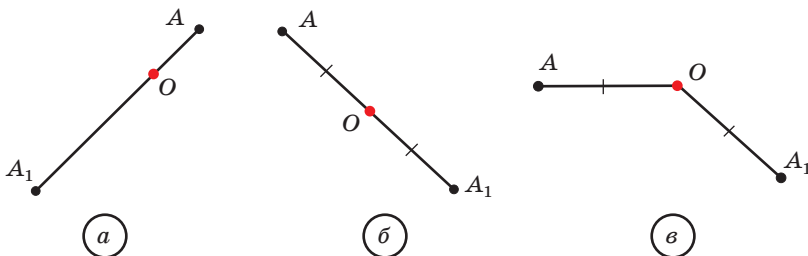


Рис. 19.24

- 19.11.°** Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 19.25). Точка M — середина сторони BC . Укажіть образи точок A , D і M , сторони CD , діагоналі BD при симетрії відносно точки O .

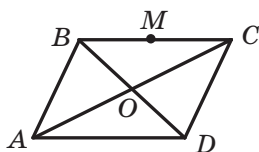


Рис. 19.25

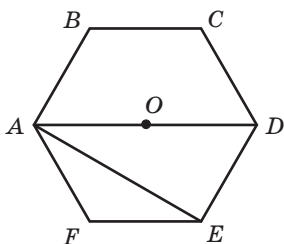


Рис. 19.26

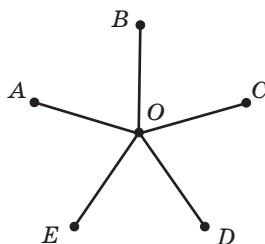


Рис. 19.27

19.12.° Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$ (рис. 19.26). Укажіть образи точок A , C і F , сторони DE , діагоналей AE і AD при симетрії відносно точки O .

19.13.° На рисунку 19.27 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle AOE = 72^\circ$, $OA = OB = OC = OD = OE$. Укажіть образи точок A , C і D при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут:

- 1) 72° ; 2) 144° .

Обговоріть свою відповідь з однокласниками й однокласницями.

19.14.° На рисунку 19.27 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle AOE = 72^\circ$, $OA = OB = OC = OD = OE$. Укажіть образи точок A , D і E при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут:

- 1) 72° ; 2) 144° .

19.15.° На рисунку 19.28 зображено фігури, які складено з рівних півкругів. Які із цих фігур при певному повороті навколо точки O на кут α , де $0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$, збігаються зі своїми образами?

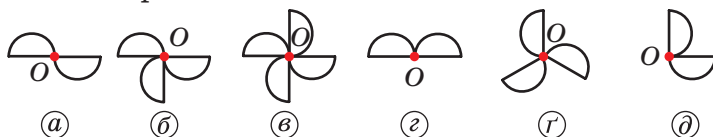


Рис. 19.28

19.16.° Медіани рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O (рис. 19.29). Укажіть образи точок C , C_1 і O , сторони BC , медіани BB_1 , відрізка OC_1 , трикутника $A_1B_1C_1$ при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 120° .

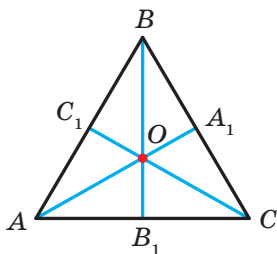


Рис. 19.29

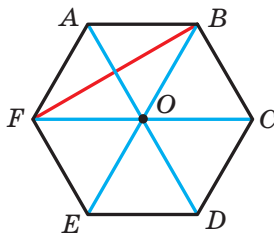


Рис. 19.30

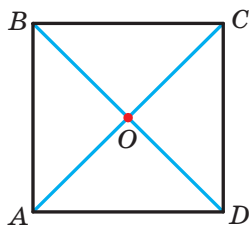


Рис. 19.31

- 19.17.°** Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$ (рис. 19.30). Укажіть образи сторони AF , діагоналі BF , діагоналі AD , шестикутника $ABCDEF$ при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут:
1) 60° ; 2) 120° .
- 19.18.°** Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 19.31). Укажіть образи точок A , O і C , сторони AD , діагоналі BD при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут 90° .
- 19.19.°** Точка O належить прямій m . Як ви думаєте, на який кут треба повернути пряму m навколо точки O , щоб отримати пряму, яка збігається з прямою m ? Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.
- 19.20.°** Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії. Поміркуйте, чи є справедливим обернене твердження. Обговоріть це питання у класі.
- 19.21.°** Доведіть, що коло має центр симетрії.
- 19.22.°** Точки A_1 і B_1 є образами відповідно точок A і B при симетрії відносно точки, яка не належить прямій AB . Доведіть, що чотирикутник ABA_1B_1 — паралелограм. Як ви думаєте, чому в умові задачі вимагається, щоб центр симетрії не належав прямій AB ? Обговоріть це питання з однокласниками й однокласницями.
- 19.23.°** Доведіть, що образом прямої, яка проходить через центр симетрії, є ця сама пряма.
- 19.24.°** Знайдіть координати точок, симетричних точкам $A(3; -1)$ і $B(0; -2)$ відносно:
1) початку координат; 2) точки $M(2; -3)$.

19.25.* Точки $A(x; -2)$ і $B(1; y)$ симетричні відносно:

- 1) початку координат; 2) точки $M(-1; 3)$.

Знайдіть x і y .

19.26.** Вершина A рівностороннього трикутника ABC є центром повороту на кут 120° . Знайдіть відрізок BC_1 , де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB = 1$ см. Як ви думаєте, чому ця задача має два розв'язки? Що треба додати в умову, щоб ця задача мала єдиний розв'язок? Обговоріть ці питання у класі.

19.27.** Вершина A квадрата $ABCD$ є центром повороту проти годинникової стрілки на кут 90° . Знайдіть відрізок CC_1 , де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB = 1$ см.

19.28.** Точки A і C належать гострому куту, але не лежать на його сторонах. Використовуючи задачу 2 пункту 19, побудуйте паралелограм $ABCD$ так, щоб точки B і D лежали на сторонах кута.

19.29.* Використовуючи ідею розв'язання задачі 4 пункту 19, розв'яжіть таку задачу.

Точка M належить куту ABC і не належить його сторонам. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершина прямого кута якого є точкою M , а дві інші належать сторонам BA і BC відповідно.

19.30.* На стороні BC рівностороннього трикутника ABC позначили точку D . Поза трикутником ABC позначили точку E таку, що трикутник DEC рівносторонній (рис. 19.32). Доведіть, що точка C і середини M і K відрізків BE і AD відповідно є вершинами рівностороннього трикутника.

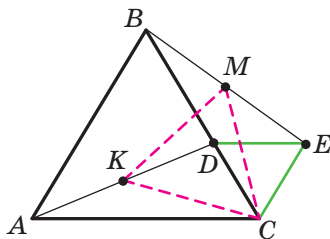


Рис. 19.32

19.31.* На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E . Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC у точці F . Доведіть, що $AE = BF + ED$.

➡ Якщо вам сподобалися задача 4 з пункту 19, а також задачі 19.28–19.31, то радимо взяти участь у роботі над проектом «Застосування центральної симетрії та повороту». Зміст проекту може стати більш різноманітним, якщо ви об'єднаєтеся в групи. Поради, як працювати у груповому проекті, ви можете знайти на с. 259.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 19.32. Знайдіть сторони трикутника ABC , якщо $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, а висота, проведена з вершини C , дорівнює 4 см.
- 19.33. У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону трикутника у відношенні $25 : 12$, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо площа трикутника дорівнює 1680 см^2 .



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

Радимо поновити у пам'яті зміст пунктів 12–14 із підручника «Геометрія. 8 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

- 19.34. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M . Знайдіть більшу основу трапеції, якщо менша основа BC дорівнює 32 см, $MC = 16$ см, $CD = 8$ см.
- 19.35. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці O , $AO = 21$ см, $OC = 9$ см, $BD = 50$ см. Знайдіть відрізки BO і OD .
- 19.36. У трикутниках ABC і DEF відомо, що $\angle A = \angle D$, а кожна зі сторін AB і AC становить 0,8 сторін DE і DF відповідно. Знайдіть сторони BC і EF , якщо їхня різниця дорівнює 12 см.



РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 19.37. Позначте на площині 6 точок так, щоби будь-які три з них були вершинами рівнобедреного трикутника.

20. Подібність фігур



Погляньте на зображення карти України в різних масштабах, на фотографію та її мініатюру в профілі соцмережі, на джинси однієї моделі (рис. 20.1). Хоча ці об'єкти мають різні розміри, вони зберігають однакову форму, тобто од-

наковим є загальний вигляд, пропорції та розташування частин відносно одна одної.

У 8 класі ви вже знайомилися з **подібними трикутниками**. Тепер ми поговоримо про подібність фігур загалом—коли одна фігура є зменшеною або збільшеною копією іншої. Такі зміни форми можна описати за допомогою геометричного перетворення, яке називається **перетворенням подібності**.



Рис. 20.1

Розглянемо дві фігури F і F_1 (рис 20.2). Бачимо, що вони мають однакову форму, але різні розміри.

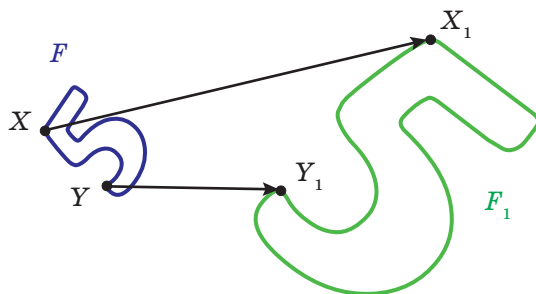


Рис. 20.2

Будемо вважати, що фігура F_1 є образом фігури F при деякому перетворенні. З'ясуємо, коли це перетворення можна називати перетворенням подібності.

Нехай X і Y довільні точки фігури F , а точки X_1 і Y_1 — їхні відповідні образи, які належать фігурі F_1 . Якщо при будь-якому виборі точок X і Y відношення $\frac{X_1Y_1}{XY}$ не зміню-

ється, то говорять, що фігура F_1 є образом фігури F при перетворенні подібності або фігури F і F_1 подібні.

Також можна сказати, що *при перетворенні подібності фігури F відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів*. Це повністю відповідає нашому наочному сприйняттю подібних фігур.¹

Запис $F \sim F_1$ означає, що фігури F і F_1 подібні.

Нехай A і B — довільні точки фігури F , а точки A_1 і B_1 — їхні образи при перетворенні подібності. Точки A_1 і B_1 належать фігурі F_1 , яка подібна фігурі F . Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ називають **коефіцієнтом подібності**. Говорять, що фігура F_1 подібна фігурі F із коефіцієнтом подібності k , а фігура F подібна фігурі F_1 із коефіцієнтом подібності $\frac{1}{k}$.

Так, на рисунку 20.3 зображено два подібних п'ятикутники.

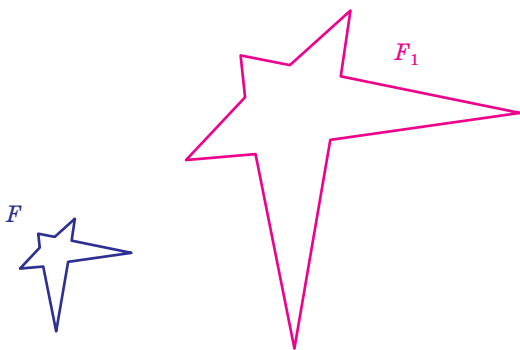


Рис. 20.3

¹ Докладніше про перетворення подібності ви можете дізнатися, прочитавши оповідання «Гомотетія» на с. 236–243.

П'ятикутник F_1 подібний п'ятикутнику F із коефіцієнтом $k=3$, а п'ятикутник F подібний п'ятикутнику F_1 із коефіцієнтом $k=\frac{1}{3}$.

Зауважимо, що перетворення подібності з коефіцієнтом $k=1$ є рухом. Звідси випливає, що рух — окремий випадок перетворення подібності.

Наведемо декілька властивостей перетворення подібності. При перетворенні подібності:

- образом прямої є пряма;
- образом відрізка є відрізок;
- образом кута є кут, який дорівнює даному;
- образом кола є коло;
- відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Доведемо останню властивість для окремого випадку, розглянувши подібні трикутники.

Доведення. ☉ Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ — образ трикутника ABC при перетворенні подібності з коефіцієнтом k (рис. 20.4). Сторона A_1C_1 — образ сторони AC . Тоді $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведемо висоту BD . Нехай точка D_1 — образ точки D . Оскільки при перетворенні подібності зберігаються кути, то відрізок B_1D_1 — висота трикутника $A_1B_1C_1$. Тоді $B_1D_1 = k \cdot BD$. Маємо:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2} AC \cdot BD} = \frac{k \cdot AC \cdot k \cdot BD}{AC \cdot BD} = k^2. \quad \bullet$$

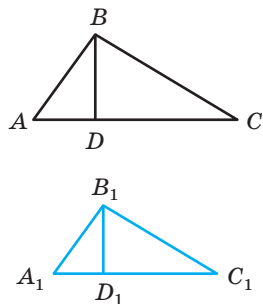


Рис. 20.4

ЗАДАЧА. Відрізок CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Знайдіть радіус r вписаного кола трикутника ABC , якщо радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD , відповідно дорівнюють r_1 і r_2 .

Розв'язання. Оскільки кут A — спільний для прямокутних трикутників ACD і ABC , то ці трикутники подібні (рис. 20.5). Нехай коефіцієнт подібності дорівнює k_1 .

Очевидно, що $k_1 = \frac{r_1}{r}$. Аналогічно $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ із коефіцієнтом подібності $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

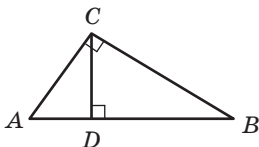


Рис. 20.5

Позначимо площі трикутників ACD , BCD і ABC відповідно S_1 , S_2 і S .

Маємо:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

$$\text{Звідси } \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{S_1 + S_2}{S} = 1.$$

Отримуємо, що $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, тобто $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ◀

Відповідь: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.



1. Опишіть, що таке перетворення подібності. **2.** Які властивості має перетворення подібності?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

20.1.° Орієнтуючись за клітинками, накресліть п'ятикутник $ABCDE$ (рис. 20.6). Побудуйте п'ятикутник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подібний даному з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$.

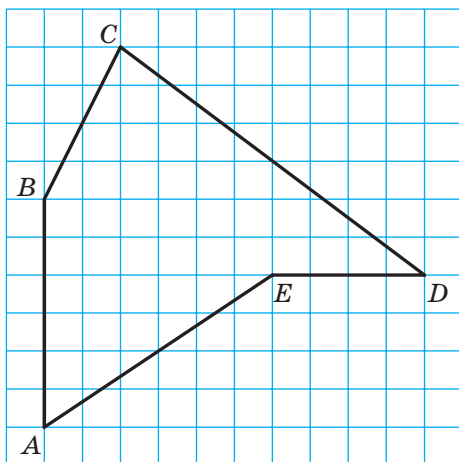


Рис. 20.6

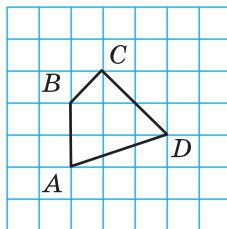


Рис. 20.7

20.2.° Орієнтуючись за клітинками, накресліть чотирикутник $ABCD$ (рис. 20.7). Побудуйте чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$, подібний даному з коефіцієнтом подібності 3.

20.3.° На рисунку 20.8 зображено прямокутник $ABCD$ та точки A_1 і D_1 , які є образами відповідно точок A і D при перетворенні подібності. Побудуйте образ прямокутника $ABCD$ при цьому перетворенні.

Як ви думаєте, скільки розв'язків має задача? Обговоріть це питання у класі.

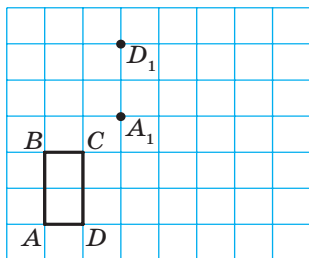


Рис. 20.8

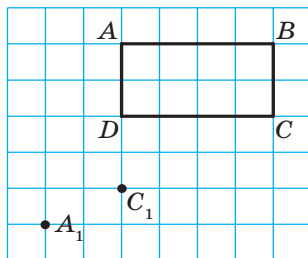


Рис. 20.9

20.4.° На рисунку 20.9 зображено прямокутник $ABCD$ та точки A_1 і C_1 , які є образами відповідно точок A і C при перетворенні подібності. Побудуйте образ прямокутника $ABCD$ при цьому перетворенні. Скільки розв'язків має задача?



ВПРАВИ

20.5.° Як на вашу думку, чи є правильним твердження:

- 1) будь-яких два кола подібні;
- 2) будь-яких два ромби подібні;
- 3) будь-які дві рівнобічні трапеції подібні;
- 4) будь-яких два правильних n -кутники подібні?

Обговоріть свою думку з однокласниками й однокласницями.

20.6.° Чому дорівнює відношення площ двох подібних многокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює 7?

20.7.° Відношення площ двох подібних многокутників дорівнює 0,25. Чому дорівнює коефіцієнт подібності цих многокутників?

20.8.° Площі двох подібних многокутників відносяться як 25:36. Одна зі сторін першого многокутника дорівнює 20 см. Знайдіть відповідну їй сторону другого многокутника.

- 20.9.°** Відповідні сторони двох подібних багатокутників відносяться як $2:7$. Площа першого з них дорівнює 12 см^2 . Знайдіть площу другого багатокутника.
- 20.10.°** Площі двох подібних трикутників дорівнюють 28 см^2 і 63 см^2 . Одна зі сторін першого трикутника дорівнює 8 см . Знайдіть сторону другого трикутника, яка відповідає даній стороні першого.
- 20.11.°** Відповідні сторони двох подібних трикутників дорівнюють 30 см і 24 см . Площа трикутника зі стороною 30 см дорівнює 45 см^2 . Знайдіть площу другого трикутника.
- 20.12.°** Площа трикутника дорівнює S . Чому дорівнює площа трикутника, який відтинає від даного його середня лінія?
- 20.13.°** Площа трикутника дорівнює S . Знайдіть площу трикутника, вершини якого — середини середніх ліній даного трикутника.
- 20.14.*** Сторони п'ятикутника відносяться як $3:4:5:6:7$. Знайдіть:
- 1) найбільшу сторону подібного йому п'ятикутника, якщо його найменша сторона дорівнює 9 см ;
 - 2) периметр подібного йому п'ятикутника, сума найбільшої та найменшої сторін якого дорівнює 20 см .
- 20.15.*** Сторони чотирикутника відносяться як $2:3:4:5$. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, якщо:
- 1) найбільша його сторона на 12 см більша за його найменшу сторону;
 - 2) його периметр дорівнює 42 см .
- 20.16.*** Площа одного з двох подібних багатокутників на 64 см^2 менша від площі другого. Знайдіть площу кожного з багатокутників, якщо їхні відповідні сторони відносяться як $3:5$.
- 20.17.*** Периметри двох подібних багатокутників відносяться як $2:7$. Знайдіть площу кожного з багатокутників, якщо сума їхніх площ дорівнює 212 см^2 .
- 20.18.*** Середня лінія трикутника відтинає від нього трапецію, площа якої дорівнює 21 см^2 . Знайдіть площу даного трикутника.
-  **20.19.*** Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC , перетинає його сторону AB у точці M , а сторону BC — у точці K . Знайдіть площу трикутника ABC , якщо $BM = 4\text{ см}$, $AC = 8\text{ см}$, $AM = MK$, а площа трикутника MBK дорівнює 5 см^2 .

- 20.20.*** Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E . Знайдіть площу трапеції, якщо $BC : AD = 3 : 5$, а площа трикутника AED дорівнює 175 см^2 .
- 20.21.**** Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC , перетинає сторону AB у точці D , сторону BC — у точці E , і розбиває цей трикутник на два рівновеликих многокутники. Знайдіть відрізок DE , якщо $AC = 2 \text{ см}$.
- 20.22.**** Через точку перетину медіан трикутника проведено пряму, яка паралельна одній із його сторін. Знайдіть відношення площ трикутника і чотирикутника, які при цьому утворилися.
- 20.23.**** У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8 \text{ см}$, $AC = 12 \text{ см}$, відрізок AM — бісектриса трикутника. Через точку M проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону AB у точці K . Знайдіть відношення площі трикутника KBM до площі чотирикутника $AKMC$.



УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

- 20.24.** На рисунку 20.10 зображено план школи. Обчисліть, яку площу займає школа, якщо план накреслено в масштабі $1 : 2000$. Довжина сторони клітинки дорівнює $0,5 \text{ см}$.

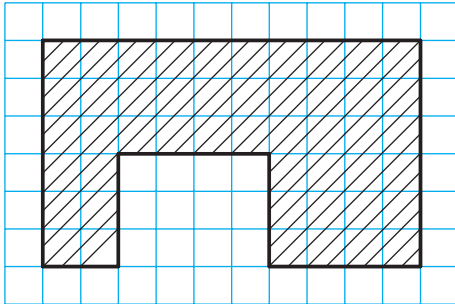


Рис. 20.10

- 20.25.** Відстань між двома містами на місцевості — 150 км , а на карті — 3 см . Знайдіть масштаб карти.
- 20.26.** На плані земельної ділянки, виконаної у масштабі $1 : 500$, земельну ділянку зображено у вигляді прямокутника зі сторонами 4 см і 6 см . Скільки кілограмів насіння трави потрібно, щоб засіяти цю ділянку, якщо на 1 м^2 землі висівають 9 г насіння трави?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 20.27. Знайдіть площу ромба та радіус кола, вписаного в ромб, якщо його діагоналі дорівнюють 12 см і 16 см.
- 20.28. Знайдіть периметр трикутника, утвореного при перетині прямої $3x + 4y = 24$ з осями координат.



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Гомотетія

На рисунку 20.11 зображено точки O , X і X_1 такі, що $\overline{OX_1} = 2\overline{OX}$. Говорять, що точка X_1 — це образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом 2.



Рис. 20.11



Рис. 20.12

На рисунку 20.12 зображено точки O , X і X_1 такі, що $\overline{OX_1} = -\frac{1}{2}\overline{OX}$. Говорять, що точка X_1 — це образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $-\frac{1}{2}$.

Узагалі, якщо точки O , X і X_1 є такими, що $\overline{OX_1} = k\overline{OX}$, де $k \neq 0$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k .

Точку O називають **центром гомотетії**, число k — **коефіцієнтом гомотетії**, $k \neq 0$.

Розглянемо фігуру F і точку O . Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1 , яка є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k (якщо точка O належить фігурі F , то їй зіставляється вона сама). У результаті цього перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 20.13). Таке перетворення фігури F називають **гомотетією із центром O та коефіцієнтом k** . Також говорять, що фігура F_1 **гомотетична** фігурі F із центром O та коефіцієнтом k .

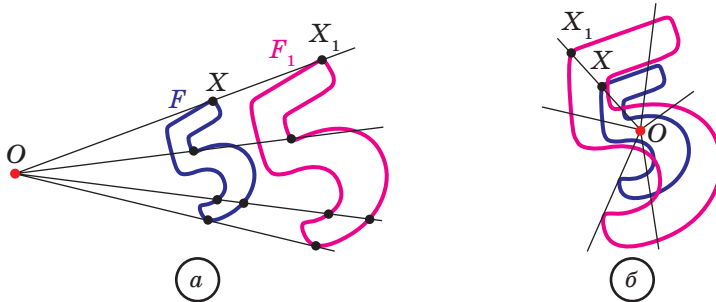
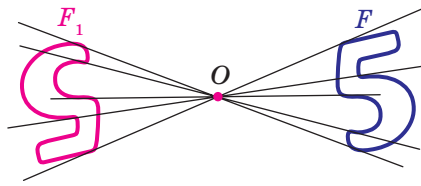
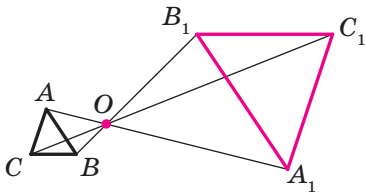


Рис. 20.13

Наприклад, на рисунку 20.14 трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC із центром O та коефіцієнтом, який дорівнює -3 . Також можна сказати, що трикутник ABC гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ із тим самим центром, але коефіцієнтом гомотетії, який дорівнює $-\frac{1}{3}$.



ЖГ1

Рис. 20.14



ЖГ1

Рис. 20.15

Зазначимо, що при $k = -1$ гомотетія із центром O є центральною симетрією із центром O (рис. 20.15). Якщо $k = 1$, то гомотетія є тотожним перетворенням.

Очевидно, що при $k \neq 1$ і $k \neq -1$ гомотетія не є рухом.

Теорема 20.1:

При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в $|k|$ разів, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F , а точки A_1 і B_1 — їхні відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k , то $A_1B_1 = |k| AB$.

Доведення. ☉ Нехай точка O — центр гомотетії. Тоді $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Маємо:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB},$$

тобто $A_1B_1 = |k| \cdot AB$. ●

Наслідок:

Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC із коефіцієнтом гомотетії k , то трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC із коефіцієнтом подібності $|k|$.

Для доведення цього твердження достатньо скористатися теоремою 20.1 і третьою ознакою подібності трикутників. Гомотетія має низку інших властивостей.

При гомотетії:

- образом прямої є пряма;
- образом відрізка є відрізок;
- образом кута є кут, який дорівнює даному;
- образом трикутника є трикутник, подібний даному;
- образом кола є коло;
- площа многокутника змінюється в k^2 разів, де k — коефіцієнт гомотетії.

Зазначені властивості гомотетії вказують на те, що це перетворення може змінити розміри фігури, але не змінює її форму, тобто при гомотетії образ і прообраз є подібними фігурами. Зауважимо, що в курсі геометрії 8 класу, коли йшлося про подібність фігур, ми давали означення лише подібним трикутникам. Зараз означимо поняття подібності для довільних фігур.

На рисунку 20.16 фігура F_1 гомотетична фігурі F , а фігура F_2 симетрична фігурі F_1 відносно прямої l .

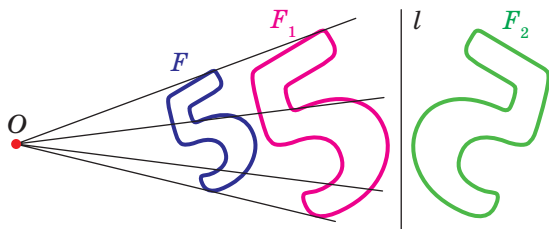


Рис. 20.16

Говорять, що фігуру F_2 отримано з фігури F у результаті **композиції** двох перетворень: гомотетії та осьової симетрії.

Оскільки $F_1 = F_2$, то фігури F і F_2 мають однакові форми, але різні розміри, тобто вони є подібними. Говорять, що фігуру F_2 отримано з фігури F у результаті **перетворення подібності**.

На рисунку 20.17 фігура F_1 гомотетична фігурі F , а фігура F_2 — образ фігури F_1 при деякому русі. Тут також можна стверджувати, що фігури F і F_2 подібні.

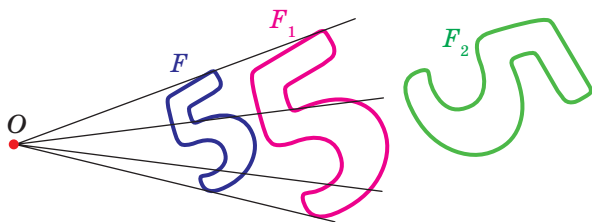


Рис. 20.17

Зі сказаного випливає, що доцільно прийняти таке означення.

Означення:

Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху.

Це означення ілюструє схема, зображена на рисунку 20.18.

Подібність	=	Гомотетія	+	Рух
------------	---	-----------	---	-----

Рис. 20.18

ЗАДАЧА 1. Доведіть, що образом прямої l при гомотетії із центром O , який не належить прямій l , є пряма, паралельна даній.

Розв'язання. Із властивостей гомотетії випливає, що образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки. Виберемо на прямій l довільні точки A і B (рис. 20.19). Нехай точки A_1 і B_1 —

їхні образи при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k (рисунок 20.19 відповідає випадку, коли $k > 1$). Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої AB .

При доведенні теореми 20.1 ми показали, що $\overline{A_1B_1} = k\overline{AB}$. Отже, $AB \parallel A_1B_1$. ◀

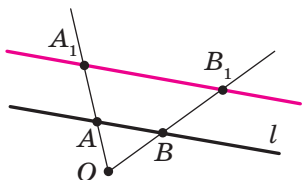


Рис. 20.19

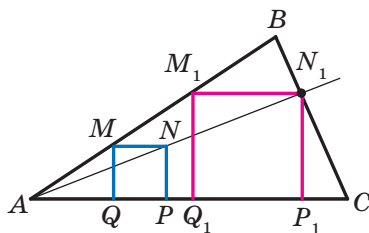


Рис. 20.20

ЗАДАЧА 2. У гострокутний трикутник ABC впишіть квадрат так, щоб дві його вершини лежали відповідно на сторонах AB і BC , а дві інші — на стороні AC .

Розв'язання. Із довільної точки M сторони AB опустимо перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 20.20). Побудуємо квадрат $MQPN$ так, щоб точка P лежала на промені QC . Нехай промінь AN перетинає сторону BC у точці N_1 .

Розглянемо гомотетію із центром A та коефіцієнтом $k = \frac{AN_1}{AN}$. Тоді точка N_1 — образ точки N при цій гомотетії. Образом відрізка MN є відрізок M_1N_1 , де точка M_1 належить променю AB , причому $M_1N_1 \parallel MN$.

Аналогічно відрізок N_1P_1 такий, що точка P_1 належить променю AC і $N_1P_1 \parallel NP$, є образом відрізка NP . Отже, відрізки M_1N_1 і N_1P_1 — сусідні сторони шуканого квадрата. Для завершення побудови залишилося опустити перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC . ◀



ВПРАВИ

- 1.° У паралелограмі $ABCD$ точка D_1 — середина сторони AD . При гомотетії із центром A точка D_1 є образом точки D . Знайдіть коефіцієнт гомотетії. Укажіть, які точки є образами точок B і C при цій гомотетії.

2.° Які з фігур, зображених на рисунку 20.21, збігаються зі своїми образами при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $k > 0$ і $k \neq 1$?

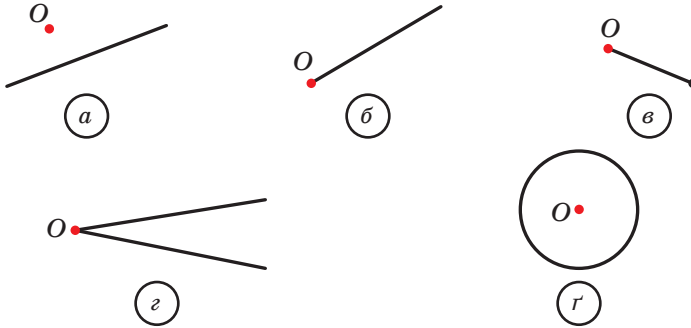


Рис. 20.21

3.° Які з фігур, зображених на рисунку 20.22, збігаються зі своїми образами при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $k < 0$?

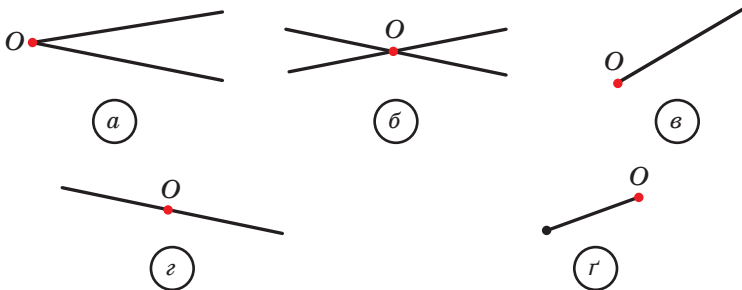


Рис. 20.22

4.° Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 20.23). Знайдіть коефіцієнт гомотетії із центром:

- 1) у точці B , при якій точка B_1 є образом точки M ;
- 2) у точці M , при якій точка A_1 є образом точки A ;
- 3) у точці C , при якій точка M є образом точки C_1 .

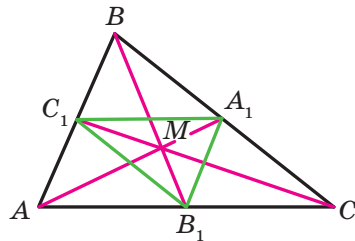


Рис. 20.23

- 5.° У трикутнику ABC медіани AA_1 , BB_1 і CC_1 перетинаються в точці M . Точки K , F і N — середини відрізків AM , BM і CM відповідно. Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій трикутник ABC є образом трикутника KFN .
- 6.° Знайдіть образи точок $A(-2; 1)$, $B(3; 0)$ і $D(0; -6)$ при гомотетії із центром $O(0; 0)$ та коефіцієнтом:
- 1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.
- 7.* Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 20.24). Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій:
- 1) відрізок AC є образом відрізка MN ;
2) відрізок MN є образом відрізка AC .

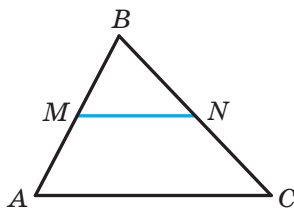


Рис. 20.24

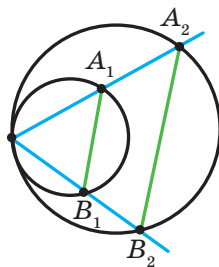


Рис. 20.25

- 8.* Паралельні відрізки BC і AD такі, що $AD = 3BC$. Скільки існує точок, що є центрами гомотетії, при якій образом відрізка BC є відрізок AD ? Для кожної такої точки визначте коефіцієнт гомотетії.
- 9.* Точка $A(2; -3)$ — образ точки $B(8; 6)$ при гомотетії із центром $M(4; 0)$. Знайдіть коефіцієнт гомотетії.
- 10.* Точка $A_1(x; 4)$ — образ точки $A(-6; y)$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом:
- 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.
- Знайдіть x і y .
- 11.** Знайдіть образ кола $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом:
- 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

- 12.** Два кола мають внутрішній дотик. Через точку дотику проведено дві прямі, які перетинають кола в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 20.25). Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
- 13.** Побудуйте трикутник за двома його кутами та радіусом описаного кола.
- 14.** Відрізок AC — найбільша сторона трикутника ABC . Впишіть у трикутник ABC прямокутник, сторони якого відносяться як $2 : 1$, так, щоб дві вершини більшої сторони прямокутника лежали на стороні AC трикутника, а дві інші вершини — на сторонах AB і BC .
- 15.* Відрізок AB — хорда даного кола, точка C — довільна точка цього кола. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC .

Застосування перетворень фігур при розв'язуванні задач

Перетворення фігур — ефективний метод розв'язування багатьох геометричних задач. Проілюструємо це на прикладах.

ЗАДАЧА 1. На сторонах AB, BC і CA гострокутного трикутника ABC побудуйте такі точки M, N і P відповідно, щоби периметр трикутника MNP був найменшим.

Розв'язання. Нехай P — довільна точка сторони AC трикутника ABC , точки P_1 і P_2 — її образи при симетрії відносно прямих AB і BC відповідно (рис. 20.26). Прямі P_1P_2 перетинає сторони AB і BC відповідно в точках M і N . Із розв'язування задачі 2 п. 18 випливає, що з периметрів усіх трикутників, для яких точка P фіксована, а точки M і N належать сторонам AB і BC , периметр трикутника MNP є найменшим. Цей периметр дорівнює довжині відрізка P_1P_2 .

Зауважимо, що відрізок EF — середня лінія трикутника PP_1P_2 . Тоді $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Оскільки $\angle BEP + \angle BFP = 180^\circ$, то точки P, E, B і F лежать на одному колі з діаметром BP . Звідси $EF = BP \sin B$. Отже, довжина відрізка EF буде найменшою при

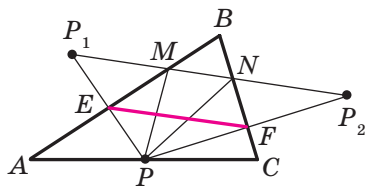


Рис. 20.26

найменшій довжині відрізка BP , тобто тоді, коли відрізок BP — висота трикутника ABC .

На рисунку 20.27 відрізок BP — висота трикутника ABC . Алгоритм побудови точок M і N зрозумілий з рисунка.

Із побудови випливає, що периметр будь-якого іншого трикутника, вершини якого лежать на сторонах трикутника ABC , більший за периметр трикутника MNP . Тому шуканий трикутник є єдиним — це побудований трикутник MNP .

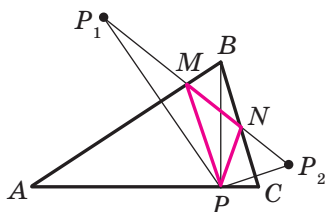


Рис. 20.27

Можна показати (зробіть це самостійно), що точки M і N є основами висот, проведених відповідно з вершин C і A трикутника ABC .

Отже, вершини шуканого трикутника — це основи висот даного трикутника ABC . Такий трикутник називають **ортоцентричним**. ◀

ЗАДАЧА 2. Точка O — центр правильного n -кутника $A_1A_2\dots A_n$ (рис. 20.28). Доведіть, що

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

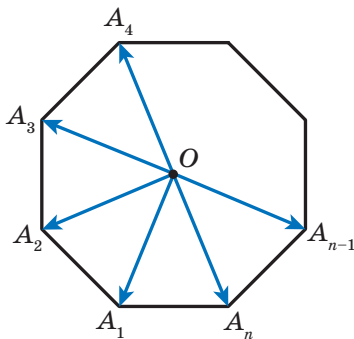


Рис. 20.28

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{a}$. Розглянемо поворот із центром O на кут $\frac{360^\circ}{n}$, наприклад, проти годинникової стрілки. При такому перетворенні образом

даного n -кутника буде цей самий n -кутник. Отже, шукана сума не зміниться. А це можливо лише тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$. ◀

ЗАДАЧА 3. Відрізки AA_1 , BB_1 і CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC . Доведіть, що радіус описаного кола трикутника ABC удвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай прямі AA_1 , BB_1 і CC_1 перетинають описане коло трикутника ABC відповідно в точках M , N і P (рис. 20.29). Доведемо, що $HA_1 = A_1M$, де точка H — ортоцентр трикутника ABC .

Маємо: $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \angle ABC$.

Кути 2 і 3 рівні як вписані, що спираються на дугу MB . Отже, $\angle 1 = \angle 3$.

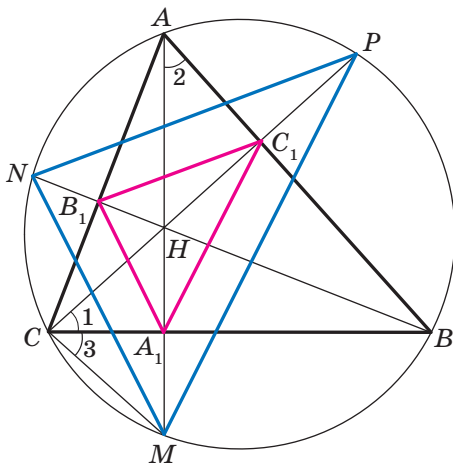


Рис. 20.29

Тоді в трикутнику HCM відрізок CA_1 є бісектрисою та висотою, а отже, і медіаною. Звідси $HA_1 = A_1M$.

Аналогічно можна довести, що $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

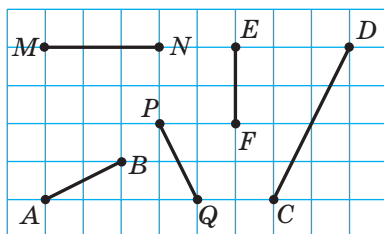
Тепер зрозуміло, що трикутник MNP гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ із центром H і коефіцієнтом 2. Тоді радіус описаного кола трикутника MNP удвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Залишилося зауважити, що трикутники MNP і ABC вписані в одне й те саме коло. ◀



ЗАВДАННЯ № 5
«ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише **ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ**. Виберіть правильний варіант відповіді.

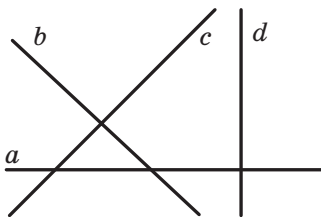
1. Який із відрізків, зображених на рисунку, може бути образом відрізка AB при русі?
 А) MN ; Б) PQ ; В) EF ; Г) DC .



2. Трикутник $A_1B_1C_1$ є образом рівнобедреного трикутника ABC при русі, причому відрізок A_1C_1 є образом відрізка AC . Яка градусна міра кута A_1 трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $\angle B = 110^\circ$?

- А) 110° ; Б) 70° ; В) 35° ; Г) визначити неможливо.

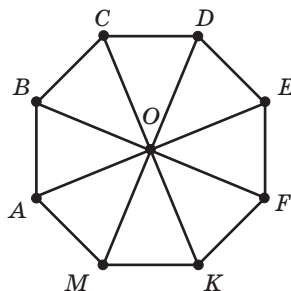
3. Яка з прямих, зображених на рисунку, може бути образом прямої a при паралельному перенесенні?



4. Укажіть рівняння образу прямої $y = 2x$ при паралельному перенесенні на вектор $a(0; 1)$.
А) $y = 2x + 1$; В) $y = x + 1$;
Б) $y = 2x - 1$; Г) $y = x - 1$.
5. Яка з указаних фігур має тільки одну вісь симетрії?
А) Квадрат; В) парабола;
Б) коло; Г) відрізок.
6. При яких значеннях x та y точки $A(-1; y)$ і $B(x; 6)$ симетричні відносно осі абсцис?
А) $x = -1, y = 6$; В) $x = -1, y = -6$;
Б) $x = 1, y = -6$; Г) $x = 1, y = 6$.
7. Яка з указаних фігур має центр симетрії?
А) Трикутник; В) трапеція;
Б) відрізок; Г) кут.
8. Яка з указаних фігур має центр симетрії та вісь симетрії?
А) Рівносторонній трикутник;
Б) паралелограм;
В) рівнобічна трапеція;
Г) пряма.
9. При яких значеннях x та y точки $A(x; 7)$ і $B(-4; y)$ симетричні відносно початку координат?
А) $x = 4, y = -7$; В) $x = -4, y = 7$;
Б) $x = 4, y = 7$; Г) $x = -4, y = -7$.
10. Сторона одного многокутника у 4 рази більша за відповідну сторону подібного йому многокутника. У скільки разів площа першого многокутника більша за площу другого?
А) У 2 рази; В) у 8 разів;
Б) у 4 рази; Г) у 16 разів.
11. Сторони п'ятикутника відносяться як $2:4:5:6:8$. Знайдіть найбільшу сторону подібного йому п'ятикутника, периметр якого дорівнює 50 см.
А) 16 см; В) 8 см;
Б) 12 см; Г) 24 см.

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Точка O — центр правильного восьмикутника, зображеного на рисунку. Установіть відповідність між геометричним перетворенням (1–3) та образом (А–Д) точки A при цьому перетворенні.



Геометричне перетворення

- 1) симетрія відносно прямої BF
- 2) симетрія відносно точки O
- 3) поворот навколо точки O на кут 45° за годинниковою стрілкою

Образ
точки A

- А) точка B
- Б) точка C
- В) точка D
- Г) точка E
- Д) точка M



ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

- 1.° Знайдіть координати точок, симетричних точкам $A(-2; 5)$ і $B(3; 0)$ відносно: 1) осі ординат; 2) осі абсцис; 3) початку координат.
- 2.° Накресліть трикутник ABC . Побудуйте образ трикутника ABC : 1) при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) при симетрії відносно точки B ; 3) при симетрії відносно прямої BC .
- 3.° При паралельному перенесенні образом точки $A(3; -6)$ є точка $A_1(-1; 1)$. Знайдіть координати образу точки $B(-2; 4)$ при цьому паралельному перенесенні.
- 4.° Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC , перетинає його сторону AC у точці E , а сторону BC — у точці F . Знайдіть площу трикутника CEF , якщо $AE : EC = 3 : 2$, а площа трикутника ABC дорівнює 75 см^2 .

5.** У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Через центр вписаного кола трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону AB у точці D , а сторону BC — у точці E . Знайдіть відношення площі трикутника DBE до площі чотирикутника $ADEC$.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

Рух (переміщення)

Перетворення фігури F , яке зберігає відстань між точками, називають рухом (переміщенням) фігури F .

Рівні фігури

Дві фігури називають рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої.

Паралельне перенесення

Якщо точки X і X_1 є такими, що $\overline{XX_1} = \vec{a}$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$.

Властивості паралельного перенесення

Паралельне перенесення є рухом.

Якщо фігура F_1 — образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F_1 = F$.

Осьова симетрія

Точки A і A_1 називають симетричними відносно прямої l , якщо пряма l є серединним перпендикуляром відрізка AA_1 . Якщо точка A належить прямій l , то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l .

Властивості осьової симетрії

Осьова симетрія є рухом.

Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно прямої, то $F = F_1$.

Фігура, яка має вісь симетрії

Фігуру називають симетричною відносно прямої l , якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно прямої l , також належить цій фігурі. Пряму l називають віссю симетрії фігури.

Центральна симетрія

Точки A і A_1 називають симетричними відносно точки O , якщо точка O є серединою відрізка AA_1 . Точку O вважають симетричною самій собі.

Властивості центральної симетрії

Центральна симетрія є рухом.

Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно точки, то $F = F_1$.

Фігура, яка має центр симетрії

Фігуру називають симетричною відносно точки O , якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно точки O , також належить цій фігурі. Точку O називають центром симетрії фігури.

Властивості повороту

Поворот є рухом.

Якщо фігура F_1 — образ фігури F при повороті, то $F_1 = F$.

Площі подібних багатокутників

Відношення площ подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 9 КЛАСУ

1. Розв'язування трикутників

- 21.1.** Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 10 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть третю сторону трикутника.
- 21.2.** У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AB = 2$ см, $AD = 4$ см, $\angle BAD = 60^\circ$. Знайдіть косинус кута між прямими AC і BD .
- 21.3.** Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами: 1) 4 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 6 см, 9 см; 3) 5 см, 12 см, 13 см.
- 21.4.** Одна зі сторін трикутника дорівнює 21 см, а дві інші сторони відносяться як 3 : 8. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо кут між ними дорівнює 60° .
- 21.5.** Одна зі сторін трикутника дорівнює 3 см, а друга сторона — $\sqrt{7}$ см, причому кут, протилежний другій стороні, дорівнює 60° . Знайдіть невідому сторону трикутника.
- 21.6.** Одна зі сторін паралелограма на 4 см більша за другу, а його діагоналі дорівнюють 12 см і 14 см. Знайдіть периметр паралелограма.
- 21.7.** У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Коло, яке проходить через точки A , B і C , перетинає пряму AD у точці K , $\angle AKB = 60^\circ$. Знайдіть відрізок BK .
- 21.8.** Основи трапеції дорівнюють 3 см і 7 см, а бічні сторони — 6 см і 5 см. Знайдіть косинуси кутів трапеції.
- 21.9.** Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до сторони AB у точці D , $BD = 1$ см, $AD = 5$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть відрізок CD .
- 21.10.** Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 12 см і 13 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.
- 21.11.** Знайдіть бісектрису трикутника, яка ділить його сторону на відрізки завдовжки 3 см і 4 см та утворює із цією стороною кут, що дорівнює 60° .

- 21.12. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC , $BD = a$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 75^\circ$. Знайдіть відрізок AD .
- 21.13. Знайдіть відношення сторін рівнобедреного трикутника, один із кутів якого дорівнює 120° .
- 21.14. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см, а кут між ними — 60° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.
- 21.15. Знайдіть бісектрису трикутника ABC , проведену з вершини A , якщо $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$.
- 21.16. Бісектриса кута BAD паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M . Знайдіть площу трикутника ABM , якщо $AB = 4$ см, $\angle BAD = 60^\circ$.
- 21.17. Знайдіть найбільшу висоту, радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см.
- 21.18. Радіуси двох кіл дорівнюють 17 см і 39 см, а відстань між їхніми центрами — 44 см. Знайдіть довжину спільної хорди даних кіл.
- 21.19. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 44 см, а бічні сторони — 17 см і 25 см. Знайдіть площу трапеції.
- 21.20. Основи трапеції дорівнюють 5 см і 12 см, а діагоналі — 9 см і 10 см. Знайдіть площу трапеції.

2. Правильні многокутники

- 21.21. Знайдіть площу правильного n -кутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 6 см, а n дорівнює: 1) 3; 2) 4; 3) 6.
- 21.22. У коло вписано квадрат зі стороною 4 см. Знайдіть площу правильного трикутника, вписаного в це саме коло.
- 21.23. Знайдіть відношення площ правильних трикутника та шестикутника, вписаних в одне й те саме коло.
- 21.24. Середини сторін правильного дванадцятикутника сполучили через одну так, що отриманою фігурою є правильний шестикутник. Знайдіть сторону даного дванадцятикутника, якщо сторона утвореного шестикутника дорівнює a .
- 21.25. Довжина дуги кола дорівнює 6π см, а її градусна міра — 24° . Знайдіть радіус кола.
- 21.26. На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка міститься поза трикутником і відтинається гіпотенузою AB , якщо $\angle A = 42^\circ$, $AC = 8$ см.

- 21.27.** Сторона квадрата дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину дуги описаного кола даного квадрата, кінцями якої є дві його сусідні вершини.
- 21.28.** Площа кругового сектора дорівнює $2,4\pi$ см². Знайдіть градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 4 см.
- 21.29.** Діаметр колеса вагона поїзда метрополітену дорівнює 78 см. За 2,5 хв колесо робить 1000 обертів. Знайдіть швидкість поїзда метрополітену в кілометрах за годину. Відповідь округліть до десятих.
- 21.30.** Знайдіть довжину кола, вписаного в сегмент, довжина дуги якого дорівнює m , а градусна міра дорівнює 120° .
- 21.31.** До кола, радіус якого дорівнює R , проведено дві дотичні, кут між якими дорівнює 60° . Знайдіть площу фігури, обмеженої дотичними та меншою з дуг, кінцями яких є точки дотику.

3. Декартові координати на площині

- 21.32.** Вершинами трикутника є точки $A(-4; 1)$, $B(-2; 4)$ і $C(0; 1)$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, і знайдіть його площу.
- 21.33.** Знайдіть координати точки перетину серединного перпендикуляра відрізка AB з віссю абсцис, якщо $A(5; -3)$, $B(4; 6)$.
- 21.34.** Знайдіть координати точки перетину серединного перпендикуляра відрізка CD з віссю ординат, якщо $C(2; 1)$, $D(4; -3)$.
- 21.35.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-12; 6)$, $B(0; 11)$, $C(5; -1)$ і $D(-7; -6)$ є квадратом.
- 21.36.** Точка $M(5; -2)$ є одним із кінців діаметра кола, точка $N(2; 0)$ — центр кола. Знайдіть координати другого кінця діаметра.
- 21.37.** Установіть, чи лежать точки $A(-4; -3)$, $B(26; 7)$ і $C(2; -1)$ на одній прямій. У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.
- 21.38.** Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A(5; 1)$, $B(9; -2)$ і $C(7; 2)$, прямокутний, і складіть рівняння кола, описаного навколо нього.
- 21.39.** Установіть, чи є відрізок CD діаметром кола $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 52$, якщо $C(-8; 7)$, $D(4; -1)$.

- 21.40. Коло, центр якого належить осі ординат, проходить через точки $A(1; 2)$ і $B(3; 6)$. Чи належить цьому колу точка $C(-3; 4)$?
- 21.41. Коло із центром у точці $M(-5; 3)$ дотикається до осі ординат. Знайдіть координати точок перетину кола з віссю абсцис.
- 21.42. Знайдіть довжину лінії, заданої рівнянням $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.
- 21.43. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $P(-3; 5)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює 6.
- 21.44. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $S(-1; 4)$ та утворює кут 135° з додатним напрямком осі абсцис.
- 21.45. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3; 1)$ паралельно прямій $5x + 3y = 6$.
- 21.46. Знайдіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки $A(-3; -2)$ і $B(2; 5)$.

4. Вектори на площині

- 21.47. Дві вершини прямокутника $ABCD$ — точки $A(3; 2)$ і $B(3; -4)$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 10. Знайдіть координати точок C і D .
- 21.48. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 21.1). Виразіть вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

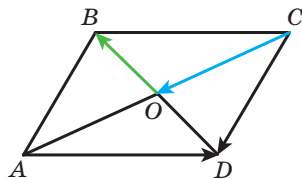


Рис. 21.1

- 21.49. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Знайдіть:
- 1) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$;
 - 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$;
 - 3) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$.
- 21.50. Знайдіть модуль вектора $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, де $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(-1; 3)$.
- 21.51. Точки E і F — середини сторін AB і BC паралелограма $ABCD$ відповідно (рис. 21.2). Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.
- 21.52. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначено точки M і K відповідно, причому $BM = \frac{1}{4}BC$, $CK = \frac{2}{3}CD$.

(рис. 21.3). Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AK}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

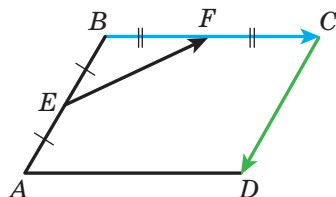


Рис. 21.2

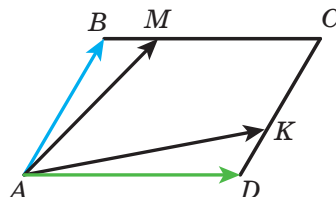


Рис. 21.3

21.53. На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено такі точки D і E відповідно, що $AD : DB = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

21.54. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KP}$, якщо $M(4; -1)$, $N(-6; 5)$, $K(7; -2)$, $P(2; 1)$?

21.55. Знайдіть значення k , при якому вектори $\vec{a}(k; -2)$ і $\vec{b}(6; 3)$ колінеарні.

21.56. Дано вектори $\vec{a}(3; -2)$ і $\vec{b}(x; 4)$. При якому значенні x виконується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

21.57. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC , якщо $A(-3; -4)$, $B(2; -3)$, $C(3; 5)$. Установіть вид трикутника.

21.58. Дано вектори $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(1; -2)$. Знайдіть значення m , при якому вектори $\vec{a} + m\vec{b}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

21.59. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ і $\vec{m} \perp \vec{n}$.

21.60. Дано вектори $\vec{a}(2; -4)$ і $\vec{b}(-1; 1)$. Знайдіть:

- 1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + \vec{b}|$.

21.61. Складіть рівняння прямої, яка дотикається до кола із центром $M(0; -4)$ у точці $A(5; -3)$.

5. Геометричні перетворення

21.62. При паралельному перенесенні образом точки $A(3; -2)$ є точка $B(5; -3)$. Яка точка є образом точки $C(-3; 4)$ при цьому паралельному перенесенні?

21.63. Побудуйте образи точок $A(1; -3)$, $B(0; -5)$ і $C(2; 1)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-2; 1)$. Запишіть координати побудованих точок.

21.64. Дано точки $C(7; -4)$ і $D(-1; 8)$. При паралельному перенесенні образом середини відрізка CD є точка $P(-1; -3)$. Знайдіть координати точок, які є образами точок C і D .

21.65. На рисунку 21.4 $CB = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що точки B і D симетричні відносно прямої AC .

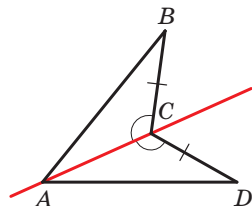


Рис. 21.4

21.66. Знайдіть координати точок, симетричних точці $K(4; -2)$ відносно осей координат і початку координат.

21.67. Знайдіть x і y , якщо точки $A(x; -2)$ і $B(3; y)$ симетричні відносно осі абсцис.

21.68. Дано промінь OA та точку B , що йому не належить. Побудуйте промінь, симетричний даному відносно точки B .

21.69. Чи симетричні точки $M(-3; 10)$ і $N(-1; 6)$ відносно точки $K(1; 4)$?

21.70. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 11$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $M(-3; 3)$.

21.71. Дано точки K і O . Побудуйте точку K_1 , яка є образом точки K при повороті навколо точки O : 1) на кут 130° проти годинникової стрілки; 2) на кут 40° за годинниковою стрілкою.

21.72. Дано відрізок AB і точку O , яка йому не належить. Побудуйте відрізок A_1B_1 , який є образом відрізка AB при повороті на кут 50° навколо точки O за годинниковою стрілкою.

21.73. На який кут треба повернути прямокутник, відмінний від квадрата, навколо його центра симетрії, щоб його образом був цей самий прямокутник?

21.74. Сторони двох правильних трикутників дорівнюють 8 см і 28 см. Чому дорівнює відношення їхніх площ?

21.75. Многокутник F_1 подібний многокутнику F_2 з коефіцієнтом подібності k . Буквами P_1, P_2, S_1, S_2 позначено відповідно їхні периметри та площі. Заповніть порожні клітинки в таблиці.

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

- 21.76.** Пряма, паралельна стороні трикутника завдовжки 6 см, ділить його на дві фігури, площі яких відносяться як 1 : 3. Знайдіть відрізок цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.
- 21.77.** На стороні BC квадрата $ABCD$ позначили точку M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Відрізки AM і BD перетинаються в точці P . Знайдіть площу трикутника BPM , якщо площа трикутника APD дорівнює 27 см^2 .
- 21.78.** Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M . Знайдіть площу трапеції, якщо $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$, а площа трикутника AMD дорівнює 32 см^2 .
- 21.79.** У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 13 \text{ см}$, $AC = 10 \text{ см}$. До кола, вписаного в цей трикутник, проведено дотичну, яка паралельна основі AC та перетинає сторони AB і BC у точках M і K відповідно. Обчисліть площу трикутника MBK .
- 21.80.** На продовженнях медіан AA_1 , BB_1 і CC_1 трикутника ABC позначили відповідно точки A_2 , B_2 і C_2 так, що $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (рис. 21.5). Знайдіть площу трикутника $A_2B_2C_2$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1 см^2 .

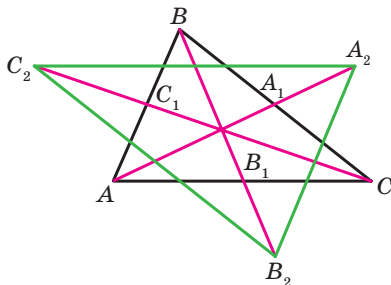


Рис. 21.5

ПРОЄКТНА РОБОТА

Ця рубрика адресована передусім тим, хто бажає навчитися самостійно здобувати знання, творчо мислити, формувати, висловлювати та відстоювати свою точку зору, висувати гіпотези, знаходити найбільш раціональні та нестандартні рішення.

Першим кроком, який може допомогти в досягненні цих цілей, є участь у проєктній роботі.

Проєкт — це самостійне дослідження за вибраною темою, яке можна виконувати як індивідуально, так і в групі.

Дамо кілька порад щодо організації роботи над проєктом та оформлення результатів дослідження.

1. Під час вибору теми потрібно враховувати її актуальність, наявність джерел інформації в літературі та інтернет-ресурсах. При цьому дуже важливе ваше бажання проявити себе дослідником/дослідницею в роботі саме над вибраною темою.
2. Роботу починають зі складання попереднього плану, у якому викладають задум та етапи реалізації задуманого. Після ознайомлення з основними джерелами інформації складають остаточний план за допомогою керівника/керівниці проєкту.
3. Важливо чітко сформулювати цілі дослідження. Їх можна записати, наприклад, у такий спосіб: вивчити, описати, проаналізувати, довести, порівняти тощо.
4. Роботу завершують підбиттям підсумків дослідження, роблять висновки, накреслюють перспективи подальшого вивчення теми.
5. Приблизний обсяг роботи — 10–15 сторінок. Додатково можна навести ілюстративний матеріал.
6. Робота може бути оформлена у вигляді реферату, доповіді, комп'ютерної презентації.

Виконання проєктної роботи в групах дуже корисне. Ви навчитеся працювати в команді, слухати інших, розв'язувати конфлікти та знаходити компроміси. Кожен і кожна із вас має свої сильні сторони, і робота в групі дозволяє обмінюватися знаннями та досвідом. Групове обговорення часто породжує більше ідей, ніж індивідуальна робота. У майбутньому вам доведеться працювати в командах, тому групові проєкти допоможуть підготуватися до цього.

Рекомендації щодо виконання проєкту в групах

1. Розподіліть між собою чітко визначені ролі у проєкті (наприклад, дослідниця, організатор, презентерка тощо). Це допомагає уникнути хаосу та забезпечує рівну участь усіх учасників та учасниць групи.
2. Створіть графік виконання завдань, щоб уникнути затягування термінів. Визначте етапи роботи та дедлайни для кожного / кожної.
3. Налагодьте регулярну комунікацію між учасниками та учасницями групи. Використовуйте онлайн-платформи (наприклад, *Google Docs*, *Zoom*) для обговорення ідей та обміну матеріалами.
4. Усі учасники й учасниці групи повинні розуміти мету проєкту та прагнути до її досягнення. Це допомагає зберегти мотивацію.
5. Після завершення проєкту обговоріть, що вдалося, а що можна покращити. Це допоможе вам вчитися на власному досвіді.

Нижче наведено рекомендований список тем, які можна вибрати для проєктної роботи.

Теми проєктів з геометрії

1. Задача одна, а розв'язків багато
2. Математичні софізми
3. Геометрія та астрономія
4. Метод площ
5. Склеювання і розрізання геометричних фігур
6. Фігури з криволінійними межами, площа яких дорівнює площі многокутників
7. Рівняння прямої: від теорії до практики
8. Векторний базис та його застосування
9. Векторний метод
10. Застосування осрової симетрії
11. Застосування центральної симетрії та повороту

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

- 1.24. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ або $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. 1.25. 1) $\frac{12}{13}$ або $-\frac{12}{13}$;
 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. 1.30. 1) $2 - \sqrt{3}$; 2) $-1,5$; 3) $-\sqrt{3} - 2$. 1.31. 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$.
 1.36. 60° , 75° , 45° або 120° , 15° , 45° . 1.39. $-\frac{1}{2}$. 1.40. 120° .
 1.41. 10 світильників. 1.43. 10 см, 30° , 120° . 1.46. $5\sqrt{6}$ см.
 2.11. 120° . 2.12. 45° . 2.17. $2\sqrt{7}$ см. 2.18. $\sqrt{10}$ см.
 2.19. 9 см. 2.20. 7 см. 2.21. $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. 2.22. 13 см.
 2.23. $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. 2.24. $3\sqrt{89}$ см. 2.25. $\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}}$.
 2.26. $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. 2.27. 15 см, 24 см. 2.28. 2 см, $4\sqrt{3}$ см.
 2.29. 3 см, 5 см. 2.30. 10 см, 6 см, 14 см. 2.31. 6 см або 10 см.
 2.32. 75 см. 2.35. 14 см. 2.36. 34 см. 2.37. 7 см, 9 см. 2.38. 20 см,
 30 см. 2.40. 13 см. 2.41. $\sqrt{79}$ см. 2.43. 8 см. *Вказівка.* Прове-
 дить через вершину B пряму, паралельну стороні CD , та
 розгляньте трикутник, який при цьому утворився. 2.44.
 $\frac{13}{20}$. 2.45. $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. 2.46. Ні. 2.48. 10 см. 2.49. 6 см. 2.50. 11 см.
 2.51. 6 см. 2.52. 22 см. 2.57. Див. рисунок.



До задачі 2.57

- 3.21. $2\sqrt{6}$ см. 3.22. 6 см. 3.23. 60° або 120° .
 3.24. $\frac{a \sin \beta}{\cos(\beta + \gamma) \sin \gamma}$. 3.25. $\frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. 3.26. $\frac{c \sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma \sin \varphi}$.

$$3.27. \frac{m \sin \alpha \sin \varphi}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)}. \quad 3.29. 9 \text{ см.} \quad 3.30. \frac{25}{3} \text{ см.} \quad 3.31.$$

$$\frac{b \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma) \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}. \quad 3.32. \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ + \frac{3\alpha}{4}\right)}. \quad 3.34. \frac{85}{8} \text{ см. Вка-}$$

зівка. Шуканий радіус можна знайти як радіус кола, описаного навколо трикутника, сторонами якого є одна з основ, бічна сторона та діагональ трапеції. 3.35. $\frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$

$\frac{2m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. Вказівка. На продовженні медіани AM за точ-

ку M позначте точку K таку, що $AM = MK$, і застосуйте теорему синусів до трикутника ACK або трикутника ABK .

$$3.36. \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}. \quad 3.37. \text{Вказівка. Виразіть кути } AHB, BHC$$

і AHC через кути трикутника ABC . 3.39. 4,5 год. 3.40. Швидше доїхати через село C . Вказівка. Прийміть відстань між якими-небудь двома селами за a і виразіть через a відстані між іншими селами. 3.41. Автобус. 3.44. 12 см.

4.14. $107^\circ, 73^\circ, 132^\circ, 48^\circ$. Вказівка. Проведіть через одну з вершин меншої основи пряму, паралельну бічній стороні трапеції, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. 4.15. 9 см. 4.16. 30 см, 48 см.

$$5.8. 150^\circ. \quad 5.9. 60^\circ. \quad 5.13. 24 \text{ см}^2. \quad 5.14. \frac{7}{3} \text{ см.} \quad 5.21. 1) 60^\circ \text{ або } 120^\circ; 2) 90^\circ. \quad 5.22. 30^\circ \text{ або } 150^\circ. \quad 5.23. 12 \text{ см.} \quad 5.24. 24 \text{ см.}$$

$$5.25. 1) \frac{3}{2} \text{ см, } \frac{25}{8} \text{ см; } 2) 8 \text{ см, } \frac{145}{8} \text{ см.} \quad 5.26. 2 \text{ см, } \frac{145}{8} \text{ см.}$$

$$5.32. 3 : 5. \quad 5.33. 51 \text{ см}^2, 75 \text{ см}^2, 84 \text{ см}^2. \quad 5.34. \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}.$$

$$5.35. 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta). \quad 5.36. \frac{b^2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}.$$

$$5.37. \frac{h_1 h_2}{2 \sin \alpha}. \quad 5.38. \frac{h^2 \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}. \quad 5.39. \frac{24}{7} \text{ см. Вказівка.}$$

Скористайтеся тим, що $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. 5.40. 360 см^2 . Вказівка. Проведіть через один із кінців меншої основи трапеції пряму, паралельну бічній стороні трапеції, та знайдіть висоту трикутника, який ця пряма відтинає від

трапеції. **5.41.** $12\sqrt{5} \text{ см}^2$. *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $BC \parallel AD$. Проведіть через вершину C пряму, яка паралельна прямій BD і перетинає пряму AD у точці E . Доведіть, що трикутник ACE та дана трапеція рівновеликі. **5.42.** 19,5 см. **5.44.** 4 балончики. **5.45.** 2 м. **5.46.** 10° . **5.47.** 9,6 см.

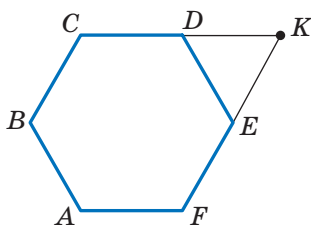
$$\mathbf{6.31.} \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}. \mathbf{6.32.} 2\sqrt{R^2 - r^2}. \mathbf{6.33.} \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}. \mathbf{6.37.} 5 \text{ сто-}$$

рін. **6.38.** 18 сторін. **6.41.** 1) $\frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$; 2) $\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$.

$$\mathbf{6.42.} 1) \frac{2a\sqrt{3}}{3}; 2) \frac{a\sqrt{3}}{3}. \mathbf{6.45.} 2R^2\sqrt{2}. \mathbf{6.46.} \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}. \mathbf{6.47.}$$

$$6(\sqrt{2}-1) \text{ см. } \mathbf{6.48.} 8 \text{ см. } \mathbf{6.49.} a\sqrt{2+\sqrt{2}}, a(\sqrt{2}+1), a\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{6.50.} \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}. \mathbf{6.51.} \frac{a(2+\sqrt{2})}{2}. \mathbf{6.52.} \text{Вказівка. Нехай}$$



До задачі 6.52

$ABCDEF$ — правильний шестикутник (див. рисунок), K — точка перетину прямих CD і EF . Тоді AK — шуканий відрізок. **6.53.** $\approx 17,4$ см. **6.54.** $\approx 19,8$ см. **6.55.** $\approx 4,4$ см. **6.56.** Трикутників, або квадратів, або шестикутників. *Вказівка.* Навколо однієї точки можна викласти стільки дощечок, у скільки разів кут при вершині дощечки, який дорівнює

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n}, \text{ менший від } 360^\circ, \text{ тобто } 360^\circ: \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{2n}{n-2}$$

дощечок. Значення виразу $\frac{2n}{n-2}$ має бути натуральним числом. Оскільки $\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$, то значення ви-

разу $\frac{4}{n-2}$ має бути натуральним числом. **6.58.** 96 см^2 .

$$\mathbf{6.59.} 9 \text{ см.}$$

$$\mathbf{7.32.} 22,5^\circ. \mathbf{7.36.} \sqrt{6} \text{ см. } \mathbf{7.37.} 1) \frac{25(\pi-2\sqrt{2})}{8} \text{ см}^2;$$

$$2) \frac{25(5\pi-3)}{12} \text{ см}^2; 3) \frac{25(11\pi+3)}{12} \text{ см}^2. \mathbf{7.38.} 1) \frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2;$$

$$2) \frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2. \quad 7.40. \frac{a^2(\pi - 2)}{8}. \quad 7.41. \frac{a^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{36}.$$

$$7.42. 2\pi \text{ см}, \frac{10\pi}{3} \text{ см}, \frac{20\pi}{3} \text{ см}. \quad 7.43. \frac{25\pi}{18} \text{ см}, \frac{35\pi}{18} \text{ см}, \frac{20\pi}{3} \text{ см}. \quad 7.44. \frac{8\pi}{3} \text{ см}. \quad 7.45. 6\pi \text{ см}. \quad 7.46. 1 : 1. \text{ Вказівка.}$$

Доведіть, що в обох випадках сума довжин півкіл дорівнює $\frac{1}{2}\pi AB$. 7.47. Вказівка. Сума площ усіх зафарбованих і не-

зафарбованих серпиків дорівнює сумі площ двох кругів, діаметри яких є сусідніми сторонами прямокутника, а сума площ незафарбованих серпиків і прямокутника дорівнює площі круга, діаметр якого є діагоналлю прямокутника.

Покажіть, що ці суми рівні. 7.48. $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. 7.49. $\frac{2\pi a}{3}$.

Вказівка. Розгляньте трикутник AND і доведіть, що він рівносторонній. 7.50. Вказівка. Спільна частина квадратів містить круг, радіус якого дорівнює $\frac{1}{2}$ см (див.

рисунок). 7.57. 50 см. 7.58. $\approx 17,3\%$.

$$7.60. \frac{130}{17} \text{ см}, \frac{312}{17} \text{ см}. \quad 7.61. \text{ Вказівка. Че-}$$

рез середину меншої основи проведіть прямі, паралельні бічним сторонам трапеції.

8.15. 1) Так, точка B лежить між точками A і C ; 2) ні.

8.17. $x = 7$ або $x = -1$. 8.18. $y = 2$ або $y = -10$. 8.19. $(3; 0)$.

8.20. $(0; 0,5)$. 8.21. $(3; -0,5)$. 8.22. $(-2; 2)$. 8.23. $(3; -2)$.

8.27. $A(-5; 3)$, $C(7; 5)$. 8.28. $2\sqrt{73}$. 8.29. $(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ або

$(-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$. 8.30. $(-2; 4\sqrt{3})$ або $(-2; -4\sqrt{3})$. 8.31. $(3; 3)$ або

$(-6; 6)$. Вказівка. Розгляньте два випадки: $B(a; a)$ або $B(a; -a)$. 8.34. $\sqrt{33}$ см. 8.35. $56^\circ, 124^\circ$.

9.23. Два кола: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ і $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. 9.24.

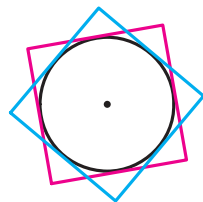
$(x - 3)^2 + y^2 = 50$. 9.25. 1) Так, точка $(-1; 5)$ — центр кола,

$R = 7$; 2) ні; 3) ні; 4) так, точка $(2; 7)$ — центр кола, $R = \sqrt{2}$.

9.26. 1) Точка $(0; -8)$ — центр кола, $R = 2$; 2) точка $(4; -2)$ — центр кола, $R = \sqrt{5}$.

9.27. $(x - 2)^2 + y^2 = 13$.

9.28. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ або $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. Вказівка.



До задачі 7.50

Діаметр шуканого кола дорівнює відстані між віссю абсцис і прямою $y = -4$, а центр кола належить бісектрисі третього або четвертого координатного кута. **9.29.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ або $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$. **9.30.** 1) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$;

2) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 169$. **9.33.** $180\sqrt{3}$ см². **9.34.** 70 см.

10.9. 1) $(-8; -31)$; 2) $(-1; 2)$. **10.11.** 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **10.12.** 1) $y = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$.

10.13. $y = -0,5x - 4$. **10.14.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$. **10.16.** 12. **10.17.** 28.

10.18. $(2; 5)$, $(5; 2)$. **10.19.** $(5; 0)$. **10.21.** 6. **10.22.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$.

Вказівка. Шукана відстань дорівнює висоті трикутника, обмеженого осями координат і даною прямою. **10.23.** $4\sqrt{2}$.

10.24. $3\sqrt{10}$. **10.25.** $x - 3y = 2$. **10.26.** $7x + 5y = -8$. **10.27.** $(3; 3)$ або $(15; 15)$. **10.28.** $(-2; 2)$ або $(-10; 10)$. **10.29.** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 17$. **10.30.** $(y-4)(y+4) = 0$. **10.31.** 104 см. **10.32.** 12,5 см.

11.10. 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 3) $y = 7$. **11.11.** $y = -0,5x - 4$. **11.12.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **11.13.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = 9$. **11.14.** 1) $y = x\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3}$; 2) $y = -x\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3}$. **11.15.** 1) $y = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **11.16.** а) $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 3$; б) $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2$. **11.17.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні.

11.19. $y = 4x + 9$. **11.20.** $y = 3x - 12$. **11.21.** $y = x + 4$. **11.22.** 30 см, 40 см. **11.23.** 144 см².

12.23. Прямокутник або рівнобічна трапеція. **12.32.** 4 см, 12 см. **12.33.** $60^\circ, 120^\circ$.

13.20. $\overline{AF}(-2; 2)$, $\overline{FD}(2; 4)$. **13.21.** $\overline{DE}(-4; 6)$, $\overline{EO}(-4; -6)$. **13.22.** $\vec{a}(-6; -8)$ або $\vec{a}(8; 6)$. **13.23.** $\vec{c}(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ або $\vec{c}(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. **13.24.** $C(7; 17)$, $D(2; 17)$ або $C(7; -7)$, $D(2; -7)$. **13.25.** $B(16; 2)$, $C(16; -6)$ або $B(-14; 2)$, $C(-14; -6)$. **13.27.** 20 см, 7 см, 21 см.

14.45. 1) Так; 2) так; 3) ні. **14.46.** *Вказівка.* Достатньо показати, що $\overline{XA} - \overline{XB} = \overline{XD} - \overline{XC}$. **14.47.** Коло радіуса AB із центром у точці A . **14.48.** Серединний перпендикуляр відрізка AB . **14.49.** *Вказівка.* Нехай відрізок AA_1 — медіана трикутника ABC . На продовженні відрізка AA_1 за точку A_1 відкладіть відрізок A_1D , рівний MA_1 . **14.53.** 0,2 м/с, $\sqrt{1,04}$ м/с. **14.54.** 4 см, 6 см.

15.28. -4 ; 4. 15.29. $-1,5$. 15.31. $\overline{m}(-15; 36)$. 15.32. $\overline{a}(-3; 4)$.
 15.35. $x = 2, y = -3$. 15.36. $x = 1, y = -2$. 15.40. $\overline{OK} = 0,5\overline{a} - 0,1\overline{b}$.

15.44. $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC}$. 15.46. Вказівка. З одного боку,
 $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1B_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2M_2}$. З другого боку, $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1A_1} +$
 $+ \overline{A_1A_2} + \overline{A_2M_2}$. Додайте ці рівності. 15.50. Вказівка. Нехай
 відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC . Ско-
 ристайтеся тим, що $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \vec{0}$. 15.51. Вказівка.
 Скористайтеся задачею 15.46 і ключовою задачею 1 п. 15.
 15.52. 18 см. 15.53. $R\sqrt{3}$.

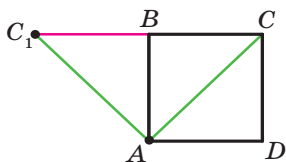
16.17. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. 16.19. -1 . 16.21. -3 і 3 .
 16.22. $\overline{b}(-12; 16)$. 16.24. 4. 16.25. $-0,5$. 16.26. $\sqrt{7}$.
 16.27. $2\sqrt{7}$. 16.32. $\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}$. 16.33. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. 16.34. 0° .
 16.35. 120° . 16.36. Вказівка. Нехай $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$. Тоді
 $\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$, $\overline{AK} = -\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$. Знайдіть скалярний добуток
 $\overline{CM} \cdot \overline{AK}$. 16.37. 45° . Вказівка. Нехай $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$. Ви-
 разіть вектори $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ через вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$. 16.38. 30° .
 Вказівка. $\overline{BD} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC})$. Звідси $\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}(\overline{BD} \cdot \overline{BA} + \overline{BD} \cdot \overline{BC})$,
 $\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}|\overline{BD}| \cdot |\overline{BA}| \cdot \cos \angle ABD$. 16.39. Вказівка. $\overline{BD} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC})$,
 $\overline{MF} = \overline{MB} + \overline{BF}$. Залишилося показати, що $\overline{BD} \cdot \overline{MF} = 0$.
 16.42. 6π см.

17.20. Безліч. 17.29. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 1$. 17. 30. $y = x^2 -$
 $-4x + 1$. 17.32. Вказівка. Нехай $ABCD$ — шукана трапеція
 $(BC \parallel AD)$. Побудуйте образ діагоналі BD при паралельному
 перенесенні на вектор $\overline{BC}$. 17.34. Вказівка. Нехай точка A_1 —
 образ точки A при паралельному перенесенні на вектор $\overline{MN}$.
 Сполучіть точки A_1 і B . 17.36. 36 см. 17.37. 40. 17.38. 490 см^2 .

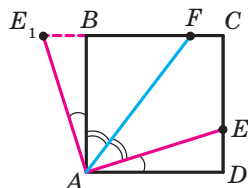
18.20. $a \perp l$ або прямі a і l збігаються. 18.27. Вказівка.
 Кути M_1BA і MBA є симетричними відносно прямої AB .
 Отже, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогічно $\angle M_2BC = \angle MBC$. Зали-
 шилося показати, що $\angle M_1BM_2 = 180^\circ$. 18.28. 1) $A_1(0; -2)$,

$B_1(-1; 3); 2)$ $A_2(0; 2), B_2(1; -3)$. **18.29.** $x = 2, y = -1$. **18.30.** Вказівка. Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a . Тоді точка перетину прямих a і A_1B буде шуканою. **18.32.** Вказівка. Нехай точка C_1 симетрична точці C відносно прямої AB . Побудуйте коло із центром у точці C_1 , яке дотикається до прямої AB . Проведіть через точку D дотичну до побудованого кола. Ця дотична перетинає пряму AB у шуканій точці. **18.33.** Точка перетину висот трикутника ABC . **18.35.** CD ; 7 см, 10 см. **18.36.** $y = 0,5x - 0,5$.

19.26. 2 см або 1 см. **19.27.** 2 см. Вказівка. При розгляданому повороті точка B є образом точки D , точка C_1 — образом точки C , точка A — образом точки A (див. рисунок).



До задачі 19.27



До задачі 19.31

Отже, трикутник ABC_1 — образ трикутника ADC . Звідси $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90^\circ$. Отже, точки C_1, B і C лежать на одній прямій. **19.28.** Вказівка. Знайдіть середину відрізка AC , а далі скористайтесь задачею 2 п. 19. **19.30.** Вказівка. Розглянемо поворот із центром у точці C проти годинникової стрілки на кут 60° . При такому повороті образами точок E і B будуть відповідно точки D і A . Отже, відрізок AD і його середина K будуть відповідно образами відрізка BE і його середини M . **19.31.** Вказівка. Розглянемо поворот із центром у точці A проти годинникової стрілки на кут 90° . При цьому повороті образом відрізка AD буде відрізок AB (див. рисунок). Нехай точка E_1 — образ точки E . Тоді трикутник ABE_1 — образ трикутника ADE . Звідси $\triangle ABE_1 = \triangle ADE$. Тоді $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Маємо: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Але $\angle FAD = \angle E_1FA$. Отже, трикутник AE_1F рівнобедрений і $AE_1 = E_1F$.

19.33. $\frac{120}{7}$ см. **19.34.** 48 см. **19.35.** 15 см, 35 см.

19.36. 48 см, 60 см.

20.10. 12 см. 20.11. $28,8 \text{ см}^2$. 20.13. $\frac{S}{16}$. 20.17. 16 см^2 , 196 см^2 . 20.18. 28 см^2 . 20.19. 20 см^2 . 20.20. 112 см^2 . 20.21. $\sqrt{2}$ см. 20.22. 4:5. 20.23. 4:21. 20.26. 5,4 кг. 20.27. 96 см^2 , 4,8 см. 20.28. 24.

Відповіді та вказівки до вправ оповідання «Гомотетія»

4. 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. 7. 1) $k=2$, точка B або $k=-2$, точка

перетину діагоналей трапеції $AMNC$. 9. $-\frac{1}{2}$. Вказівка. За означенням гомотетії $\overline{MA} = k\overline{MB}$. Знайдіть координати векторів $\overline{MA}$ і $\overline{MB}$. 10. 1) $x=-3$, $y=8$; 2) $x=12$, $y=-2$. 11. 1) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$; 2) $(x-4)^2 + (y+8)^2 = 16$. 12. Вказівка. Пряма A_2B_2 є образом прямої A_1B_1 при гомотетії із центром у точці дотику та коефіцієнтом, який дорівнює відношенню більшого радіуса до меншого. 13. Вказівка. Побудуйте довільний трикутник, два кути якого дорівнюють двом даним кутам. Опишіть навколо нього коло. Шуканий трикутник є образом побудованого трикутника при гомотетії із центром у довільній точці та коефіцієнтом, що дорівнює відношенню даного радіуса до радіуса побудованого кола. 14. Вказівка. Див. розв'язання задачі 2 оповідання «Гомотетія». 15. Вказівка. Розгляньте гомотетію із центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом $\frac{1}{3}$.

21.1. $2\sqrt{17}$ см або $2\sqrt{41}$ см. 21.2. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 21.4. 9 см, 24 см.

21.5. 1 см або 2 см. 21.6. 36 см. 21.7. 4 см. Вказівка. Оскільки трапеція $ABCK$ є вписаною, то $AB=CK$. Тоді $\angle KAC = \angle KCB$, $AC=BK$. 21.8. $\frac{9}{16}$; $-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. 21.9. $\sqrt{111}$ см.

21.10. 9,5 см. 21.11. 12 см. 21.12. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 21.13. $1:1:\sqrt{3}$.

21.14. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. 21.15. $\frac{bc \sin \alpha}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}}$. Вказівка. Скористайтеся

формулою для обчислення площі трикутника за двома сторонами та кутом між ними. 21.16. $4\sqrt{3} \text{ см}^2$. 21.17. 12 см,

- $\frac{3}{2}$ см, $\frac{65}{8}$ см. **21.18.** 30 см. **21.19.** 450 см^2 . **21.20.** 36 см^2 .
21.22. $6\sqrt{3} \text{ см}^2$. **21.23.** $1 : 2$. **21.24.** $2a(2 - \sqrt{3})$. **21.25.** 45 см.
21.26. $\frac{32\pi}{15}$ см. **21.28.** 54° . **21.30.** $\frac{3m}{4}$. **21.31.** $\frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}$.
21.33. $(-9; 0)$. **21.34.** $(0; -2,5)$. **21.38.** $(x - 7)^2 + (y + 0,5)^2 = 6,25$.
21.39. Так. **21.40.** Так. **21.41.** $(-1; 0)$, $(-9; 0)$. **21.42.** 10π .
21.43. $y = 6x + 23$. **21.44.** $y = -x + 3$. **21.45.** $y = -\frac{5}{3}x - 4$.
21.46. $5x + 7y = 8$. **21.58.** $-\frac{4}{5}$. **21.59.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **21.61.** $5x + y = 22$.
21.76. 3 см або $3\sqrt{3}$ см. **21.77.** 3 см^2 . **21.78.** $27,5 \text{ см}^2$.
21.79. $\frac{320}{27} \text{ см}^2$. **21.80.** $\frac{25}{16} \text{ см}^2$. *Вказівка.* Трикутник $A_2B_2C_2$
 подібний трикутнику ABC із коефіцієнтом подібності $\frac{5}{4}$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Номер завдання	Номер задачі											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Г	В	В	А	Б	Г	В	Б	А	Б	А	1 — В; 2 — Б; 3 — Д
2	В	Б	Б	А	Г	Г	В	Г	В	Б	А	1 — Б; 2 — Д; 3 — В
3	Б	А	В	Б	Г	Б	Г	Г	В	Б	А	1 — А; 2 — Д; 3 — В
4	В	Г	А	В	А	А	Б	Г	А	Г	В	1 — Г; 2 — А; 3 — В
5	Б	В	Г	А	В	В	Б	Г	А	Г	А	1 — Б; 2 — Г; 3 — А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Вектор** 138, 139
 Вектори колінеарні 140
 — перпендикулярні 178
 — протилежні 157
 — протилежно напрямлені 140
 — рівні 140
 — співнапрямлені 140
 Вісь симетрії 206
 — — фігури 207
Добуток вектора та числа 165
 Довжина дуги кола 85
 — кола 83, 85
Кінець вектора 139
 Коефіцієнт подібності 230
 Координати вектора 147
 Косинус 7
 Круговий сегмент 87
 — сектор 86
 Кут між векторами 178
 — — прямою та додатним напрямком осі абсцис 126
 — повороту 221
 Кутовий коефіцієнт прямої 126
Модуль вектора 139
Нуль-вектор 139
Образ фігури 196
 Одиничне півколо 6
 Основа сегмента 87
 Основна тригонометрична тотожність 9
 Осьова симетрія 205
Паралельне перенесення 195
 Переміщення 196
 Перетворення подібності 229, 239
 — фігури 196
 Півкруг 87
 Площа круга 85
 — кругового сегмента 87
 — — сектора 87
 Площі подібних фігур 231
 Поворот 221
 Початок вектора 139
 Правило паралелограма 155
 — трикутника 153
 Правильний многокутник 67
 Прообраз фігури 196
Рівні фігури 197
 Рівняння кола 112
 — прямої 119
 — фігури 111
 Різниця векторів 156
 Розв'язування трикутників 41
 Рух 196
Сегмент 87
 Сектор 86
 Синус 7
 Скалярний добуток векторів 179
 — квадрат вектора 179
 Сума векторів 153
Тангенс 9
 Теорема косинусів 18
 — синусів 32
 Точки, симетричні відносно прямої 205
 —, — — точки 217
 Тригонометричні функції 9
Фігури подібні 228, 239
 Формула Герона 52
 — для знаходження площі описаного многокутника 53
 — — радіуса вписаного кола многокутника 54
 Формули для знаходження площі трикутника 51, 52, 53
 — — — радіуса описаного кола трикутника 32, 53
Центр повороту 221
 — правильного многокутника 71
 Центральна симетрія 217
 Центральний кут правильного многокутника 71

<i>Від авторів</i>	3
<i>Умовні позначення</i>	5
§ 1. Розв’язування трикутників	6
1. Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°	6
2. Теорема косинусів	17
3. Теорема синусів	30
4. Розв’язування трикутників	41
• Тригонометрія — наука про вимірювання трикутників	48
5. Формули для знаходження площі трикутника	50
<i>Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	62
<i>Готуємося до перевірки знань</i>	64
<i>Головне в параграфі 1</i>	65
§ 2. Правильні многокутники	67
6. Правильні многокутники та їхні властивості	67
• Про побудову правильних n -кутників	81
7. Довжина кола. Площа круга	82
<i>Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	98
<i>Готуємося до перевірки знань</i>	100
<i>Головне в параграфі 2</i>	101
§ 3. Декартові координати на площині	102
8. Відстань між двома точками із заданими координатами. Координати середини відрізка	102
9. Рівняння фігури. Рівняння кола	110
10. Рівняння прямої	119
11. Кутовий коефіцієнт прямої	125
• Метод координат	130
• Як будували міст між геометрією та алгеброю	133
<i>Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	134
<i>Готуємося до перевірки знань</i>	136
<i>Головне в параграфі 3</i>	136

§ 4. Вектори	138
12. Поняття вектора	138
13. Координати вектора	147
14. Додавання і віднімання векторів	153
15. Множення вектора на число	165
• Векторний метод.....	175
16. Скалярний добуток векторів	178
<i>Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	187
<i>Готуємося до перевірки знань.....</i>	189
<i>Головне в параграфі 4</i>	190
§ 5. Геометричні перетворення.....	194
17. Рух (переміщення) фігури. Паралельне перенесення	194
18. Осьова симетрія	205
• Перша Всеукраїнська олімпіада юних математиків	215
19. Центральна симетрія. Поворот	216
20. Подібність фігур	228
• Гомотетія	236
• Застосування перетворень фігур при розв'язуванні задач	243
<i>Завдання № 5 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	246
<i>Готуємося до перевірки знань.....</i>	248
<i>Головне в параграфі 5</i>	249
 Вправи для повторення курсу геометрії 9 класу	251
 Проектна робота	258
<i>Відповіді та вказівки до вправ</i>	260
<i>Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	268
<i>Предметний покажчик</i>	269

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

*У підручнику з навчальною метою використано фотоматеріали,
розміщені у вільному доступі в мережі «Інтернет»,
зокрема сайтів uk.wikipedia.org, depositphotos.com,
а також з особистих архівів авторів.*

Головна редакторка *Т. Г. Левченко*
Редакторка *М. В. Москаленко*
Обкладинка *Н. О. Мінеєва*
Технічна редакторка *О. В. Гулькевич*
Комп'ютерне верстання,
художнє оформлення *С. І. Северин*
Коректорка *А. Ю. Венза*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 17,00. Обл.-вид. арк. 14,88.
Тираж 0000 прим. Зам. №

ТОВ ТО «Гімназія», вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua, www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано в друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003