

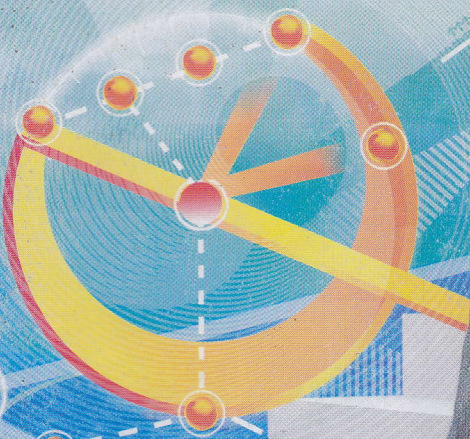
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
Ю. М. Рабінович
М. С. Якір

10

АЛГЕБРА

І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ
І КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ**



ГІМНАЗІЯ

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонський
Ю.М. Рабінович
М.С. Якір

Алгебра і початки аналізу

10 клас

Збірник задач і контрольних робіт

Схвалено
Міністерством освіти і науки України
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах

Харьков
«Гимназия»
2011

УДК 373:512
ББК 22.1я72
М 52

*Схвалено Міністерством освіти і науки України
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах
(Лист № 1.4/18-Г-477 від 06.07.2010 р.)*

Мерзляк А.Г.

М 52 Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : збірник задач і контрольних робіт /
А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. — Х. :
Гімназія, 2011. — 144 с. : іл.

ISBN 978-966-474-106-1.

Посібник є дидактичним матеріалом з алгебри і початків аналізу для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Він є складовою навчально-методичного комплексу і відповідає підручнику з алгебри і початків аналізу для 10 класу (автори А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір). Книга містить близько 1000 задач. Першу частину «Тренувальні вправи» поділено на три однотипних варіанти по 229 задач у кожному. Друга частина містить контрольні роботи (два варіанти) для оцінювання навчальних досягнень учнів відповідно до державної програми з математики. Третя частина містить завдання для підсумкових контрольних робіт за матеріалами першого і другого семестрів.

Для вчителів загальноосвітніх навчальних закладів та учнів 10 класів.

УДК 373:512
ББК 22.1я72

ISBN 978-966-474-106-1

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,
Ю. М. Рабінович, М. С. Якір, 2010
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, 2010

ВІД АВТОРІВ

Учням

Любі учні! У цьому році ви поширите і поглибите свої знання з алгебри, познайомитеся з багатьма новими поняттями, фактами. Ми сподіваємося, що задачі, запропоновані в цій книжці, допоможуть зробити це знайомство не лише корисним, а й цікавим.

Учителю

Ми дуже сподіваємося, що, придбавши цю книжку не тільки для себе, а й «на клас», Ви не пошкодуєте. Навіть тоді, коли Вам пощастило і Ви працюєте за підручником, який подобається, все одно задач, як і грошей, буває або мало, або зовсім мало. Ми маємо надію, що цей посібник допоможе ліквідувати «задачний дефіцит».

Першу частину — «Тренувальні вправи» — поділено на три однотипних варіанти по 229 номерів у кожному. До багатьох (найбільш складних) задач першого і другого варіантів наведено відповіді та вказівки до розв'язування. Відсутність відповідей до вправ третього варіанта, на нашу думку, розширює можливості вчителя при складанні самостійних і перевірочних робіт. На стор. 6-7 наведено таблицю тематичного розподілу тренувальних вправ.

Друга частина посібника містить 7 контрольних робіт (два варіанти). Зміст завдань для контрольних робіт поділимо умовно на дві частини. Перша відповідає початковому і середньому рівням навчальних досягнень учнів. Завдання цієї частини позначено символом n° (n — номер завдання). Друга частина відповідає достатньому і високому рівням. Завдання кожного з цих рівнів позначено символами n^* і n^{**} відповідно. Виконання першої частини максимально оцінюється у 6 балів. Правильно розв'язані задачі рівня n^* додають ще 4 бали, тобто учень має можливість отримати відмінну оцінку 10 балів. Якщо учневі вдалося ще розв'язати задачу n^{**} , то він отримує оцінку 12 балів.

У третій частині посібника наведено дві підсумкові контрольні роботи (чотири варіанти) за навчальним матеріалом першого і другого семестрів. Ці контрольні роботи не є обов'язковими. Вони можуть бути проведені і як залікові, і як тренувальні. Тривалість їх проведення залежно від особливостей класу може бути від 45 хв до 60 хв.

Кожен варіант контрольної роботи складається з трьох частин, які відрізняються за складністю та формою тестових завдань.

У *першій частині* контрольної роботи запропоновано 16 завдань з вибором однієї правильної відповіді. Для кожного тестового завдання з вибором відповіді подано чотири варіанти відповідей, з яких тільки одна правильна. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо в бланку відповідей указана тільки одна літера, якою позначена правильна відповідь (зразок бланка і правила його заповнення наведено в кінці посібника). При цьому учень не повинен наводити будь-які міркування, що пояснюють його вибір.

Правильне розв'язання кожного завдання цього блоку №№ 1–16 оцінюється **одним балом**.

Друга частина контрольної роботи складається із 4 завдань відкритої форми з короткою відповіддю. Таке завдання вважається виконаним правильно, якщо в бланку відповідей записана правильна відповідь (наприклад, число, вираз, корені рівняння тощо). Усі необхідні обчислення, перетворення тощо учні виконують у чернетках.

Правильне розв'язання кожного із завдань №№ 17–20 цього блоку оцінюється **двома балами**.

Третя частина контрольної роботи складається із 2 завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Завдання третьої частини вважаються виконаними правильно, якщо учень навів розгорнутий запис розв'язування завдання з обґрунтуванням кожного етапу та дав правильну відповідь. Правильне розв'язання кожного із завдань №№ 21; 22 цього блоку оцінюється **чотирма балами**.

Сума балів, нарахованих за правильно виконані учнем завдання, переводиться у шкільну оцінку за спеціальною шкалою.

Систему нарахування балів за правильно виконане завдання для оцінювання робіт учнів наведено у таблиці 1.

Таблиця 1.

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1 – 16	по 1 балу	16 балів
17 – 20	по 2 бали	8 балів
21; 22	по 4 бали	8 балів
Усього балів		32 бали

Відповідність кількості набраних учнем балів оцінці за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів наведено у таблиці 2.

Таблиця 2.

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів
1 – 2	1
3 – 4	2
5 – 7	3
8 – 10	4
11 – 13	5
14 – 16	6
17 – 19	7
20 – 22	8
23 – 26	9
27 – 28	10
29 – 30	11
31 – 32	12

Бажаємо Вам творчої наснаги й терпіння...

Тематичний розподіл тренувальних вправ

Тема	Номери вправ
Множини. Операції над множинами	1 – 10
Функція та її основні властивості	11 – 21
Парні і непарні функції	22 – 25
Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень	26 – 29
Побудова графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(x) $	30 – 33
Обернена функція	34 – 37
Метод інтервалів	38 – 45
Степенева функція з натуральним показником	46 – 54
Степенева функція з цілим показником	55 – 61
Означення кореня n -го степеня	62 – 69
Властивості кореня n -го степеня	70 – 76
Тотожні перетворення виразів, які містять корені n -го степеня	77 – 87
Функція $y = \sqrt[n]{x}$	88 – 94
Означення та властивості степеня з раціональним показником	95 – 100
Перетворення виразів, які містять степені з дробовим показником	101 – 103
Ірраціональні рівняння	104 – 108
Системи ірраціональних рівнянь	109
Ірраціональні нерівності	110 – 113

Тема	Номери вправ
Радіанне вимірювання кутів	114 – 117
Тригонометричні функції числового аргументу	118 – 123
Знаки значень тригонометричних функцій	124 – 127
Парність і непарність тригонометричних функцій	128; 129
Періодичні функції	130 – 133
Побудова графіків тригонометричних функцій	134 – 138
Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу	139 – 148
Формули додавання	149 – 157
Формули зведення	158 – 165
Формули подвійного аргументу	166 – 177
Формули суми і різниці тригонометричних функцій	178 – 184
Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму	185; 186
Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь	187 – 196
Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arccotg} x$	197 – 208
Розв'язування тригонометричних рівнянь	209 – 223
Розв'язування тригонометричних нерівностей	224 – 227
Системи тригонометричних рівнянь	228; 229

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

Варіант 1

Множини. Операції над множинами

- Поставте замість зірочки знак \in або \notin так, щоб отримати правильне твердження:
 - $6 \in N$; 3) $-4 \in Q$; 5) $\sqrt{3} \in Q$; 7) $\sqrt{3} \in R$;
 - $1 \in Z$; 4) $-1 \in Z$; 6) $2 \in R$; 8) $-0,14 \in Q$.
- Запишіть множину коренів рівняння:
 - $(x-1)(x^2-1)=0$; 2) $3x-7=0$; 3) $x^2+x+1=0$.
- Задайте переліком елементів множину:
 - правильних дробів зі знаменником 5;
 - букв у слові «алгебра»;
 - цифр числа 1 230 321.
- Чи рівні множини A і B , якщо:
 - $A = \{2, 4\}$, $B = \{4, 2\}$;
 - $A = \{(2; 4)\}$, $B = \{(4; 2)\}$;
 - A — множина коренів рівняння $x^2 + 5 = 0$, $B = \emptyset$;
 - A — множина прямокутних рівнобедрених трикутників, B — множина прямокутних трикутників з кутом 45° ?
- Нехай A — множина цифр числа 2342. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A , якщо:
 - $x = 43$; 2) $x = 444\ 444$; 3) $x = 321$; 4) $x = 323\ 245$?
- Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2, 3\}$.
- Знайдіть перетин множин A і B , якщо:
 - A — множина цифр числа 66 790, B — множина цифр числа 40 075;
 - A — множина дільників числа 24, B — множина чисел, кратних числу 6;
 - A — множина одноцифрових чисел, B — множина складених чисел;
 - A — множина двоцифрових чисел, B — множина чисел, кратних числу 75;
 - A — множина паралелограмів, B — множина прямокутників.
- Знайдіть:
 - $[-5; 9] \cap (3; 12)$; 4) $(-4; 3] \cap N$; 7) $(-1; 0) \cap [0; +\infty)$;
 - $(1; 6) \cap (3; +\infty)$; 5) $(0; 2) \cap Z$; 8) $(-3; 1) \cap R$;
 - $(-\infty; 4) \cap (6; 10]$; 6) $(-6; -2] \cap [-2; 1]$; 9) $[7; 16] \cap \emptyset$.

- Знайдіть об'єднання множин A і B , якщо:
 - A — множина цифр числа 7786, B — множина цифр числа 5078;
 - A — множина дільників числа 12, B — множина дільників числа 16;
 - A — множина паралелограмів, B — множина прямокутників.
- Знайдіть:
 - $(-3; 6] \cup (2; 8]$; 4) $(-\infty; 6] \cup [6; +\infty)$; 7) $(3; 5) \cup R$;
 - $(-\infty; 4) \cup (-4; 4]$; 5) $(9; 12) \cup [9; +\infty)$; 8) $[14; +\infty) \cup \emptyset$.
 - $(-\infty; 7) \cup [-1; +\infty)$; 6) $(-1; 8) \cup [8; 10]$;

Функція та її основні властивості

- Функцію задано формулою $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$. Знайдіть:
 - $f(1)$; 2) $f(0)$; 3) $f(-3)$; 4) $f(t)$.
- Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x^2-x+1, & \text{якщо } -2 < x < 3, \\ 3, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$
 Знайдіть: 1) $f(-4)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(1)$; 4) $f(3)$; 5) $f(4,9)$.
- Знайдіть область визначення функції:
 - $f(x) = 3x - 17$; 11) $f(x) = \frac{x^2+4}{|x|+7}$;
 - $f(x) = \frac{5}{x+9}$; 12) $f(x) = \frac{13}{|x|-x}$;
 - $f(x) = \frac{x-6}{8}$; 13) $f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{15-x}$;
 - $f(x) = \frac{x+8}{x-7}$; 14) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$;
 - $f(x) = \sqrt{x-3}$; 15) $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x-2}{x-5}$;
 - $f(x) = \frac{4}{\sqrt{5-x}}$; 16) $f(x) = \sqrt{x-8} + \frac{9}{\sqrt{10-x}}$;
 - $f(x) = \frac{6}{x^2-2}$; 17) $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{x+2}{x^2-6x}$;
 - $f(x) = \frac{x+3}{x^2+5x-6}$; 18) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+4}} - \frac{5x-3}{x^2-8x+7}$;
 - $f(x) = \frac{x-4}{x^2+3x+3}$; 19) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$;
 - $f(x) = \frac{x}{|x|-5}$; 20) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$;

21) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{|x|-5}}$;

22) $f(x) = \frac{x+2}{|x|-8} + \frac{4}{x}$.

14. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$;

6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - 3$;

2) $g(x) = x^2 + 4$;

7) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;

3) $\varphi(x) = 5 - x^2$;

8) $\varphi(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$;

4) $h(x) = x^2 + 4x - 7$;

9) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$;

5) $g(x) = 5 + |x|$;

10) $h(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$.

15. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = 0,5x^2 - 3x - 2$;

4) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$;

2) $f(x) = \sqrt{x+2}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$;

6) $f(x) = x\sqrt{x-2}$.

16. На рисунку 1 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3, 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-2,5)$; $f(-2)$; $f(-0,5)$; $f(0)$; $f(0,5)$; $f(3)$;

2) значення x , при яких $f(x) = -2$; $f(x) = 3$; $f(x) = 1,5$;

3) нулі функції;

4) найбільше і найменше значення функції;

5) область значень функції;

6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;

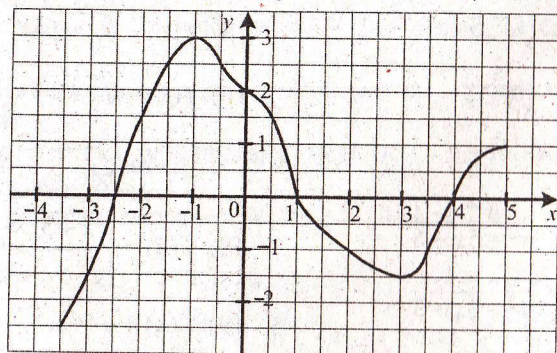
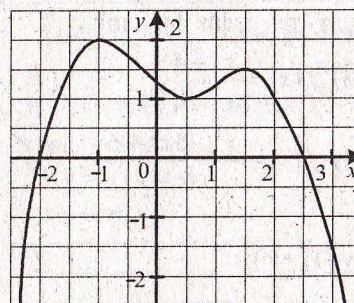
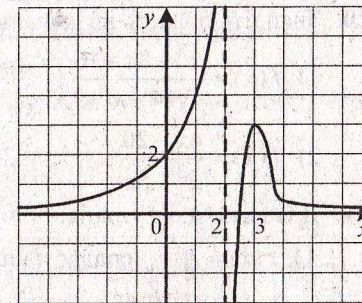
7) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення a .

Рис. 1



а)



б)

Рис. 2

17. На рисунку 2 зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;

2) множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$;

3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

18. Побудуйте графік функції, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції:

1) $f(x) = 2x - 3$;

4) $f(x) = 4$;

7) $f(x) = x^2 - 2x$;

2) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$;

5) $f(x) = \frac{10}{x}$;

8) $f(x) = 4 - x^2$;

3) $f(x) = -3x$;

6) $f(x) = -\frac{8}{x}$;

9) $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

19. Побудуйте графік функції, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{якщо } x \leq -3, \\ \frac{2}{3}x, & \text{якщо } -3 < x < 3, \\ \frac{6}{x}, & \text{якщо } x \geq 3; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} -2x - 3, & \text{якщо } x \leq -4, \\ x^2 + 2x - 3, & \text{якщо } -4 < x < 2, \\ 5, & \text{якщо } x \geq 2; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x + 1, & \text{якщо } -2 < x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$

20. Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{4 - x};$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4};$$

$$2) f(x) = \frac{4x - 20}{x^2 - 5x};$$

$$4) f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 3}.$$

21. Доведіть, що функція:

$$1) f(x) = \frac{5}{x-1} \text{ спадає на проміжку } (1; +\infty);$$

$$2) f(x) = 6x - x^2 \text{ зростає на проміжку } (-\infty; 3].$$

Парні і непарні функції

22. Відомо, що $f(-4) = -20$. Знайдіть $f(4)$, якщо функція f є:
1) парною; 2) непарною.

23. Чи є функція $f(x) = x^2$ парною, якщо її областю визначення є множина:

$$1) [-4; 4]; \quad 2) (-\infty; -5) \cup (5; +\infty); \quad 3) [-3; 3]; \quad 4) (-\infty; 7]?$$

24. Чи є парною або непарною функція:

$$1) f(x) = 9x^4;$$

$$7) f(x) = (x+4)(x-1) - 3x;$$

$$2) f(x) = 7x^3 - 5x^5;$$

$$8) f(x) = (x-5)^2 - (x+5)^2;$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 1};$$

$$9) f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x - 8};$$

$$4) f(x) = \sqrt{6 - x^2};$$

$$10) f(x) = x|x|;$$

$$5) f(x) = x^2 + x - 3;$$

$$11) f(x) = \frac{11x^2}{(x-11)^2};$$

$$6) f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x};$$

$$12) f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^3 - x}?$$

25. На рисунку 3 зображено частину графіка функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-7; 7]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

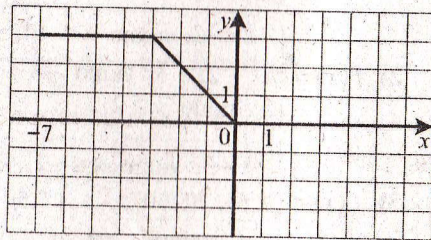


Рис. 3

Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

26. На рисунку 4 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

$$1) y = f(x) + 2;$$

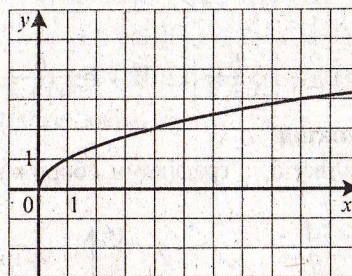
$$3) y = f(x+2);$$

$$5) y = -f(x);$$

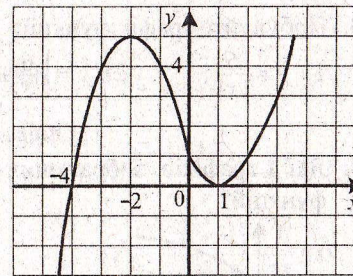
$$2) y = f(x) - 3;$$

$$4) y = f(x-3);$$

$$6) y = 4 - f(x).$$



а)



б)

Рис. 4

27. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{4}{x};$$

$$3) y = \frac{4}{x} + 1;$$

$$5) y = \frac{4}{x+1};$$

$$7) y = \frac{2x+4}{x};$$

$$2) y = \frac{4}{x} - 5;$$

$$4) y = \frac{4}{x-2};$$

$$6) y = \frac{4}{x-1} + 2;$$

$$8) y = \frac{2x-4}{x-3}.$$

28. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{x};$$

$$4) y = \sqrt{x-4} + 2;$$

$$7) y = 3 - \sqrt{x+1};$$

$$2) y = \sqrt{x} - 4;$$

$$5) y = -\sqrt{x};$$

$$8) y = -1 - \sqrt{x-1}.$$

$$3) y = \sqrt{x-4};$$

$$6) y = 2 - \sqrt{x};$$

29. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{2x};$$

$$4) y = \frac{1}{3}\sqrt{x};$$

$$7) y = 2\sqrt{x-2} + 1;$$

$$2) y = \sqrt{\frac{x}{3}};$$

$$5) y = \sqrt{2x-2};$$

$$8) y = 0,5\sqrt{2x+6} - 2.$$

$$3) y = 2\sqrt{x};$$

$$6) y = \sqrt{2x+4} - 3;$$

Побудова графіків функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$

30. Побудуйте графік функції:

$$1) y = x^2 - 2x - 3;$$

$$3) y = |x^2 - 2x - 3|;$$

$$2) y = x^2 - 2|x| - 3;$$

$$4) y = |x^2 - 2|x| - 3|.$$

31. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 3$;

3) $y = \sqrt{|x|} - 3$;

2) $y = |\sqrt{x} - 3|$;

4) $y = |\sqrt{|x|} - 3|$.

32. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$;

3) $y = |x+3|$;

5) $y = -3|x|$;

2) $y = |x| - 4$;

4) $y = ||x| - 5|$;

6) $y = |x-3| - 1$.

33. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{6}{|x|}$;

2) $y = \left| \frac{6}{x} + 2 \right|$;

3) $y = \left| \frac{6}{x+2} \right|$;

4) $y = \frac{6}{|x|+2}$.

Обернена функція

34. Які з графіків, зображених на рисунку 5, є графіками оборотних функцій?

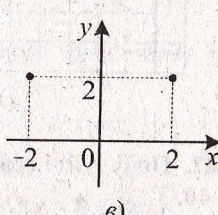
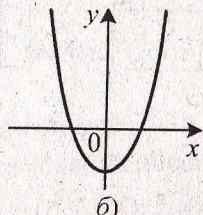
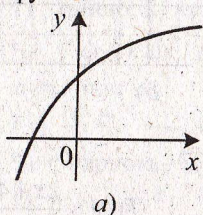


Рис. 5

35. Чи є оборотною функція:

1) $y = \sqrt{x}$;

3) $y = x^2, x \in [-2; 0]$;

2) $y = x^2, x \in [1; +\infty)$;

4) $y = x^2, x \in [-2; +\infty)$?

36. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 2x + 4$;

3) $y = 1 + \sqrt{x+3}$;

2) $y = \frac{3}{x-2}$;

4) $y = x^2, x \in [2; +\infty)$.

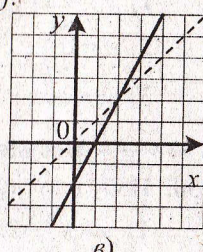
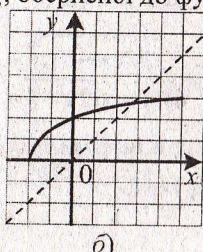
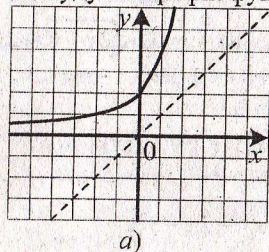
37. За допомогою графіка функції f , зображеного на рисунку 6, побудуйте графік функції g , оберненої до функції f .

Рис. 6

Метод інтервалів

38. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+3,2)(x-4) \geq 0$;

2) $(x+7)(x-6)(x-14) < 0$;

3) $(2x+3)(4x-3)(x-10) \geq 0$;

4) $(5+x)(x+1)(3-x) < 0$;

5) $(x+6,8)(1-x)(2-x) \geq 0$;

6) $(5x+20)(2-6x)(6x-12)(9-2x) \leq 0$.

39. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x+8}{x-7} < 0$;

4) $\frac{x+6,2}{x-1,6} \leq 0$;

7) $\frac{(x+13)(x+2)}{x-13} \geq 0$;

2) $\frac{x-9}{x+11} > 0$;

5) $\frac{6-x}{x-5} \geq 0$;

8) $\frac{x-3,5}{(x+6)(x-12)} \leq 0$;

3) $\frac{x-3,2}{x-4,8} \geq 0$;

6) $\frac{3x+1,8}{1,5-5x} \leq 0$;

9) $\frac{x+7,2}{(10-x)(x-3)} \geq 0$.

40. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(x^2 + 7x)(x^2 - 25) \leq 0$;

3) $\frac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 4x + 3} < 0$;

2) $(x^2 + 6x + 5)(x^2 - 3x) > 0$;

4) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 64} \geq 0$.

41. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2 + 4)(x^2 - 4x + 3) \geq 0$;

6) $(x-5)^2(x^2 - 2x - 3) > 0$;

2) $(x+4)^2(x^2 + 8x + 12) < 0$;

7) $(x-5)^2(x^2 - 2x - 3) \geq 0$;

3) $(x+4)^2(x^2 + 8x + 12) \leq 0$;

8) $(x-5)^2(x^2 - 2x - 3) < 0$;

4) $(x+4)^2(x^2 + 8x + 12) > 0$;

9) $(x-5)^2(x^2 - 2x - 3) \leq 0$;

5) $(x+4)^2(x^2 + 8x + 12) \geq 0$;

10) $(x-1)^2(x-2)^4(x-3)^3 > 0$;

11) $(x-1)^2(x-2)^4(x-3)^3 \geq 0$;

12) $(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5 \leq 0$;

13) $(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 4x + 5) \geq 0$;

14) $(x^2 - 2x - 7)(3x - x^2 - 6) \leq 0$.

42. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} > 0;$

2) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} \geq 0;$

3) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} < 0;$

4) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} \leq 0;$

5) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x - 10} > 0;$

6) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x - 10} \geq 0;$

7) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x - 10} < 0;$

8) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x - 10} \leq 0;$

9) $\frac{x^2 + x - 6}{|x - 4|} \geq 0;$

10) $\frac{|x + 2|}{x^2 - 2x - 63} \geq 0.$

43. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 36} \geq 0;$

2) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4} \leq 0.$

44. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x + 2}{x - 2} \geq \frac{4x - 10}{x - 2};$

3) $\frac{x^2 + 5x}{x - 1} \geq \frac{14}{x - 1};$

2) $\frac{3x}{2x - 7} \leq 1;$

4) $\frac{x^2 - 4x}{x - 2} \leq 3.$

45. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $(x - 4)(x - a) < 0;$

5) $(x - a)(x + 2)^2 \leq 0;$

2) $(x - 4)(x - a)^2 > 0;$

6) $\frac{x - 7}{x - a} \leq 0;$

3) $(x - 4)(x - a)^2 \geq 0;$

7) $\frac{(x - 5)(x - a)}{x - 5} \geq 0;$

4) $(x - a)(x + 2)^2 < 0;$

8) $\frac{(x - 5)(x - a)}{x - a} \leq 0.$

Степеневая функция с натуральным показателем

46. Укажіть, через які з даних точок проходить графік функції $y = x^5$:

$A(-2; -32); B(-1; 1); C\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{243}\right); D(0,1; -0,00001).$

47. Функцію задано формулою $f(x) = x^8$. Порівняйте:

1) $f(2,4)$ і $f(3,8);$

3) $f(-9,6)$ і $f(9,6);$

2) $f(-8,7)$ і $f(-9,6);$

4) $f(-0,8)$ і $f(0,4).$

48. Функцію задано формулою $f(x) = x^{15}$. Порівняйте:

1) $f(3,4)$ і $f(5,2);$

3) $f(4,1)$ і $f(-4,1);$

2) $f(-0,35)$ і $f(-0,24);$

4) $f(0,6)$ і $f(-5).$

49. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^7 = 128;$

2) $x^9 = -1;$

3) $x^4 = 625;$

4) $x^4 = -16.$

50. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння:

1) $x^{10} = a - 3;$

2) $x^8 = a^2 - 6a + 5?$

51. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 + 2;$

2) $y = (x + 2)^3;$

3) $y = x^4 - 2;$

4) $y = -\frac{1}{2}x^4.$

52. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^6$ на проміжку:

1) $[0; 3];$

2) $[-3; -2];$

3) $[-3; 3];$

4) $(-\infty; -3].$

53. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^9$ на проміжку: 1) $[-2; 2];$ 2) $[2; +\infty).$ 54. Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $y = x^n$, якщо:

1) $f(-5) > f(-3);$

3) $f(-5) < f(-3);$

5) $f(-5) > f(3);$

2) $f(-5) < f(3);$

4) $f(5) > f(3);$

6) $f(5) > f(-3)?$

Степеневая функция с целым показателем

55. Чи проходить графік функції $y = x^{-7}$ через точку:

1) $A(-2; -128);$

2) $B\left(\frac{1}{2}; 128\right);$

3) $C(-1; -7);$

4) $D(1; 1)?$

56. При якому значенні a графік функції $y = ax^{-4}$ проходить через точку: 1) $A\left(5; -\frac{1}{5}\right);$ 2) $B(-3; 1)?$ 57. Дано функцію $f(x) = x^{-15}$. Порівняйте:

1) $f(20)$ і $f(23);$

2) $f(-1,6)$ і $f(-1,8);$

3) $f(-6,4)$ і $f(6,4).$

58. Дано функцію $f(x) = x^{-20}$. Порівняйте:

1) $f(1,4)$ і $f(2,6);$

3) $f(-2,8)$ і $f(2,8);$

2) $f(-5,4)$ і $f(-6,3);$

4) $f(-25)$ і $f(7).$

59. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-2} - 2;$

2) $y = (x - 2)^{-2};$

3) $y = 2x^{-3}.$

60. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-5}$ на проміжку: 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[2; +\infty)$.

61. Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

- 1) $f(-3) > f(-2)$; 3) $f(-3) < f(-2)$;
2) $f(-3) < f(2)$; 4) $f(3) > f(2)$?

Означення кореня n -го степеня

62. Знайдіть значення кореня:

- 1) $\sqrt[3]{64}$; 2) $\sqrt[4]{0,0001}$; 3) $\sqrt[5]{-32}$; 4) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

63. Обчисліть значення виразу:

- 1) $0,2\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\sqrt[4]{625}$;
2) $\sqrt[7]{-128} + 3(\sqrt[5]{9})^5 - 4\sqrt[8]{256}$;
3) $4(-\sqrt[8]{6})^8 - 0,8\sqrt[4]{10000} + \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{270}\right)^3$;
4) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{8}{125}} + (-2\sqrt{7})^2 - (-\sqrt[3]{11})^9$;
5) $\sqrt[6]{0,000064} + \frac{2}{9}(-3\sqrt[4]{0,4})^4 + 6\sqrt[12]{0,3^{12}}$;
6) $(-\sqrt[5]{30})^5 + \sqrt[6]{4^3} - \sqrt[3]{343} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[8]{13^8} - 100\sqrt[4]{0,0081}$.

64. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt[4]{x-8}$; 2) $y = \sqrt[8]{-x}$; 3) $y = \sqrt[5]{x+2}$; 4) $y = \sqrt[6]{x^2-4x}$.

65. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^5 = 32$; 5) $x^8 = 1$; 9) $(x+3)^3 = 27$;
2) $x^7 = 8$; 6) $x^6 = 729$; 10) $(x-2)^6 = 64$;
3) $x^9 = -16$; 7) $x^{10} = 5$; 11) $5x^4 + 475 = 0$;
4) $x^4 = \frac{1}{16}$; 8) $x^4 = -81$; 12) $8x^4 - 64 = 0$.

66. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = 4$; 4) $\sqrt[4]{x} + 2 = 0$; 7) $\sqrt[5]{4x} + 2 = 0$;
2) $\sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}$; 5) $\sqrt[3]{x} + 6 = 0$; 8) $\sqrt[4]{4x+2} = 0$;
3) $\sqrt[4]{x} - 5 = 0$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{x} - 2 = 0$; 9) $\sqrt[5]{4x+2} = 3$.

67. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$; 3) $x^{12} + x^6 - 6 = 0$.
2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$;

68. Оцініть значення x , якщо:

- 1) $-1 \leq \sqrt[5]{x} \leq 2$; 2) $3 < \sqrt[4]{x} < 5$.

69. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

- 1) $a\sqrt[6]{x} = 0$; 3) $a\sqrt[3]{x} = a$; 5) $x^4 = a+3$; 7) $x^3 = a-4$;
2) $\sqrt[4]{ax} = 0$; 4) $\sqrt[8]{x} = a$; 6) $ax^6 = 3$; 8) $x^6 = a^2 - 25$.

Властивості кореня n -го степеня

70. Знайдіть значення кореня:

- 1) $\sqrt[3]{27 \cdot 64}$; 3) $\sqrt[5]{243 \cdot 0,00032}$; 5) $\sqrt[7]{0,3^7 \cdot 5^{14}}$;
2) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 625}$; 4) $\sqrt[3]{4^6 \cdot 3^9}$; 6) $\sqrt[4]{\frac{3^8 \cdot 7^4}{5^4 \cdot 2^{12}}}$.

71. Обчисліть значення виразу:

- 1) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[3]{2}$; 6) $\frac{\sqrt[3]{5^8 \cdot 7^{10}}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 7^{16}}}$;
2) $\sqrt[6]{10\,000} \cdot \sqrt[6]{100}$;
3) $\sqrt[3]{0,108} \cdot \sqrt[3]{2}$; 7) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$;
4) $\sqrt[8]{3^5 \cdot 5^2} \cdot \sqrt[8]{3^3 \cdot 5^6}$; 8) $\sqrt[4]{26+\sqrt{51}} \cdot \sqrt[4]{26-\sqrt{51}}$;
5) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{729}}$; 9) $\sqrt[5]{3\sqrt{2}-5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[5]{3\sqrt{2}+5\sqrt{2}}$.

72. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[4]{a^4}$, якщо $a \geq 0$; 5) $\sqrt[4]{16x^8y^4z^{12}}$, якщо $y \geq 0, z \leq 0$;
2) $\sqrt[6]{b^6}$, якщо $b \leq 0$; 6) $3,5x\sqrt[8]{256x^{24}}$, якщо $x \leq 0$;
3) $\sqrt[5]{x^5}$; 7) $\frac{\sqrt[10]{a^{10}b^{20}c^{30}}}{a^2b^3c^4}$, якщо $a < 0, c < 0$;
4) $\sqrt[3]{343m^6n^9}$; 8) $-0,2a^3 \cdot \sqrt[4]{625a^{16}b^{36}}$, якщо $b \leq 0$.

73. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[4]{(x-3)^4}$; 3) $\sqrt[8]{(y+3)^8}$, якщо $y \leq -3$;
2) $\sqrt[6]{(a-23)^6}$, якщо $a \geq 23$; 4) $(32-a)\sqrt[4]{\frac{81}{(a-32)^4}}$, якщо $a > 32$.

74. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[3]{\sqrt{a}}; \quad 2) \sqrt[5]{\sqrt{x}}; \quad 3) \sqrt[5]{\sqrt[4]{m}}; \quad 4) \sqrt[24]{a^{32}}; \quad 5) \sqrt[10]{m^5 n^{15}}.$$

75. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[4]{(4 - \sqrt{3})^4}; \quad 3) \sqrt[6]{(\sqrt{6} - \sqrt{8})^6};$$

$$2) \sqrt[3]{(2 - \sqrt{7})^3}; \quad 4) \sqrt[5]{(8 - \sqrt{11})^5} + \sqrt[8]{(3 - \sqrt{11})^8}.$$

76. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt[4]{x^4} - x, \text{ якщо } x \leq 0; \quad 4) y = x + \sqrt[4]{x^4};$$

$$2) y = (\sqrt[6]{x-3})^6; \quad 5) y = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3};$$

$$3) y = \sqrt[6]{(x-6)^6}; \quad 6) y = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x^6}} + 3.$$

Тотожні перетворення виразів, які містять корені n -го степеня

77. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[3]{54}; \quad 2) \sqrt[5]{96}; \quad 3) \sqrt[4]{1250}; \quad 4) \sqrt[6]{320}.$$

78. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[4]{8a^4}; \quad 5) \sqrt[4]{32x^{10}y^{13}}; \quad 9) \sqrt[4]{a^5b^5}, \text{ якщо } a \leq 0, b \leq 0;$$

$$2) \sqrt[4]{x^9}; \quad 6) \sqrt[3]{250m^7n^{20}}; \quad 10) \sqrt[4]{a^6b^5}, \text{ якщо } a \leq 0;$$

$$3) \sqrt[3]{-a^{10}}; \quad 7) \sqrt[4]{-16x^7}; \quad 11) \sqrt[6]{a^7b^{14}c^{18}}, \text{ якщо } c < 0;$$

$$4) \sqrt[4]{x^6y^5}; \quad 8) \sqrt[6]{a^{26}b^{13}}; \quad 12) \sqrt[8]{-a^{17}b^{26}}, \text{ якщо } b \leq 0.$$

79. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 4\sqrt{3}; \quad 2) 2\sqrt[3]{5}; \quad 3) 10\sqrt[4]{0,312}; \quad 4) \frac{2}{3}\sqrt[3]{135}.$$

80. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) a\sqrt{7}; \quad 4) 2x\sqrt[3]{3x^2}; \quad 7) m\sqrt[6]{m^4}, \text{ якщо } m \leq 0;$$

$$2) a\sqrt{-a}; \quad 5) b\sqrt[4]{4b}; \quad 8) ab\sqrt[4]{a^2b}, \text{ якщо } a > 0;$$

$$3) a\sqrt[4]{a^3}; \quad 6) 3x^2\sqrt[3]{\frac{x}{9}}; \quad 9) a^5b^3\sqrt[8]{a^6b^{10}}, \text{ якщо } a < 0, b > 0.$$

81. Спростіть вираз (змінні набувають невід'ємних значень):

$$1) \sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}; \quad 2) \sqrt[6]{p\sqrt[5]{p}}; \quad 3) \sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^7}}.$$

82. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{12}{\sqrt{6}}; \quad 2) \frac{6}{\sqrt[3]{3}}; \quad 3) \frac{14}{\sqrt[4]{8}}; \quad 4) \frac{15}{\sqrt[3]{25}}; \quad 5) \frac{24}{\sqrt[3]{8}}; \quad 6) \frac{m^3}{\sqrt[7]{m^4}}.$$

83. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{33}{\sqrt{17} - \sqrt{6}}; \quad 2) \frac{18}{3 + \sqrt{3}}; \quad 3) \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}; \quad 4) \frac{10}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}.$$

84. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}; \quad 3) \frac{\sqrt[3]{a} - 1}{\sqrt[6]{a} + 1}; \quad 5) \frac{\sqrt[6]{9a} - \sqrt[6]{3a^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{3}};$$

$$2) \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}; \quad 4) \frac{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}}{a - \sqrt[4]{a^3}}; \quad 6) \frac{x + 8}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4}.$$

85. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}}; \quad 2) \sqrt{\sqrt{5} + 1} \cdot \sqrt[4]{6 - 2\sqrt{5}}.$$

86. Спростіть вираз:

$$1) (\sqrt[3]{a} + 2)(\sqrt[3]{a} - 2) - (\sqrt[3]{a} + 3)^2;$$

$$2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a} + 1};$$

$$3) \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{ab} - \sqrt[3]{b}} - \frac{2\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}};$$

$$4) \left(\frac{\sqrt[4]{a} - 2}{\sqrt[4]{a} + 2} - \frac{\sqrt[4]{a} + 2}{\sqrt[4]{a} - 2} \right) : \frac{12\sqrt{a}}{4 - \sqrt{a}};$$

$$5) \frac{3\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a} - 4} - \frac{\sqrt[8]{a} + 2}{2\sqrt[8]{a} - 8} \cdot \frac{96}{\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[8]{a}};$$

$$6) \left(\frac{2\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} - \frac{4\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[6]{xy} + \sqrt[3]{y}} \right) : \left(\frac{4\sqrt[6]{x}}{4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} + \frac{1}{\sqrt[6]{y} - 2\sqrt[6]{x}} \right).$$

87. Доведіть, що значення виразу $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ є числом раціональним.**Функція $y = \sqrt[n]{x}$**

88. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt[3]{x-8}; \quad 2) y = \sqrt[4]{x+16}; \quad 3) y = \sqrt[7]{\frac{x-2}{x+3}}; \quad 4) y = \sqrt[8]{8-7x-x^2}.$$

89. Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \sqrt[8]{x} + 4; \quad 2) y = -\sqrt[4]{x} - 3; \quad 3) y = \sqrt[7]{x} + 5.$$

90. Оцініть значення виразу $\sqrt[3]{x}$, якщо:

- 1) $8 \leq x \leq 343$; 2) $-27 < x < 64$.

91. Порівняйте:

- 1) $\sqrt[3]{2,8}$ і $\sqrt[3]{2,4}$; 4) $\sqrt[3]{6}$ і $\sqrt[3]{34}$; 7) $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[3]{2}$;
 2) $\sqrt[3]{-12}$ і $\sqrt[3]{-16}$; 5) $2\sqrt[3]{5}$ і $3\sqrt[3]{2}$; 8) $\sqrt[4]{10}$ і $\sqrt[4]{15\sqrt{6}}$.
 3) 3 і $\sqrt[4]{82}$; 6) $\sqrt[3]{7}$ і $\sqrt{2}$;

92. Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число: 1) $\sqrt[3]{12}$; 2) $\sqrt[4]{50}$; 3) $-\sqrt[5]{30}$?

93. Укажіть усі цілі числа, які розміщені на координатній прямій між числами: 1) 2 і $\sqrt[3]{130}$; 2) $\sqrt[5]{-40}$ і $\sqrt[4]{650}$.

94. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt[3]{x} - 1$; 2) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 3) $y = \sqrt[3]{1-x}$; 4) $y = \sqrt[3]{|x|} + 1$.

Означення та властивості степеня з раціональним показником

95. Подайте степінь з дробовим показником у вигляді кореня:

- 1) $3^{\frac{1}{2}}$; 3) $6^{-\frac{1}{4}}$; 5) $(mn)^{\frac{2}{3}}$; 7) $(a+b)^{1,5}$;
 2) $10^{\frac{4}{5}}$; 4) $12^{-\frac{2}{3}}$; 6) $mn^{\frac{2}{3}}$; 8) $a^{-\frac{4}{5}} + b^{2,6}$.

96. Замініть арифметичний корінь степенем з дробовим показником:

- 1) \sqrt{a} ; 3) $\sqrt[8]{y^5}$; 5) $\sqrt[4]{5^{-3}}$; 7) $\sqrt[9]{(x+y)^2}$;
 2) $\sqrt[3]{m^2}$; 4) $\sqrt[6]{2x}$; 6) $\sqrt[3]{36}$; 8) $\sqrt[9]{x^2 + y^2}$.

97. Обчисліть значення виразу:

- 1) $16^{\frac{1}{2}}$; 2) $8^{-\frac{2}{3}}$; 3) $0,0016^{-0,5}$; 4) $32^{0,4}$; 5) $\left(11\frac{1}{9}\right)^{2,5}$.

98. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = x^{\frac{3}{4}}$; 2) $y = x^{-0,7}$; 3) $y = (x+4)^{1,2}$; 4) $y = (x^2 + 8x - 9)^{-\frac{1}{5}}$.

99. Подайте у вигляді степеня або добутку степенів вираз:

- 1) $a^{-0,8} \cdot a^{1,3}$; 4) $(a^{-0,4})^8$; 7) $\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{9}} \cdot \left(a^{-\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{21}}$;
 2) $a^{-\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$; 5) $a^{\frac{5}{8}} \cdot a^{\frac{7}{12}} \cdot a^{-\frac{13}{24}}$; 8) $(a^3)^{-0,7} \cdot (a^{-0,4})^{-5} \cdot (a^{-0,5})^8$;
 3) $a^{\frac{7}{9}} : a^{\frac{5}{6}}$; 6) $\left(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{15}}\right)^{\frac{6}{11}}$; 9) $\left(a^{\frac{7}{30}} b^{-\frac{28}{45}}\right)^{\frac{15}{49}} \cdot \left(a^{-\frac{9}{35}} b^{\frac{36}{35}}\right)^{\frac{5}{18}}$.

100. Знайдіть значення виразу:

- 1) $2^{2,4} \cdot 2^{-0,3} \cdot 2^{3,9}$; 5) $\left(\frac{3^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{5}{6}}}{5^{-\frac{1}{6}} \cdot 6}\right)^{-12}$;
 2) $(3^{-0,6})^4 \cdot 3^{0,4}$; 6) $\left(\frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{4}{3}}}{27^{-\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{27^{\frac{5}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{5}}}{2^{-\frac{6}{5}} \cdot 81^{\frac{7}{16}}}\right)^{\frac{1}{2}}$;
 3) $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{16}} \cdot 25^{\frac{11}{16}}$;
 4) $16^{-0,75} \cdot 8^{-\frac{5}{12}} \cdot 4^{\frac{5}{8}}$;

Перетворення виразів, які містять степені з дробовим показником

101. Спростіть вираз:

- 1) $x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right) - \left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right)^2$;
 2) $\left(m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}\right) \left(m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}\right) + \left(2m^{\frac{1}{4}} - 3n^{\frac{1}{4}}\right) \left(5m^{\frac{1}{4}} + 2n^{\frac{1}{4}}\right)$;
 3) $\left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}}\right) \left(a^{\frac{1}{12}} - b^{\frac{1}{12}}\right) \left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$;
 4) $\left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}\right) \left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}\right) - a^{\frac{1}{6}} \left(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{6}}\right)$.

102. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{a + 6a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3}} + 6}$; 4) $\frac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a + a^{0,5} b^{0,5} + b}$; 7) $\frac{a + 27}{a^{\frac{2}{3}} - 9}$;
 2) $\frac{2m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{2}} - 4m^{\frac{1}{3}}}$; 5) $\frac{m^2 n^{1,5} - m^{1,5} n^2}{m - 2m^{0,5} n^{0,5} + n}$; 8) $\frac{x - 16x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{2}}}$;
 3) $\frac{a - b}{a^{0,5} + b^{0,5}}$; 6) $\frac{x - 5x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{6}{5}} - 5x^{\frac{2}{5}}}$; 9) $\frac{12^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$.

103. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{a^{\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}}{a - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{a^{\frac{5}{6}} b + ab^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}}$;
 2) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}$;

$$3) \frac{x^{\frac{1}{8}} + 8}{x^{\frac{1}{4}} + 4x^{\frac{1}{8}}} - \frac{x^{\frac{1}{8}} + 1}{3x^{\frac{1}{8}} + 12} - \frac{6 - x^{\frac{1}{8}}}{3x^{\frac{1}{8}}};$$

$$4) \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} + \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}} \right) \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{xy^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y};$$

$$5) \left(\frac{3m^{\frac{1}{10}}}{m^{\frac{1}{10}} + 5} - \frac{8m^{\frac{1}{10}}}{m^{\frac{1}{5}} + 10m^{\frac{1}{10}} + 25} \right) \cdot \frac{3m^{\frac{1}{10}} + 7}{m^{\frac{1}{5}} - 25} + \frac{5m^{\frac{1}{10}} - 25}{m^{\frac{1}{10}} + 5}.$$

Ірраціональні рівняння

104. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{2x-3} = -3;$

6) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2};$

2) $\sqrt{2x-3} = -3;$

7) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x^2 + x - 23};$

3) $\sqrt{2x-3} = 3;$

8) $\sqrt{2x-3} = 3 - 2x;$

4) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{5-x};$

9) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{1-x};$

5) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{3-2x};$

10) $(x+1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x + 2.$

105. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{2-x} = 2;$

5) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2;$

2) $\sqrt{7-x} = x-1;$

6) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-9} = 6;$

3) $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - 2 = x;$

7) $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4;$

4) $\sqrt{3x-5} = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}};$

8) $2\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 4;$

9) $\sqrt{7-x} = \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2};$

10) $\sqrt{9-2x} + \sqrt{1-x} = 2\sqrt{4-x};$

11) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+5} + \sqrt{3x}.$

106. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 3 = 0;$

5) $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + 3\sqrt[3]{x-1} - 4 = 0;$

2) $\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[6]{x} - 5 = 0;$

6) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31;$

3) $x - 8\sqrt[4]{x} = 0;$

7) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0;$

4) $\sqrt{x+3} - 3\sqrt[4]{x+3} + 2 = 0;$

8) $\sqrt{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+4}{2-x}} = 2;$

9) $x^5\sqrt{x} - \sqrt[5]{x^3} = 2;$

10) $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}.$

107. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0;$

3) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-1} = 5;$

2) $\sqrt[3]{45+x} - \sqrt[3]{x-16} = 1;$

4) $\sqrt[4]{18+5x} + \sqrt[4]{64-5x} = 4.$

108. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{(6-x)^2} - \sqrt[3]{(x+3)(6-x)} = 3;$

2) $\sqrt{x+6} + 2\sqrt{x+5} + \sqrt{x+6} - 2\sqrt{x+5} = 6.$

Системи ірраціональних рівнянь

109. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{y} - \sqrt{x} = 7, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 18; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{4-y+x} + \sqrt{9-2y+x} = 7, \\ 2x - 3y = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{3x-y+3} = 2, \\ \sqrt{x+2y+4} = 4-x; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{41}{20}, \\ x + y = 41; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 9x^2 + \sqrt{9x^2 + 2y + 1} = 1 - 2y, \\ 6x + y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ x - y = 56; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + y - \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2\sqrt{xy} = 42, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3. \end{cases}$

Ірраціональні нерівності

110. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+2} > 5;$ 2) $\sqrt{x+2} < 5;$ 3) $\sqrt{x+2} > -3;$ 4) $\sqrt{x+2} < -3.$

111. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x};$

4) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} \leq x - 1;$

2) $\sqrt{2x^2 + 6x + 3} \geq \sqrt{-x^2 - 4x};$

5) $\sqrt{x+33} > x+3;$

3) $\sqrt{5-2x} < 6x-1;$

6) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} > x - 3.$

112. Розв'яжіть нерівність:

1) $(5-2x)\sqrt{x} \leq 0;$

3) $\sqrt{x+1} > 8 - \sqrt{3x+1};$

2) $\sqrt{x} - 6\sqrt[4]{x} + 5 \geq 0;$

4) $\sqrt{x-5} - \sqrt{10-x} \geq 1.$

$$3) \frac{x^{\frac{1}{8}} + 8}{x^{\frac{1}{4}} + 4x^{\frac{1}{8}}} - \frac{x^{\frac{1}{8}} + 1}{3x^{\frac{1}{8}} + 12} - \frac{6 - x^{\frac{1}{8}}}{3x^{\frac{1}{8}}};$$

$$4) \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} + \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}} \right) \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{xy^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y};$$

$$5) \left(\frac{3m^{\frac{1}{10}}}{m^{\frac{1}{10}} + 5} - \frac{8m^{\frac{1}{10}}}{m^{\frac{1}{5}} + 10m^{\frac{1}{10}} + 25} \right) \cdot \frac{3m^{\frac{1}{10}} + 7}{m^{\frac{1}{5}} - 25} + \frac{5m^{\frac{1}{10}} - 25}{m^{\frac{1}{10}} + 5}.$$

Ірраціональні рівняння

104. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{2x-3} = -3;$

6) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2};$

2) $\sqrt{2x-3} = -3;$

7) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x^2 + x - 23};$

3) $\sqrt{2x-3} = 3;$

8) $\sqrt{2x-3} = 3 - 2x;$

4) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{5-x};$

9) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{1-x};$

5) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{3-2x};$

10) $(x+1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x + 2.$

105. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{2-x} = 2;$

5) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2;$

2) $\sqrt{7-x} = x-1;$

6) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-9} = 6;$

3) $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - 2 = x;$

7) $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4;$

4) $\sqrt{3x-5} = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}};$

8) $2\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 4;$

9) $\sqrt{7-x} = \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2};$

10) $\sqrt{9-2x} + \sqrt{1-x} = 2\sqrt{4-x};$

11) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+5} + \sqrt{3x}.$

106. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 3 = 0;$

5) $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + 3\sqrt[3]{x-1} - 4 = 0;$

2) $\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[6]{x} - 5 = 0;$

6) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31;$

3) $x - 8\sqrt[4]{x} = 0;$

7) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0;$

4) $\sqrt{x+3} - 3\sqrt[4]{x+3} + 2 = 0;$

8) $\sqrt{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+4}{2-x}} = 2;$

9) $x\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x^3} = 2;$

10) $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}.$

107. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0;$

3) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-1} = 5;$

2) $\sqrt[3]{45+x} - \sqrt[3]{x-16} = 1;$

4) $\sqrt[4]{18+5x} + \sqrt[4]{64-5x} = 4.$

108. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{(6-x)^2} - \sqrt[3]{(x+3)(6-x)} = 3;$

2) $\sqrt{x+6} + 2\sqrt{x+5} + \sqrt{x+6} - 2\sqrt{x+5} = 6.$

Системи ірраціональних рівнянь

109. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{y} - \sqrt{x} = 7, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 18; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{4-y+x} + \sqrt{9-2y+x} = 7, \\ 2x-3y = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{3x-y+3} = 2, \\ \sqrt{x+2y+4} = 4-x; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{41}{20}, \\ x+y = 41; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 9x^2 + \sqrt{9x^2 + 2y + 1} = 1 - 2y, \\ 6x + y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ x - y = 56; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + y - \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2\sqrt{xy} = 42, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3. \end{cases}$

Ірраціональні нерівності

110. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+2} > 5;$ 2) $\sqrt{x+2} < 5;$ 3) $\sqrt{x+2} > -3;$ 4) $\sqrt{x+2} < -3.$

111. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x};$

4) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} \leq x-1;$

2) $\sqrt{2x^2 + 6x + 3} \geq \sqrt{-x^2 - 4x};$

5) $\sqrt{x+33} > x+3;$

3) $\sqrt{5-2x} < 6x-1;$

6) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} > x-3.$

112. Розв'яжіть нерівність:

1) $(5-2x)\sqrt{x} \leq 0;$

3) $\sqrt{x+1} > 8 - \sqrt{3x+1};$

2) $\sqrt{x} - 6\sqrt[4]{x} + 5 \geq 0;$

4) $\sqrt{x-5} - \sqrt{10-x} \geq 1.$

113. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність $a\sqrt{x+1} < 1$.

Радіанне вимірювання кутів

114. Знайдіть радіанну міру кутів: 15° ; 30° ; 48° ; 75° ; 120° ; 240° .

115. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

$$\frac{\pi}{20}; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{22}; \frac{4\pi}{5}; 1\frac{2}{3}\pi; 3\pi.$$

116. Радіус кола дорівнює 1 см. Знайдіть довжину дуги кола, яка відповідає куту в 3 радіани.

117. У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- | | | | |
|-------------------|----------------------|-------------------------|----------------|
| 1) 138° ; | 4) 500° ; | 7) $\frac{5\pi}{3}$; | 10) $2,7\pi$; |
| 2) 285° ; | 5) -48° ; | 8) $-\frac{11\pi}{6}$; | 11) 2 ; |
| 3) -140° ; | 6) $\frac{\pi}{7}$; | 9) $-1,7\pi$; | 12) -3 ? |

Тригонометричні функції числового аргументу

118. Знайдіть значення виразу:

1) $2\cos 0^\circ + 5\sin 90^\circ - 4\operatorname{tg} 180^\circ$;

2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + 3\cos \frac{\pi}{2} - 4\sin \frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 45^\circ \cos 30^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$;

4) $\frac{\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 2\pi}$;

5) $\sqrt{(2\sin 45^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\cos 45^\circ)^2}$.

119. Знайдіть значення виразу $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$ при:

1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$;

2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

120. Чи можлива рівність:

1) $\cos \alpha = \frac{5}{7}$;

3) $\sin \alpha = \frac{\pi}{5}$;

2) $\sin \alpha = -\sqrt[3]{1,1}$;

4) $\cos \alpha = \sqrt{2} - 2$?

121. При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\cos x = a + 2$;

2) $\sin x = 4a - a^2 - 5$?

122. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $1 - 5\cos \alpha$;

2) $4 + \sin^2 \alpha$;

3) $\frac{\sin \alpha (3 - \cos \alpha)}{\sin \alpha}$.

123. Знайдіть область значень виразу:

1) $\frac{1}{2 - \sin 3x}$;

2) $\frac{1}{3\cos x - 2}$;

3) $\operatorname{tg}^2 x + 2$.

Знаки значень тригонометричних функцій

124. Який знак має:

1) $\sin 140^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 200^\circ$;

5) $\sin 2$;

2) $\cos 320^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}(-84^\circ)$;

6) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$?

125. Визначте знак виразу:

1) $\sin 148^\circ \cos 16^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 216^\circ \cos(-232^\circ)$;

3) $\sin 4 \operatorname{tg} 5$.

126. Кутом якої чверті є кут α , якщо відомо, що:

1) $\sin \alpha > 0$ і $\cos \alpha < 0$;

2) $|\sin \alpha| = \sin \alpha$?

127. Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} 100^\circ$ і $\operatorname{tg}(-100^\circ)$;

3) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$ і $\cos \frac{5\pi}{6}$;

2) $\cos 70^\circ$ і $\sin 340^\circ$;

4) $\cos 6$ і $\sin 4$.

Парність і непарність тригонометричних функцій

128. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin(-30^\circ) - 2\operatorname{tg}(-45^\circ) - \cos(-60^\circ)$;

2) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin(-\pi) + 5\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

129. Чи є парною або непарною функція, задана формулою:

1) $f(x) = \sin^2 x$;

3) $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{ctg} x}{1 + \cos x}$;

5) $f(x) = \operatorname{tg} x + 2$;

2) $f(x) = x - \sin x$;

4) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 1}$;

6) $f(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x-1}$?

Періодичні функції

130. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 750^\circ$;

3) $\cos 1260^\circ$;

5) $\sin \frac{11\pi}{6}$;

2) $\operatorname{tg} 840^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}(-405^\circ)$;

6) $\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

131. Покажіть, що число T є періодом функції f :

1) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

3) $f(x) = \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right|$, $T = \pi$;

2) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$, $T = 2$;

4) $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $T = 2\pi$.

132. Покажіть, що число $T = -\pi$ не є періодом функції $f(x) = \sin x$.

133. Знайдіть найменший додатний період функції:

1) $f(x) = \cos(2x + 3)$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{7}$.

Побудова графіків тригонометричних функцій

134. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin x - 1$; 3) $y = \sin 2x$; 5) $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 1$;
2) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$; 4) $y = 2 \sin x$; 6) $y = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - 1$.

135. Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos x + 1,5$; 4) $y = -\frac{1}{2} \cos x$;
2) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$; 5) $y = -\frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1,5$;
3) $y = \cos \frac{x}{3}$; 6) $y = -\frac{1}{2} \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{12} \right) + 1,5$.

136. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$; 2) $y = 3 \operatorname{tg} x - 2$; 3) $y = \operatorname{ctg} \frac{2x}{3}$.

137. Побудуйте графік функції:

1) $y = |\sin x|$; 2) $y = \operatorname{tg} |x|$; 3) $y = \cos \left| x - \frac{\pi}{4} \right|$.

138. Побудуйте графік функції:

1) $y = (\sqrt{\sin x})^2$; 5) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;
2) $y = \sin x + \sin |x|$; 6) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$;
3) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$; 7) $y = \frac{\cos x - |\cos x|}{\sin x + |\sin x|}$;
4) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$;

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

139. Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = 5$ і $\operatorname{ctg} \alpha = 0,2$;
3) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ і $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$;
4) $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ і $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$?

140. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута α , якщо:

1) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = 4$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\sin \alpha = -\frac{2}{7}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{2}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

141. Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \beta - 1$; 7) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$;
2) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 5\alpha$; 8) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;
3) $2 \sin \frac{\alpha}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{3} - \cos \frac{\alpha}{3}$; 9) $\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} - \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}$;
4) $\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1} + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$; 10) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;
5) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$; 11) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$;
6) $\left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right)$; 12) $\frac{\cos^3(-\alpha) + \sin^3(-\alpha)}{\cos \alpha + \sin(-\alpha)}$.

142. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;
2) $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = 1$;
3) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$;
4) $\frac{\sin \alpha - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha} = \frac{\sin \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \beta}$;
5) $1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

143. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha$; 2) $2 \sin^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

144. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \operatorname{tg} x \cos x$.

145. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi < \alpha < 4\pi$;
2) $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, якщо $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

3) $\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)}$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

146. Дано: $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Знайдіть:

1) $\sin \alpha \cos \alpha$; 3) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$; 5) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$;

2) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$; 4) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$; 6) $\sin \alpha - \cos \alpha$.

147. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5\cos \alpha + 6\sin \alpha}{3\sin \alpha - 8\cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 4$;

2) $\frac{3\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -3$.

148. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3\cos^2 \alpha - 4\sin \alpha$.

Формули додавання

149. Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$; 3) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos \alpha - \sin \alpha$;

2) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $\frac{\sin(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)}$.

150. Спростіть вираз:

1) $\sin \varphi \cos 3\varphi + \cos \varphi \sin 3\varphi$;

2) $\cos 64^\circ \cos 34^\circ + \sin 64^\circ \sin 34^\circ$;

3) $\sin(84^\circ - \alpha) \cos(\alpha + 24^\circ) - \cos(84^\circ - \alpha) \sin(\alpha + 24^\circ)$;

151. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$;

2) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + 2\sin \alpha \sin \beta}{2\sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha + \beta)} = \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$;

3) $\sin 6\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha - \cos 6\alpha = 1$;

4) $\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(30^\circ + \alpha) - \sin^2 \alpha = 0,5$.

152. Спростіть вираз:

1) $\frac{\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{tg} 46^\circ}{1 - \operatorname{tg} 14^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \operatorname{tg} \alpha}$.

153. Доведіть тотожність:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 1.$$

154. Користуючись формулами додавання, знайдіть:

1) $\sin 15^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 15^\circ$.

155. Дано: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\sin(30^\circ + \alpha)$.

156. Дано: $\sin \alpha = 0,6$, $\sin \beta = -0,8$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$.
Знайдіть $\cos(\alpha - \beta)$.

157. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha$;

2) $3\sin \alpha + 4\cos \alpha$.

Формули зведення

158. Зведіть до тригонометричної функції кута α :

1) $\sin(\pi - \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 5) $\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$; 6) $\cos^2(360^\circ - \alpha)$.

159. Зведіть до значення тригонометричної функції додатного аргументу, меншого від 45° (або $\frac{\pi}{4}$):

1) $\cos 127^\circ$;

5) $\cos 400^\circ$;

9) $\sin 1916^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 172^\circ$;

6) $\operatorname{tg}(-298^\circ)$;

10) $\cos 3000^\circ$;

3) $\sin 219^\circ$;

7) $\cos 1,2\pi$;

11) $\operatorname{tg} 4,3\pi$;

4) $\operatorname{ctg} 194^\circ$;

8) $\sin \frac{5\pi}{9}$;

12) $\operatorname{ctg} \frac{21\pi}{8}$.

160. Обчисліть:

1) $\sin 120^\circ$;

4) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$;

7) $\sin 1110^\circ$;

2) $\cos 225^\circ$;

5) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$;

8) $\cos \frac{74\pi}{3}$;

3) $\operatorname{tg}(-240^\circ)$;

6) $\cos 10\pi$;

9) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$.

161. Знайдіть значення виразу:

1) $3\operatorname{ctg} 135^\circ + 2\cos 120^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ + 2\sin 300^\circ$;

2) $\sin \frac{7\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{6} \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}$;

3) $\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \dots \operatorname{tg} 49^\circ$;

4) $\sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ$.

162. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

$$2) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos(3\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) \sin(3\pi + \alpha);$$

$$3) \frac{\sin(\pi - \beta) \cos(\pi + \beta) \operatorname{tg}(\pi - \beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)};$$

$$4) \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \cos(2\pi - \alpha) + \cos(\pi - \alpha) \right)^2 + \frac{2\sin^2(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha - \pi)}.$$

163. Відомо, що α , β , γ — кути трикутника. Доведіть, що $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2}$.

164. Знайдіть значення виразів $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$, якщо $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

165. Доведіть тотожність:

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\alpha - \pi) = \cos^2 \alpha.$$

Формули подвійного аргументу

166. Виразіть дані тригонометричні функції через функції аргументу, що вдвічі менший від даного:

$$\begin{array}{llll} 1) \cos \alpha; & 3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}; & 5) \cos 1; & 7) \sin\left(\frac{2x}{3} - 20^\circ\right); \\ 2) \sin 5\alpha; & 4) \sin(\alpha + \beta); & 6) \sin 8\alpha; & 8) \cos\left(\frac{2\pi}{7} + \gamma\right). \end{array}$$

167. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{\sin \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}; & 5) \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}; \\ 2) \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}}; & 6) \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}; \\ 3) 1 - 2 \sin^2(45^\circ + 1,5\alpha); & 7) \frac{\sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}; \\ 4) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha; & 8) \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}. \end{array}$$

168. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sin 15^\circ \cos 15^\circ; \quad 2) \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}; \quad 3) \frac{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22^\circ 30'}.$$

169. Дано: $\sin \alpha = 0,8$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть:

$$1) \sin 2\alpha; \quad 2) \cos 2\alpha; \quad 3) \operatorname{tg} 2\alpha.$$

170. Дано: $\operatorname{tg} \frac{x}{6} = 0,5$. Знайдіть $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{x}{3}\right)$.

171. Подайте у вигляді добутку вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) 1 + \cos \frac{\alpha}{2}; & 3) 1 - \cos 70^\circ; & 5) 1 + \sin \alpha; \\ 2) 1 - \cos 10\alpha; & 4) 1 - \cos \frac{3\alpha}{2}; & 6) 1 - \sin 40^\circ. \end{array}$$

172. Понизьте степінь виразу:

$$1) \cos^2 4x; \quad 2) \sin^2 3x; \quad 3) \sin^2\left(\frac{x}{2} - 10^\circ\right); \quad 4) \cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{8}\right).$$

173. Доведіть тотожність:

$$\begin{array}{ll} 1) 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha = 1; & 3) \frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}; \\ 2) \operatorname{ctg} 2\alpha (1 - \cos 4\alpha) = \sin 4\alpha; & 4) \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \end{array}$$

174. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}; & 4) \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha}; \\ 2) \frac{1 - \sin(30^\circ + 2\alpha)}{\cos(30^\circ + 2\alpha)}; & \quad \cos\left(4\alpha - \frac{9\pi}{2}\right); \\ 3) \frac{\cos 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ}; & 5) \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) \left(1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)}. \end{array}$$

175. Спростіть вираз $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

176. Спростіть вираз $\sqrt{2 + 2 \cos 2\alpha}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

177. Доведіть, що $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8}$.

Формули суми і різниці тригонометричних функцій

178. Перетворіть у добуток:

$$1) \cos 40^\circ + \cos 10^\circ; \quad 2) \sin 4\alpha + \sin 10\alpha;$$

- 3) $\sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$; 6) $\cos \left(2\alpha - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha \right)$;
 4) $\cos 3\alpha - \cos 7\alpha$; 7) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$;
 5) $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$; 8) $\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)$.

179. Перетворіть у добуток:

- 1) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ$; 2) $\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{10}$; 3) $\sin \alpha - \cos \beta$.

180. Перетворіть у добуток:

- 1) $\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{tg} 16^\circ$; 3) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$.

2) $\operatorname{tg} 7\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha$;

181. Перетворіть у добуток:

- 1) $1 + 2\cos \alpha$; 2) $\sqrt{3} - 2\sin \alpha$; 3) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha$.

182. Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4\cos \alpha \cos 2\alpha \sin 4\alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

3) $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha + \cos 2\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

4) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha)$.

183. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos 4\alpha} \right) \cdot \frac{\cos 10\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 3\alpha}$;

2) $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$;

3) $\frac{1 + \cos(2\alpha - 2\pi) + \cos(4\alpha + 2\pi) - \cos(\pi - 6\alpha)}{\cos(\pi - 2\alpha) + 1 - 2\cos^2(\pi + 2\alpha)}$;

4) $\cos^2 \left(\frac{5\pi}{8} + \alpha \right) - \sin^2 \left(\frac{15\pi}{8} + \alpha \right)$.

184. Доведіть тотожність:

1) $1 + \sin \alpha - \cos \alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$;

2) $\cos \alpha + \sin 2\alpha + \cos 3\alpha + \sin 4\alpha = 4\cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{2} \right)$.

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

185. Перетворіть у суму добуток:

- 1) $\sin 4\alpha \cos 7\alpha$; 2) $\cos 25^\circ \cos 50^\circ$;

- 3) $\sin 2\alpha \sin \alpha$; 4) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.

186. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha + 2\sin \left(\frac{5\pi}{12} - \alpha \right) \cos \left(\frac{5\pi}{12} + \alpha \right) = 0,5$;

2) $\sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 7\alpha \cos \alpha = \cos 6\alpha \cos 2\alpha$;

3) $\sin^2 2\alpha - \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha \right) = \frac{1}{4}$;

4) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 1$.

Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

187. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 5) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x = -1$.

188. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\sin(4x + 3) = \frac{3}{5}$;

2) $\cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$; 8) $\cos \frac{x}{\pi} = 1$;

3) $\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$; 9) $\cos(2x - 1) = \frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 10) $\sin \left(\frac{\pi}{14} - \frac{2x}{3} \right) = \frac{1}{2}$;

5) $\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$; 11) $\cos \left(4 - \frac{3x}{2} \right) = 0$;

6) $\cos(5x - 8) = -1$; 12) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$.

189. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin \left(\frac{x}{7} - \frac{\pi}{28} \right) - 2 = 0$; 3) $3 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{10} \right) = 0$;

2) $\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} \right) + 1 = 0$; 4) $3\operatorname{ctg}(2x + 6) - 9 = 0$.

190. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \pi x^2 = 0$;

2) $\cos \pi \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin(\pi \sin x) = -1$.

191. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

192. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 3x = 1$ належить проміжку $[0; \pi]$?
193. Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(7x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, які задовольняють нерівність $\frac{2\pi}{5} < x < \pi$.
194. При яких значеннях a має розв'язки рівняння:
 1) $\sin x = a + 2$; 3) $(a + 1)\cos x = a - 1$;
 2) $\cos \frac{x}{10} = a^2 + 6a + 9$; 4) $(a^2 - 4)\sin x = a - 2$?
195. При яких значеннях a дане рівняння має єдиний корінь на вказаному проміжку:
 1) $(x - a)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$;
 2) $(x + a)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$?
196. Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[0; \frac{11\pi}{6}\right]$ залежно від значення a .

Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

197. Знайдіть:
 1) $\arcsin \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 7) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;
 2) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{arccotg} \sqrt{3}$; 6) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 8) $\operatorname{arccotg}(-1)$.
198. Знайдіть значення виразу:
 1) $\arcsin(-1) + \arccos 1 + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$;
 2) $3\arccos 0 + 4\arcsin 1 - 2\arccos(-1) + 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
199. Обчисліть:
 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; 3) $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\operatorname{arctg} 1\right)$;
 2) $\cos\left(2\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
200. Знайдіть область визначення функції:
 1) $y = \arcsin(x - 1)$; 3) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{2 - x}$.
 2) $y = \arccos(x^2 - 8)$;

201. Знайдіть область значень функції:

1) $y = 3\arcsin x + \frac{\pi}{4}$; 2) $y = 4 - 2\operatorname{arctg} 2x$.

202. Обчисліть:

1) $\cos\left(\arccos \frac{4}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{12}\right)$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1)$.

203. Обчисліть:

1) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{9}\right)$; 2) $\arccos\left(\cos \frac{8\pi}{7}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$.

204. Обчисліть:

1) $\cos\left(\arcsin \frac{2}{9}\right)$; 3) $\sin(\operatorname{arctg} 3)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{5}\right)$;
 2) $\sin\left(\arccos \frac{3}{4}\right)$; 4) $\cos(\operatorname{arccotg}(-2))$; 6) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 6)$.

205. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arctg}(2x - 1) = \frac{\pi}{3}$.
 2) $\arccos(x + 3) = \frac{2\pi}{3}$;

206. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin x > \frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arctg}(5x + 2) > -\frac{\pi}{3}$.
 2) $\arccos 3x \leq \frac{2\pi}{3}$;

207. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\arccos x$; 4) $y = \cos(\arccos x)$;
 2) $y = \arcsin x - 2$; 5) $y = \sin(\arccos x)$;
 3) $y = \frac{\arcsin |x|}{\arcsin x}$; 6) $y = \cos(2\arcsin x)$.

208. При яких значеннях a має розв'язок рівняння:

1) $\arcsin x = (a - 1)\pi$; 5) $\frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{\operatorname{arccotg} x - a} = 0$;
 2) $\arccos x = \cos a$;
 3) $\operatorname{arctg} x = \cos a$;
 4) $\frac{\arccos x - a}{\arccos x + \frac{\pi}{6}} = 0$; 6) $\frac{\arcsin x + a}{\sqrt{\arcsin x}} = 0$?

Розв'язування тригонометричних рівнянь

209. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin^2 3x - 3 \sin 3x + 2 = 0; & 3) \cos 2x + 3 \sin x = 2; \\ 2) 6 \sin^2 x + 5 \cos x - 7 = 0; & 4) 2 \operatorname{tg} \frac{x}{4} - 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{4} = 3. \end{array}$$

210. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0; & 3) 4 \sin^2 x + \sin 2x = 3; \\ 2) 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0; & 4) 2 \sin x - 3 \cos x = 2. \end{array}$$

211. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \cos 3x + \cos 5x = 0; & 3) \sin 3x + \cos 7x = 0; \\ 2) \sin 9x = 2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 3x \right); & 4) \sin 3x + \sin x = \sin 2x; \\ & 5) \cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x. \end{array}$$

212. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin^2 \frac{x}{4} = \frac{3}{4}; & 3) \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0,5; \\ 2) \cos^2 x + \cos^2 5x = 1; & 4) \sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}. \end{array}$$

213. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1; \quad 2) \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin 3x.$$

214. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin(45^\circ + x) \sin(x - 15^\circ) = \frac{1}{2}; & 3) \sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x; \\ 2) \cos 7x \cos 3x = \cos 4x; & 4) 2 \sin^2 x = 1,5 - \sin x \sin 3x. \end{array}$$

215. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0; & 3) \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2 \cos x; \\ 2) \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 0; & 4) \frac{1 - \cos x - \sin x}{\cos x} = 0. \end{array}$$

216. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{5 - 4 \operatorname{tg} x} = 2 - \operatorname{tg} x; & 3) \sqrt{-\cos 2x - 4 \sin x} + \sqrt{2} \cos x = 0. \\ 2) \sqrt{\cos 2x} = -\cos x; \end{array}$$

217. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння:

$$\sin^2 x + 0,5 \sin 2x = 1.$$

218. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння:

$$\sin^3 x \cos x = 0,25 + \cos^3 x \sin x.$$

219. Знайдіть усі корені рівняння $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{3} + 2 \sin x \cos x$, які задовольняють нерівність $0 < x < 2$.220. Скільки коренів рівняння $\sin x + \cos x + \sin 3x = 0$ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right]$?221. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{9 - x^2} (2 \sin 2\pi x + 5 \cos \pi x) = 0$.222. При яких значеннях a має розв'язки рівняння:

$$\begin{array}{l} 1) \sin^2 x - (3a + 1) \sin x + a(2a + 1) = 0; \\ 2) \cos x + \cos 5x = a^2 - 2a + 3; \\ 3) \sin^2 x - \sin x + a^2 - a + \frac{1}{2} = 0; \\ 4) 4 \cos 2x - 3 \sin 2x = 2a + 2; \\ 5) \sin^4 x - 2(a - 1) \sin^2 x - 2a + 1 = 0? \end{array}$$

223. При яких значеннях a рівняння

$$\sin^2 x - \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin x + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$$

на проміжку $\left[0; \frac{4\pi}{3} \right]$ має: 1) два корені; 2) три корені?

Розв'язування тригонометричних нерівностей

224. Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{lll} 1) \sin x \leq \frac{1}{2}; & 4) \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}; & 7) \operatorname{ctg} x \geq -\sqrt{3}; \\ 2) \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}; & 5) \operatorname{tg} x > -1; & 8) \operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}. \\ 3) \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}; & 6) \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}; \end{array}$$

225. Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}; & 4) \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq -\frac{1}{2}; \\ 2) \cos \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}; & 5) \operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 3) \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}; & 6) \operatorname{ctg} \left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{5} \right) \leq -1. \end{array}$$

226. Розв'яжіть нерівність:

1) $1 \leq \operatorname{tg} x \leq 2$;

3) $|\sin x| > \frac{1}{2}$;

2) $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{4}$;

4) $|\operatorname{tg} x| \geq \sqrt{3}$.

227. Розв'яжіть нерівність:

1) $2\cos^2 2x \geq 1,5$;

3) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 \geq 0$;

2) $\cos x \cos \frac{x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \leq 0$.

Системи тригонометричних рівнянь

228. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x + \cos y = \frac{3}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \sin^2 y + \sin^2 x = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

229. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Варіант 2

Множини. Операції над множинами

- Поставте замість зірочки знак \in або \notin так, щоб отримати правильне твердження:
 - $7 * N$;
 - $17 * N$;
 - $-1,28 * Q$;
 - $-9 * Z$;
 - $-1 * N$;
 - $-6 * Q$;
 - $\sqrt{5} * Q$;
 - $\sqrt{5} * R$.
- Запишіть множину коренів рівняння:
 - $(x+3)(x^2-9)=0$;
 - $4x+11=0$;
 - $x^2-2x+3=0$.
- Задайте переліком елементів множини:
 - неправильних дробів з чисельником 5;
 - букв у слові «геометрія»;
 - цифр числа 4 545 354.
- Чи рівні множини A і B , якщо:
 - $A = \{3, 5\}$, $B = \{5, 3\}$;
 - $A = \{(3; 5)\}$, $B = \{(5; 3)\}$;
 - A — множина коренів рівняння $x^2+4=0$, $B = \{\emptyset\}$;
 - A — множина рівносторонніх трикутників, B — множина трикутників з кутом 60° ?
- Нехай B — множина цифр числа 5658. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини B , якщо:
 - $x = 856$;
 - $x = 656565$;
 - $x = 876$;
 - $x = 5555$?
- Запишіть усі підмножини множини $\{10, 11, 12\}$.
- Знайдіть перетин множин A і B , якщо:
 - A — множина цифр числа 56 953, B — множина цифр числа 31 515;
 - A — множина дільників числа 36, B — множина чисел, кратних числу 12;
 - A — множина парних чисел, B — множина простих чисел;
 - A — множина одноцифрових чисел, B — множина чисел, кратних числу 10;
 - A — множина прямокутників, B — множина квадратів.
- Знайдіть:
 - $[-4; 8] \cap (-2; 14)$;
 - $(-10; 2] \cap N$;
 - $(1; 6) \cap [6; +\infty)$;
 - $(0; 5) \cap (1; +\infty)$;
 - $(-2; 1) \cap Z$;
 - $(-5; 5) \cap R$;
 - $(-\infty; 3) \cap (7; 9]$;
 - $[-12; 4] \cap [4; 8]$;
 - $[6; 14] \cap \emptyset$.

9. Знайдіть об'єднання множин A і B , якщо:

- 1) A – множина цифр числа 6694, B – множина цифр числа 41 686;
- 2) A – множина дільників числа 15, B – множина дільників числа 20;
- 3) A – множина прямокутників, B – множина квадратів.

10. Знайдіть:

- 1) $(-4; 5] \cup (1; 6)$; 4) $(-\infty; 3] \cup [3; +\infty)$; 7) $(11; +\infty) \cup R$;
- 2) $[9; 15] \cup (9; +\infty)$; 5) $(1; 2) \cup [1; +\infty)$; 8) $[2; 8] \cup \emptyset$.
- 3) $(-\infty; 2) \cup [-2; +\infty)$; 6) $(-7; -6] \cup (-6; 20)$;

Функція та її основні властивості

11. Функцію задано формулою $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Знайдіть:

- 1) $f(2)$; 2) $f(0)$; 3) $f(-2)$; 4) $f(b)$.

12. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \leq -3, \\ 3x+10, & \text{якщо } -3 < x < 0, \\ 10-2x^2, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$

Знайдіть: 1) $f(-3,01)$; 2) $f(-3)$; 3) $f(-2,5)$; 4) $f(0)$; 5) $f(2)$.

13. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $f(x) = 5 - 4x$;
- 2) $f(x) = \frac{3}{x+7}$;
- 3) $f(x) = \frac{x-10}{5}$;
- 4) $f(x) = \frac{x-6}{x-2}$;
- 5) $f(x) = \sqrt{5+x}$;
- 6) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4-x}}$;
- 7) $f(x) = \frac{x}{x^2-5}$;
- 8) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-20}$;
- 9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+6}$;
- 10) $f(x) = \frac{x^2}{|x|-8}$;
- 11) $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$;
- 12) $f(x) = \frac{15}{|x|+x}$;
- 13) $f(x) = \sqrt{x+9} - \sqrt{4-x}$;
- 14) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$;
- 15) $f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x-6}{x}$;
- 16) $f(x) = \sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{5-x}}$;
- 17) $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{6x+1}{x^2+7x}$;
- 18) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} - \frac{5x+2}{x^2-7x+12}$;
- 19) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$;
- 20) $f(x) = \sqrt{1-4x-5x^2}$;
- 21) $f(x) = \frac{x-6}{\sqrt{|x|-1}}$;
- 22) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{|x|}$;

14. Знайдіть область значень функції:

- 1) $f(x) = \sqrt{x} + 3$;
- 2) $g(x) = x^2 + 8$;
- 3) $f(x) = 3 - x^2$;
- 4) $\varphi(x) = 9 - 6x - 3x^2$;
- 5) $h(x) = |x| - 4$;
- 6) $f(x) = \sqrt{x^2+9} - 5$;
- 7) $f(x) = \sqrt{-|x|}$;
- 8) $\varphi(x) = \sqrt{x-6} - \sqrt{6-x}$;
- 9) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$;
- 10) $h(x) = \frac{3}{x^2+2}$;

15. Знайдіть нулі функції:

- 1) $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$;
- 2) $f(x) = \sqrt{3-x}$;
- 3) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$;
- 4) $f(x) = \sqrt{|x|-2}$;
- 5) $f(x) = \sqrt{|x|+1}$;
- 6) $f(x) = (x-2)\sqrt{x-3}$.

16. На рисунку 7 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) $f(-3,5)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1,5)$; $f(3)$; $f(4,5)$;
- 2) значення x , при яких $f(x) = -1,5$; $f(x) = 1,5$; $f(x) = 3$;
- 3) нулі функції;
- 4) найбільше і найменше значення функції;
- 5) область значень функції;
- 6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
- 7) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення a .

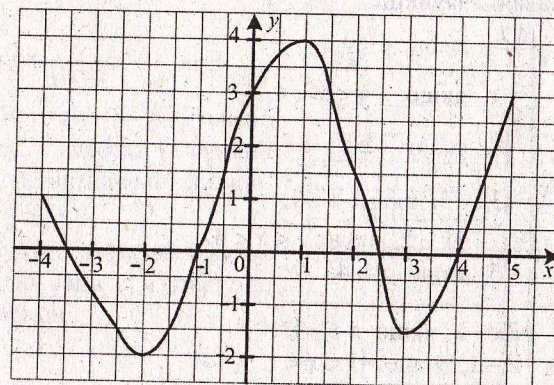
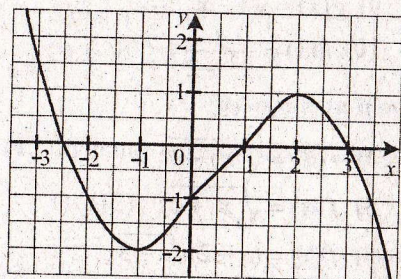


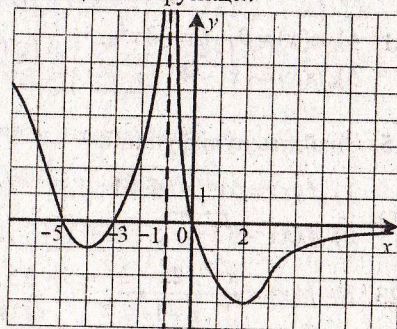
Рис. 7

17. На рисунку 8 зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) множину розв'язків нерівності $f(x) < 0$;
- 3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.



а)



б)

Рис. 8

18. Побудуйте графік функції, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції:

- 1) $f(x) = 3x + 1$;
- 2) $f(x) = 5 + \frac{1}{4}x$;
- 3) $f(x) = -0,5x$;
- 4) $f(x) = -2$;
- 5) $f(x) = \frac{6}{x}$;
- 6) $f(x) = -\frac{4}{x}$;
- 7) $f(x) = 4x - x^2$;
- 8) $f(x) = x^2 - 9$;
- 9) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

19. Побудуйте графік функції, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції:

- 1) $f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x}, & \text{якщо } x \leq -4, \\ \frac{3}{4}x, & \text{якщо } -4 < x < 4, \\ \frac{12}{x}, & \text{якщо } x \geq 4; \end{cases}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} -3x - 5, & \text{якщо } x \leq 1, \\ x^2 - 4x - 5, & \text{якщо } 1 < x < 4, \\ -5, & \text{якщо } x \geq 4; \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{якщо } x \leq -1, \\ 2 - x, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

20. Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2 + x};$$

$$3) f(x) = \frac{|x| - 1}{|x| + 1};$$

$$2) f(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 3x};$$

$$4) f(x) = \frac{8x - 2x^2 - x^3}{x}.$$

21. Доведіть, що функція:

$$1) f(x) = \frac{7}{4 - x} \text{ зростає на проміжку } (-\infty; 4);$$

$$2) f(x) = x^2 + 10x \text{ спадає на проміжку } (-\infty; -5].$$

Парні і непарні функції

22. Відомо, що $f(5) = 17$. Знайдіть $f(-5)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

23. Чи є функція $f(x) = x^3$ непарною, якщо її областю визначення є множина:

- 1) $(-5; 5)$;
- 2) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
- 3) $(-4; 4]$;
- 4) $(-3; +\infty)$?

24. Чи є парною або непарною функція:

$$1) f(x) = 7x^7;$$

$$7) f(x) = (x - 5)(x + 4) + x;$$

$$2) f(x) = 2x^6 - 3x^4;$$

$$8) f(x) = (x + 1)^2 + (x - 1)^2;$$

$$3) f(x) = \frac{3x}{x^2 - 25};$$

$$9) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{4x - 12};$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2 - 16};$$

$$10) f(x) = -x^2 |x|;$$

$$5) f(x) = x^3 + x^2 + 4;$$

$$11) f(x) = \frac{9x^3}{(x + 9)^2};$$

$$6) f(x) = \frac{4}{x + 6};$$

$$12) f(x) = \frac{x + x^2}{x^3 - x}?$$

25. На рисунку 9 зображено частину графіка функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 6]$.

Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

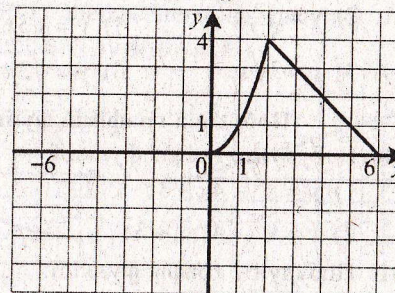
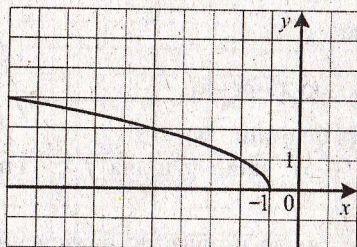


Рис. 9

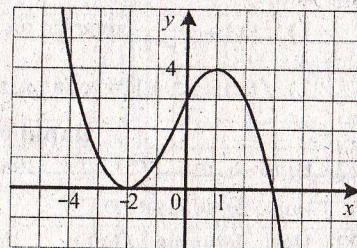
Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

26. На рисунку 10 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = f(x) + 1$; 3) $y = f(x + 3)$; 5) $y = -f(x)$;
2) $y = f(x) - 2$; 4) $y = f(x - 1)$; 6) $y = 2 - f(x)$.



а)



б)

Рис. 10

27. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{6}{x}$; 3) $y = \frac{6}{x} + 2$; 5) $y = \frac{6}{x+2}$; 7) $y = \frac{x+6}{x}$;
2) $y = \frac{6}{x} - 1$; 4) $y = \frac{6}{x-1}$; 6) $y = \frac{6}{x-1} - 1$; 8) $y = \frac{2x+10}{x+2}$.

28. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{x-1} - 1$; 7) $y = 2 + \sqrt{x-1}$;
2) $y = \sqrt{x} + 2$; 5) $y = -\sqrt{x}$; 8) $y = -2 - \sqrt{x+1}$.
3) $y = \sqrt{x+3}$; 6) $y = 1 - \sqrt{x}$;

29. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{3x}$; 4) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; 7) $y = -2\sqrt{x+1} + 3$;
2) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$; 5) $y = \sqrt{3x+3}$; 8) $y = \frac{1}{3}\sqrt{2x+4} - 4$.
3) $y = 3\sqrt{x}$; 6) $y = \sqrt{2x-4} - 2$;

Побудова графіків функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$

30. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 4x + 3$; 3) $y = |x^2 - 4x + 3|$;
2) $y = x^2 - 4|x| + 3$; 4) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

31. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x} - 1$; 2) $y = |\sqrt{x} - 1|$;

- 3) $y = \sqrt{|x|} - 1$; 4) $y = |\sqrt{|x|} - 1|$.

32. Побудуйте графік функції:

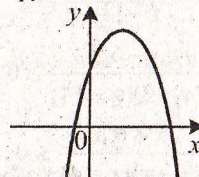
- 1) $y = |x|$; 3) $y = |x + 2|$; 5) $y = \frac{1}{3}|x|$;
2) $y = |x| + 3$; 4) $y = ||x| - 3|$; 6) $y = |x - 1| + 2$.

33. Побудуйте графік функції:

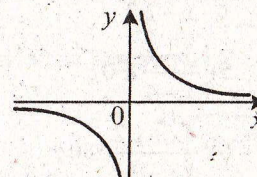
- 1) $y = \frac{8}{|x|}$; 2) $y = \left| \frac{8}{x} - 3 \right|$; 3) $y = \left| \frac{8}{x-3} \right|$; 4) $y = \frac{8}{|x-3|}$.

Обернена функція

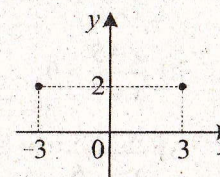
34. Які з графіків, зображених на рисунку 11, є графіками оборотних функцій?



а)



б)



в)

Рис. 11

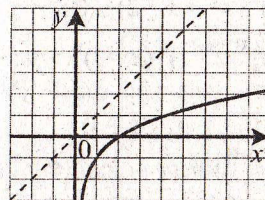
35. Чи є оборотною функція:

- 1) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = x^2, x \in (-\infty; -1]$;
2) $y = x^2, x \in [-3; 3]$; 4) $y = x^2, x \in (-\infty; 1]$?

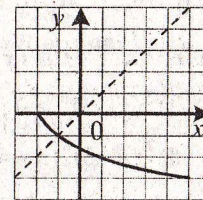
36. Знайдіть функцію, обернену до даної:

- 1) $y = 5 - 4x$; 3) $y = 2 - \sqrt{x-3}$;
2) $y = \frac{6}{1-x}$; 4) $y = x^2, x \in (-\infty; -2]$.

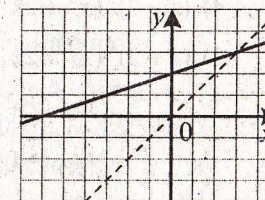
37. За допомогою графіка функції f , зображеного на рисунку 12, побудуйте графік функції g , оберненої до функції f .



а)



б)



в)

Рис. 12

Метод інтервалів

38. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x-1,8)(x+3) \leq 0$;
- 2) $(x+6)(x-1)(x-7) > 0$;
- 3) $(4x+3)(2x-3)(x-5) \geq 0$;
- 4) $(2+x)(x+7)(2-x) > 0$;
- 5) $(x+7,2)(4-x)(5-x) \leq 0$;
- 6) $(3x+20)(3-6x)(2x-3)(7-3x) \geq 0$.

39. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x+3}{x-6} < 0$;
- 2) $\frac{x-5}{x+7} > 0$;
- 3) $\frac{x-1,4}{x-2,6} \leq 0$;
- 4) $\frac{x+5,8}{x-2,3} \geq 0$;
- 5) $\frac{3-x}{x-4} \geq 0$;
- 6) $\frac{4x+1,2}{1,8-3x} \leq 0$;
- 7) $\frac{(x+5)(x+7)}{x-11} \leq 0$;
- 8) $\frac{x-6,5}{(x+3)(x-14)} \geq 0$;
- 9) $\frac{x+6,8}{(7-x)(x-4)} \leq 0$.

40. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $(x^2+5x)(x^2-16) \geq 0$;
- 2) $(x^2-4x+3)(x^2-2x) < 0$;
- 3) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x+2} < 0$;
- 4) $\frac{x^2+6x-7}{x^2-25} \geq 0$.

41. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x^2+9)(x^2+x-12) \leq 0$;
- 2) $(x+2)^2(x^2+2x-3) < 0$;
- 3) $(x+2)^2(x^2+2x-3) \leq 0$;
- 4) $(x+2)^2(x^2+2x-3) > 0$;
- 5) $(x+2)^2(x^2+2x-3) \geq 0$;
- 6) $(x-4)^2(x^2+x-2) > 0$;
- 7) $(x-4)^2(x^2+x-2) \geq 0$;
- 8) $(x-4)^2(x^2+x-2) < 0$;
- 9) $(x-4)^2(x^2+x-2) \leq 0$;
- 10) $(x+1)^3(x-1)^2(x-3)^6 > 0$;
- 11) $(x+1)^3(x-1)^2(x-3)^6 \geq 0$;
- 12) $(x+3)^3(x-1)^2(x-3)^6(x-4)^5 \geq 0$;
- 13) $(x^2+9x+14)(x^2+5x+7) \geq 0$;
- 14) $(x^2-3x+1)(5x-x^2-9) \leq 0$.

42. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9} > 0$;
- 2) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9} \geq 0$;
- 3) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9} < 0$;
- 4) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9} \leq 0$;
- 5) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-12} > 0$;
- 6) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-12} \geq 0$;
- 7) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-12} < 0$;
- 8) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-12} \leq 0$;
- 9) $\frac{x^2+2x-3}{|x+1|} \leq 0$;
- 10) $\frac{|x-3|}{x^2-5x-36} \geq 0$.

43. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $\frac{x^2-5x}{x^2-25} \geq 0$;
- 2) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2} \geq 0$.

44. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{5x-8}{x+1} \leq \frac{x-4}{x+1}$;
- 2) $\frac{2x}{3x+5} \leq 2$;
- 3) $\frac{x^2+7x}{x+3} \leq \frac{8}{x+3}$;
- 4) $\frac{x^2-x}{x+3} \geq 1$.

45. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x-2)(x-a) < 0$;
- 2) $(x-2)(x-a)^2 > 0$;
- 3) $(x-2)(x-a)^2 \geq 0$;
- 4) $(x-a)(x+4)^2 < 0$;
- 5) $(x-a)(x+4)^2 \leq 0$;
- 6) $\frac{x-3}{x-a} \geq 0$;
- 7) $\frac{(x+3)(x-a)}{x+3} \geq 0$;
- 8) $\frac{(x-1)(x-a)}{x-a} \leq 0$.

Степенева функція з натуральним показником

46. Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^4$: $A(-5; 625)$; $B(0,3; 0,0081)$; $C(-10; -10\,000)$; $D(2; -16)$?47. Функцію задано формулою $g(x) = x^{12}$. Порівняйте:

- 1) $g(5,8)$ і $g(4,9)$;
- 2) $g(-12,3)$ і $g(-15,1)$;
- 3) $g(-0,3)$ і $g(0,3)$;
- 4) $g(1,4)$ і $g(-2,1)$.

48. Функцію задано формулою $g(x) = x^{25}$. Порівняйте:
- 1) $g(6,2)$ і $g(7,3)$; 3) $g(-7,5)$ і $g(7,5)$;
 - 2) $g(-0,13)$ і $g(-0,17)$; 4) $g(-3,5)$ і $g(2,4)$.
49. Розв'яжіть рівняння:
- 1) $x^9 = 512$; 2) $x^5 = -243$; 3) $x^6 = 64$; 4) $x^6 = -729$.
50. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння:
- 1) $x^{20} = a + 4$; 2) $x^{16} = a^2 + 7a - 8$?
51. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = x^3 - 1$; 2) $y = (x-1)^3$; 3) $y = x^4 + 1$; 4) $y = -\frac{1}{2}x^3$.
52. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{10}$ на проміжку:
- 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[2; +\infty)$.
53. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^7$ на проміжку:
- 1) $[-1; 2]$; 2) $(-\infty; 0]$.
54. Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $y = x^n$, якщо:
- 1) $f(-3) < f(-1)$; 3) $f(-3) = f(3)$; 5) $f(-3) > f(-1)$;
 - 2) $f(-3) > f(1)$; 4) $f(3) > f(1)$; 6) $f(3) > f(-3)$?

Степенева функція з цілим показником

55. Чи проходить графік функції $y = x^{-6}$ через точку:
- 1) $A\left(3; \frac{1}{729}\right)$; 2) $B\left(-\frac{1}{2}; -64\right)$; 3) $C\left(-2; \frac{1}{64}\right)$; 4) $D\left(\sqrt{3}; \frac{1}{27}\right)$?
56. При якому значенні a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку: 1) $A(6; -6)$; 2) $B\left(-2; -\frac{1}{4}\right)$?
57. Дано функцію $f(x) = x^{-11}$. Порівняйте:
- 1) $f(0,2)$ і $f(-10)$; 2) $f(14)$ і $f(12)$; 3) $f(-23)$ і $f(-34)$.
58. Дано функцію $f(x) = x^{-32}$. Порівняйте:
- 1) $f(7,2)$ і $f(6,5)$; 3) $f(42)$ і $f(-42)$;
 - 2) $f(-1,5)$ і $f(-1,8)$; 4) $f(-10)$ і $f(6)$.
59. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = x^{-3} + 1$; 2) $y = (x+1)^{-3}$; 3) $y = 4x^{-4}$.

60. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-4}$ на проміжку: 1) $\left[\frac{1}{5}; 2\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $(-\infty; -2]$.
61. Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:
- 1) $f(-10) < f(-9)$; 3) $f(10) > f(9)$;
 - 2) $f(-10) > f(-9)$; 4) $f(-10) < f(9)$?

Означення кореня n -го степеня

62. Знайдіть значення кореня:
- 1) $\sqrt[3]{125}$; 2) $\sqrt[6]{0,000064}$; 3) $\sqrt[3]{-128}$; 4) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$.
63. Обчисліть значення виразу:
- 1) $0,7\sqrt[4]{10\,000} - \frac{4}{3}\sqrt[3]{243}$;
 - 2) $\sqrt[8]{512} + 2(\sqrt[2]{7})^7 - 6\sqrt[4]{81}$;
 - 3) $3(-\sqrt[10]{18})^{10} - 1,4\sqrt[3]{1\,000\,000} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{80}\right)^4$;
 - 4) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} \cdot \sqrt[3]{4\frac{17}{27}} + (-3\sqrt{2})^2 - (-\sqrt[5]{13})^5$;
 - 5) $\sqrt[5]{0,00032} + \frac{1}{8}(-2\sqrt[6]{0,5})^6 + 5\sqrt[13]{0,4^{13}}$;
 - 6) $(-\sqrt[3]{17})^3 + \sqrt[15]{32^3} - \sqrt[6]{729} + 2\sqrt[3]{-216} + \sqrt[6]{14^6} - 10\sqrt[3]{0,008}$.
64. Знайдіть область визначення функції:
- 1) $y = \sqrt[4]{x+7}$; 2) $y = \sqrt[6]{-x}$; 3) $y = \sqrt[7]{x-6}$; 4) $y = \sqrt[8]{x^2+3x}$.
65. Розв'яжіть рівняння:
- 1) $x^7 = 128$; 5) $x^{10} = 1$; 9) $(x-4)^3 = 125$;
 - 2) $x^9 = 11$; 6) $x^4 = 625$; 10) $(x+1)^4 = 16$;
 - 3) $x^5 = -25$; 7) $x^8 = 9$; 11) $2x^6 - 36 = 0$;
 - 4) $x^6 = \frac{1}{729}$; 8) $x^6 = -64$; 12) $3x^4 + 27 = 0$.
66. Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\sqrt{x} = 0,8$; 4) $\sqrt[4]{x} + 3 = 0$; 7) $\sqrt[6]{3x} - 2 = 0$;
 - 2) $\sqrt[5]{x} = \frac{3}{2}$; 5) $\sqrt[3]{x} + 7 = 0$; 8) $\sqrt[6]{3x-2} = 0$;
 - 3) $\sqrt[4]{x} - 4 = 0$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 3 = 0$; 9) $\sqrt[6]{3x-2} = 2$.

67. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^{10} + 31x^5 - 32 = 0; \quad 3) x^{12} - 5x^6 - 24 = 0.$$

$$2) x^8 - 14x^4 + 13 = 0;$$

68. Оцініть значення x , якщо:

$$1) -2 \leq \sqrt[3]{x} \leq 6; \quad 2) 2 < \sqrt[4]{x} < 4.$$

69. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

$$1) (a-1)\sqrt[8]{x} = 0; \quad 4) \sqrt[6]{x} = a-1; \quad 7) x^5 = a+1;$$

$$2) \sqrt[6]{a(x-1)} = 0; \quad 5) x^4 = a-5; \quad 8) x^{10} = 49 - a^2.$$

$$3) (a+2)\sqrt[4]{x} = a+2; \quad 6) ax^8 = 6;$$

Властивості кореня n -го степеня

70. Знайдіть значення кореня:

$$1) \sqrt[3]{216 \cdot 343}; \quad 2) \sqrt[7]{128 \cdot 0,0000001}; \quad 3) \sqrt[9]{0,9^9 \cdot 3^{18}};$$

$$4) \sqrt[4]{0,0625 \cdot 256}; \quad 5) \sqrt[5]{11^5 \cdot 5^{10}}; \quad 6) \sqrt[4]{\frac{10^4 \cdot 3^{16}}{9^4 \cdot 2^8}}.$$

71. Обчисліть значення виразу:

$$1) \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}; \quad 2) \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{4}; \quad 3) \sqrt[3]{0,09} \cdot \sqrt[3]{2,4}; \quad 4) \sqrt[9]{2^5 \cdot 5^4} \cdot \sqrt[9]{5^5 \cdot 2^{22}};$$

$$5) \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{54}}; \quad 6) \frac{\sqrt[4]{2^7 \cdot 10^3}}{\sqrt[4]{10^{11} \cdot 2^3}}; \quad 7) \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}};$$

$$8) \sqrt[4]{9 + \sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9 - \sqrt{65}}; \quad 9) \sqrt[5]{\sqrt{13} - 16} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{13} + 16}.$$

72. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[8]{m^8}, \text{ якщо } m \geq 0; \quad 2) \sqrt[4]{n^4}, \text{ якщо } n \leq 0; \quad 3) \sqrt[9]{p^9}; \quad 4) \sqrt[3]{0,008m^{36}n^{48}};$$

$$5) \sqrt[4]{625x^{12}y^{28}z^8}, \text{ якщо } x \geq 0, y \leq 0; \quad 6) 2,5x^3 \sqrt[4]{256x^{20}}, \text{ якщо } x \geq 0;$$

$$7) \frac{\sqrt[6]{a^{12}b^{18}c^{30}}}{ab^2c^3}, \text{ якщо } b > 0, c < 0; \quad 8) -0,8y^2 \cdot \sqrt[4]{81x^{44}y^{24}}, \text{ якщо } x \geq 0.$$

73. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[6]{(x+2)^6}; \quad 2) \sqrt[8]{(b-10)^8}, \text{ якщо } b \geq 10; \quad 3) \sqrt[12]{(4-y)^{12}}, \text{ якщо } y \leq 4;$$

$$4) (21-b) \sqrt[6]{\frac{729}{(b-21)^6}}, \text{ якщо } b > 21.$$

74. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[6]{m}; \quad 2) \sqrt[3]{4a}; \quad 3) \sqrt[7]{5x}; \quad 4) \sqrt[2]{b^{14}}; \quad 5) \sqrt[18]{a^9b^{27}}.$$

75. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[4]{(\sqrt{5}-6)^4}; \quad 2) \sqrt[3]{(4-\sqrt{3})^3}; \quad 3) \sqrt[8]{(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})^8};$$

$$4) \sqrt[6]{(7-5\sqrt{2})^6} + \sqrt[5]{(3-5\sqrt{2})^5}.$$

76. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt[6]{x^6} + x, \text{ якщо } x \leq 0; \quad 2) y = (\sqrt[4]{x+1})^4;$$

$$3) y = \sqrt[4]{(x+1)^4}; \quad 4) y = \sqrt[4]{x^4} - x;$$

$$5) y = \sqrt[6]{(x-1)^5} \cdot \sqrt[6]{x-1}; \quad 6) y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt[8]{(x-1)^8}} - 1.$$

Тотожні перетворення виразів, які містять корені n -го степеня

77. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[3]{40}; \quad 2) \sqrt[5]{128}; \quad 3) \sqrt[4]{162}; \quad 4) \sqrt[3]{375}.$$

78. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{12a^8}; \quad 2) \sqrt[4]{x^{15}}; \quad 3) \sqrt[3]{-m^{16}}; \quad 4) \sqrt[4]{x^{26}y^9}; \quad 5) \sqrt[4]{1250x^{18}y^{21}};$$

$$6) \sqrt[3]{108a^{10}b^{25}}; \quad 7) \sqrt[4]{-81a^{13}}; \quad 8) \sqrt[8]{a^{34}b^{19}}; \quad 9) \sqrt[6]{m^7n^7}, \text{ якщо } m \leq 0, n \leq 0;$$

$$10) \sqrt[6]{a^8b^7}, \text{ якщо } a \leq 0; \quad 11) \sqrt[4]{a^5b^{10}c^{20}}, \text{ якщо } c > 0;$$

$$12) \sqrt[10]{-p^{21}q^{34}}, \text{ якщо } q \leq 0.$$

79. Винесіть множник під знак кореня:

$$1) 7\sqrt{2}; \quad 2) 4\sqrt[3]{5}; \quad 3) 10\sqrt[4]{0,24}; \quad 4) \frac{5}{3}\sqrt[3]{54}.$$

80. Винесіть множник під знак кореня:

$$1) x\sqrt{5}; \quad 2) y\sqrt{-y^5}; \quad 3) b\sqrt[8]{b^7}; \quad 4) 3a\sqrt[3]{2a^2}; \quad 5) m\sqrt[5]{7m^2}; \quad 6) 5a^3\sqrt[3]{\frac{4}{25a^4}};$$

$$7) p\sqrt[10]{p^6}, \text{ якщо } p \leq 0; \quad 8) mn\sqrt[8]{m^4n^3}, \text{ якщо } m < 0; \quad 9) m^3n^5\sqrt[6]{m^4n^8}, \text{ якщо } m > 0, n < 0.$$

81. Спростіть вираз (змінні набувають невід'ємних значень):

$$1) \sqrt[4]{b^5b^2}; \quad 2) \sqrt[7]{c^5c^2}; \quad 3) \sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}.$$

82. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{21}{\sqrt{7}}$; 2) $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt[4]{27}}$; 4) $\frac{20}{\sqrt[3]{10}}$; 5) $\frac{64}{\sqrt[3]{16}}$; 6) $\frac{a^5}{\sqrt[7]{a^5}}$.

83. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{42}{\sqrt{26} + \sqrt{5}}$; 2) $\frac{28}{5 - \sqrt{18}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[3]{3} + 1}$; 4) $\frac{9}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$.

84. Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{m - n}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt[6]{x} - 2}$; 3) $\frac{\sqrt[10]{a^5 b^4} + \sqrt[10]{a^4 b^5}}{\sqrt[5]{b} - \sqrt[5]{a}}$;
4) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$; 5) $\frac{\sqrt[4]{x^3} + x}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$; 6) $\frac{x - 27}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9}$.

85. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{4 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt[6]{31 + 8\sqrt{15}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}}$.

86. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt[4]{x} + 5)(\sqrt[4]{x} - 5) - (\sqrt[4]{x} + 6)^2$;
2) $\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c} - 4} - \frac{\sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c} - 2}$;
3) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{ab}} + \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$;
4) $\left(\frac{\sqrt[4]{a} + 3}{\sqrt[4]{a} - 3} + \frac{\sqrt[4]{a} - 3}{\sqrt[4]{a} + 3} \right) : \frac{3\sqrt{a} + 27}{9 - \sqrt{a}}$;
5) $\frac{5\sqrt[10]{a}}{\sqrt[10]{a} + 3} + \frac{\sqrt[10]{a} - 6}{3\sqrt[10]{a} + 9} : \frac{135}{6\sqrt[10]{a} - \sqrt[5]{a}}$;
6) $\left(\frac{8\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{b} + 7} - \frac{15\sqrt[8]{b}}{\sqrt[4]{b} + 14\sqrt[8]{b} + 49} \right) : \frac{8\sqrt[8]{b} + 41}{\sqrt[4]{b} - 49} + \frac{7\sqrt[8]{b} - 49}{\sqrt[8]{b} + 7}$.

87. Доведіть, що значення виразу $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$ є числом раціональним.

Функція $y = \sqrt[2]{x}$

88. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[2]{x+1}$; 2) $y = \sqrt[6]{x-12}$; 3) $y = \sqrt[5]{\frac{x+5}{x-7}}$; 4) $y = \sqrt[4]{8x-2x^2}$.

89. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \sqrt[6]{x} - 8$; 2) $y = 9 - \sqrt[10]{x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x} - 6$.

90. Оцініть значення виразу $\sqrt[5]{x}$, якщо:

1) $32 \leq x \leq 1024$; 2) $-100\,000 < x < 243$.

91. Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{6,4}$ і $\sqrt[3]{7,2}$; 2) $\sqrt[4]{7}$ і $\sqrt[8]{50}$; 3) $\sqrt[6]{6}$ і $\sqrt[4]{3}$;
4) $\sqrt[2]{-19}$ і $\sqrt[2]{-23}$; 5) $3\sqrt[3]{3}$ і $2\sqrt[3]{10}$; 6) $\sqrt[4]{4\sqrt{6}}$ і $\sqrt[4]{3}$;
7) 4 і $\sqrt[3]{62}$; 8) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[3]{11}$.

92. Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число: 1) $\sqrt[3]{20}$; 2) $\sqrt[4]{90}$; 3) $-\sqrt[4]{40}$?

93. Укажіть усі цілі числа, які розміщені на координатній прямій між числами:

1) 5 і $\sqrt[3]{400}$; 2) $\sqrt[3]{-98}$ і $\sqrt[4]{1300}$.

94. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x} + 2$; 2) $y = \sqrt[4]{x} - 2$; 3) $y = \sqrt[4]{2-x}$; 4) $y = \sqrt[4]{|x|} - 2$.

Означення та властивості степеня з раціональним показником

95. Подайте степінь з дробовим показником у вигляді кореня:

1) $7^{\frac{1}{3}}$; 2) $2^{-\frac{1}{5}}$; 3) $(ab)^{\frac{4}{5}}$; 4) $(m-n)^{2,5}$;
5) $5^{\frac{3}{7}}$; 6) $11^{-\frac{2}{9}}$; 7) $ab^{\frac{4}{5}}$; 8) $m^{-\frac{3}{5}} - n^{2,4}$.

96. Замініть арифметичний корінь степенем з дробовим показником:

1) $\sqrt[3]{x}$; 2) $\sqrt[8]{c^7}$; 3) $\sqrt[3]{7^{-5}}$; 4) $\sqrt[11]{(a+b)^4}$;
5) $\sqrt[5]{y^3}$; 6) $\sqrt[4]{3b}$; 7) $\sqrt[10]{27}$; 8) $\sqrt[11]{a^4 + b^4}$.

97. Обчисліть значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $32^{-\frac{2}{5}}$; 3) $0,0004^{-1,5}$; 4) $81^{0,75}$; 5) $\left(12\frac{1}{4}\right)^{1,5}$.

98. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^{\frac{5}{8}}$; 2) $y = x^{-1,2}$; 3) $y = (x-2)^{3,4}$; 4) $y = (5-4x-x^2)^{-\frac{1}{7}}$.

99. Подайте у вигляді степеня або добутку степенів вираз:

1) $x^{-1,3} \cdot x^{2,5}$; 2) $x^{\frac{7}{12}} : x^{\frac{5}{8}}$; 3) $x^{\frac{4}{7}} \cdot x^{\frac{9}{14}} \cdot x^{-\frac{15}{28}}$;
4) $x^{\frac{11}{18}} \cdot x^{-\frac{5}{6}}$; 5) $(x^{-6})^{0,6}$; 6) $\left(x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{9}}\right)^{\frac{18}{25}}$.

$$7) \left(x^{\frac{4}{15}}\right)^{\frac{5}{16}} \cdot \left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{9}{20}};$$

$$9) \left(x^{-\frac{6}{49}} y^{-\frac{9}{28}}\right)^{\frac{7}{18}} \cdot \left(x^{\frac{5}{14}} y^{\frac{9}{16}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$8) (x^4)^{0,8} \cdot (x^{-1,4})^3 : (x^{-1,5})^6;$$

100. Знайдіть значення виразу:

$$1) 3^{3,6} \cdot 3^{-1,2} \cdot 3^{1,6};$$

$$2) (5^{-0,8})^7 : 5^{-2,6};$$

$$3) \left(6^{-\frac{4}{11}}\right)^{\frac{11}{20}} \cdot 36^{1,1};$$

$$4) 81^{-1,25} \cdot 9^{1,5} \cdot 27^{\frac{2}{3}};$$

$$5) \left(\frac{7^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}}}{14^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}}}\right)^{-1,5};$$

$$6) \left(\frac{16^{\frac{4}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{3}}}{4^{-\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5^{\frac{2}{7}} \cdot 256^{\frac{1}{7}}}{2^{-\frac{2}{5}} \cdot 625^{\frac{4}{7}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Перетворення виразів, які містять степені з дробовим показником

101. Спростіть вираз:

$$1) a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{1}{4}} - 2\right) - \left(a^{\frac{1}{4}} + 2\right)^2;$$

$$2) \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right) \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right) - \left(3x^{\frac{1}{3}} + 2y^{\frac{1}{3}}\right) \left(2x^{\frac{1}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}\right);$$

$$3) \left(m^{\frac{1}{20}} + n^{\frac{1}{20}}\right) \left(m^{\frac{1}{10}} + n^{\frac{1}{10}}\right) \left(m^{\frac{1}{5}} + n^{\frac{1}{5}}\right) \left(m^{\frac{1}{20}} - n^{\frac{1}{20}}\right);$$

$$4) \left(b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}\right) \left(b - b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c\right) - b^{\frac{5}{6}} \left(b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{6}}\right).$$

102. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x - 9x^{\frac{2}{7}}}{x^{\frac{5}{7}} - 9};$$

$$4) \frac{m - m^{0,5} n^{0,5} + n}{m^{1,5} + n^{1,5}};$$

$$7) \frac{4a^{\frac{2}{3}} - 1}{8a - 1};$$

$$2) \frac{6y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}} - y^{\frac{2}{3}}};$$

$$5) \frac{b + 2b^{0,5} c^{0,5} + c}{bc^{0,5} + b^{0,5} c};$$

$$8) \frac{m^{\frac{5}{8}} + 5m^{\frac{1}{4}}}{m - 25m^{\frac{1}{4}}};$$

$$3) \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a - b};$$

$$6) \frac{3a^{\frac{1}{3}} + a}{3a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{5}{6}}};$$

$$9) \frac{14^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{5}}}{28^{\frac{1}{5}} + 4^{\frac{1}{5}}}.$$

103. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{4}} + 4a^{\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{8}} + 4b^{\frac{1}{4}}}{a - a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{ab^{\frac{7}{8}} - a^{\frac{7}{8}} b}{a^{\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{8}} + 2b^{\frac{1}{4}}};$$

$$2) \frac{2y - 5x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{x - 4y} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}};$$

$$3) \frac{x^{\frac{1}{6}} - 1}{2x^{\frac{1}{6}} - 6} - \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} - \frac{3(x^{\frac{1}{6}} - 1)}{2x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}}};$$

$$4) \left(\frac{a^{\frac{1}{6}} + 4}{a^{\frac{1}{6}} - 4} - \frac{a^{\frac{1}{6}} - 4}{a^{\frac{1}{6}} + 4}\right) : \frac{32a^{\frac{1}{2}}}{16 - a^{\frac{1}{3}}};$$

$$5) \left(\frac{9c^{\frac{1}{8}}}{c^{\frac{1}{8}} - 8} + \frac{7c^{\frac{1}{8}}}{c^{\frac{1}{4}} - 16c^{\frac{1}{8}} + 64}\right) : \frac{9c^{\frac{1}{8}} - 65}{c^{\frac{1}{4}} - 64} - \frac{8c^{\frac{1}{8}} + 64}{c^{\frac{1}{8}} - 8}.$$

Ірраціональні рівняння

104. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[5]{3x - 1} = -1;$$

$$6) \sqrt{3x - 1} = \sqrt{4x + 1};$$

$$2) \sqrt{3x - 1} = -1;$$

$$7) \sqrt{3x - 1} = \sqrt{4x^2 - 6x + 1};$$

$$3) \sqrt{3x - 1} = 1;$$

$$8) \sqrt{3x - 1} = 1 - 3x;$$

$$4) \sqrt{3x - 1} = \sqrt{9 - 2x};$$

$$9) \sqrt{3x - 1} = \sqrt{0,2 - x};$$

$$5) \sqrt{3x - 1} = \sqrt{1 - 3x};$$

$$10) (x + 5)\sqrt{x^2 - x - 20} = 6x + 30.$$

105. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x + 2} = 2;$$

$$6) \sqrt{3x - 5} + \sqrt{x - 2} = 3;$$

$$2) \sqrt{x + 7} = x - 5;$$

$$7) \sqrt{x + 2} + \sqrt{3 - x} = 3;$$

$$3) 2 + \sqrt{4 + 2x - x^2} = x;$$

$$8) 2\sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 2} = 1;$$

$$4) \frac{x + 2}{\sqrt{x + 1}} = \sqrt{3x + 4};$$

$$9) \sqrt{x - 4} = \sqrt{x - 3} - \sqrt{2x - 1};$$

$$5) \sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1;$$

$$10) \sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x};$$

$$11) \sqrt{8 - x} - \sqrt{9 + 5x} - \sqrt{4 - 5x} + \sqrt{5 + x} = 0.$$

106. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0;$$

$$4) \sqrt{x + 2} = 2\sqrt[4]{x + 2} + 3;$$

$$2) 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 2 = 0;$$

$$5) \sqrt[3]{9 - 6x + x^2} - \sqrt[3]{3 - x} - 2 = 0;$$

$$3) x - 9\sqrt[3]{x} = 0;$$

$$6) x^2 - 2\sqrt{x^2 - 24} = 39;$$

$$7) x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12; \quad 9) x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 4;$$

$$8) \sqrt{\frac{2x}{x+1}} - 2\sqrt{\frac{x+1}{2x}} = 1; \quad 10) \sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 7 + 2x - x^2.$$

107. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3} = 0; \quad 3) \sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1};$$

$$2) \sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2; \quad 4) \sqrt[4]{80+x} + \sqrt[4]{2-x} = 4.$$

108. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[3]{(x+4)^2} + \sqrt[3]{(x-5)^2} - \sqrt[3]{(x+4)(x-5)} = 3;$$

$$2) \sqrt{x-4} + 4\sqrt{x-8} - \sqrt{x-4} - 4\sqrt{x-8} = 2.$$

Системи ірраціональних рівнянь

109. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt[5]{y} = 5, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{y} = 14; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = 75, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 15; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+3} = 7, \\ 3x+2y = 22; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{x+3y+1} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} 3\sqrt{3x^2 - 2y + 3} = 2y + 15 - 3x^2, \\ 3y - 2x = 5; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2, \\ x + y = 26; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Ірраціональні нерівності

110. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt{x-3} > 2; \quad 2) \sqrt{x-3} < 2; \quad 3) \sqrt{x-3} > -2; \quad 4) \sqrt{x-3} < -2.$$

111. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt{x+5} < \sqrt{8-x}; \quad 4) \sqrt{2x-x^2} \leq 5-x;$$

$$2) \sqrt{x^2-7x+5} \geq \sqrt{3x-4}; \quad 5) \sqrt{11-5x} \geq x-1;$$

$$3) \sqrt{x+18} < 2-x; \quad 6) \sqrt{x^2+7x+12} > 6-x.$$

112. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (4-3x)\sqrt{x} \geq 0; \quad 3) \sqrt{x+3} \leq 6 - \sqrt{x+15};$$

$$2) \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6 \leq 0; \quad 4) 3\sqrt{x} - \sqrt{5x+5} > 1.$$

113. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність $(a+1)\sqrt{2-x} < 1$.

Радіанне вимірювання кутів

114. Знайдіть радіанну міру кутів: 12° ; 45° ; 72° ; 105° ; 135° ; 330° .

115. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

$$\frac{\pi}{30}; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; 1\frac{3}{4}\pi; 5\pi.$$

116. Радіус кола дорівнює 2 см. Знайдіть довжину дуги кола, яка відповідає куту в 5 радіанів.

117. У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки $P_0(1; 0)$ на кут:

$$1) 283^\circ; \quad 4) 420^\circ; \quad 7) \frac{11\pi}{18}; \quad 10) 1,9\pi;$$

$$2) 146^\circ; \quad 5) -53^\circ; \quad 8) -\frac{\pi}{3}; \quad 11) 3;$$

$$3) -215^\circ; \quad 6) \frac{\pi}{9}; \quad 9) -2,1\pi; \quad 12) -4?$$

Тригонометричні функції числового аргументу

118. Знайдіть значення виразу:

$$1) 8\cos 90^\circ - 7\cos 180^\circ + 3\sin 270^\circ;$$

$$2) \sin \pi + \cos \pi + \operatorname{tg} \pi;$$

$$3) \sin 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ;$$

$$4) \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} 0\right) \cos \frac{\pi}{6}};$$

$$5) \sqrt{(2\cos 30^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\sin 60^\circ)^2}.$$

119. Знайдіть значення виразу $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ при:

$$1) \alpha = 45^\circ, \beta = 15^\circ;$$

$$2) \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}.$$

120. Чи можлива рівність:

$$1) \sin \alpha = -\frac{7}{8}; \quad 2) \cos \alpha = \sqrt[4]{2}; \quad 3) \cos \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad 4) \sin \alpha = 3 - \sqrt{2}?$$

121. При яких значеннях a можлива рівність:

$$1) \sin x = 4 - a;$$

$$2) \cos x = a^2 - 3a + 1?$$

122. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $7 \cos \alpha - 3$; 2) $5 - \sin^2 \alpha$; 3) $\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \alpha}$.

123. Знайдіть область значень виразу:

1) $1 - 2|\sin 4x|$; 2) $\frac{3}{2 \cos x + 1}$; 3) $1 - \operatorname{ctg}^4 x$.

Знаки значень тригонометричних функцій

124. Який знак має:

1) $\sin 230^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 330^\circ$; 3) $\cos 3$;
4) $\cos 170^\circ$; 5) $\operatorname{ctg}(-220^\circ)$; 6) $\sin \frac{13\pi}{8}$?

125. Визначте знак виразу:

1) $\cos 260^\circ \sin 190^\circ$; 2) $\cos 356^\circ \operatorname{tg}(-100^\circ)$; 3) $\sin 2 \cos 3,5$.

126. Кутом якої чверті є кут α , якщо відомо, що:

1) $\cos \alpha > 0$ і $\operatorname{tg} \alpha < 0$; 2) $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$?

127. Порівняйте:

1) $\sin 156^\circ$ і $\sin 256^\circ$; 2) $\sin \frac{7\pi}{4}$ і $\cos \frac{11\pi}{6}$;
3) $\operatorname{ctg} 220^\circ$ і $\operatorname{tg} 320^\circ$; 4) $\cos 3$ і $\sin 1$.

Парність і непарність тригонометричних функцій

128. Знайдіть значення виразу:

1) $4 \sin(-60^\circ) - 3 \operatorname{ctg}(-60^\circ) + 5 \cos(-30^\circ)$;
2) $2 \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3 \cos(-\pi) + 6 \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

129. Чи є парною або непарною функція, задана формулою:

1) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$; 3) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{9 - x^2}$;
4) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$; 5) $f(x) = \frac{(1 - \sin x)(x + 1)}{x + 1}$?

Періодичні функції

130. Знайдіть значення виразу:

1) $\cos 420^\circ$; 2) $\sin 540^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 390^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}(-780^\circ)$; 5) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{4}$; 6) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$.

131. Покажіть, що число T є періодом функції f :

1) $f(x) = \cos 2x$, $T = \pi$; 2) $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x)$, $T = \pi$;

3) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $T = 8$; 4) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $T = 2\pi$.

132. Покажіть, що число $T = \frac{\pi}{2}$ не є періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} x$.

133. Знайдіть найменший додатний період функції:

1) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg}(4x + 1)$.

Побудова графіків тригонометричних функцій

134. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin x + 2$; 2) $y = \sin \frac{x}{2}$; 3) $y = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$;
4) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 5) $y = 3 \sin x$; 6) $y = 3 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

135. Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos x - 1,5$; 2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y = -\frac{1}{4} \cos x$;
4) $y = -\frac{1}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1,5$;
5) $y = \cos 2x$; 6) $y = -\frac{1}{4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1,5$.

136. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2 \operatorname{ctg} x - 1$; 3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

137. Побудуйте графік функції:

1) $y = |\cos x|$; 2) $y = \sin |x|$; 3) $y = \operatorname{tg}\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$.

138. Побудуйте графік функції:

1) $y = (\sqrt{\cos x})^2$; 2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} |x|$; 3) $y = \sin x + \sqrt{\sin^2 x}$;
4) $y = \sqrt{-\operatorname{tg}^2 x}$; 5) $y = \sqrt{\sin x - 1}$; 6) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$;
7) $y = \frac{\sin x + |\sin x|}{\cos x + |\cos x|}$.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

139. Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

- 1) $\sin \alpha = 0,4$ і $\cos \alpha = 0,6$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = 2 + \sqrt{3}$;
- 3) $\sin \alpha = -\frac{2}{7}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{2}$;
- 4) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{4+2a}}{a+4}$ і $\cos \alpha = -\frac{a}{a+4}$?

140. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута β , якщо:

- 1) $\sin \beta = -\frac{1}{4}$;
- 2) $\cos \beta = \frac{3}{4}$ і $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;
- 3) $\operatorname{tg} \beta = -3$ і $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;
- 4) $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{6}$ і $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

141. Спростіть вираз:

- 1) $1 - \cos^2 \gamma$;
- 2) $\operatorname{tg}^2 3\varphi + \cos^2 4\varphi + \sin^2 4\varphi$;
- 3) $5\cos \frac{\beta}{2} - 4\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}$;
- 4) $\frac{\sin^2 \varphi - 1}{\cos^2 \varphi - 1} + \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \varphi$;
- 5) $\frac{\operatorname{tg}^5 \alpha \cos^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;
- 6) $(\sin x + 1)(\sin x - 1)$;
- 7) $(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta)^2 - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2$;
- 8) $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$;
- 9) $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$;
- 10) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;
- 11) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}$;
- 12) $\frac{\cos^2(-\beta) - \cos^4(-\beta)}{\sin^2(-\beta) \cos^3(-\beta)}$.

142. Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$;
- 2) $\cos^4 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$;
- 3) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2\operatorname{ctg}^2 \alpha$;
- 4) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$;
- 5) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$.

143. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

- 1) $\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha$;
- 2) $3\cos^2 \alpha - 3\operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

144. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x$;
- 2) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$.

145. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\beta}{4}} - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{4}}$, якщо $4\pi < \beta < 5\pi$;
- 2) $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$, якщо $\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$;
- 3) $\sqrt{\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta) + \sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta)}$, якщо $180^\circ < \beta < 270^\circ$.

146. Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = a$. Знайдіть:

- 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;
- 2) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$;
- 3) $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$;
- 4) $\operatorname{tg}^6 \alpha + \operatorname{ctg}^6 \alpha$;
- 5) $\cos \alpha \sin \alpha$;
- 6) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$.

147. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{4\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + 4\sin \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$;
- 2) $\frac{7\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{5\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

148. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3\cos \alpha - 2\sin^2 \alpha$.

Формули додавання

149. Спростіть вираз:

- 1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;
- 2) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;
- 3) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \sqrt{3}\sin \alpha - \cos \alpha$;
- 4) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$.

150. Спростіть вираз:

- 1) $\cos 6\alpha \cos 4\alpha - \sin 6\alpha \sin 4\alpha$;
- 2) $\sin 14^\circ \cos 31^\circ + \cos 14^\circ \sin 31^\circ$;
- 3) $\cos(24^\circ + \alpha) \cos(24^\circ - \alpha) + \sin(24^\circ + \alpha) \sin(24^\circ - \alpha)$.

151. Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;
- 2) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2\cos \alpha \sin \beta}{2\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;
- 3) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;
- 4) $\cos^2(\alpha - 30^\circ) + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin^2 \alpha = 1,5$.

152. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 47^\circ}{1 + \operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 47^\circ}; \quad 2) \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}$$

153. Доведіть тотожність:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 0.$$

154. Користуючись формулами додавання, знайдіть:

$$1) \cos 75^\circ; \quad 2) \operatorname{ctg} 75^\circ.$$

155. Дано: $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\cos(\alpha + 45^\circ)$.156. Дано: $\cos \alpha = 0,8$, $\cos \beta = -0,96$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Знайдіть $\sin(\alpha - \beta)$.

157. Знайдіть найменше значення виразу:

$$1) \sin \alpha + \cos \alpha; \quad 2) 2 \sin \alpha - 7 \cos \alpha.$$

Формули зведення

158. Зведіть до тригонометричної функції кута α :

$$1) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right); \quad 2) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \quad 3) \operatorname{tg}^2\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right);$$

$$4) \cos(\pi + \alpha); \quad 5) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right); \quad 6) \sin^2(180^\circ + \alpha).$$

159. Зведіть до значення тригонометричної функції додатного аргументу, меншого від 45° (або $\frac{\pi}{4}$):

$$1) \sin 204^\circ; \quad 2) \sin 500^\circ; \quad 3) \operatorname{tg} 925^\circ;$$

$$4) \cos 250^\circ; \quad 5) \operatorname{ctg}(-108^\circ); \quad 6) \sin 1600^\circ;$$

$$7) \operatorname{tg} 285^\circ; \quad 8) \sin 1,6\pi; \quad 9) \operatorname{ctg} 2,4\pi;$$

$$10) \cos 343^\circ; \quad 11) \cos \frac{7\pi}{11}; \quad 12) \sin \frac{32\pi}{7}.$$

160. Обчисліть:

$$1) \sin 150^\circ; \quad 2) \operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right); \quad 3) \operatorname{tg} 1050^\circ;$$

$$4) \cos 135^\circ; \quad 5) \sin \frac{5\pi}{3}; \quad 6) \cos \frac{43\pi}{4};$$

$$7) \operatorname{ctg} 300^\circ; \quad 8) \sin 7\pi; \quad 9) \sin\left(-\frac{58\pi}{3}\right).$$

161. Знайдіть значення виразу:

$$1) 2 \sin 210^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ + \operatorname{ctg} 120^\circ + 6 \cos 450^\circ;$$

$$2) \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) \cos \frac{19\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$3) \cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ + \dots + \cos 150^\circ;$$

$$4) \sin 113^\circ \cos 323^\circ + \cos 247^\circ \cos 307^\circ.$$

162. Спростіть вираз:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi - \alpha) - \sin(2\pi - \alpha);$$

$$2) \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 4\pi) \cos(3\pi - \alpha);$$

$$3) \frac{\sin(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)};$$

$$4) \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(3\pi - \alpha)} + \sin(-\alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \right)^2 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}.$$

163. Відомо, що α , β , γ — кути трикутника. Доведіть, що $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.164. Знайдіть значення виразів $\cos(\pi + \alpha)$ і $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

165. Доведіть тотожність:

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1.$$

Формули подвійного аргументу

166. Виразіть дані тригонометричні функції через функції аргументу, що вдвічі менший від даного:

$$1) \sin \alpha; \quad 2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{6}; \quad 3) \sin 2; \quad 4) \sin\left(50^\circ + \frac{4x}{7}\right);$$

$$5) \cos 3\alpha; \quad 6) \cos(\alpha - \beta); \quad 7) \sin 10\alpha; \quad 8) \cos\left(\frac{8\pi}{9} - 2\beta\right).$$

167. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad 2) \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}};$$

- 3) $2\cos^2(135^\circ - 2,5\alpha) - 1$;
 4) $\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$;
 5) $\frac{\cos 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{\cos \alpha}$;
 6) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$;
- 7) $\frac{\sin^2 2\alpha - 4\cos^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\cos^2 \alpha - 4}$;
 8) $\frac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)}$.

168. Знайдіть значення виразу:

- 1) $2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$; 2) $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$; 3) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$.

169. Дано: $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Знайдіть:

- 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

170. Дано: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -5$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

171. Подайте у вигляді добутку вираз:

- 1) $1 + \cos 6\alpha$; 2) $1 - \cos 100^\circ$; 3) $1 - \sin \frac{\alpha}{2}$;
 4) $1 - \cos \frac{\alpha}{4}$; 5) $1 + \cos \frac{5\alpha}{2}$; 6) $1 + \sin \frac{\pi}{10}$.

172. Понизьте степінь виразу:

- 1) $\sin^2 \alpha$; 2) $\cos^2 12x$; 3) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{10} - \beta\right)$.

173. Доведіть тотожність:

- 1) $2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$; 2) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$;
 3) $\operatorname{tg} \alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\frac{1 - \sin(30^\circ - \alpha)}{1 + \sin(30^\circ - \alpha)} = \operatorname{tg}^2\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$.

174. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$;
 2) $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{1 + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}$;
 3) $\frac{1 - \sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}$;
 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$;
 5) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)(1 + \sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right)}$.

175. Спростіть вираз $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

176. Спростіть вираз $\sqrt{0,5 - 0,5\cos 4\alpha}$, якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

177. Доведіть, що $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

Формули суми і різниці тригонометричних функцій

178. Перетворіть у добуток:

- 1) $\sin 20^\circ + \sin 50^\circ$; 2) $\sin 13\alpha - \sin 7\alpha$;
 3) $\cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}$; 4) $\cos 14\alpha - \cos 6\alpha$;
 5) $\cos\left(\beta + \frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\beta - \frac{\pi}{10}\right)$;
 6) $\sin\left(4\alpha - \frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;
 7) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$;
 8) $\cos\left(3\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

179. Перетворіть у добуток:

- 1) $\sin 35^\circ - \cos 75^\circ$; 2) $\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{5}$; 3) $\sin \alpha + \cos \beta$.

180. Перетворіть у добуток:

- 1) $\operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 18^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 14\varphi + \operatorname{tg} 2\varphi$;
 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 4\alpha\right)$.

181. Перетворіть у добуток:

- 1) $1 + 2\sin \alpha$; 2) $\sqrt{2} \cos \alpha + 1$; 3) $1 + \operatorname{tg} \alpha$.

182. Доведіть тотожність:

- 1) $\cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha = 4\cos \frac{3\alpha}{2} \cos 2\alpha \cos \frac{17\alpha}{2}$;
 2) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha$;
 3) $\frac{\sin \alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;
 4) $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

183. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{(\sin \alpha + \sin 5\alpha)(\cos 5\alpha - \cos \alpha)}{1 - \cos 6\alpha}$;
 2) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$;

$$3) \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)};$$

$$4) \sin^2\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12} + \alpha\right).$$

184. Доведіть тотожність:

$$1) 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha = 4 \cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$2) \cos \alpha - \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{2 \cos \alpha} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

185. Перетворіть у суму добуток:

$$1) \cos 3\alpha \cos 2\alpha; \quad 3) \sin 5\alpha \sin 3\alpha;$$

$$2) \sin 15^\circ \cos 40^\circ; \quad 4) \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta).$$

186. Доведіть тотожність:

$$1) \cos 2\alpha + 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 0,5;$$

$$2) \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha;$$

$$3) \sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4};$$

$$4) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 1.$$

Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

187. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 3) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$4) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 5) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 6) \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$$

188. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = 1; \quad 4) \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3};$$

$$5) \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = 1; \quad 6) \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1;$$

7) $\cos(6x - 12) = \frac{4}{7};$

8) $\cos \frac{2x}{\pi} = 0;$

9) $\sin(7x - 2) = \frac{\pi}{6};$

10) $\cos\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{3x}{4}\right) = \frac{1}{2};$

11) $\sin\left(\frac{\pi}{9} - \frac{2x}{5}\right) = 0;$

12) $\operatorname{ctg}(5 - 4x) = -3.$

189. Розв'яжіть рівняння:

1) $3 + 3 \cos\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{18}\right) = 0;$

2) $3 \operatorname{tg}(3x + 1) + \sqrt{3} = 0;$

3) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0;$

4) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{3} = 0.$

190. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{2}{3x} = -1;$

2) $\sin \pi \sqrt{x} = -1;$

3) $\cos x^2 = \frac{1}{2};$

4) $\sin(\sin(\sin x)) = 0.$

191. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$ 192. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?193. Знайдіть усі корені рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 8x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, які задовольняють нерівність $\frac{3\pi}{5} < x < \frac{7\pi}{8}.$ 194. При яких значеннях a має розв'язки рівняння:

1) $\cos x = a - 5;$

2) $\sin 6x = 4a - a^2 - 5;$

3) $(a + 3) \sin x = a - 1;$

4) $(a^2 - 5a + 4) \cos x = a - 4;$

195. При яких значеннях a дане рівняння має єдиний корінь на вказаному проміжку:

1) $(x + a) \operatorname{tg} x = 0, \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right);$

2) $(x - a) \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0, \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right];$

196. Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ залежно від значення $a.$

Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arccctg} x$

197. Знайдіть:

- 1) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arctg \sqrt{3}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 7) $\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
2) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\operatorname{arccctg} 1$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$.

198. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\arccos(-1) + \arcsin 0 + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arctg(-1)$;
2) $2\arcsin 1 - 3\arccos 0 + 4\operatorname{arccctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

199. Обчисліть:

- 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(5\arctg \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
2) $\cos(2\arctg 1)$; 4) $\sin\left(\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) + \arctg(-\sqrt{3}) + \arcsin \frac{1}{2}\right)$.

200. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \arccos(4+x)$; 3) $y = \operatorname{arccctg} \frac{5}{\sqrt{x-1}}$;
2) $y = \arcsin(3-x^2)$;

201. Знайдіть область значень функції:

- 1) $y = 2\arccos x - \frac{\pi}{6}$; 2) $y = 3 - 4\arctg 4x$.

202. Обчисліть:

- 1) $\sin(\arcsin(-0,2))$; 2) $\cos\left(\arccos \frac{\pi}{5}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} \sqrt{3})$.

203. Обчисліть:

- 1) $\arccos\left(\cos \frac{7\pi}{12}\right)$; 2) $\arctg\left(\operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}\right)$; 3) $\arcsin(\sin 4)$.

204. Обчисліть:

- 1) $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$; 3) $\sin(\operatorname{arccctg}(-5))$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{2}{3}\right)$;
2) $\cos\left(\arcsin \frac{4}{9}\right)$; 4) $\cos(\operatorname{arctg} 4)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arccctg} \frac{11}{14}\right)$.

205. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\arccos x = \frac{5\pi}{6}$; 3) $\arcsin(4x+3) = -\frac{\pi}{3}$;
2) $\operatorname{arccctg}(x-2) = \frac{3\pi}{4}$;

206. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\arctg x \leq \frac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin \frac{x}{2} > \frac{\pi}{3}$; 3) $\arccos(2x-4) > \frac{5\pi}{6}$.

207. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = -3\arcsin x$; 4) $y = \operatorname{tg}(\arctg x)$;
2) $y = \arccos x + 1,5$; 5) $y = \cos(\arcsin x)$;
3) $y = \frac{|\arccos x|}{\arccos x}$; 6) $y = \cos(2\arccos x)$.

208. При яких значеннях a має розв'язок рівняння:

- 1) $\arccos x = \pi + a$; 5) $\frac{\arccos x - \frac{\pi}{3}}{\arcsin x - a} = 0$;
2) $\arcsin x = \sin a$;
3) $\arctg x = \operatorname{tg} a$;
4) $\frac{\arcsin x + a}{\arcsin x - \frac{\pi}{4}} = 0$; 6) $\frac{\arccos x + a}{\sqrt{\arccos x - \frac{\pi}{2}}} = 0$?

Розв'язування тригонометричних рівнянь

209. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1 = 0$; 3) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
2) $2\cos^2 x - 7\sin x - 5 = 0$; 4) $\operatorname{tg} 5x + 3\operatorname{ctg} 5x + 4 = 0$.

210. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2\sin x - 3\cos x = 0$; 3) $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$;
2) $3\sin^2 x - 7\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$; 4) $\sin x - 6\cos x = 1$.

211. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 4x - \sin 2x = 0$; 3) $\cos x - \sin 11x = 0$;
2) $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$; 4) $\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2}\cos 3x$;
5) $\sin x + \sin 7x - \cos 5x - \cos(\pi - 3x) = 0$.

212. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{3}{4}$; 3) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;
2) $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$; 4) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.

213. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$; 2) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 5x$.

214. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos(x+70^\circ)\cos(x+10^\circ) = \frac{1}{2}$; 3) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$;
2) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$; 4) $4\sin^2 2x - 1 = \cos 2x \cos 6x$.

215. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos \frac{x}{2}}{1 + \sin \frac{x}{2}} = 0$;

3) $\frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2 \sin x$;

2) $\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x - \sin x} = 0$;

4) $\frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x} = 0$.

216. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10 - 9 \operatorname{tg} x} = 3 \operatorname{tg} x - 2$;

3) $\sqrt{5 \sin x + \cos 2x} + 2 \cos x = 0$.

2) $\sqrt{-3 \cos x} = \sqrt{2} \sin x$;

217. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння:

$$\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

218. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin 3x = \cos 5x$.219. Знайдіть усі корені рівняння $\sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$, що задовольняють нерівність $0 < x < 3$.220. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$?221. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{49 - 4x^2} \left(\sin \pi x + 3 \cos \frac{\pi x}{2} \right) = 0$.222. При яких значеннях a має розв'язки рівняння:

1) $\cos^2 x - (a + 7) \cos x + (4 - a)(2a + 3) = 0$;

2) $2 \cos \frac{x}{3} + \cos 7x = a^2 - 6a + 12$;

3) $\sin^2 x + 2a \sin x + 2a^2 - 4a + 4 = 0$;

4) $8 \sin \frac{x}{4} + 15 \cos \frac{x}{4} = 2a + 4$;

5) $\cos^4 x + (a + 1) \sin^2 x - 2a - 3 = 0$?

223. При яких значеннях a рівняння

$$\cos^2 x - \left(a + \frac{7}{10}\right) \cos x + \frac{7a}{10} = 0$$

на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right]$ має: 1) один корінь; 2) два корені?

Розв'язування тригонометричних нерівностей

224. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos x \leq \frac{1}{2}$;

7) $\operatorname{ctg} x \leq -1$;

2) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

8) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\operatorname{tg} x \geq 1$;

225. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin \frac{x}{5} > \frac{1}{2}$;

4) $\cos \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos 4x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \leq -\sqrt{3}$;

3) $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\operatorname{ctg} \left(\frac{5x}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \geq 1$.

226. Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$;

4) $|\operatorname{tg} x| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

227. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \sin^2 \frac{x}{4} < 1,5$;

3) $\operatorname{ctg}^2 2x - 3 \operatorname{ctg} x + 2 \geq 0$;

2) $\sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos 2x - \cos x \geq 0$.

Системи тригонометричних рівнянь

228. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x - y = \frac{2\pi}{3}, \\ \sin x - \sin \frac{y}{2} = \frac{1}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x - 2 \cos y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}. \end{cases}$

229. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \cos y = -0,5, \\ \cos x \sin y = 0,5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

Варіант 3

Множини. Операції над множинами

- Поставте замість зірочки знак \in або \notin так, щоб отримати правильне твердження:
 - $8 \in N$;
 - $19 \in N$;
 - $-5 \in N$;
 - $-7 \in Q$;
 - $\sqrt{7} \in Q$;
 - $\sqrt{7} \in R$;
 - $-2,25 \in Q$;
 - $-19 \in Z$.
- Запишіть множину коренів рівняння:
 - $(x-4)(x^2-16)=0$;
 - $6x-3=0$;
 - $x^2-4x+5=0$.
- Задайте переліком елементів множину:
 - неправильних дробів з чисельником 6;
 - букв у слові «хімія»;
 - цифр числа 2 211 002.
- Чи рівні множини A і B , якщо:
 - $A = \{8, 12\}$, $B = \{12, 8\}$;
 - $A = \{(8, 12)\}$, $B = \{(12, 8)\}$;
 - A — множина коренів рівняння $x^2 + 9 = 0$, $B = \{-3; 3\}$;
 - A — множина рівнобічних трапецій, B — множина трапецій, навколо яких можна описати коло?
- Нехай C — множина цифр числа 1123. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини C , якщо:
 - $x = 321$;
 - $x = 234$;
 - $x = 2121$;
 - $x = 111\ 111$?
- Запишіть усі підмножини множини $\{5, 6, 7\}$.
- Знайдіть перетин множин A і B , якщо:
 - A — множина цифр числа 42 188, B — множина цифр числа 72 294;
 - A — множина дільників числа 18, B — множина дільників числа 42;
 - A — множина одноцифрових чисел, B — множина чисел, кратних числу 5;
 - A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;
 - A — множина ромбів, B — множина паралелограмів.
- Знайдіть:
 - $[-3; 10] \cap (0; 15)$;
 - $(-\infty; 6) \cap (-2; 5)$;
 - $3 \cap [3; 8] \cap (9; +\infty)$;
 - $N \cap [-3; 3]$;
 - $Z \cap (-2; 1]$;
 - $[-1; 5] \cap [5; 11]$;
 - $[0; 8] \cap (8; +\infty)$;
 - $R \cap (-6; 2]$;
 - $[5; 12] \cap \emptyset$.

Варіант 3

9. Знайдіть об'єднання множин A і B , якщо:

- A — множина цифр числа 53 299, B — множина цифр числа 63 986;
- A — множина дільників числа 24, B — множина дільників числа 32;
- A — множина ромбів, B — множина паралелограмів.

10. Знайдіть:

- $(-1; 8) \cup (4; 9]$;
- $[7; 13] \cup (7; +\infty)$;
- $(-\infty; 0) \cup (-0,1; +\infty)$;
- $(-\infty; \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$;
- $(-2; -1) \cup [-2; +\infty)$;
- $(-8; -5) \cup [-8; 8]$;
- $(-\infty; 20] \cup R$;
- $[10; 15] \cup \emptyset$.

Функція та її основні властивості

11. Функцію задано формулою $f(x) = \frac{x-4}{x+3}$. Знайдіть:

- $f(-5)$;
- $f(0)$;
- $f(7)$;
- $f(u)$.

12. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2 + 2x - 1, & \text{якщо } -1 \leq x < 2, \\ 4x - 1, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$ Знайдіть: 1) $f(-1,34)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(0)$; 4) $f(1,5)$; 5) $f(5)$.

13. Знайдіть область визначення функції:

- $f(x) = 4 - 9x$;
- $f(x) = \frac{7}{x+2}$;
- $f(x) = \frac{x+3}{6}$;
- $f(x) = \frac{3x+7}{2x-5}$;
- $f(x) = \sqrt{7-x}$;
- $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+1}}$;
- $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-6}$;
- $f(x) = \frac{x-1}{6x^2+11x-2}$;
- $f(x) = \frac{x^2+10}{2x^2-3x+5}$;
- $f(x) = \frac{x^3}{|x|-7}$;
- $f(x) = \frac{x-5,2}{|x|+2}$;
- $f(x) = \frac{13}{x-\sqrt{x^2}}$;
- $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$;
- $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x-3}$;
- $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2x-3}{6x-3}$;
- $f(x) = \sqrt{x-6} - \frac{4}{\sqrt{5-x}}$;
- $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{7x+8}{x^2+4x}$;

$$18) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}} - \frac{3x-1}{x^2-x-6}; \quad 21) f(x) = \frac{5x+1}{\sqrt{9-|x|}};$$

$$19) f(x) = \sqrt{x^2-4x}; \quad 22) f(x) = \frac{x+3}{|x|-4} - \frac{x}{x^2+x}.$$

$$20) f(x) = \sqrt{4+4x-3x^2};$$

14. Знайдіть область значень функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x} + 9; \quad 6) f(x) = \sqrt{x^4+16} + 4;$$

$$2) f(x) = x^2 + 3; \quad 7) h(x) = \sqrt{-|x-2|};$$

$$3) g(x) = 7 - x^2; \quad 8) \varphi(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{-x-4};$$

$$4) \varphi(x) = 3 + 4x + x^2; \quad 9) \varphi(x) = \sqrt{25-|x|};$$

$$5) h(x) = |x| - 6; \quad 10) h(x) = -\frac{5}{x^2+5}.$$

15. Знайдіть нулі функції:

$$1) f(x) = 4x^2 - 5x + 1; \quad 4) f(x) = \sqrt{16-x^2};$$

$$2) f(x) = \sqrt{x+4}; \quad 5) f(x) = \sqrt{x^2+3};$$

$$3) f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}; \quad 6) f(x) = (x+1)\sqrt{x}.$$

16. На рисунку 13 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) $f(-4)$; $f(-3,5)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$;
- 2) значення x , при яких $f(x) = -2$; $f(x) = -1$; $f(x) = 1$;
- 3) нулі функції;

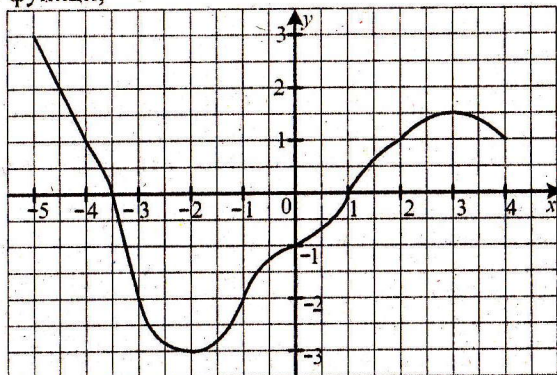


Рис. 13

- 4) найбільше і найменше значення функції;
 - 5) область значень функції;
 - 6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
 - 7) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення a .
17. На рисунку 14 зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, знайдіть:
- 1) нулі функції;
 - 2) множину розв'язків нерівності $f(x) \geq 0$;
 - 3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

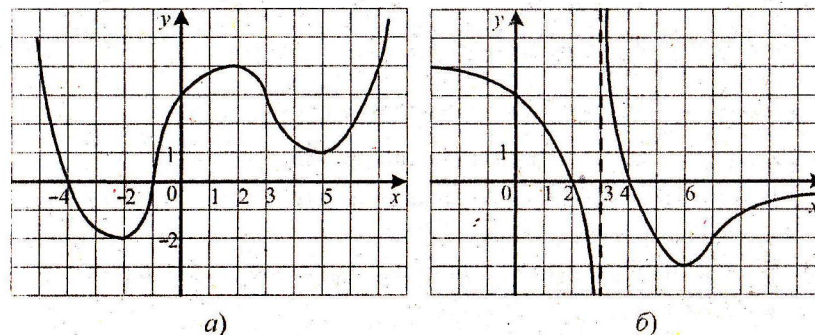


Рис. 14

18. Побудуйте графік функції, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції:

$$1) f(x) = 1 - 2x; \quad 4) f(x) = 3; \quad 7) f(x) = 2x^2 - 4x;$$

$$2) f(x) = 0,3x + 2; \quad 5) f(x) = \frac{12}{x}; \quad 8) f(x) = 3 - x^2;$$

$$3) f(x) = 4x; \quad 6) f(x) = -\frac{5}{x}; \quad 9) f(x) = 4x - 3 - x^2.$$

19. Побудуйте графік функції, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ \frac{x}{2} - 1, & \text{якщо } -2 \leq x < 4, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x \geq 4; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2 - 2x + 1, & \text{якщо } -1 < x < 3, \\ 4, & \text{якщо } x \geq 3; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 3x-4, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x < 4, \\ 4-0,5x, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$$

20. Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1};$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2};$$

$$2) f(x) = \frac{2x + 6}{x^2 + 3x};$$

$$4) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x + 1}.$$

21. Доведіть, що функція:

$$1) f(x) = \frac{8}{x+3} \text{ спадає на проміжку } (-3; +\infty);$$

$$2) f(x) = -x^2 - 4x \text{ зростає на проміжку } (-\infty; -2].$$

Парні і непарні функції

22. Відомо, що $f(-6) = -10$. Знайдіть $f(6)$, якщо функція f є:

1) парною; 2) непарною.

23. Чи є функція $f(x) = |x|$ парною, якщо її областю визначення є множина:

1) $[-8; 8]$; 2) $(-7; -2] \cup [2; 7)$; 3) $[-5; 5]$; 4) $(8; +\infty)$?

24. Чи є парною або непарною функція:

$$1) f(x) = -5x^8;$$

$$8) f(x) = (x+4)^2 - (x-4)^2;$$

$$2) f(x) = 4x^5 + 2x^2;$$

$$9) f(x) = \frac{x^2 + 8x}{2x + 16};$$

$$3) f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16};$$

$$10) f(x) = \frac{|x|}{x};$$

$$4) f(x) = \sqrt{3 - |x|};$$

$$11) f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2};$$

$$5) f(x) = x^7 - 3x^5 + x;$$

$$12) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 4x}?$$

$$6) f(x) = \frac{5}{x^4 + 4x^2};$$

$$7) f(x) = (x-8)(x+6) + 2x;$$

25. На рисунку 15 зображено частину графіка функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є:

1) парною; 2) непарною.

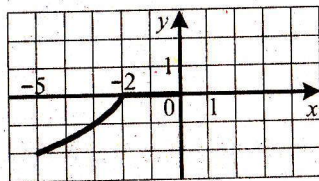


Рис. 15

Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

26. На рисунку 16 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

$$1) y = f(x) + 3;$$

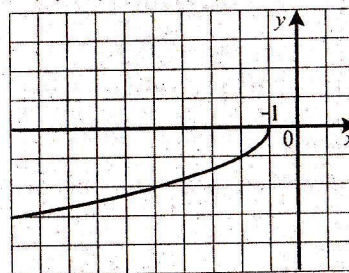
$$3) y = f(x+1);$$

$$5) y = -f(x);$$

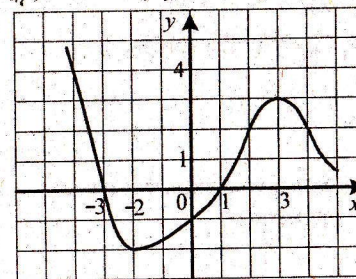
$$2) y = f(x) - 1;$$

$$4) y = f(x-2);$$

$$6) y = -1 - f(x).$$



а)



б)

Рис. 16

27. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{12}{x};$$

$$3) y = \frac{12}{x} + 3;$$

$$5) y = \frac{12}{x+3};$$

$$7) y = \frac{3x+12}{x};$$

$$2) y = \frac{12}{x} - 2;$$

$$4) y = \frac{12}{x-3};$$

$$6) y = \frac{12}{x+1} + 1;$$

$$8) y = \frac{2x+8}{x-2}.$$

28. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{x};$$

$$4) y = \sqrt{x+2} + 3;$$

$$7) y = 1 - \sqrt{x+1};$$

$$2) y = \sqrt{x} + 1;$$

$$5) y = -\sqrt{x};$$

$$8) y = 3 - \sqrt{x-2}.$$

$$3) y = \sqrt{x-2};$$

$$6) y = -1 - \sqrt{x};$$

29. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{5x};$$

$$5) y = \sqrt{2x+6};$$

$$2) y = \sqrt{\frac{x}{6}};$$

$$6) y = \sqrt{3x+12} + 2;$$

$$3) y = 5\sqrt{x};$$

$$7) y = -3\sqrt{x-1} + 4;$$

$$4) y = \frac{1}{6}\sqrt{x};$$

$$8) y = \frac{1}{5}\sqrt{3x-6} - 1.$$

Побудова графіків функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$

30. Побудуйте графік функції:

$$1) y = 3 - 2x - x^2;$$

$$3) y = |3 - 2x - x^2|;$$

$$2) y = 3 - 2|x| - x^2;$$

$$4) y = |3 - 2|x| - x^2|.$$

31. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 - \sqrt{x}$;

3) $y = 2 - \sqrt{|x|}$;

2) $y = |2 - \sqrt{x}|$;

4) $y = |2 - \sqrt{|x|}|$.

32. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$;

3) $y = |x - 2|$;

5) $y = 2|x|$;

2) $y = |x| - 2$;

4) $y = ||x| - 2|$;

6) $y = |x + 3| - 4$.

33. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{4}{|x|}$;

2) $y = \left| \frac{4}{x} - 1 \right|$;

3) $y = \left| \frac{4}{x-1} \right|$;

4) $y = \frac{4}{|x|-1}$.

Обернена функція

34. Які з графіків, зображених на рисунку 17, є графіками оборотних функцій?

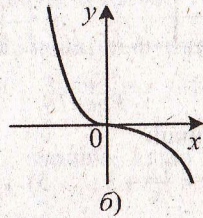
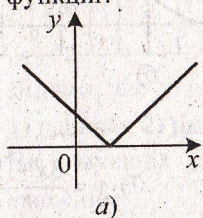
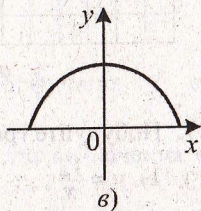


Рис. 17



35. Чи є оборотною функція:

1) $y = 2x - 3$;

3) $y = |x|, x \in [0; +\infty)$;

2) $y = |x|, x \in [-9; -2)$;

4) $y = |x|, x \in [-9; +\infty)$?

36. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x + 2$;

3) $y = \sqrt{x+4} + 2$;

2) $y = \frac{x}{x+3}$;

4) $y = x^2, x \in [0; 1; +\infty)$.

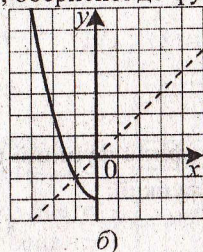
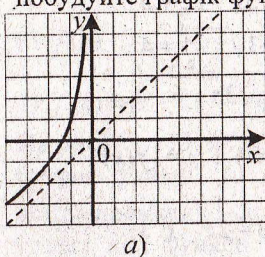
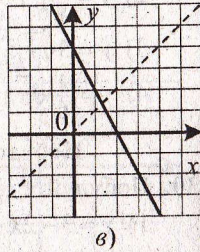
37. За допомогою графіка функції f , зображеного на рисунку 18, побудуйте графік функції g , оберненої до функції f .

Рис. 18



Метод інтервалів

38. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-4,6)(x+5) \leq 0$;

2) $(x+12)(x-4)(x-20) > 0$;

3) $(3x+5)(2x-7)(x-6) \leq 0$;

4) $(7+x)(x-2)(5-x) > 0$;

5) $(x+7,2)(3-x)(6-x) \leq 0$;

6) $(6x+18)(4-16x)(7x-21)(5-2x) \geq 0$.

39. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-3}{x+5} > 0$;

4) $\frac{x-2,3}{x+7,4} \leq 0$;

7) $\frac{(x-4)(x+6)}{x+4} \geq 0$;

2) $\frac{x+7}{x-10} < 0$;

5) $\frac{9-x}{x-20} \geq 0$;

8) $\frac{x-4,6}{(x+8)(x-15)} \leq 0$;

3) $\frac{x}{x+1,4} \geq 0$;

6) $\frac{4x+2,8}{1,8-0,3x} \leq 0$;

9) $\frac{x+6,1}{(14-x)(x-16)} \geq 0$.

40. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(x^2 - 10x)(x^2 - 49) \geq 0$;

3) $\frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 - 8x + 7} > 0$;

2) $(x^2 - 10x + 9)(x^2 + 4x) < 0$;

4) $\frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 36} \leq 0$.

41. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2 + 9)(x^2 - 3x - 4) \leq 0$;

6) $(x-2)^2(x^2 - 4x + 3) > 0$;

2) $(x+9)^2(x^2 - 3x - 4) < 0$;

7) $(x-2)^2(x^2 - 4x + 3) \geq 0$;

3) $(x+9)^2(x^2 - 3x - 4) \leq 0$;

8) $(x-2)^2(x^2 - 4x + 3) < 0$;

4) $(x+9)^2(x^2 - 3x - 4) > 0$;

9) $(x-2)^2(x^2 - 4x + 3) \leq 0$;

5) $(x+9)^2(x^2 - 3x - 4) \geq 0$;

10) $(x+2)^2(x-3)^4(x-4)^3 > 0$;

11) $(x+2)^2(x-3)^4(x-4)^3 \geq 0$;

12) $(x+2)^2(x-3)^3(x-4)^4(x-6)^5 \leq 0$;

13) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x + 6) \leq 0$;

14) $(x^2 + 2x - 10)(4x - x^2 - 5) \geq 0$.

42. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 10x + 25} > 0;$

6) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x - 5} \geq 0;$

2) $\frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 10x + 25} \geq 0;$

7) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x - 5} < 0;$

3) $\frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 10x + 25} < 0;$

8) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x - 5} \leq 0;$

4) $\frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 10x + 25} \leq 0;$

9) $\frac{x^2 - 6x + 8}{|x - 8|} \geq 0;$

5) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x - 5} > 0;$

10) $\frac{|x + 1|}{x^2 + 4x - 12} \geq 0.$

43. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x^2 + 5x}{x^2 - 25} \geq 0;$

2) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15} \leq 0.$

44. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x - 4}{x - 5} \leq \frac{3x + 8}{x - 5};$

3) $\frac{x^2 + 8x}{x + 6} \leq \frac{20}{x + 6};$

2) $\frac{7x}{3x - 4} \geq 1;$

4) $\frac{x^2 + 6x}{x - 3} \geq -16.$

45. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $(x + 6)(x - a) > 0;$

5) $(x - a)(x - 1)^2 \leq 0;$

2) $(x + 6)(x - a)^2 < 0;$

6) $\frac{x + 5}{x - a} \geq 0;$

3) $(x + 6)(x - a)^2 \leq 0;$

7) $\frac{(x + 2)(x - a)}{x + 2} \leq 0;$

4) $(x - a)(x - 1)^2 < 0;$

8) $\frac{(x + 2)(x - a)}{x - a} \geq 0.$

Степеневая функция з натуральним показником46. Укажіть, через які з даних точок проходить графік функції $y = x^3$: $A(-4; -64); B(3; -27); C(0,2; 0,008); D(-5; 125).$ 47. Функцію задано формулою $\varphi(x) = x^{16}$. Порівняйте:

1) $\varphi(3,5)$ і $\varphi(2,9);$

3) $\varphi(1,4)$ і $\varphi(-1,4);$

2) $\varphi(-8,1)$ і $\varphi(-6,5);$

4) $\varphi(-0,18)$ і $\varphi(0,14).$

48. Функцію задано формулою $\varphi(x) = x^{17}$. Порівняйте:

1) $\varphi(9,4)$ і $\varphi(7,8);$

3) $\varphi(-3,6)$ і $\varphi(3,6);$

2) $\varphi(-4,7)$ і $\varphi(-4,2);$

4) $\varphi(-6,4)$ і $\varphi(0,3).$

49. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 = -32;$

2) $x^3 = 343;$

3) $x^4 = 10\,000;$

4) $x^4 = -81.$

50. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння:

1) $x^{12} = 5 - a;$

2) $x^{18} = 12 + 4a - a^2?$

51. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 - 2;$

2) $y = (x - 2)^3;$

3) $y = x^4 + 2;$

4) $y = -\frac{1}{4}x^4.$

52. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^8$ на проміжку:

1) $[-2; 0];$

2) $[1; 2];$

3) $[-2; 2];$

4) $(-\infty; -1].$

53. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^5$ на проміжку: 1) $[-3; 2];$ 2) $(-\infty; -2].$ 54. Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $y = x^n$, якщо:

1) $f(-6) > f(-5);$

3) $f(5) < f(6);$

5) $f(-6) > f(5);$

2) $f(6) > f(-5);$

4) $f(6) = f(-6);$

6) $f(-6) < f(-5)?$

Степеневая функция з цілим показником55. Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:

1) $A(-1; 5);$

2) $B\left(2; \frac{1}{32}\right);$

3) $C(-3; -243);$

4) $D\left(\frac{1}{3}; 243\right)?$

56. При якому значенні a графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через точку: 1) $A\left(\frac{1}{2}; 8\right);$ 2) $B\left(-4; \frac{1}{64}\right)?$ 57. Дано функцію $f(x) = x^{-15}$. Порівняйте:

1) $f(5)$ і $f(-12);$

2) $f(1,9)$ і $f(2,4);$

3) $f(-50)$ і $f(-30).$

58. Дано функцію $f(x) = x^{-26}$. Порівняйте:

1) $f(-3,9)$ і $f(-2,5);$

3) $f(19)$ і $f(16);$

2) $f(0,4)$ і $f(-0,4);$

4) $f(-26)$ і $f(3).$

59. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-4} - 3;$

2) $y = (x - 3)^{-4};$

3) $y = \frac{1}{3}x^{-2}.$

60. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-3}$ на проміжку: 1) $\left[\frac{1}{4}; 3\right]$; 2) $[-4; -2]$; 3) $[5; +\infty)$.

61. Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

- 1) $f(-12) < f(-16)$; 3) $f(-12) > f(-16)$;
2) $f(-12) < f(16)$; 4) $f(16) > f(12)$?

Означення кореня n -го степеня

62. Знайдіть значення кореня:

- 1) $\sqrt[4]{16}$; 2) $\sqrt[3]{0,027}$; 3) $\sqrt[3]{-100\,000}$; 4) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}}$.

63. Обчисліть значення виразу:

- 1) $0,6\sqrt[3]{8000} - \frac{5}{3}\sqrt[4]{81}$;
2) $\sqrt[3]{-216} + 4(\sqrt[5]{5})^6 - 3\sqrt[3]{512}$;
3) $2(-\sqrt[12]{12})^{12} - 30\sqrt[3]{0,001} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}\right)^5$;
4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} \cdot \sqrt[6]{\frac{64}{729}} + (-5\sqrt{3})^2 - (-\sqrt[14]{14})^{11}$;
5) $\sqrt[8]{0,00000256} + 54\left(-\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\right)^3 + 6\sqrt[8]{1,5^8}$;
6) $(-\sqrt[5]{18})^5 + \sqrt[10]{4^5} - 2\sqrt[3]{-125} + \sqrt[9]{12^9} - 100\sqrt[4]{0,0625}$.

64. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt[6]{-x-1}$; 2) $y = \sqrt[8]{-x^3}$; 3) $y = \sqrt[3]{x-4}$; 4) $y = \sqrt[4]{5x-x^2}$.

65. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^9 = 512$; 5) $x^{12} = 1$; 9) $(x+2)^3 = 125$;
2) $x^5 = 6$; 6) $x^4 = 1296$; 10) $(x-5)^4 = 256$;
3) $x^7 = -10$; 7) $x^6 = 8$; 11) $5x^8 - 95 = 0$;
4) $x^4 = \frac{1}{81}$; 8) $x^4 = -625$; 12) $7x^6 + 14 = 0$.

66. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = 1,2$; 4) $\sqrt[4]{x} + 5 = 0$; 7) $\sqrt[4]{6x} - 4 = 0$;
2) $\sqrt[7]{x} = 2$; 5) $\sqrt[3]{x} + 5 = 0$; 8) $\sqrt[4]{6x-4} = 0$;
3) $\sqrt[4]{x} - 6 = 0$; 6) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - 3 = 0$; 9) $\sqrt[4]{6x-4} = 2$.

67. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^6 - 6x^3 - 16 = 0$; 3) $x^{16} + x^8 - 30 = 0$.
2) $x^8 - 84x^4 + 243 = 0$;

68. Оцініть значення x , якщо:

- 1) $6 \leq \sqrt[3]{x} \leq 10$; 2) $0,3 < \sqrt[4]{x} < 0,4$.

69. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

- 1) $a\sqrt[8]{x-1} = 0$; 4) $\sqrt[4]{x-2} = a$; 7) $x^7 = a - 10$;
2) $\sqrt[5]{(a-1)x} = 0$; 5) $x^6 = 8 - a$; 8) $x^4 = a^2 + 3a$.
3) $a\sqrt[6]{x-1} = a$; 6) $(a-3)x^{10} = 8$;

Властивості кореня n -го степеня

70. Обчисліть значення кореня:

- 1) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$; 3) $\sqrt[5]{32 \cdot 0,00001}$; 5) $\sqrt[8]{0,5^8 \cdot 3^{16}}$;
2) $\sqrt[4]{0,0016 \cdot 81}$; 4) $\sqrt[3]{7^6 \cdot 2^9}$; 6) $\sqrt[6]{\frac{6^{12} \cdot 5^6}{2^{18} \cdot 3^{18}}}$.

71. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[4]{4}$; 6) $\frac{\sqrt[3]{6^{10} \cdot 3^5}}{\sqrt[3]{3^{14} \cdot 6^7}}$;
2) $\sqrt[5]{1000} \cdot \sqrt[5]{100}$;
3) $\sqrt[3]{0,054} \cdot \sqrt[3]{4}$;
4) $\sqrt[7]{7^4 \cdot 2^9} \cdot \sqrt[7]{7^3 \cdot 2^5}$;
5) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}}$;
7) $\sqrt[3]{\sqrt{37} + 8} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{37} - 8}$;
8) $\sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}}$;
9) $\sqrt[5]{12\sqrt{3} - 3\sqrt{21}} \cdot \sqrt[5]{12\sqrt{3} + 3\sqrt{21}}$.

72. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[6]{x^6}$, якщо $x \geq 0$; 5) $\sqrt[4]{81x^{16}y^{20}z^4}$, якщо $y \leq 0$, $z \geq 0$;
2) $\sqrt[8]{y^8}$, якщо $y \leq 0$; 6) $4,5a^2 \sqrt[6]{64a^{18}}$, якщо $a \leq 0$;
3) $\sqrt[7]{a^7}$; 7) $\frac{m^7 n^6 k^5}{\sqrt[8]{m^8 n^{16} k^{40}}}$, якщо $m > 0$, $k < 0$;
4) $\sqrt[3]{125a^9 c^{12}}$; 8) $-0,6x^4 \cdot \sqrt[4]{256x^8 y^{28}}$, якщо $y \leq 0$.

73. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[4]{(5-x)^4}$;
- 2) $\sqrt[6]{(m-3)^6}$, якщо $m \leq 3$;
- 3) $\sqrt[8]{(y+1)^8}$, якщо $y \geq -1$;
- 4) $(x-12) \sqrt[10]{\frac{1024}{(12-x)^{10}}}$, якщо $x < 12$.

74. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[4]{b}$;
- 2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{c}}$;
- 3) $\sqrt[6]{\sqrt{y}}$;
- 4) $\sqrt[35]{m^7}$;
- 5) $\sqrt[20]{a^{15}b^{10}}$.

75. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[4]{(3-\sqrt{10})^4}$;
- 2) $\sqrt[5]{(1-7\sqrt{2})^5}$;
- 3) $\sqrt[6]{(\sqrt{10}-\sqrt{7})^6}$;
- 4) $\sqrt[8]{(3-5\sqrt{3})^8} - \sqrt[3]{(3-4\sqrt{3})^3}$.

76. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt[4]{x^4} + x$, якщо $x \geq 0$;
- 2) $y = (\sqrt[6]{x+2})^6$;
- 3) $y = \sqrt[6]{(x+2)^6}$;
- 4) $y = \sqrt[4]{x^4} + 2x$;
- 5) $y = \sqrt[8]{(x-3)^5} \cdot \sqrt[8]{(x-3)^3}$;
- 6) $y = \frac{(x-4)^2}{\sqrt[4]{(x-4)^4}}$.

Тотожні перетворення виразів, які містять корені n -го степеня

77. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt[3]{24}$;
- 2) $\sqrt[4]{1875}$;
- 3) $\sqrt[5]{160}$;
- 4) $\sqrt[4]{243}$.

78. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{48x^{16}}$;
- 2) $\sqrt[4]{x^{17}}$;
- 3) $\sqrt[5]{-b^{12}}$;
- 4) $\sqrt[4]{x^{18}y^7}$;
- 5) $\sqrt[4]{810a^{26}b^{17}}$;
- 6) $\sqrt[3]{128m^{13}n^8}$;
- 7) $\sqrt[4]{-625a^{15}}$;
- 8) $\sqrt[6]{x^{14}y^{17}}$;
- 9) $\sqrt[4]{a^{13}b^{13}}$, якщо $a \leq 0, b \leq 0$;
- 10) $\sqrt[8]{m^{10}n^9}$, якщо $m \leq 0$;
- 11) $\sqrt[4]{x^{23}y^{18}z^{36}}$, якщо $z < 0$;
- 12) $\sqrt[6]{-m^{49}n^{20}}$, якщо $n \geq 0$.

79. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $3\sqrt{5}$;
- 2) $3\sqrt[3]{4}$;
- 3) $0,1\sqrt[4]{23}$;
- 4) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{500}$.

80. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $m\sqrt{6}$;
- 2) $m\sqrt{-m^3}$;
- 3) $m\sqrt[4]{m^5}$;
- 4) $3y\sqrt[5]{2y^2}$;
- 5) $a\sqrt[9]{6a}$;
- 6) $2b^4\sqrt[3]{\frac{3}{4b^2}}$;
- 7) $c\sqrt[8]{c^6}$, якщо $c \leq 0$;
- 8) $xy\sqrt[6]{xy^4}$, якщо $y > 0$;
- 9) $x^3y^7\sqrt[10]{x^8y^{12}}$, якщо $x < 0, y > 0$.

81. Спростіть вираз (змінні набувають невід'ємних значень):

- 1) $\sqrt[7]{a^3\sqrt{a}}$;
- 2) $\sqrt[8]{c^5\sqrt[3]{c^3}}$;
- 3) $\sqrt[9]{p^5\sqrt[4]{p^7}}$.

82. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{15}{\sqrt{3}}$;
- 2) $\frac{20}{\sqrt[3]{5}}$;
- 3) $\frac{24}{\sqrt[4]{216}}$;
- 4) $\frac{32}{\sqrt[3]{16}}$;
- 5) $\frac{6}{\sqrt[5]{27}}$;
- 6) $\frac{c^6}{\sqrt[9]{c^7}}$.

83. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{16}{\sqrt{7}-\sqrt{15}}$;
- 2) $\frac{24}{4+\sqrt{10}}$;
- 3) $\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{5}}$;
- 4) $\frac{7}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$.

84. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
- 2) $\frac{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$;
- 3) $\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}+3}$;
- 4) $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}$;
- 5) $\frac{\sqrt[8]{8a^5}-\sqrt[8]{32a^3}}{\sqrt[8]{2a^5}-\sqrt[8]{32a}}$;
- 6) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$.

85. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt[3]{3+\sqrt{10}} \cdot \sqrt[6]{19-6\sqrt{10}}$;
- 2) $\sqrt[4]{8-2\sqrt{15}} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

86. Спростіть вираз:

- 1) $(\sqrt[5]{a}-1)(\sqrt[5]{a}+1)-(\sqrt[5]{a}-2)^2$;
- 2) $\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-9}$;
- 3) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}$;
- 4) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}+4}{\sqrt[4]{a}-4} - \frac{\sqrt[4]{a}-4}{\sqrt[4]{a}+4}\right) \cdot \frac{16-\sqrt{a}}{32\sqrt[4]{a^3}}$;
- 5) $\frac{2\sqrt[8]{m}}{\sqrt[8]{m}-2} + \frac{\sqrt[8]{m}+7}{8-4\sqrt[8]{m}} \cdot \frac{32}{7\sqrt[8]{m}+\sqrt[4]{m}}$;

$$6) \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{xy} + \sqrt[3]{y}} \right) : \left(\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \right).$$

87. Доведіть, що значення виразу $\sqrt[3]{14\sqrt{2}+20} - \sqrt[3]{14\sqrt{2}-20}$ є число раціональне.

Функція $y = \sqrt[n]{x}$

88. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt[5]{x-6}; \quad 2) y = \sqrt[12]{7-x}; \quad 3) y = \sqrt[9]{\frac{x-9}{x-10}}; \quad 4) y = \sqrt[6]{x^2+8x-9}.$$

89. Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \sqrt[4]{x} + 15; \quad 2) y = -\sqrt[6]{x} - 1; \quad 3) y = \sqrt[5]{x} - 7.$$

90. Оцініть значення виразу $\sqrt[4]{x}$, якщо:

$$1) 0,0016 \leq x \leq 81; \quad 2) 625 < x < 1296.$$

91. Порівняйте:

$$1) \sqrt[4]{5,8} \text{ і } \sqrt[4]{4,9}; \quad 2) \sqrt{6} \text{ і } \sqrt[6]{210}; \quad 3) \sqrt[6]{3} \text{ і } \sqrt[5]{5};$$

$$2) \sqrt[5]{-42} \text{ і } \sqrt[5]{-45}; \quad 3) 4\sqrt[3]{2} \text{ і } 3\sqrt[3]{5}; \quad 4) \sqrt[3]{20\sqrt{2}} \text{ і } \sqrt{8}.$$

$$3) \sqrt[5]{34} \text{ і } 2; \quad 4) \sqrt{7} \text{ і } \sqrt[3]{18};$$

92. Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число: 1) $\sqrt[3]{42}$; 2) $\sqrt[4]{300}$; 3) $-\sqrt[3]{250}$?

93. Укажіть усі цілі числа, які розміщені на координатній прямій між числами:

$$1) 3 \text{ і } \sqrt[3]{250}; \quad 2) \sqrt[5]{-30} \text{ і } \sqrt[6]{750}.$$

94. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt[3]{x} + 1; \quad 2) y = \sqrt[3]{3+x}; \quad 3) y = \sqrt[3]{3-x}; \quad 4) y = -\sqrt[3]{|x|}.$$

Означення та властивості степеня з раціональним показником

95. Подайте степінь з дробовим показником у вигляді кореня:

$$1) 5^{\frac{1}{4}}; \quad 2) 3^{-\frac{1}{3}}; \quad 3) (xy)^{\frac{3}{7}}; \quad 4) (b+c)^{3,5};$$

$$5) 8^{\frac{7}{10}}; \quad 6) 6^{-\frac{4}{11}}; \quad 7) xy^{\frac{3}{7}}; \quad 8) b^{-\frac{2}{5}} + c^{1,8}.$$

96. Замініть арифметичний корінь степенем з дробовим показником:

$$1) \sqrt[4]{m}; \quad 2) \sqrt[5]{b^3}; \quad 3) \sqrt[9]{4^{-4}}; \quad 4) \sqrt[16]{(m-n)^{13}};$$

$$5) \sqrt[6]{a^5}; \quad 6) \sqrt[8]{4a}; \quad 7) \sqrt[3]{25}; \quad 8) \sqrt[16]{m^{13} - n^{13}}.$$

97. Обчисліть значення виразу:

$$1) 27^{\frac{1}{3}}; \quad 2) 64^{-\frac{5}{6}}; \quad 3) 0,0001^{-0,25}; \quad 4) 256^{0,375}; \quad 5) \left(2 \frac{23}{49}\right)^{-1,5}.$$

98. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = x^{\frac{6}{7}}; \quad 2) y = x^{-2,3}; \quad 3) y = (3-x)^{2,8}; \quad 4) y = (2x^2 - 5x + 2)^{-\frac{1}{6}}.$$

99. Подайте у вигляді степеня або добутку степенів вираз:

$$1) y^{3,4} \cdot y^{-1,8}; \quad 2) y^{\frac{17}{24}} \cdot y^{-\frac{3}{8}};$$

$$3) y^{\frac{15}{28}} : y^{\frac{6}{7}}; \quad 4) (y^{-4})^{0,9};$$

$$5) y^{\frac{5}{9}} \cdot y^{\frac{5}{12}} \cdot y^{-\frac{5}{6}}; \quad 6) \left(x^{\frac{10}{21}} y^{\frac{16}{35}}\right)^{\frac{49}{20}};$$

$$7) \left(y^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{3}{14}} \cdot \left(y^{\frac{17}{42}}\right)^{-\frac{21}{34}};$$

$$8) (y^6)^{-0,9} \cdot (y^{2,3})^4 : (y^{-2,5})^4;$$

$$9) \left(x^{\frac{5}{36}} y^{-\frac{40}{81}}\right)^{\frac{9}{20}} \cdot \left(x^{-\frac{15}{64}} y^{\frac{5}{32}}\right)^{\frac{8}{45}}.$$

100. Знайдіть значення виразу:

$$1) 5^{3,2} \cdot 5^{-2,8} \cdot 5^{2,6}; \quad 2) (3^{-0,9})^8 : 3^{-10,2};$$

$$3) \left(7^{\frac{16}{17}}\right)^{-\frac{51}{32}} \cdot 49^{1,25}; \quad 4) 625^{-2,25} \cdot 25^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{25}{9}};$$

$$5) \left(\frac{3^{-\frac{5}{7}} \cdot 5^{-\frac{5}{7}}}{15^{-1} \cdot 2^{\frac{2}{7}}}\right)^{-7};$$

$$6) \left(\frac{128^{\frac{3}{14}} \cdot 9^{\frac{5}{6}}}{3^{-\frac{1}{6}} \cdot 8^{\frac{1}{4}}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{64^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{\frac{9}{8}}}{27^2 \cdot 2^{-\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Перетворення виразів, які містять степені з дробовим показником

101. Спростіть вираз:

$$1) b^{\frac{1}{6}} \left(b^{\frac{1}{6}} - 4\right) - \left(b^{\frac{1}{6}} - 2\right)^2;$$

$$2) \left(b^{\frac{1}{8}} - c^{\frac{1}{4}}\right) \left(b^{\frac{1}{8}} + c^{\frac{1}{4}}\right) - \left(5b^{\frac{1}{8}} + 2c^{\frac{1}{4}}\right) \left(3b^{\frac{1}{8}} - 4c^{\frac{1}{4}}\right);$$

$$3) \left(a^{\frac{1}{24}} + b^{\frac{1}{24}}\right) \left(a^{\frac{1}{24}} - b^{\frac{1}{24}}\right) \left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}}\right) \left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}\right);$$

$$4) \left(x^{\frac{1}{9}} + 1\right) \left(x^{\frac{2}{9}} - x^{\frac{1}{9}} + 1\right) - x^{\frac{1}{6}} \left(x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{12}}\right).$$

102. Скоротіть дріб:

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{m+4m^{\frac{5}{8}}}{m^{\frac{3}{8}}+4}; & 4) \frac{x+y}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}; & 7) \frac{a^{\frac{2}{3}}-16b^{\frac{2}{3}}}{a-64b}; \\
 2) \frac{7b^{\frac{4}{9}}}{b^{\frac{7}{12}}-b^{\frac{4}{9}}}; & 5) \frac{a-6a^{0.5}b^{0.5}+9b}{a^3b^{2.5}-3a^{2.5}b^3}; & 8) \frac{p-7p^{\frac{7}{9}}}{p-49p^{\frac{5}{9}}}; \\
 3) \frac{a-4b}{a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}}; & 6) \frac{4m-m^{\frac{3}{4}}}{4m^{\frac{5}{4}}-m}; & 9) \frac{15^{\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{4}}}{10^{\frac{1}{4}}+30^{\frac{1}{4}}}.
 \end{array}$$

103. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{l}
 1) \frac{a+a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{4a^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{10}}} \cdot \frac{16a^{\frac{1}{5}}+8a^{\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{10}}+b^{\frac{1}{5}}}{ab^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{1}{5}}b}; \\
 2) \frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}} - \frac{2n}{n-m} - \frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}; \\
 3) \frac{a^{\frac{1}{4}}-2,4}{a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{4}}-3}{5a^{\frac{1}{4}}-10} + \frac{a^{\frac{1}{4}}+2}{5a^{\frac{1}{4}}}; \\
 4) \left(\frac{m^{\frac{1}{5}}}{m^{\frac{1}{5}}+n^{\frac{1}{5}}} - \frac{m^{\frac{1}{5}}}{m^{\frac{1}{5}}-n^{\frac{1}{5}}} \right) : \frac{m^{\frac{6}{5}}n^{\frac{1}{5}}-m^{\frac{1}{5}}n^{\frac{6}{5}}}{m^{\frac{2}{5}}-n^{\frac{2}{5}}}; \\
 5) \left(\frac{8b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}+7} - \frac{15b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{2}}+14b^{\frac{1}{4}}+49} \right) : \frac{8b^{\frac{1}{4}}+41}{b^{\frac{1}{2}}-49} + \frac{7b^{\frac{1}{4}}-49}{b^{\frac{1}{4}}+7}
 \end{array}$$

Ірраціональні рівняння

104. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sqrt[5]{x+4} = -2; & 6) \sqrt{x+4} = \sqrt{2x+9}; \\
 2) \sqrt{x+4} = -2; & 7) \sqrt{x+4} = \sqrt{x^2+5x-1}; \\
 3) \sqrt{x+4} = 2; & 8) \sqrt{x+4} = -x-4; \\
 4) \sqrt{x+4} = \sqrt{5-2x}; & 9) \sqrt{x+4} = \sqrt{-x-6}; \\
 5) \sqrt{x+4} = \sqrt{-x-4}; & 10) (x-3)\sqrt{x^2-5x+4} = 2x-6.
 \end{array}$$

105. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{2-x} = \sqrt{2}; & 6) \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} = 8; \\
 2) \sqrt{5x+1} = 1-x; & 7) \sqrt{3x+1} + \sqrt{16-3x} = 5; \\
 3) x + \sqrt{2x^2-14x+13} = 5; & 8) 2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 1; \\
 4) \frac{x+1}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{2x+1}; & 9) \sqrt{x-3} = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4}; \\
 5) \sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2; & 10) 2\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+7} = \sqrt{x}; \\
 & 11) \sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} = \sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2}.
 \end{array}$$

106. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sqrt{x} - 6\sqrt[4]{x} + 8 = 0; & 6) x^2 + 2\sqrt{41-x^2} = 26; \\
 2) 2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 3 = 0; & 7) x^2 - x + \sqrt{x^2-x-2} = 8; \\
 3) x + 27\sqrt[4]{x} = 0; & 8) \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} - 2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = \frac{7}{3}; \\
 4) \sqrt{x-5} - 8 = 2\sqrt[4]{x-5}; & 9) x\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x^5} = 3; \\
 5) 4\sqrt[3]{x+2} + 5 = \sqrt[3]{x^2+4x+4}; & 10) 3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2+5x+1} = 2.
 \end{array}$$

107. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sqrt{x+6} - \sqrt[3]{4x+15} = 0; & 3) \sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6; \\
 2) \sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5; & 4) \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5.
 \end{array}$$

108. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{l}
 1) \sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} + 7; \\
 2) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 3.
 \end{array}$$

Системи ірраціональних рівнянь

109. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y} = 3, \\ \sqrt[4]{y} \cdot \sqrt[3]{x} = 10; \end{cases} & 4) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x+y = 25; \end{cases} \\
 2) \begin{cases} y-x = -7, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7; \end{cases} & 5) \begin{cases} \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x} = 5, \\ x-y = -35; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} \sqrt{2x-y+1} = 2, \\ \sqrt{x+y+1} = 3-y; \end{cases} & 6) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ xy = 27; \end{cases}
 \end{array}$$

$$7) \begin{cases} \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-y+2} = 3, \\ 2x+y \div 3; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} 5y^2 - 30x + 13 = 3\sqrt{y^2 - 6x + 3}, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \sqrt{\frac{3y-2x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{3y-2x}} = 2\sqrt{2}, \\ 3x^2 + x + 2 = y^2 - yx + 2y; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} x + 25y + 10\sqrt{xy} = 100, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

Ірраціональні нерівності

110. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt{4-x} > 3; \quad 2) \sqrt{4-x} < 3; \quad 3) \sqrt{4-x} > -4; \quad 4) \sqrt{4-x} < -4.$$

111. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt{3-2x} > \sqrt{x+1}; \quad 2) \sqrt{x^2-4} \leq \sqrt{2x^2-x-6};$$

$$3) \sqrt{2x-1} < x-2; \quad 4) \sqrt{x^2-3x-10} \leq 8-x;$$

$$5) \sqrt{2x+14} \geq x+3;$$

$$6) \sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x.$$

112. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (6-7x)\sqrt{x} \geq 0; \quad 2) \sqrt[5]{x} + 2\sqrt[10]{x} - 8 \geq 0;$$

$$3) \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \leq 5; \quad 4) 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} \leq 1.$$

113. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність $a\sqrt{3-x} \geq 1$.**Радіанне вимірювання кутів**114. Знайдіть радіанну міру кутів: 10° ; 20° ; 54° ; 60° ; 125° ; 270° .

115. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

$$\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{2}.$$

116. Радіус кола дорівнює 1 см. Знайдіть довжину дуги кола, яка відповідає куту в 6 радіан.

117. У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки $P_0(1; 0)$ на кут:

$$1) 126^\circ; \quad 2) 254^\circ; \quad 3) -110^\circ; \quad 4) 620^\circ; \quad 5) -290^\circ; \quad 6) \frac{\pi}{5};$$

$$7) \frac{4\pi}{3}; \quad 8) -\frac{7\pi}{6}; \quad 9) 0,8\pi; \quad 10) -1,9\pi; \quad 11) 4; \quad 12) -5?$$

Тригонометричні функції числового аргументу

118. Знайдіть значення виразу:

$$1) 6\sin 270^\circ - 3\cos 0^\circ + 4\operatorname{ctg} 90^\circ; \quad 2) \cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2};$$

$$3) \cos 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ;$$

$$5) \sqrt{(\operatorname{ctg} 30^\circ + 2)^2} + \sqrt{(\operatorname{tg} 60^\circ - 2)^2}.$$

$$4) \frac{\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot 4\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\cos \pi + 2\sin \frac{\pi}{2}};$$

119. Знайдіть значення виразу $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$ при:

$$1) \alpha = 75^\circ, \beta = 15^\circ;$$

$$2) \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{12}.$$

120. Чи можлива рівність:

$$1) \sin \alpha = \frac{2}{3};$$

$$3) \cos \alpha = \frac{\pi}{3};$$

$$2) \cos \alpha = -\sqrt[3]{0,6};$$

$$4) \sin \alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}?$$

121. При яких значеннях a можлива рівність:

$$1) \sin x = a + 6;$$

$$2) \cos x = a^4 + 1?$$

122. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$$1) 1 + 3\sin \alpha;$$

$$2) \cos^2 \alpha - 5;$$

$$3) \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}.$$

123. Знайдіть область значень виразу:

$$1) \frac{1}{4 + \cos 5x};$$

$$2) \frac{2}{5\sin x - 4};$$

$$3) \operatorname{tg}^6 x - 4.$$

Знаки значень тригонометричних функцій

124. Який знак має:

$$1) \cos 260^\circ;$$

$$3) \operatorname{ctg} 310^\circ;$$

$$5) \operatorname{tg} 4;$$

$$2) \sin 185^\circ;$$

$$4) \operatorname{tg}(-220^\circ);$$

$$6) \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}?$$

125. Визначте знак виразу:

$$1) \operatorname{ctg} 204^\circ \sin 164^\circ;$$

$$2) \cos 100^\circ \sin(-193^\circ);$$

$$3) \cos 5 \operatorname{ctg} 2,4.$$

126. Кутом якої чверті є кут α , якщо відомо, що:

$$1) \sin \alpha < 0 \text{ і } \operatorname{tg} \alpha > 0;$$

$$2) |\operatorname{tg} \alpha| - \operatorname{tg} \alpha = 0?$$

127. Порівняйте:

$$1) \cos 40^\circ \text{ і } \cos 240^\circ;$$

$$3) \sin \frac{17\pi}{10} \text{ і } \cos \frac{3\pi}{10};$$

$$2) \operatorname{tg} 130^\circ \text{ і } \operatorname{ctg}(-160^\circ);$$

$$4) \operatorname{tg} 5 \text{ і } \sin 2,5.$$

Парність і непарність тригонометричних функцій

128. Знайдіть значення виразу:

$$1) 8\sin^3(-45^\circ) - \sqrt{2} \operatorname{ctg}(-45^\circ) + \cos(-45^\circ);$$

$$2) 2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 10\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

129. Чи є парною або непарною функція, задана формулою:

- 1) $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
- 2) $f(x) = \cos x + \operatorname{ctg} x$;
- 3) $f(x) = \frac{x \operatorname{tg} x}{2 - \cos x}$;
- 4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \cos x$;
- 5) $f(x) = \frac{\sin x}{|x| - 3}$;
- 6) $f(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{4}}?$

Періодичні функції

130. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sin 405^\circ$;
- 2) $\cos 390^\circ$;
- 3) $\operatorname{tg} 1110^\circ$;
- 4) $\sin(-900^\circ)$;
- 5) $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$;
- 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$.

131. Покажіть, що число T є періодом функції f :

- 1) $f(x) = \sin(5x - 1)$, $T = \frac{4\pi}{5}$;
- 2) $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2} - \frac{\pi}{7}\right)$, $T = \frac{8}{3}$;
- 3) $f(x) = |\sin x|$, $T = \pi$;
- 4) $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$, $T = \pi$.

132. Покажіть, що число $T = 2$ не є періодом функції $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

133. Знайдіть найменший додатний період функції:

- 1) $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{4} + 2\right)$;
- 2) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Побудова графіків тригонометричних функцій

134. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sin x - 2$;
- 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
- 3) $y = \sin 3x$;
- 4) $y = \frac{1}{2} \sin x$;
- 5) $y = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$;
- 6) $y = \frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) - 2$.

135. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \cos x + 1$;
- 2) $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$;
- 3) $y = \cos \frac{x}{2}$;
- 4) $y = -3 \cos x$;
- 5) $y = -3 \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$;
- 6) $y = -3 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

136. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
- 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + 2$;
- 3) $y = \operatorname{ctg} 2x$.

137. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = |\operatorname{tg} x|$;
- 2) $y = \operatorname{ctg} |x|$;
- 3) $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{6}\right|$.

138. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = (\sqrt{\operatorname{tg} x})^2$;
- 2) $y = \operatorname{ctg} |x| - \operatorname{ctg} x$;
- 3) $y = \sqrt{\cos^2 x - \cos x}$;
- 4) $y = \sqrt{-\cos^2 x}$;
- 5) $y = \sqrt{\cos 2x + 1}$;
- 6) $y = \frac{\sin |x|}{\sin x}$;
- 7) $y = \frac{\cos x + |\cos x|}{\sin x - |\sin x|}$.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

139. Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

- 1) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ і $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{22}}{5}$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} + 1$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} - 1$;
- 3) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{7}$;
- 4) $\sin \alpha = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ і $\cos \alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$?

140. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута γ , якщо:

- 1) $\sin \gamma = 0,2$;
- 2) $\cos \gamma = -\frac{3}{8}$ і $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$;
- 3) $\operatorname{tg} \gamma = 5$ і $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$;
- 4) $\operatorname{ctg} \gamma = -\sqrt{5}$ і $\frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.

141. Спростіть вираз:

- 1) $\cos^2 \varphi - 1$;
- 2) $\cos^2 3\gamma + \sin^2 3\gamma + \operatorname{tg}^2 4\gamma$;
- 3) $3\cos \frac{\alpha}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} - 2\sin \frac{\alpha}{4}$;
- 4) $\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \beta - \frac{\sin^2 \beta - 1}{1 - \cos^2 \beta}$;
- 5) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;
- 6) $\left(1 - \sin \frac{\beta}{4}\right) \left(1 + \sin \frac{\beta}{4}\right)$;
- 7) $(1 + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \beta)^2$;
- 8) $\operatorname{ctg} x - \frac{\sin x}{1 - \cos x}$;
- 9) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$;
- 10) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + 2\cos^2 \alpha$;
- 11) $\frac{1 - \operatorname{ctg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \gamma}$;
- 12) $\frac{\cos^2 \beta + \sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} - \operatorname{tg}(-\beta)$.

142. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$;

2) $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha$;

3) $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

4) $\frac{\sqrt{3} - 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}}$;

5) $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) = -1$.

143. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $5 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha$; 2) $4 \sin^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$.

144. Побудуйте графік функції:

$y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$;

2) $y = \operatorname{tg} x |\cos x|$.

145. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{3}} + \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{3}}$, якщо $2\pi < \alpha < 3\pi$;

2) $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$, якщо $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

3) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta) + \operatorname{ctg}^2 \beta (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

146. Дано: $\sin \alpha - \cos \alpha = a$. Знайдіть:

1) $\sin \alpha \cos \alpha$; 3) $\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha}$; 5) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$;

2) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$; 4) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$; 6) $\cos \alpha + \sin \alpha$.

147. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}$;

2) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 5$.

148. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $5 \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha$.

Формули додавання

149. Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right)$;

3) $\sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin \alpha + \cos \alpha$; 4) $\frac{\sin \alpha + 2 \sin(60^\circ - \alpha)}{2 \cos(30^\circ - \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha}$.

150. Спростіть вираз:

1) $\cos 2\beta \cos 5\beta + \sin 2\beta \sin 5\beta$;

2) $\sin 53^\circ \cos 7^\circ + \cos 53^\circ \sin 7^\circ$;

3) $\cos(4^\circ + \alpha) \sin(\alpha - 41^\circ) - \cos(\alpha - 41^\circ) \sin(\alpha + 4^\circ)$.

151. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$;

2) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;

3) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$;

4) $\cos^2 \alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) = 1,5$.

152. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 + \operatorname{tg} 47^\circ \operatorname{tg} 17^\circ}{\operatorname{tg} 47^\circ - \operatorname{tg} 17^\circ}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$.

153. Доведіть тотожність:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha$$
.

154. Користуючись формулами додавання, знайдіть:

1) $\cos 105^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 105^\circ$.

155. Дано: $\cos \alpha = -0,6$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Знайдіть $\sin(60^\circ - \alpha)$.156. Дано: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$.Знайдіть $\cos(\alpha + \beta)$.

157. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$;

2) $3 \sin \alpha - \cos \alpha$.

Формули зведення

158. Зведіть до тригонометричної функції кута α :

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$;

5) $\cos^2(\pi - \alpha)$;

2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

4) $\sin(\alpha - \pi)$;

6) $\operatorname{ctg}^2(270^\circ + \alpha)$.

159. Зведіть до значення тригонометричної функції додатного аргументу, меншого від 45° (або $\frac{\pi}{4}$):

- | | | |
|------------------------------------|---|--------------------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} 104^\circ$; | 5) $\sin 410^\circ$; | 9) $\cos 1325^\circ$; |
| 2) $\sin 253^\circ$; | 6) $\sin(-244^\circ)$; | 10) $\operatorname{tg} 2000^\circ$; |
| 3) $\cos 295^\circ$; | 7) $\operatorname{tg} 2,1\pi$; | 11) $\sin 6,3\pi$; |
| 4) $\operatorname{tg} 168^\circ$; | 8) $\operatorname{ctg} \frac{15\pi}{7}$; | 12) $\cos \frac{27\pi}{8}$. |

160. Обчисліть:

- | | | |
|------------------------------------|---|---|
| 1) $\sin 210^\circ$; | 4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; | 7) $\cos 855^\circ$; |
| 2) $\operatorname{tg} 120^\circ$; | 5) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$; | 8) $\sin \frac{37\pi}{6}$; |
| 3) $\cos(-315^\circ)$; | 6) $\cos 13\pi$; | 9) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$. |

161. Знайдіть значення виразу:

- $4\sin 225^\circ - 6\cos 120^\circ + \operatorname{tg} 300^\circ + 3\operatorname{ctg} 240^\circ$;
- $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\cos\frac{13\pi}{4}\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;
- $\operatorname{ctg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ + \dots + \operatorname{ctg} 160^\circ$;
- $\sin 463^\circ \cos 373^\circ + \cos 103^\circ \sin 193^\circ$.

162. Спростіть вираз:

- $\cos(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
- $\frac{\sin(\beta - \pi)\cos(2\pi - \beta)\sin(2\pi + \beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\operatorname{ctg}(\pi - \beta)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}$;
- $\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha)\right)^2 - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha)}$.

163. Відомо, що α , β , γ — кути трикутника. Доведіть, що $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \sin \frac{\gamma}{2}$.

164. Знайдіть значення виразів $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$, якщо

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} \text{ і } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

165. Доведіть тотожність:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \cos^2 \alpha.$$

Формули подвійного аргументу

166. Виразіть дані тригонометричні функції через функції аргументу, що вдвічі менший від даного:

- | | | | |
|------------------------------|----------------------------------|----------------------|---|
| 1) $\sin \frac{\alpha}{2}$; | 3) $\operatorname{tg} 4\alpha$; | 5) $\cos 4$; | 7) $\sin\left(\beta + \frac{3\pi}{5}\right)$; |
| 2) $\cos 7\alpha$; | 4) $\sin(\alpha - \beta)$; | 6) $\sin 12\alpha$; | 8) $\cos\left(\frac{6x}{7} - 60^\circ\right)$. |

167. Спростіть вираз:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{\sin 70^\circ}{2\cos 35^\circ}$; | 6) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$; |
| 2) $\frac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$; | 7) $\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$; |
| 3) $\cos^4(45^\circ + \alpha) - \sin^4(45^\circ + \alpha)$; | 8) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha\right)}{1 - 2\cos^2 4\alpha}$. |
| 4) $\cos^2 2\alpha + 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; | |
| 5) $\frac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha} - \frac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha}$; | |

168. Знайдіть значення виразу:

- | | | |
|--|-----------------------------|--|
| 1) $\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30'$; | 2) $1 - 2\sin^2 15^\circ$; | 3) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$. |
|--|-----------------------------|--|

169. Дано: $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Знайдіть:

- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------------------|
| 1) $\sin 2\alpha$; | 2) $\cos 2\alpha$; | 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$. |
|---------------------|---------------------|----------------------------------|

170. Дано: $\operatorname{tg} \gamma = 4$. Знайдіть $\operatorname{tg}\left(2\gamma + \frac{\pi}{4}\right)$.

171. Подайте у вигляді добутку вираз:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1) $1 + \cos 4\beta$; | 3) $1 - \cos 80^\circ$; | 5) $1 - \sin 8\alpha$; |
| 2) $1 - \cos \frac{\gamma}{3}$; | 4) $1 + \cos \frac{6\alpha}{5}$; | 6) $1 + \sin \frac{4\pi}{9}$. |

172. Понизьте степінь виразу:

$$1) \sin^2 \frac{\alpha}{4}; \quad 2) \cos^2 5x; \quad 3) \sin^2(3\beta + 5^\circ); \quad 4) \cos^2\left(\frac{\varphi}{6} - \frac{\pi}{14}\right).$$

173. Доведіть тотожність:

$$1) 2 \cos^2(45^\circ - \alpha) - \sin 2\alpha = 1;$$

$$2) \frac{1 + \cos 8\alpha}{1 - \cos 8\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2 4\alpha - \cos^2 4\alpha = \sin^2 4\alpha;$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$4) \frac{1 + \sin(60^\circ + 4\alpha)}{1 - \sin(60^\circ + 4\alpha)} = \operatorname{ctg}^2(15^\circ - 2\alpha).$$

174. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin 8\alpha}{1 + \cos 8\alpha} \cdot \frac{\cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\sin 4\alpha}{1 - \cos 4\alpha}; \quad 4) \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)(1 + \sin 2\alpha);$$

$$2) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8} - 2\alpha\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{8} - 2\alpha\right)}; \quad 5) \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\left(1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)}$$

$$3) \frac{\cos 24^\circ}{1 + \sin 24^\circ};$$

175. Спростіть вираз $\sqrt{(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \cdot 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.176. Спростіть вираз $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}}$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.177. Доведіть, що $\sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \sin 42^\circ = \frac{1}{16}$.**Формули суми і різниці тригонометричних функцій**

178. Перетворіть у добуток:

$$1) \sin 100^\circ - \sin 40^\circ;$$

$$2) \cos 3\alpha + \cos 11\alpha;$$

$$3) \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8};$$

$$4) \cos 2\alpha + \cos 8\alpha;$$

$$5) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right);$$

$$6) \cos\left(3\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha\right);$$

$$7) \sin(x - y) + \sin(x + y);$$

$$8) \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

179. Перетворіть у добуток:

$$1) \cos 70^\circ - \sin 36^\circ; \quad 2) \sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}; \quad 3) \sin \alpha + \cos \alpha.$$

180. Перетворіть у добуток:

$$1) \operatorname{tg} 34^\circ + \operatorname{tg} 26^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg} 3\varphi - \operatorname{tg} 10\varphi;$$

$$3) \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

181. Перетворіть у добуток:

$$1) 2 \cos \alpha - 1;$$

$$2) \sqrt{3} + 2 \sin \alpha;$$

$$3) \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 1.$$

182. Доведіть тотожність:

$$1) \sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 8\alpha - \sin 7\alpha = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \sin \frac{13\alpha}{2};$$

$$2) \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$$

$$4) \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).$$

183. Спростіть вираз:

$$1) \frac{(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha) \cos 10\alpha}{1 - \cos 6\alpha};$$

$$2) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2;$$

$$3) \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)};$$

$$4) \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right).$$

184. Доведіть тотожність:

$$1) 1 - \sin \alpha - \cos \alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$2) \sin \alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 4\alpha = 4 \cos \alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{2}\right).$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

185. Перетворіть у суму добуток:

$$1) \sin \alpha \sin 7\alpha;$$

$$2) \sin 36^\circ \cos 24^\circ;$$

3) $\cos \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$;

4) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

186. Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) = 0,5$;

2) $\sin 4\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \cos 5\alpha = \sin 6\alpha \cos \alpha$;

3) $\sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right) = \sin^2 \frac{\beta}{2}$;

4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\alpha\right) = \sin 2\alpha$.

Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

187. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x = 1$;

5) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

2) $\cos x = \frac{1}{2}$;

4) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

6) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

188. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} + 2\right) = \frac{3}{8}$;

2) $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

8) $\sin \frac{x}{4\pi} = 0$;

3) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 1$;

9) $\sin(8x + 1) = \frac{\pi}{5}$;

4) $\operatorname{tg}\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$;

10) $\cos\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{4x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{18}\right) = -1$;

11) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3x}{5}\right) = -1$;

6) $\cos(3x - 5) = 0$;

12) $\operatorname{tg}(10 - 5x) = -4$.

189. Розв'яжіть рівняння:

1) $4 - 4 \sin\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{24}\right) = 0$;

3) $\sqrt{3} - 3 \operatorname{ctg}\left(10x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{3} = 0$;

4) $5 - 5 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - 4x\right) = 0$.

190. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin \pi x^2 = 0$;

2) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1$;

4) $\sin(\sin(\cos x)) = 0$.

191. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

192. Скільки коренів рівняння $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$?193. Знайдіть усі корені рівняння $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.194. При яких значеннях a має розв'язки рівняння:

1) $\cos x = 3 - a$;

3) $(a - 5) \cos x = a + 2$;

2) $\sin \frac{x}{5} = a^2 - 8a + 17$;

4) $(a^2 - 6a) \sin x = a^2 - 2a - 24$?

195. При яких значеннях a дане рівняння має єдиний корінь на вказаному проміжку:

1) $(x - a) \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0, \left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right]$;

2) $(x + a) \left(\operatorname{ctg} x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 0, \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$?

196. Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ залежно від значення a .Функції $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$

197. Знайдіть:

1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{arctg} 1$;

5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

7) $\operatorname{arctg}(-1)$;

2) $\arccos \frac{1}{2}$;

4) $\operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;

6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

8) $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

198. Знайдіть значення виразу:

1) $\arccos 0 + \arcsin 1 + \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$;

2) $5 \arccos 1 - 6 \arcsin(-1) + 3 \operatorname{arctg} 1 + 2 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

199. Обчисліть:

$$1) \operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad 3) \operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arcsin \frac{1}{2}\right);$$

$$2) \sin(2 \operatorname{arctg}(-1)); \quad 4) \cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg} 1\right).$$

200. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \arcsin(2x-3); \quad 3) y = \operatorname{arctg} \frac{6}{\sqrt{x+5}}.$$

$$2) y = \arccos(x^2-2);$$

201. Знайдіть область значень функції:

$$1) y = 4 \arcsin x + \frac{\pi}{3}; \quad 2) y = 2 - 5 \operatorname{arctg} 3x.$$

202. Обчисліть:

$$1) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5); \quad 2) \sin\left(\arcsin \frac{\pi}{7}\right); \quad 3) \cos\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

203. Обчисліть:

$$1) \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{11}\right)\right); \quad 2) \arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{9}\right); \quad 3) \arccos(\cos 5).$$

204. Обчисліть:

$$1) \cos\left(\arcsin \frac{4}{7}\right); \quad 3) \cos(\operatorname{arctg} 0,3); \quad 5) \operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{4}{9}\right);$$

$$2) \sin\left(\arccos \frac{1}{4}\right); \quad 4) \sin(\operatorname{arctg} 8); \quad 6) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-10)).$$

205. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}; \quad 3) \arcsin(5x-6) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2) \arccos(3-x) = \frac{3\pi}{4};$$

206. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \arcsin x < -\frac{\pi}{4}; \quad 3) \operatorname{arctg}(1-2x) \geq -\frac{\pi}{4}.$$

$$2) \arccos \frac{4x}{5} \geq \frac{3\pi}{4};$$

207. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x; \quad 4) y = \sin(\arcsin x);$$

$$2) y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}; \quad 5) y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x);$$

$$3) y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}|x|}; \quad 6) y = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

208. При яких значеннях a має розв'язок рівняння:

$$1) \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + a; \quad 5) \frac{\arccos x - \frac{2\pi}{3}}{\operatorname{arctg} x - a} = 0;$$

$$2) \arccos x = \sin a; \quad 3) \operatorname{arctg} x = \operatorname{ctg} a;$$

$$4) \frac{\arcsin x - a}{\arcsin x + \frac{\pi}{3}} = 0; \quad 6) \frac{\operatorname{arctg} x + a}{\sqrt{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}} = 0?$$

Розв'язування тригонометричних рівнянь

209. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 6 \cos^2 4x + \cos 4x - 1 = 0; \quad 3) 5 \sin \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{2} + 3 = 0;$$

$$2) 2 \cos^2 x + \sqrt{2} \sin x = 0; \quad 4) \operatorname{tg} \frac{x}{3} - 5 \operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 4.$$

210. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0;$$

$$2) \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0;$$

$$3) 6 \sin^2 x - 1,5 \sin 2x - 5 \cos^2 x = 2;$$

$$4) 2 \sin x - 3 \cos x = 3.$$

211. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 7x - \cos x = 0;$$

$$2) \sin 12x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right);$$

$$3) \sin 10x - \cos 4x = 0;$$

$$4) \sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0;$$

$$5) \sin x - \sin 2x + \sin 5x - \sin(\pi + 8x) = 0.$$

212. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin^2 \frac{x}{6} = \frac{1}{2};$$

$$2) 2 \cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0;$$

$$3) \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2;$$

$$4) \cos^4\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4 3x = \frac{1}{4}.$$

213. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 1; \quad 2) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 2x.$$

214. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin(x + 60^\circ) \cos(x + 30^\circ) = \frac{1}{2}; \quad 3) \cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x;$$

$$2) \sin 3x \sin x + \cos 4x = 0; \quad 4) 12 \cos^2 \frac{x}{2} = 9 - 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}.$$

215. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{\sin 5x}{1 - \cos 5x} = 0; \quad 3) \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x;$$

$$2) \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x} = 0; \quad 4) \frac{1 + \sin x - \cos x}{\sin 2x} = 0.$$

216. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{13 - 6 \operatorname{tg} x} = 2 \operatorname{tg} x - 3; \quad 3) \sqrt{1 - 3 \cos x - \cos 2x} - 2 \sin x = 0.$$

$$2) \sqrt{6 \sin x} = -2 \cos x;$$

217. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння:

$$5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$$

218. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння:

$$1 + \cos 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2.$$

219. Знайдіть усі корені рівняння $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x - \cos^2 x = -2$, які задовольняють нерівність $0 < x < 4$.220. Скільки коренів рівняння $\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2} \cos 3x$ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$?221. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 - 4x^2} \left(\sin \pi x - \sqrt{5} \sin \frac{\pi x}{2} \right) = 0$.222. При яких значеннях a має розв'язки рівняння:

$$1) \sin^2 x - (4a - 9) \sin x + (a - 5)(3a - 4) = 0;$$

$$2) \sin x - \cos 2x = 4a^2 + 4a + 3;$$

$$3) 5 \cos^2 x - 2(2a - 1) \cos x + a^2 - 2a + 2 = 0;$$

$$4) 5 \cos 3x + 12 \sin 3x = a - 5;$$

$$5) \sin^4 x + (2a - 1) \cos^2 x - 6a - 1 = 0?$$

223. При яких значеннях a рівняння $\sin^2 x - \left(a + \frac{1}{2}\right) \sin x + \frac{a}{2} = 0$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$ має: 1) один корінь; 2) два корені?

Розв'язування тригонометричних нерівностей

224. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) \cos x > -\frac{1}{2}; \quad 7) \operatorname{ctg} x > 1;$$

$$2) \sin x \geq -\frac{1}{2}; \quad 5) \operatorname{tg} x < 1; \quad 8) \operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}.$$

$$3) \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 6) \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3};$$

225. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \cos 2x < \frac{1}{2}; \quad 4) \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2};$$

$$2) \sin \frac{x}{6} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 5) \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{10}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$3) \cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 6) \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

226. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) |\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) -3 \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}; \quad 4) |\operatorname{ctg} x| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

227. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sin^2 3x > \frac{1}{4}; \quad 3) 3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 4 \geq 0;$$

$$2) \sin 2x \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} \cos 2x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 4) 2 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x + 1 \leq 0.$$

Системи тригонометричних рівнянь

228. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \cos 6x + \cos 6y = 2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ 2 \sin x - \sin y = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{3}{4}; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

229. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1. \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Варіант 1

Контрольна робота № 1

Тема. Множини. Функція та її основні властивості

- 1.° Знайдіть перетин і об'єднання множин A і B , де A — множина дільників числа 18, B — множина дільників числа 24.
- 2.° Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\frac{(x-7)(x+10)}{x-2}}$.
- 3.° Задайте функцію, обернену до функції $y = \frac{1}{6}x + 2$.
- 4.* Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$. Користуючись побудованим графіком, знайдіть:
- 1) нулі функції;
 - 2) проміжки знакосталості;
 - 3) проміжки зростання і проміжки спадання;
 - 4) область значень функції.
- 5.* Дослідіть на парність функцію:
- 1) $f(x) = 4x^7 - 2x^3$;
 - 2) $f(x) = x^2 - 3x^4$;
 - 3) $f(x) = x^3 + x^6$.
- 6.* Знайдіть множину розв'язків нерівності:
- 1) $(x-6)(x+3)^2(x+1) > 0$;
 - 2) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 8x + 16} < 0$.
- 7.** Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-4)^2(x+7)^3}{x-6} \geq 0$.

Контрольна робота № 2

Тема. Степенева функція. Корінь n -го степеня та його властивості

- 1.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{16}$. Порівняйте:
- 1) $f(5,6)$ і $f(2,4)$;
 - 2) $f(-2,8)$ і $f(-7,3)$;
 - 3) $f(4,5)$ і $f(-4,5)$;
 - 4) $f(0,3)$ і $f(-0,8)$.
- 2.° Знайдіть значення виразу:
- 1) $3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{625}$;
 - 2) $\sqrt[3]{27 \cdot 0,008}$;
 - 3) $\sqrt[4]{2^{12} \cdot 5^8}$;
 - 4) $\frac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{2}}$.
- 3.° Розв'яжіть рівняння:
- 1) $x^3 = 1000$;
 - 2) $x^5 = 6$;
 - 3) $x^4 = 16$;
 - 4) $x^6 = 12$;
 - 5) $x^7 = -128$;
 - 6) $x^4 = -81$;
 - 7) $\sqrt[3]{x} = 2$;
 - 8) $\sqrt[4]{x} = -1$.

- 4.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-4}$ на проміжку $[2; 4]$.
- 5.* Спростіть вираз:
- 1) $\sqrt[18]{a^3}$;
 - 2) $\sqrt[3]{m^2 \sqrt[4]{m}}$;
 - 3) $\sqrt[8]{a^8}$, якщо $a \geq 0$;
 - 4) $\sqrt[4]{(a-1)^4}$, якщо $a \leq 1$.
- 6.* Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:
- 1) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$;
 - 2) $\frac{4}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}}$.
- 7.** Спростіть вираз $\left(\frac{8}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}-1}$.

Контрольна робота № 3

Тема. Степінь з раціональним показником і його властивості. Ірраціональні рівняння

- 1.° Знайдіть значення виразу:
- 1) $5 \cdot 64^{\frac{1}{2}}$;
 - 2) $125^{-\frac{1}{3}}$;
 - 3) $32^{0,8}$;
 - 4) $\left(2\frac{7}{9} \right)^{-1,5}$.
- 2.° Подайте вираз у вигляді степеня або добутку степенів:
- 1) $a^{0,6} \cdot a^{3,4}$;
 - 2) $a^{-\frac{3}{7}} a^{\frac{5}{14}}$;
 - 3) $\left(a^{\frac{5}{12}} \right)^{\frac{3}{5}}$;
 - 4) $a^{\frac{7}{15}} : a^{\frac{1}{6}}$;
 - 5) $(a^{-0,8})^4 \cdot (a^{-1,4})^{-2} : (a^{0,4})^{-6}$;
 - 6) $\left(a^{\frac{5}{18}} b^{\frac{10}{27}} \right)^{\frac{9}{5}}$.
- 3.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+8} = x$.
- 4.* Скоротіть дріб:
- 1) $\frac{m-3m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{3}}-3}$;
 - 2) $\frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}$;
 - 3) $\frac{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}$.
- 5.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-4} + 2\sqrt{x-4} = 35$.
- 6.* Спростіть вираз $\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$.
- 7.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+5} - \sqrt{8-x} = 1$.

Контрольна робота № 4

Тема. Тригонометричні функції та їх властивості. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

1.° Знайдіть значення виразу $2\lg \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos \pi - 2\sin \frac{\pi}{4}$.

2.° Спростіть вираз:

1) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$; 2) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

3.° Визначте знак виразу:

1) $\sin 124^\circ \cos 203^\circ \operatorname{tg}(-280^\circ)$; 2) $\sin \frac{7\pi}{10} \cos \frac{13\pi}{12}$.

4.° Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = x^2 + 4 \cos x$; 2) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 - \sin x}$.

5.° Побудуйте графік функції $f(x) = \cos 3x$, укажіть її проміжки зростання і спадання.

6.° Спростіть вираз:

1) $\operatorname{ctg} x - \frac{\sin x}{1 - \cos x}$; 2) $\sin(-\alpha) \cos(-\alpha)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)$.

7.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $2\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha$.

8.** Побудуйте графік функції $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

Контрольна робота № 5

Тема. Формули додавання та їх наслідки

1.° Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$; 4) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 8\alpha}$;
2) $\sin \beta \cos 4\beta + \cos \beta \sin 4\beta$; 5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)$;
3) $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin \alpha}$; 6) $2\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 8\alpha$.

2.° Дано: $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Знайдіть $\sin(\alpha + \beta)$.

3.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;
2) $\frac{\left(\sin(\pi - 3\alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) + \cos(\pi + \alpha)\right)}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} = -\sin 4\alpha$.

4.** Знайдіть найбільше значення виразу $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha$.

Контрольна робота № 6

Тема. Тригонометричні рівняння і нерівності

1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$; 3) $\cos 3x + \cos x = 0$.

2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos x < \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cos^2 x + 7\sin x - 5 = 0$;
2) $2\sin^2 x + 1,5\sin 2x - 3\cos^2 x = 1$;
3) $\sin x + \sin 3x + \cos x = 0$.

4.** Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2\cos 3x$.

Контрольна робота № 7

Тема. Узагальнення і систематизація знань учнів

1.° Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{2\sin x - 1}$.

2.° Обчисліть значення виразу $16^{-0,75} \cdot 8^{-\frac{5}{12}} \cdot 4^{\frac{5}{8}}$.

3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x - 2} + 2 = x$; 2) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.

4.° Порівняйте $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$.

5.° Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{\cos \alpha}{\cos 4\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha}\right) \cdot \frac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\sin 3\alpha} = 4\sin 2\alpha.$$

6.° Знайдіть корені рівняння:

1) $\cos 2x - 2\cos x + 1 = 0$; 2) $\sqrt[3]{x+4} - \sqrt{x+4} = 2$.

7.** Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg} x |\cos x|$.

Варіант 2

Контрольна робота № 1

Тема. Множини. Функція та її основні властивості

- 1.° Знайдіть перетин і об'єднання множин A і B , де A — множина дільників числа 12, B — множина дільників числа 30.
- 2.° Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\frac{(x-8)(x+9)}{x-1}}$.
- 3.° Задайте функцію, обернену до функції $y = 3x - 1$.
- 4.° Побудуйте графік функції $y = -2\sqrt{x} + 4$. Користуючись побудованим графіком, знайдіть:
- 1) нулі функції;
 - 2) проміжки знакосталості;
 - 3) проміжки зростання і проміжки спадання;
 - 4) область значень функції.
- 5.° Дослідіть на парність функцію:
- 1) $f(x) = 6x^6 - 5x^2$;
 - 2) $f(x) = x^3 - 5x^5$;
 - 3) $f(x) = x^4 - x$.
- 6.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:
- 1) $(x+8)(x+2)^2(x-4) < 0$;
 - 2) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 12x + 36} > 0$.
- 7.° Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-2)(x-3)^4}{(x-1)^5} \leq 0$.

Контрольна робота № 2

Тема. Степенева функція. Корінь n -го степеня та його властивості

- 1.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:
- 1) $f(3,6)$ і $f(1,8)$;
 - 2) $f(-1,7)$ і $f(-2,5)$;
 - 3) $f(-5,4)$ і $f(5,4)$;
 - 4) $f(0,9)$ і $f(-0,2)$.
- 2.° Знайдіть значення виразу:
- 1) $5\sqrt[4]{16} - 2\sqrt[3]{-216} - \sqrt[6]{64}$;
 - 2) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$;
 - 3) $\sqrt[6]{3^{12} \cdot 2^{18}}$;
 - 4) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{243}}$.
- 3.° Розв'яжіть рівняння:
- 1) $x^3 = 27$;
 - 2) $x^7 = 10$;
 - 3) $x^6 = 64$;
 - 4) $x^8 = 3$;
 - 5) $x^5 = -32$;
 - 6) $x^4 = -16$;
 - 7) $\sqrt[5]{x} = 1$;
 - 8) $\sqrt[6]{x} = -3$.

- 4.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-3}$ на проміжку $[-3; -1]$.
- 5.° Спростіть вираз:
- 1) $\sqrt[28]{a^7}$;
 - 2) $\sqrt[5]{b^3} \sqrt[4]{b^3}$;
 - 3) $\sqrt[6]{m^6}$, якщо $m \leq 0$;
 - 4) $\sqrt[10]{(x-2)^{10}}$, якщо $x \geq 2$.
- 6.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:
- 1) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$;
 - 2) $\frac{6}{\sqrt[3]{5+1}}$.
- 7.° Спростіть вираз $\left(\frac{3\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2} - \frac{2\sqrt[3]{x}-14\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-4} - \frac{\sqrt[6]{x}+3}{\sqrt[6]{x}-2} \right) : \frac{4}{\sqrt[6]{x}+2}$.

Контрольна робота № 3

Тема. Степінь з раціональним показником і його властивості. Ірраціональні рівняння

- 1.° Знайдіть значення виразу:
- 1) $3 \cdot 81^{\frac{1}{4}}$;
 - 2) $32^{-\frac{1}{5}}$;
 - 3) $16^{1,25}$;
 - 4) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{-0,5}$.
- 2.° Подайте вираз у вигляді степеня або добутку степенів:
- 1) $c^{3,8} \cdot c^{1,2}$;
 - 2) $c^{-\frac{4}{9}} c^{\frac{11}{18}}$;
 - 3) $\left(c^{\frac{15}{28}}\right)^{\frac{14}{45}}$;
 - 4) $c^{\frac{5}{8}} : c^{\frac{1}{6}}$;
 - 5) $(c^{0,6})^6 \cdot (c^{0,4})^{-7} : (c^{-1,6})^{-3}$;
 - 6) $\left(b^{\frac{7}{30}} c^{\frac{3}{10}}\right)^{\frac{10}{21}}$.
- 3.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+48} = -x$.
- 4.° Скоротіть дріб:
- 1) $\frac{x+7x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{5}}+7}$;
 - 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}$;
 - 3) $\frac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}+3m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}+6m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}}+9n^{\frac{1}{2}}}$.
- 5.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2} + \sqrt[4]{x-2} = 20$.
- 6.° Спростіть вираз $\frac{a+b}{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}} \cdot \frac{a^2b^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{5}{3}}b^2}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.
- 7.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+7} - \sqrt{2-x} = 2$.

Контрольна робота № 4

Тема. Тригонометричні функції та їх властивості. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

1.° Знайдіть значення виразу $3 \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{2} - 4 \cos \frac{\pi}{4}$.

2.° Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi$; 2) $\frac{\cos^2 \alpha - 1}{1 - \sin^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

3.° Визначте знак виразу:

1) $\cos 156^\circ \sin(-350^\circ) \operatorname{ctg} 230^\circ$; 2) $\cos \frac{13\pi}{15} \operatorname{ctg} \frac{23\pi}{18}$.

4.° Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = x^3 - 5 \sin x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 3 \cos x$.

5.° Побудуйте графік функції $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, укажіть її проміжки зростання і спадання.

6.° Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg} x - \frac{\cos x}{1 - \sin x}$; 2) $\frac{\cos^2(-\alpha)}{1 + \sin(-\alpha)}$.

7.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $6 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha$.

8.** Побудуйте графік функції $y = \sqrt{\cos x - 1}$.

Контрольна робота № 5

Тема. Формули додавання та їх наслідки

1.° Спростіть вираз:

1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$; 4) $\frac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}$;

2) $\cos 6\varphi \cos 4\varphi - \sin 6\varphi \sin 4\varphi$; 5) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$;

3) $\frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$; 6) $2 \cos 4\alpha \cos \alpha - \cos 3\alpha$.

2.° Дано: $\cos \alpha = 0,6$, $\sin \beta = -0,8$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть $\cos(\alpha + \beta)$.

3.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

2) $\frac{\left(\cos(2\pi - \alpha) + \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 5\alpha \right) \right) \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \sin(\pi + 5\alpha) \right)}{1 + \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 6\alpha \right)} = \sin 4\alpha$.

4.** Знайдіть найменше значення виразу $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$.

Контрольна робота № 6

Тема. Тригонометричні рівняння і нерівності

1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 6x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = -1$; 3) $\sin 5x + \sin x = 0$.

2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} x < -1$.

3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \sin^2 x - 11 \cos x - 1 = 0$;
2) $3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 2$;
3) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0$.

4.** Розв'яжіть рівняння $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \sin x$.

Контрольна робота № 7

Тема. Узагальнення і систематизація знань учнів

1.° Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[3]{2 \cos x - \sqrt{2}}$.

2.° Обчисліть значення виразу $81^{-2,25} \cdot 9^{-\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{25}{9}}$.

3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{7-x} + x = 5$; 2) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.

4.° Порівняйте $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt{2 \sqrt[3]{3}}$.

5.° Доведіть тотожність:

$\left(\frac{\cos 6\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos \alpha} \right) \cdot \frac{\sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 5\alpha} = 4 \cos 8\alpha$.

6.° Знайдіть корені рівняння:

1) $\cos 2x - 2 \sin x - 1 = 0$; 2) $\sqrt[3]{1-x} + 2 \sqrt[6]{1-x} = 3$.

7.** Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg} x |\sin x|$.

ПІДСУМКОВІ КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Підсумкова контрольна робота № 1

Тема. Функції, рівняння, нерівності. Степенева функція

Варіант 1

Частина перша

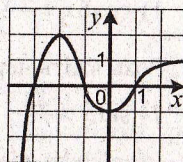
Завдання 1 – 16 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Яка область визначення функції $f(x) = \sqrt{1-x^2}$?

- А) R ; Б) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; В) $(-\infty; 1]$; Г) $[-1; 1]$.

2. Знайдіть нулі функції $y = x - \frac{4}{x}$.

- А) 4; Б) -2; 2; В) -4; 4; Г) 2.

3. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Укажіть проміжок спадання функції.

- А) $[-2; 0]$; Б) $[-1; 2]$; В) $[-1; 1]$; Г) $[-2; 1]$.

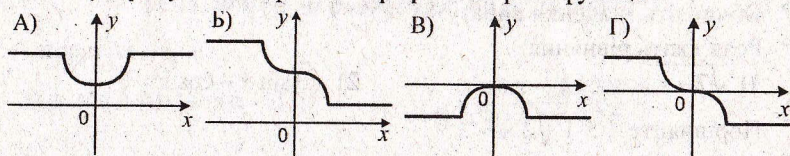
4. Область значень якої з функцій складається з одного числа?

- А) $y = \sqrt[4]{-x}$; Б) $y = \sqrt[3]{-x}$; В) $y = \sqrt[4]{-x^2}$; Г) $y = \sqrt[3]{-x^2}$.

5. Яка з наведених функцій є парною?

- А) $y = x^2 - 1$; Б) $y = x - 1$; В) $y = \sqrt{x} - 1$; Г) $y = \frac{2}{x}$.

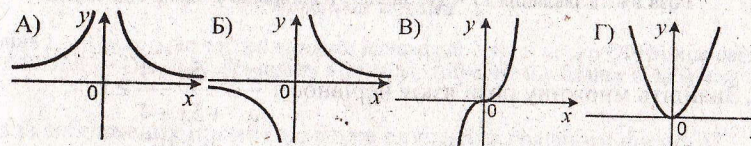
6. На якому з рисунків зображено графік непарної функції?

7. Яка функція є оберненою до функції $y = x + 4$?

- А) $y = -x + 4$; Б) $y = -x - 4$; В) $y = x + 4$; Г) $y = x - 4$.

8. Множиною розв'язків якої нерівності є проміжок $[-4; 3]$?

- А) $(x+4)(x-3) \leq 0$; Б) $(x+4)(x-3) < 0$; В) $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$; Г) $\frac{x+4}{x-3} < 0$.

9. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції $y = x^{-3}$.10. Дано функцію $f(x) = x^6$. Порівняйте $f(-3,4)$ і $f(-2,8)$.

- А) $f(-3,4) > f(-2,8)$; Б) $f(-3,4) = f(-2,8)$;
Б) $f(-3,4) < f(-2,8)$; Г) порівняти неможливо.

11. Знайдіть значення виразу $\sqrt[3]{0,027 \cdot 2^9}$.

- А) 1,2; Б) 0,12; В) 0,24; Г) 2,4.

12. Обчисліть значення виразу $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{125} - \frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$.

- А) 2; Б) 3; В) 4; Г) 5.

13. Спростіть вираз $\sqrt[3]{b\sqrt{b}}$.

- А) $\sqrt[5]{b^3}$; Б) $\sqrt[6]{b}$; В) \sqrt{b} ; Г) $\sqrt[3]{b}$.

14. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{5}{\sqrt[3]{9}}$.

- А) $\frac{5\sqrt[3]{9}}{9}$; Б) $\frac{5\sqrt[3]{9}}{3}$; В) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3}$; Г) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{9}$.

15. Спростіть вираз $\frac{x^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

- А) $x^{\frac{5}{2}}$; Б) $x^{\frac{5}{4}}$; В) $x^{\frac{1}{4}}$; Г) x .

16. Скоротіть дріб $\frac{a^{1,5}b + ab^{1,5}}{ab^{0,5} + a^{0,5}b}$.

- А) ab ; Б) $a^{0,5}b^{0,5}$; В) $a+b$; Г) $a^{0,5} + b^{0,5}$.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 17–20. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

17. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4} \geq 1$.
18. Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} \right) : \frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}$.
19. Яка область визначення функції $y = \sqrt[6]{x^2 - x - 2} + (x^2 - x - 2)^{-\frac{1}{6}}$?
20. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4x^2 - 3x - 1} = x + 1$.

Частина третя

Розв'язання задач 21 і 22 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

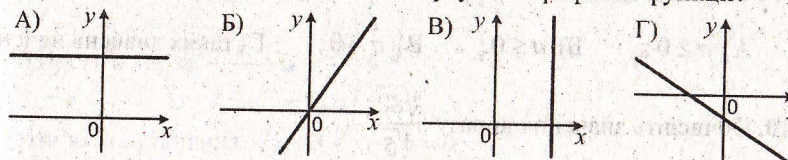
21. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{x-4}{x}$. Побудуйте графік знайденої функції та укажіть її проміжки зростання.
22. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 3x + 4$.

Варіант 2

Частина перша

Завдання 1–16 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть її правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Яка із зображених прямих не може слугувати графіком функції?



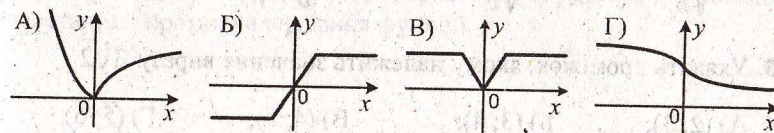
2. Графік функції
- $y = \sqrt[3]{x}$
- стисли у 3 рази до осі ординат і перенесли на 4 одиниці вгору. Графік якої функції було отримано?

A) $y = \sqrt[3]{3x} + 4$; Б) $y = \sqrt[3]{3x} - 4$; В) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x} + 4$; Г) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x} - 4$.

3. Функція
- $f(x) = x^2$
- визначена на множині
- D
- . У якому з наведених випадків ця функція є оборотною?

A) $D = R$; Б) $D = [-1; 1]$; В) $D = (-1; 1]$; Г) $D = [-1; 0]$.

4. На якому з рисунків зображено графік парної функції?



5. Укажіть пару рівносильних рівнянь.

A) $(4x-1)^2 = (3x+4)^2$ і $4x-1 = 3x+4$; Б) $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$ і $x^2 = 9$;
 Б) $2x-3 = 5-2x$ і $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{5-2x}{x-1}$; Г) $\sqrt{x-1} = x$ і $x-1 = x^2$.

6. Розв'яжіть нерівність
- $(x+2)(x-1)(3-x) < 0$
- .

A) $(-\infty; -3) \cup (-1; 2)$; В) $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$;
 Б) $(-3; -1) \cup (2; +\infty)$; Г) $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$.

7. Серед наведених функцій укажіть степеневу.

A) $y = x^6$; Б) $y = \frac{x}{6}$; В) $y = \frac{6}{x}$; Г) $y = 6x$.

8. Укажіть правильне твердження, якщо $f(x) = x^{-7}$.

- А) $f(1,1) > f(-1,1) > f(-2,1)$; В) $f(-2,1) > f(-1,1) > f(1,1)$;
 Б) $f(1,1) > f(-2,1) > f(-1,1)$; Г) $f(-1,1) > f(-2,1) > f(1,1)$.

9. Укажіть усі значення a , при яких виконується рівність $\sqrt[8]{a^8} = a$.

- А) $a \geq 0$; Б) $a \leq 0$; В) $a = 0$; Г) таких значень не існує.

10. Обчисліть значення виразу $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

- А) 4; Б) 8; В) 16; Г) 2.

11. Винесіть множник з-під знака кореня $\sqrt[6]{a^7 b^7}$, якщо $a < 0$ і $b < 0$.

- А) $ab\sqrt[6]{ab}$; Б) $-ab\sqrt[6]{ab}$; В) $ab\sqrt[6]{-ab}$; Г) $-ab\sqrt[6]{-ab}$.

12. Скоротіть дріб $\frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}$.

- А) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; Б) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$; В) $\frac{a}{b}$; Г) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

13. Укажіть проміжок, якому належить значення виразу $3\sqrt[3]{2}$.

- А) (2; 3); Б) (3; 4); В) (4; 5); Г) (5; 6).

14. Яка область визначення функції $y = (x-8)^{-0,4}$?

- А) \mathbb{R} ; Б) \emptyset ; В) $(8; +\infty)$; Г) $[8; +\infty)$.

15. Подайте у вигляді степеня вираз $\frac{y^{\frac{5}{6}} y^{\frac{2}{3}}}{y^{-0,5}}$.

- А) y^2 ; Б) y ; В) $y^{\frac{1}{2}}$; Г) $y^{-\frac{1}{2}}$.

16. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+6} = -x$.

- А) -2; Б) -2; 3; В) 3; Г) коренів немає.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 17–20. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

17. Знайдіть множину розв'язків нерівності $(x+9)(x-5)^2(x-8) \leq 0$.

18. Обчисліть значення виразу $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{8+4\sqrt{3}}$.

19. Спростіть вираз $\frac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1} : \frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{3}{2}}-1}$.

20. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[5]{x} + 3\sqrt[10]{x} - 10 = 0$.

Частина третя

Розв'язання задач 21 і 22 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

21. Розв'яжіть нерівність $\frac{4}{x+4} + \frac{1}{x+1} \geq 1$.

22. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{x}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

Варіант 3

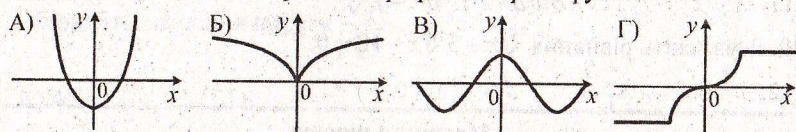
Частина перша

Завдання 1 – 16 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Яка з даних функцій є зростаючою на множині R ?

- А) $y = x^2$; Б) $y = \sqrt[3]{x}$; В) $y = \sqrt{x}$; Г) $y = -\frac{2}{x}$.

2. На якому з рисунків зображено графік непарної функції?



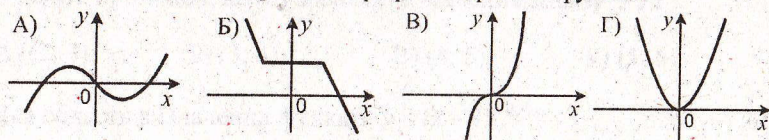
3. Яка область визначення функції $y = \sqrt[8]{\frac{x^2}{x-1}}$?

- А) $(-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$; В) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
Б) $(1; +\infty)$; Г) $(1; +\infty) \cup \{0\}$.

4. Яке з даних рівнянь рівносильне рівнянню $\frac{1}{x} = 0$?

- А) $\sqrt{x} = -x$; Б) $x^3 = -4$; В) $x^{\frac{1}{2}} = 0$; Г) $x^{-\frac{1}{3}} = -1$.

5. На якому з рисунків зображено графік оборотної функції?



6. Розв'яжіть нерівність $\frac{x+2}{x-4} \leq 0$.

- А) $[-2; 4]$; Б) $[-4; 2]$; В) $[-2; 4)$; Г) $(-4; 2]$.

7. Розв'яжіть рівняння $x^4 = 2$.

- А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$; В) $\sqrt[4]{2}$; Г) $-\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2}$.

8. При якій з наведених умов виконується рівність $(\sqrt[4]{a})^4 \cdot \sqrt[4]{b^4} = -ab$?

- А) $a > 0$ і $b > 0$; В) $a < 0$ і $b > 0$;
Б) $a > 0$ і $b < 0$; Г) $a < 0$ і $b < 0$.

9. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{24}{\sqrt[5]{8}}$.

- А) $3\sqrt[5]{2}$; Б) $3\sqrt[5]{8}$; В) $12\sqrt[5]{2}$; Г) $12\sqrt[5]{4}$.

10. Порівняйте $5\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[3]{250}$.

- А) $5\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{250}$; В) $5\sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{250}$;
Б) $5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{250}$; Г) порівняти неможливо.

11. Обчисліть значення виразу $16^{\frac{5}{4}} + (0,125)^{-\frac{2}{3}}$.

- А) 36; Б) 32; В) 57; Г) 40.

12. Знайдіть найменше значення функції $y = x^{-2}$ на проміжку $[-3; -2]$.

- А) 9; Б) $\frac{1}{9}$; В) 4; Г) $\frac{1}{4}$.

13. Укажіть область визначення функції $y = (1-x)^{-\frac{1}{5}}$.

- А) $(-\infty; 1)$; Б) $(-\infty; 1]$; В) $[1; +\infty)$; Г) $(1; +\infty)$.

14. Подайте у вигляді степеня вираз $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$.

- А) a^6 ; Б) a^{21} ; В) a^8 ; Г) a^{18} .

15. Скоротіть дріб $\frac{a - a^{\frac{2}{7}}}{a^{\frac{5}{7}} - 1}$.

- А) $a^{\frac{2}{7}}$; Б) $a^{\frac{5}{7}}$; В) $a^{\frac{2}{7}} - 1$; Г) $a^{\frac{2}{7}} + 1$.

16. Знайдіть суму коренів рівняння $\sqrt[6]{x-1} \cdot \sqrt[5]{x+2} \cdot \sqrt[4]{3-x} = 0$.

- А) 4; Б) 6; В) 2; Г) 3.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 17 – 20. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

17. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{x^3 - 2}{3}$.

18. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+15} = 2$.

19. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$?

20. Розв'яжіть нерівність $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.

Частина третя

Розв'язання задач 21 і 22 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

21. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{6}{5-x}$ зростає на проміжку $(5; +\infty)$.
22. Установіть графічно кількість коренів рівняння $x^{-2} = 5 - 2x$.

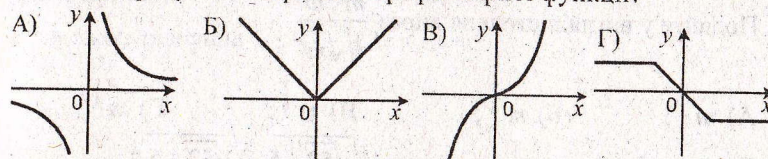
Варіант 4**Частина перша**

Завдання 1 – 16 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Яка з наведених функцій спадає на проміжку $(0; +\infty)$?

А) $y = x^6$; Б) $y = -\frac{6}{x}$; В) $y = x^{-6}$; Г) $y = \frac{x}{6}$.

2. На якому з рисунків зображено графік парної функції?



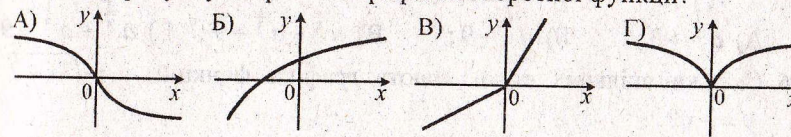
3. Функція $y = f(x)$ є непарною. Знайдіть $f(-6)$, якщо $f(6) = -2$.

А) 0; Б) -2; В) 2; Г) знайти неможливо.

4. Яка область визначення функції $y = 4\sqrt{\frac{x}{(x-1)^2}}$?

А) $(1; +\infty)$; Б) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; В) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$; Г) $[0; +\infty)$.

5. На якому рисунку зображено графік необоротної функції?



6. Яка множина розв'язків нерівності $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$?

А) $(-\infty; 2)$; Б) $(2; +\infty)$; В) $(0; 2)$; Г) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

7. Скільки коренів має рівняння $(x-3)(x-5)\sqrt{2-x} = 0$?

А) один; Б) два; В) три; Г) жодного.

8. Обчисліть значення виразу $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^3$.

А) 9; Б) 1; В) $\frac{1}{3}$; Г) $\frac{1}{9}$.

9. Знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = x^5 + 32$ з віссю абсцис.

А) $(2; 0)$; Б) $(-2; 0)$; В) $(0; 2)$; Г) $(0; -2)$.

10. Відомо, що $a < 0$ і $b > 0$. Яка з наведених рівностей є правильною?

- А) $\sqrt[6]{-ab} = \sqrt[6]{-a} \cdot \sqrt[6]{b}$; В) $\sqrt[6]{-ab} = \sqrt[6]{-a} \cdot \sqrt[6]{-b}$;
 Б) $\sqrt[6]{-ab} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{-b}$; Г) $\sqrt[6]{-ab} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b}$.

11. Порівняйте $2\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[4]{45}$.

- А) $2\sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{45}$; В) $2\sqrt[4]{3} > \sqrt[4]{45}$;
 Б) $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{45}$; Г) порівняти неможливо.

12. Подайте у вигляді степеня вираз $\frac{m\sqrt{m}}{\sqrt[3]{m}}$.

- А) $m^{\frac{4}{3}}$; Б) $m^{\frac{5}{6}}$; В) $m^{\frac{7}{6}}$; Г) $m^{\frac{1}{3}}$.

13. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$?

- А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

14. Спростіть вираз $a^{0,6} a^{4,4} a^{-3}$.

- А) a^8 ; Б) a^2 ; В) a^{-2} ; Г) a^3 .

15. Скоротіть дріб $\frac{a+27}{a^{\frac{1}{3}}+3}$.

- А) $a^{\frac{1}{3}}+3$; Б) $a^{\frac{2}{3}}+9$; В) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+9$; Г) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+9$.

16. Скільки спільних точок мають графіки функцій $y = \sqrt{3x-2}$ і $y = -x$?

- А) три; Б) дві; В) одну; Г) жодної.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 17–20. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

17. Спростіть вираз $\frac{a+5a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{7}{8}}+5} - \frac{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}}$.

18. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2-3x-4}{x^2+4x+3} \leq 0$.

19. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{23}{3-\sqrt[3]{4}}$.

20. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{\sqrt[5]{x}-7}{5}$.

Частина третя

Розв'язання задач 21 і 22 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

21. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}} + 2$. Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки спадання і проміжки зростання даної функції.

22. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-12} = 1$.

Підсумкова контрольна робота № 2

Тема. Тригонометричні функції. Тригонометричні рівняння і нерівності

Варіант 1

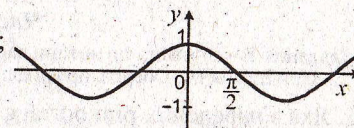
Частина перша

Завдання 1 – 16 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

- Обчисліть значення виразу $2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\frac{2\pi}{3}$.
А) -4; Б) 2; В) 0; Г) -1.
- Укажіть правильну нерівність.
А) $\sin 160^\circ < 0$; Б) $\cos 250^\circ > 0$; В) $\operatorname{tg} 140^\circ > 0$; Г) $\operatorname{ctg} 200^\circ > 0$.
- Яка з даних функцій є непарною?
А) $y = \frac{1}{\cos x}$; Б) $y = \sqrt{\cos x}$; В) $y = x + \cos x$; Г) $y = x \cos x$.
- Чому дорівнює найменше значення виразу $1 - 2\cos \alpha$?
А) -2; Б) -1; В) 0; Г) 1.
- Спростіть вираз $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$.
А) -1; Б) 1; В) $\operatorname{tg}^2 \alpha$; Г) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$.
- Знайдіть значення виразу $\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \sin 23^\circ$.
А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Г) 1.
- Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$.
А) $\cos \alpha + \sin \alpha$; Б) $2\sin \alpha$; В) $\cos \alpha - \sin \alpha$; Г) 0.
- Відомо, що $\cos(\alpha + \beta) = 0$ і $\sin \alpha = 1$. Знайдіть значення $\sin \beta$.
А) 2; Б) 1; В) 0; Г) -1.
- Спростіть вираз $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}$.
А) 2; Б) $2\cos \alpha$; В) $2\sin \alpha$; Г) $\sin \alpha \cos \alpha$.
- Обчисліть значення виразу $\frac{\cos 20^\circ - \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 80^\circ}$.
А) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; В) $\sqrt{3}$; Г) $-\sqrt{3}$.
- Яке з наведених рівнянь не має коренів?
А) $\sin x = \frac{1}{7}$; Б) $\cos x = \frac{8}{7}$; В) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{7}$; Г) $\operatorname{ctg} x = \frac{8}{7}$.

12. Графік якої функції зображено на рисунку?

А) $y = \sin x$; Б) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
В) $y = \sin(\pi + x)$; Г) $y = \sin(2\pi - x)$.



13. Знайдіть корені рівняння $\operatorname{tg} 2x = 0$.

А) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
В) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

14. Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А) $\pm \frac{5\pi}{2} + 6\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Б) $\pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
В) $\pm \frac{\pi}{2} + 6\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $\pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

15. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$.

А) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; Б) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) коренів немає.

16. Укажіть множину розв'язків нерівності $\sin x > -\frac{1}{2}$.

А) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
В) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 17 – 20. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

17. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$.

18. Спростіть вираз $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$.

19. Розв'яжіть рівняння $1 - \cos 6x = \sin 3x$.

20. Розв'яжіть нерівність $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) \geq \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$.

Частина третя

Розв'язання задач 21 і 22 повинні мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

21. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg} x |\cos x|$.

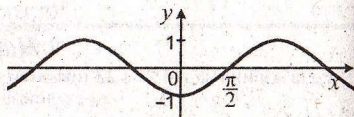
22. Доведіть тотожність $\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$.

Варіант 2

Частина перша

Завдання 1 – 16 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

- Яка з наведених рівностей є правильною?
 А) $|\sin 2| = \sin 2$; В) $|\sin 2| = \cos 2$;
 Б) $|\sin 2| = -\sin 2$; Г) $|\sin 2| = -\cos 2$.
- Яка з даних функцій не є ні парною, ні непарною?
 А) $y = x^2 \operatorname{tg} x$; Б) $y = x^2 + \sin x$; В) $y = x^2 + \cos x$; Г) $y = x \sin x$.
- Областю визначення періодичної функції $y = f(x)$ з періодом $T = 3$ є множина дійсних чисел. Чому дорівнює значення виразу $2f(-2) + 3f(10)$, якщо $f(1) = 5$?
 А) 25; Б) 15; В) 10; Г) 5.
- Як треба перенести паралельно графік функції $y = \cos x$, щоб отримати графік функції $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$?
 А) на $\frac{\pi}{4}$ одиниць управо; В) на $\frac{\pi}{4}$ одиниць угору;
 Б) на $\frac{\pi}{4}$ одиниць уліво; Г) на $\frac{\pi}{4}$ одиниць униз.
- Яка з наведених нерівностей виконується при всіх дійсних значеннях x ?
 А) $\cos x < 0,99$; Б) $\cos x > 1$; В) $\cos x > -1$; Г) $\cos x > -1,1$.
- Обчисліть значення виразу $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos 0$.
 А) $\frac{2\pi}{3}$; Б) $\frac{7\pi}{6}$; В) $\frac{4\pi}{3}$; Г) $\frac{5\pi}{6}$.
- Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$.
 А) $\sqrt{3}$; Б) $-\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Графік якої функції зображено на рисунку?
 А) $y = \sin(\pi - x)$; В) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
 Б) $y = \cos(\pi - x)$; Г) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- Яка множина значень функції $y = (\sin x + \cos x)^2$?
 А) $[0; 1]$; Б) $[0; 2]$; В) $[1; 2]$; Г) $[1; 3]$.



- Чому дорівнює значення виразу $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$?
 А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) 0; Г) 1.
- Спростіть вираз $\cos 8\alpha \cos 6\alpha - \sin 8\alpha \sin 6\alpha$.
 А) $\cos 2\alpha$; Б) $\sin 2\alpha$; В) $\cos 14\alpha$; Г) $\sin 14\alpha$.
- Спростіть вираз $\frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos \alpha}$.
 А) $2\cos 4\alpha$; Б) $\cos 4\alpha$; В) $2\cos 3\alpha$; Г) $\cos 3\alpha$.
- Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2$.
 А) $\pm \arccos 2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 Б) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) коренів немає.
- Скільки коренів рівняння $\sin x = 1$ належать проміжку $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right]$?
 А) жодного; Б) один; В) два; Г) безліч.
- Розв'яжіть рівняння $\arcsin x = \pi$.
 А) 0; Б) -1; В) 1; Г) коренів немає.
- Розв'яжіть нерівність $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 А) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; В) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 Б) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 17 – 20. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- Чому дорівнює значення виразу $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$?
- Спростіть вираз $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- Розв'яжіть рівняння $6\sin^2 x - 3\sin x \cos x - \cos^2 x = 1$.
- Знайдіть найбільше значення виразу $4\sin \alpha + 3\cos \alpha$.

Частина третя

Розв'язання задач 21 і 22 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

- Доведіть тотожність:
 $3 - 4\cos(4\alpha - 3\pi) - \cos(5\pi + 8\alpha) = 8\cos^4 2\alpha$.
- Побудуйте графік функції $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$.

Варіант 3

Частина перша

Завдання 1 – 16 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Знайдіть область значень функції $y = 2\cos x + 3$.

- А) $[-1; 1]$; Б) $[2; 4]$; В) $[1; 5]$; Г) $[-5; 5]$.

2. Чому дорівнює значення виразу $\lg(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2})$?

- А) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $\sqrt{3}$.

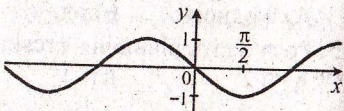
3. Яка область визначення функції $y = \sqrt{x \sin 4}$?

- А) $[-1; 1]$; Б) $[0; 1]$; В) $(-\infty; 0]$; Г) $[0; +\infty)$.

4. Графік якої функції зображено на рисунку?

- А) $y = \sin(\pi + x)$; Б) $y = \sin(\pi - x)$;

- В) $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$; Г) $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.



5. Спростіть вираз $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

- А) $1 + \sin^2 \alpha$; Б) $\sin^2 \alpha$; В) $\cos^2 \alpha$; Г) 1.

6. Обчисліть значення виразу $\sin 52^\circ \cos 38^\circ + \cos 52^\circ \sin 38^\circ$.

- А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) 1; Г) 0.

7. Спростіть вираз $\lg(\frac{\pi}{2} + \alpha) \lg(\pi + \alpha)$.

- А) -1; Б) 1; В) $\lg^2 \alpha$; Г) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$.

8. Спростіть вираз $\frac{\lg 7\alpha - \lg 2\alpha}{1 + \lg 7\alpha \lg 2\alpha}$.

- А) $\operatorname{ctg} 9\alpha$; Б) $\lg 9\alpha$; В) $\operatorname{ctg} 5\alpha$; Г) $\lg 5\alpha$.

9. Знайдіть значення виразу $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$.

- А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $-\frac{1}{2}$.

10. Спростіть вираз $\frac{\cos 3\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 5\alpha}$.

- А) $2\cos 2\alpha$; Б) $-2\cos 2\alpha$; В) $2\sin 2\alpha$; Г) $-2\sin 2\alpha$.

11. Яке з даних рівнянь не має коренів?

- А) $\sin x = \frac{8}{9}$; Б) $\sin x = -\frac{\pi}{6}$; В) $\sin x = \frac{\pi}{4}$; Г) $\sin x = -\frac{\pi}{3}$.

12. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2$.

- А) 2; Б) $2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; В) $\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) коренів немає.

13. Знайдіть корені рівняння $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

- А) $\pm \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Б) $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; В) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; Г) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

14. Укажіть усі значення a , при яких нерівність $\sin x > a + 1$ має розв'язки.

- А) $-1 \leq a \leq 1$; Б) $a < 0$; В) $a > -2$; Г) такі значення не існують.

15. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x \leq 1$.

- А) $\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Б) $x \geq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; В) $\pi k < x \leq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $x \leq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

16. Укажіть хибне твердження.

- А) функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною;
Б) функція $y = \arccos x$ є парною;
В) функція $y = \arcsin x$ є непарною;
Г) функція $y = x \arcsin x$ є парною.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 17 – 20. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

17. Знайдіть значення виразу $\sin \frac{7\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$.

18. Спростіть вираз $\operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha)$.

19. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos 2x$.

20. Розташуйте у порядку зростання числа $\operatorname{tg}(-0,6)$, $\operatorname{tg} 1,4$, $\operatorname{tg} 0,8$, $\operatorname{tg} 1,6$.

Частина третя

Розв'язання задач 21 і 22 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

21. Побудуйте графік функції $y = \cos \frac{x}{2}$. Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

22. Спростіть вираз $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < 2\pi$.

Варіант 4

Частина перша

Завдання 1 – 16 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА відповідь ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Укажіть правильну нерівність.

- А) $\sin 130^\circ < \cos 140^\circ$; В) $\sin 130^\circ < \tan 140^\circ$;
Б) $\cos 110^\circ < \sin 20^\circ$; Г) $\cos 110^\circ < \cos 180^\circ$.

2. Чому дорівнює значення виразу $\sin\left(\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$?

- А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) $-\frac{1}{2}$; Г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

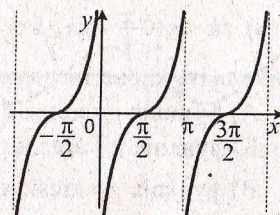
3. Яка з даних функцій є непарною?

- А) $y = x \cos x$; Б) $y = x - \cos x$; В) $y = \sqrt{\sin x}$; Г) $y = x^3 \sin x$.

4. Графік якої функції зображено на рисунку?

- А) $y = \tan(\pi + x)$; В) $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;

- Б) $y = \tan(\pi - x)$; Г) $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.



5. Спростіть вираз $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

- А) $\sin^2 \alpha$; Б) $\cos^2 \alpha$; В) -1 ; Г) 1 .

6. Скоротіть дріб $\frac{\sin 6\alpha}{2 \sin 3\alpha}$.

- А) $\sin 3\alpha$; Б) $\cos 3\alpha$; В) $\sin 2\alpha$; Г) $\cos 2\alpha$.

7. Знайдіть значення $\cos 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}$.

- А) $-\frac{1}{4}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{1}{4}$; Г) $\frac{1}{2}$.

8. Чому дорівнює значення виразу $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$, якщо $\tan \beta = 2$?

- А) -3 ; Б) 3 ; В) $-\frac{1}{3}$; Г) $\frac{1}{3}$.

9. Скільки коренів має рівняння $\sin x = \sqrt[4]{0,98}$?

- А) один; Б) два; В) безліч; Г) жодного.

10. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

- А) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$;

- Б) $\frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; Г) $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

11. Знайдіть корені рівняння $\tan \frac{x}{3} = \sqrt{3}$.

- А) $\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
Б) $\pi + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi}{9} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

12. Скільки коренів рівняння $\sin x = 0$ належать проміжку $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$?

- А) один; Б) два; В) три; Г) чотири.

13. Яка множина розв'язків нерівності $\cos 3x < 3$?

- А) $(-\infty; 1)$; Б) $(-\infty; 3)$; В) $(-\infty; +\infty)$; Г) $\left(-\infty; \frac{1}{3} \arccos 3\right)$.

14. Укажіть множину розв'язків нерівності $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- А) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
Б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

15. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(4x - 1)$.

- А) $(-\infty; +\infty)$; Б) $[-1; 1]$; В) $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; Г) $[0; 2]$.

16. Яка з наведених нерівностей не має розв'язків?

- А) $\arcsin x > \frac{\pi}{2}$; Б) $\arcsin x < \frac{\pi}{2}$; В) $\arcsin x > 0$; Г) $\arcsin x < 0$.

Частина друга

Розв'яжіть завдання 17 – 20. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

17. Розташуйте у порядку зростання числа:

$$\cos 0,3, \cos 1,2, \cos 1,6, \cos(-0,2).$$

18. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ + \alpha)}{2 \sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha}$.

19. Розв'яжіть рівняння $2 \sin^2 x = 1 + \cos x$.

20. Знайдіть корені рівняння $\frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin x} = 0$.

Частина третя

Розв'язання задач 21 і 22 повинно мати обґрунтування, у ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення.

21. Побудуйте графік функції $y = \left| \frac{\sin x}{\sin x} \right|$.

22. Знайдіть значення виразу $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$, якщо $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$.

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Варіант 1

27. 7) Вказівка. $\frac{2x+4}{x} = 2 + \frac{4}{x}$; 8) Вказівка. $\frac{2x-4}{x-3} = \frac{(2x-6)+2}{x-3} = 2 + \frac{2}{x-3}$. 43. 1) $(-\infty; -6) \cup [0; 6) \cup (6; +\infty)$; 2) $(-4; 1)$. 45. 1) Якщо $a=4$, то розв'язків немає; якщо $a < 4$, то $a < x < 4$; якщо $a > 4$, то $4 < x < a$; 2) якщо $a \leq 4$, то $x > 4$; якщо $a > 4$, то $4 < x < a$ або $x > a$; 3) якщо $a < 4$, то $x \geq 4$ або $x = a$; якщо $a \geq 4$, то $x \geq 4$; 4) якщо $a \leq -2$, то $x < a$; якщо $a > -2$, то $x < -2$ або $-2 < x < a$; 5) якщо $a < -2$, то $x \leq a$ або $x = -2$; якщо $a \geq -2$, то $x \leq a$; 6) якщо $a = 7$, то розв'язків немає; якщо $a < 7$, то $a < x \leq 7$; якщо $a > 7$, то $7 \leq x < a$; 7) якщо $a = 5$, то $x > 5$; якщо $a < 5$, то $a \leq x < 5$ або $x > 5$; якщо $a > 5$, то $x \geq a$; 8) якщо $a = 5$, то $x < 5$; якщо $a > 5$, то $x \leq 5$; якщо $a < 5$, то $x < a$ або $a < x \leq 5$. 54. 1) Парне; 2) непарне; 3) непарне; 4) може бути як парним, так і непарним; 5) парне; 6) може бути як парним, так і непарним. 56. 1) $a = -125$; 2) $a = 81$. 61. 1) Непарне; 2) може бути як парним, так і непарним; 3) парне; 4) така нерівність не може виконуватися при жодному n . 69. 1) Якщо $a = 0$, то $x \geq 0$; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$; 2) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$; 3) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 6) якщо $a \leq 0$, то коренів немає; якщо $a > 0$, то $x = \sqrt[6]{\frac{3}{a}}$ або $x = -\sqrt[6]{\frac{3}{a}}$. 86. 4) $\frac{2}{3\sqrt[4]{a}}$; 5) $\frac{3(\sqrt[8]{a}+4)}{\sqrt[8]{a}}$; 6) $\frac{2\sqrt[6]{xy}}{2\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}$. 87. Вказівка. Нехай $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = a$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = b$. Треба показати, що $x = a+b$ — число раціональне. Маємо: $a^3 + b^3 = 4$; $(a+b)((a+b)^2 - 3ab) = 4$; $x(x^2 + 3) = 4$, звідки $x = 1$. 100. 5) $\frac{36}{25}$; 6) $\frac{1}{9}$. 103. 1) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$. 5) $m^{\frac{1}{10}} - 5$. 104. 10) -3; 2. 105. 5) 4; 6) 6; 7) -4; 4; 8) 6; $\frac{22}{9}$; 9) $\frac{11+\sqrt{161}}{4}$.

Варіант 1

- 10) 0; 11) 3. 106. 6) 5; -5. Вказівка. Заміна $\sqrt{x^2+11}=t$; 7) 3; -4,5; 10) 2. Вказівка. Заміна $\sqrt{2x^2-8x+12}=t$. 107. 1) 2; 2) 80; -109; 3) 10; 4) -3,4; 12,6. 108. 1) -2; 5; 2) 4. 109. 7) (3; -2), (24; 12). Вказівка. Заміна $\sqrt{4-y+x}=a$, $\sqrt{9-2y+x}=b$. Тоді $a^2+b^2=4-y+x+9-2y+x=2x-3y+13=12+13=25$; 8) (6; 3), (-3; -1,5), $\left(\frac{12+3\sqrt{39}}{23}; 12+3\sqrt{39}\right)$, $\left(\frac{12-3\sqrt{39}}{23}; 12-3\sqrt{39}\right)$; 9) $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$; 10) (25; 4). Вказівка. $x+y-\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. Далі заміна $\sqrt{x}+\sqrt{y}=t$. 111. 2) $[-4; -3] \cup \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$; 3) $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$; 4) $[2,5; 3]$; 5) $[-33; 3]$; 6) $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. 112. 3) (8; +∞); 4) [9; 10]. 113. Якщо $a \leq 0$, то $x \geq -1$; якщо $a > 0$, то $-1 \leq x < \frac{1}{a^2} - 1$. 118. 5) 2. 121. 1) $-3 \leq a \leq -1$; 2) $a = 2$. 122. 1) 6; -4; 2) 5; 4; 3) вираз не набуває ні найбільшого, ні найменшого значень. Вказівка. Даний вираз не визначений при $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 123. 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$. Вказівка. Скористайтесь тим, що коли a і b — числа одного знаку і $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $[2; +\infty)$. 133. 1) π ; 2) 7π . 143. 1) 3; -4; 2) вираз не набуває ні найбільшого, ні найменшого значень. Вказівка. Області визначення даного виразу не належать значення α , при яких $\sin \alpha = 0$ і $\sin^2 \alpha = 1$. 145. 1) $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}$; 2) $-2 \operatorname{tg} \alpha$; 3) $\cos \alpha - \sin \alpha$. 146. 1) $\frac{a^2-1}{2}$. Вказівка. Піднесіть обидві частини рівності $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ до квадрата; 2) $\frac{a(3-a^2)}{2}$. Вказівка. Скористайтесь формулою суми кубів і результатом прикладу (1); 3) $\frac{1-a^4+2a^2}{2}$. Вказівка. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; 4) $\frac{1+6a^2-3a^4}{4}$; 5) $\frac{2}{a^2-1}$; 6) $\sqrt{2-a^2}$ або $-\sqrt{2-a^2}$. Вказівка. Позначивши $\sin \alpha - \cos \alpha = x$, піднесіть обидві частини отриманої рівності до квадрата. 147. 1) $\frac{29}{4}$. Вказівка. Поділіть чисельник і знаменник даного дробу на $\cos \alpha$;

- 2) $\frac{24}{13}$. 148. $\frac{13}{3}$; -4. Вказівка. Подайте даний вираз у вигляді $3 - 4\sin\alpha - 3\sin^2\alpha$. Розгляньте функцію $f(t) = 3 - 4t - 3t^2$ при $t \in [-1; 1]$. 157. 1) 2. Вказівка. $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)$; 2) 5. Вказівка. $3\sin\alpha + 4\cos\alpha = \sqrt{3^2 + 4^2} \times \left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\sin\alpha + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\cos\alpha\right) = 5\left(\frac{3}{5}\sin\alpha + \frac{4}{5}\cos\alpha\right) = 5\sin(\alpha + \varphi)$, де $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. 170. $-\frac{1}{7}$. 174. 4) 1; 5) $\lg 4\alpha$. 175. -2. 176. $-2\cos\alpha$. 177. Вказівка. Помножте і поділіть даний добуток на $2\cos 10^\circ$ і застосуйте формулу синуса подвійного аргументу. 183. 3) $-2\cos 2\alpha$; 4) $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$. 195. 1) $a \leq 0$, або $a \geq \frac{\pi}{2}$, або $a = \frac{\pi}{4}$; 2) $a < -\frac{3\pi}{2}$, або $a > -\pi$, або $a = -\frac{7\pi}{6}$. 196. Якщо $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$ або $0 \leq a < 1$, то два корені; якщо $-\frac{1}{2} < a < 0$ або $|a| = 1$, то один корінь. Вказівка. Розгляньте графік функції $y = \sin x$ на проміжку $\left[0; \frac{11\pi}{6}\right]$. 203. 1) $\frac{\pi}{9}$; 2) $\frac{6\pi}{7}$. Вказівка. $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\left(2\pi - \frac{8\pi}{7}\right)\right)$; 3) $2 - \pi$. Вказівка. $\arctg(\lg 2) = \arctg(\lg(2 - \pi))$. 204. 1) $\frac{\sqrt{77}}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; 3) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. Вказівка. Позначимо $\arctg 3 = \alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді $\lg \alpha = 3$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{10}{9}$; 4) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Вказівка. $\cos(\operatorname{arctg}(-2)) = \cos(\pi - \operatorname{arctg} 2) = -\cos(\operatorname{arctg} 2)$. Нехай $\operatorname{arctg} 2 = \alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді $\operatorname{ctg} \alpha = 2$, $\lg \alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{5}{4}$; 5) $\frac{\sqrt{6}}{12}$; 6) $\frac{1}{6}$. Вказівка. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 6) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 6)}$. 206. 1) $\frac{1}{2} < x \leq 1$; 2) $-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{3}$. Вказівка. Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} \cos(\arccos 3x) \geq \cos \frac{2\pi}{3}, \\ -1 \leq 3x \leq 1; \end{cases}$

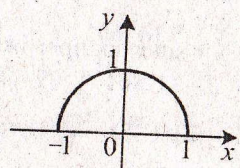


Рис. 19

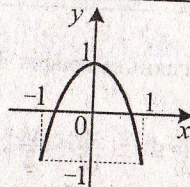


Рис. 20

- 3) $x > -\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. 207. 5) Рис. 19; 6) рис. 20. Вказівка. $y = \cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x)$. Тепер неважко показати, що графіком даної функції є дуга параболи $y = 1 - 2x^2$ при $x \in [-1; 1]$. 208. 1) $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq a \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) a — будь-яке число; 4) $0 \leq a \leq \pi$; 5) $a \neq \frac{\pi}{4}$; 6) $-\frac{\pi}{2} \leq a < 0$. 215. 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) πn , $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, або $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 216. 1) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 217. $-\frac{\pi}{2}$. 218. $\frac{3\pi}{8}$. 219. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$. 221. $x \in \left\{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm 3\right\}$. Вказівка. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \cos \pi x = 0, \\ 9 - x^2 = 0, \\ 9 - x^2 \geq 0. \end{cases}$ 222. 1) $-1 \leq a \leq 1$. Вказівка. Розв'язавши дане рівняння як квадратне відносно $\sin x$, отримаємо $\begin{cases} \sin x = a, \\ \sin x = 2a + 1. \end{cases}$ Тоді шукане значення a — розв'язок сукупності $\begin{cases} |a| \leq 1, \\ |2a + 1| \leq 1; \end{cases}$ 2) $a = 1$. Вказівка. Дане рівняння може мати розв'язок лише за умови $a^2 - 2a + 3 \leq 2$. Слід упевнитися, що при $a = 1$ рівняння має розв'язок; 3) $a = \frac{1}{2}$; 4) $-\frac{7}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$. Вказівка. Запишіть дане рівняння у вигляді $\cos(2x + \varphi) = \frac{2a + 2}{5}$, де $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$; 5) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. 223. 1) $a > 1$, або $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a < 0$ або $a = 1$. Вказівка. Дане рівняння рівносильне сукупності

$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = a. \end{array} \right.$ Розгляньте графік функції $y = \sin x$ на проміжку $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$.

227. 1) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi k}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

229. 1) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k+2n)}{2}, y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-2n)}{2}$ або $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k+2n)}{2}, y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k-2n)}{2}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{6} + \pi(k+n), y = \frac{\pi}{6} + \pi(k-n)$ або $x = -\frac{\pi}{6} + \pi(k+n), y = -\frac{\pi}{6} + \pi(k-n), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Варіант 2

43. 1) $(-\infty; -5) \cup [0; 5) \cup (5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. 45. 1) Якщо $a < 2$, то $a < x < 2$; якщо $a > 2$, то $2 < x < a$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає; 2) якщо $a \leq 2$, то $x > 2$; якщо $a > 2$, то $2 < x < a$ або $x > a$; 3) якщо $a < 2$, то $x = a$ або $x \geq 2$; якщо $a \geq 2$, то $x \geq 2$; 4) якщо $a \leq -4$, то $x < a$; якщо $a > -4$, то $x < -4$ або $-4 < x < a$; 5) якщо $a < -4$, то $x \leq a$ або $x = -4$; якщо $a \geq -4$, то $x \leq a$; 6) якщо $a < 3$, то $x < a$ або $x \geq 3$; якщо $a > 3$, то $x \leq 3$ або $x > a$; якщо $a = 3$, то x — будь-яке число, відмінне від 3; 7) якщо $a < -3$, то $a \leq x < -3$ або $x > -3$; якщо $a = -3$, то $x > -3$; якщо $a > -3$, то $x \geq a$; 8) якщо $a < 1$, то $x < a$ або $a < x \leq 1$; якщо $a = 1$, то $x < 1$; якщо $a > 1$, то $x \leq 1$. 54. 1) Непарне; 2) парне; 3) парне; 4) може бути як парним, так і непарним; 5) парне; 6) непарне. 56. 1) $a = -1296$; 2) $a = 2$. 61. 1) Парне; 2) непарне; 3) така нерівність не може виконуватися при жодному n ; 4) може бути як парним, так і непарним. 69. Якщо $a = 1$, то $x \geq 0$; якщо $a \neq 1$, то $x = 0$; 2) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) якщо $a = -2$, то $x \geq 0$; якщо $a \neq -2$, то $x = 1$; 6) якщо $a \leq 0$, то коренів немає; якщо $a > 0$, то $x = \sqrt[8]{\frac{6}{a}}$ або $x = -\sqrt[8]{\frac{6}{a}}$. 86. 4) $-\frac{2}{3}$; 5) $\frac{5(\sqrt[10]{a}-3)}{\sqrt[10]{a}}$; 6) $\sqrt[8]{b}-7$.

100. 5) $\frac{196}{9}$; 6) $\frac{1}{32}$. 103. 2) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\frac{x^{\frac{1}{6}} - 3}{2x^{\frac{1}{6}}}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $c^{\frac{1}{8}} + 8$.

104. 10) 5; -4; -5. 105. 5) 20; 6) 3; 7) -1; 2; 8) 7; 9) коренів немає; 10) 4; 11) -1; $-\frac{1}{6}$. 106. 6) 7; -7; 7) -4; 2; 10) -1; 3. 107. 1) 1; 2) -15; 13; 3) 1; 2; 10; 4) -79; 1. 108. 1) -3; 4; 2) 9. 109. 7) (-10; 26), (4; 5); 8) (-4; 0), $\left(-\frac{40}{41}; -\frac{32}{41}\right)$; 9) (2; 3), $\left(-\frac{14}{9}; \frac{17}{27}\right)$; 10) $(10+3\sqrt{11}; 10-3\sqrt{11})$, $(10-3\sqrt{11}; 10+3\sqrt{11})$, (16; 4), (4; 16). 111. 2) [9; +∞); 3) [-18; -2); 4) [0; 2]; 5) (-∞; 2]; 6) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$. 112. 3) [-3; 1]; 4) (4; +∞). 113. Якщо $a \leq -1$, то $x \leq 2$; якщо $a > -1$, то $2 - \frac{1}{(a+1)^2} < x \leq 2$. 118. 5) 2.

121. 1) $3 \leq a \leq 5$; 2) $0 \leq a \leq 1$ або $2 \leq a \leq 3$. 122. 4; -10; 2) 5; 4; 3) найбільше значення дорівнює 1, найменшого значення не існує. 123. 1) [-1; 1]; 2) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1]$. 133. 1) 10π ; 2) $\frac{\pi}{4}$.

143. 1) 4; 1; 2) найбільше значення дорівнює 3, найменшого значення не існує. 145. 1) $\cos \frac{\beta}{4} - \sin \frac{\beta}{4}$; 2) $2 \operatorname{ctg} \alpha$; 3) $-\cos \beta - \sin \beta$. 146. 1) $a^2 - 2$; 2) $a(a^2 - 3)$; 3) $a^4 - 4a^2 + 2$; 4) $(a^2 - 2)(a^4 - 4a^2 + 1)$; 5) $\frac{1}{a}$; 6) $\sqrt{a^2 - 4}$ або $-\sqrt{a^2 - 4}$. 147. 1) $\frac{11}{13}$; 2) $\frac{30}{23}$. 148. 3; $-\frac{25}{8}$.

157. 1) $-\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{53}$. 170. $-\frac{56}{33}$. 174. 4) 1; 5) $\operatorname{ctg} 2\alpha$. 175. $-\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. 176. $\sin 2\alpha$. 177. Вказівка. Помножте і поділіть даний добуток на $2 \sin \frac{\pi}{7}$ і застосуйте формулу синуса подвійного аргументу.

183. 3) $\operatorname{tg} \alpha$; 4) $\frac{\sqrt{3} \cos 2\alpha}{2}$. 195. 1) $a \leq -\frac{\pi}{6}$, або $a \geq \frac{\pi}{3}$, або $a = 0$; 2) $a < \pi$, або $a > \frac{3\pi}{2}$, або $a = \frac{4\pi}{3}$. 196. Якщо $0 \leq a < 1$, то два корені; якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 0$ або $a = 1$, то один корінь. 203. 1) $\frac{7\pi}{12}$; 2) $-\frac{\pi}{5}$;

3) $\pi - 4$. 204. 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{65}}{9}$; 3) $\frac{\sqrt{26}}{26}$. Вказівка. $\sin(\operatorname{arccctg}(-5)) = \sin(\pi - \operatorname{arccctg} 5) = \sin(\operatorname{arccctg} 5)$. Нехай $\operatorname{arccctg} 5 = \alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді

$\operatorname{ctg} \alpha = 5$, $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 26$; 4) $\frac{\sqrt{17}}{17}$; 5) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Вказівка. Нехай

$\arccos \frac{2}{3} = \alpha$, $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$. Тоді $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Звідси отримуємо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

6) $\frac{14}{11}$. 206. 1) $x \leq 1$; 2) $\sqrt{3} < x \leq 2$; 3) $\frac{3}{2} \leq x < 2 - \frac{\sqrt{3}}{4}$. 207. 5) Рис. 19;

6) рис. 21. Вказівка. $\cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1$.

208. 1) $-\pi \leq a \leq 0$; 2) a — будь-яке число;

3) $-\arctg \frac{\pi}{2} + \pi k < a < \arctg \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) $-\frac{\pi}{2} \leq a < -\frac{\pi}{4}$ або $-\frac{\pi}{4} < a \leq \frac{\pi}{2}$; 5) $a \neq \frac{\pi}{6}$;

6) $-\pi \leq a < -\frac{\pi}{2}$. 215. 1) $\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 2\pi k$ або $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2} +$

$+ 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 216. 1) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$. 217. $-\frac{2\pi}{3}$. 218. $\frac{\pi}{16}$. 219. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$. 221. $x \in \{\pm 3; \pm 1; \pm 3,5\}$.

222. 1) $-2 \leq a \leq -1$ або $3 \leq a \leq 5$; 2) $a = 3$; 3) таких a не існує;

4) $-10,5 \leq a \leq 6,5$; 5) $-2 \leq a \leq -1$. 223. 1) $a < -1$, або $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$, або

$a = \frac{7}{10}$; 2) $a = -1$, або $\frac{1}{2} < a < \frac{7}{10}$, або $\frac{7}{10} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$. 227. 1) $-\frac{4\pi}{3} +$

$+ 4\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $\pi k < x \leq \arccos 2 + \pi k$ або $\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq$

$\leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, або $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Вказівка. Дана нерівність

рівносильна сукупності $\begin{cases} \cos x \leq -\frac{1}{2}, \\ \cos x = 1. \end{cases}$ 229. 1) $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(k+2n)}{2}$,

$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi(k-2n)}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k+2n)}{2}$, $y = \frac{\pi}{6} +$

$+ \frac{\pi(k-2n)}{2}$ або $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k+2n)}{2}$, $y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(k-2n)}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

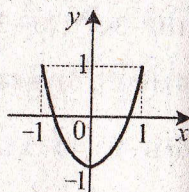


Рис. 21

Бланк відповідей
підсумкової контрольної роботи № _____
з алгебри та початків аналізу
учня / учениці 10 _____ класу

назва навчального закладу _____

прізвище, ім'я, по-батькові учня (учениці) _____

Варіант № _____

Увага! Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Будь-які виправлення у бланку недопустимі.

Якщо Ви вирішили змінити відповідь у деяких завданнях, то правильну відповідь можна зазначити в спеціально відведеному місці, розташованому внизу бланка відповідей.

У завданнях 1–16 правильну відповідь позначаєте тільки так: ☒

А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

У завданнях 17–20 упишіть відповідь.

17. _____ 19. _____

18. _____ 20. _____

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть його номер у спеціально відведених клітинках, а правильну, на Вашу думку, відповідь — у відповідному місці.

Завдання 1–16

Завдання 17–20

номер завдання	А	Б	В	Г
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

номер завдання

☐

☐

Зміст

Від авторів	3
Тематичний розподіл тренувальних вправ.....	6
Тренувальні вправи	8
Варіант 1	8
Варіант 2	41
Варіант 3	74
Контрольні роботи.....	108
Варіант 1	108
Варіант 2	112
Підсумкові контрольні роботи	116
Підсумкова контрольна робота №1	116
Підсумкова контрольна робота №2	128
Відповіді та вказівки до тренувальних вправ.....	136
Варіант 1	136
Варіант 2	140
Бланк відповідей підсумкової контрольної роботи	143

Навчальне видання

Мерзляк Аркадій Григорович, Полонський Віталій Борисович
Рабінович Юхим Михайлович, Якір Михайло Семенович

Алгебра і початки аналізу

10 клас

Збірник задач і контрольних робіт

Редактор Г. Ф. Висоцька, коректор Т. Є. Цента, комп'ютерне верстання О. О. Удальова

Формат 60х90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна. Ум. друк. арк. 9,00.

Тираж 5000 прим. Замовлення № 255

ТОВ ТО «Гімназія»,

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93

Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія», у друкарні ПП «Модем»,

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052. Тел. (057) 758-15-80

Свідцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

АЛГЕБРА 10

і початки аналізу клас

Навчально-методичний комплект

Підручник

Книга
для
вчителя

Збірник
задач
і контрольних
робіт

ДЛЯ ТИХ, ХТО ПРАГНЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ КЛАСІВ
З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ
МАТЕМАТИКИ



ТОВ ТО «Гімназія»

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

тел.: (057) 719-17-28, 758-83-83, 719-46-20

факс: (057) 758-83-93

e-mail: contact@gymnasia.com.ua

