Є. П. Нелін

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2010

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Поняття *степеня* виникло в далекій давнині. Збереглися глиняні плитки стародавніх вавилонян (близько 1700 р. до н. е.), які містять записи таблиць квадратів і кубів та їх обернених значень. До множення рівних множників приводить розв'язування багатьох задач. Вираз *квадрат числа* виник унаслідок обчислення площі квадрата, а *куб числа* — унаслідок знаходження об'єму куба. Але сучасні позначення (типу a^4, a^5) введено в XVII ст. Р. Декартом (1596–1650).

Дробові показники степеня та найпростіші правила дій над степенями з дробовими показниками застосував у XIV ст. французький математик Н. Орема (бл. 1323–1382). Відомо, що Н. Шюке (бл. 1445–бл. 1500) розглядав степені з від'ємними і нульовим показниками.

С. Стевін запропонував розуміти під $a^{\frac{1}{n}}$ корінь $\sqrt[n]{a}$. Але систематично дробові та від'ємні показники першим став застосовувати І. Ньютон (1643—1727).

Німецький математик М. Штіфель (1487–1567) дав позначення $a^0 = 1$, якщо $a \neq 1$, і ввів назву *показник* (від німецьк. *exponent*). Німецьке *potenzieren* означає *піднести до степеня.* У свою чергу, термін *exponenten* виник унаслідок не зовсім точного перекладу з грецької слова, яким Діофант Александрійський (бл. III ст.) позначав квадрат невідомої величини.

Терміни *радикал* і *корінь,* уведені в XII ст., походять від латинського *radix,* що має два значення: *сторона і корінь.* Грецькі математики замість «добути корінь» казали «знайти сторону квадрата за його даною величиною (площею)». Знак кореня у вигляді символу $\surd$ з'явився вперше в 1525 р. Сучасний символ увів Декарт, який додав горизонтальну риску. Ньютон уже позначав показники коренів так: $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$.

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+2.161я721
Н49

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ від 03.03.2010 № 177)

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України

Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки
Національної академії педагогічних наук України

Експерти, які здійснювали експертизу:

П. Я. Кіндюх, гімназія м. Ужгорода, директор, заслужений вчитель України, вчитель-методист

Л. А. Бойко, Монастирищенська спеціалізована школа I–III ст. № 5 Монастирищенської районної ради Черкаської обл., вчитель, вчитель-методист

І. О. Воробей, Управління освіти Житомирської міської ради, методист

М. А. Муратов, Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського, кафедра математичного аналізу, доктор фізико-математичних наук, доцент

Нелін Є. П.
Н49 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень / Є. П. Нелін. — Х. : Гімназія, 2010. — 416 с. : іл.
ISBN 978-966-474-095-8.

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+2.161я721

ISBN 978-966-474-095-8

© Є. П. Нелін, 2010
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, 2010

ПЕРЕДМОВА ДЛЯ УЧНІВ

Ви починаєте вивчати новий предмет «*Алгебра і початки аналізу*», який об'єднує матеріал кількох галузей математичної науки. Як і в курсі алгебри, значну увагу буде приділено перетворенням виразів, розв'язуванню рівнянь, нерівностей та їх систем і розгляду властивостей функцій. Поряд із розв'язуванням знайомих задач, пов'язаних з многочленами, раціональними дробами, степенями і коренями, у 10 класі буде розглянуто нові види функцій: степеневі й тригонометричні та відповідні рівняння і нерівності.

Принципово нову частину курсу — початки аналізу — буде розглянуто в 11 класі. *Математичний аналіз* (або просто аналіз) — галузь математики, що сформувалася у XVIII ст. і відіграла значну роль у розвитку природознавства: з'явився потужний, достатньо універсальний метод дослідження функцій, які використовуються під час розв'язування різноманітних прикладних задач.

Кілька зауважень про те, як користуватися підручником.

Систему навчального матеріалу підручника з кожної теми подано за двома рівнями. *Основний матеріал* наведено в параграфах, номери яких позначено синім кольором. *Додатковий матеріал* (номери параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на більш глибокому рівні (наприклад, для виконання складніших завдань з алгебри і початків аналізу зовнішнього незалежного оцінювання з математики). Учні можуть опановувати його як самостійно, так і під керівництвом учителя.

На початку багатьох параграфів наведено *довідкові таблиці*, які містять основні означення, властивості та *орієнтири* для пошуку плану розв'язування задач з теми. Для ознайомлення з основними ідеями розв'язування задач наводяться приклади, у яких крім розв'язання міститься також *коментар*, що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ. Відповіді на ці запитання і приклади розв'язування аналогічних вправ можна знайти в тексті параграфа. Систему вправ до основного матеріалу подано за трьома рівнями. *Задачі середнього рівня* позначено символом «°», дещо складніші *задачі достатнього рівня* подано без позначень, а *задачі високого рівня* складності позначено символом «*». У підручнику для багатьох задач поглибленого рівня також пропонуються спеціальні орієнтири, які дають можливість опанувати методи їх розв'язування. *Відповіді і вказівки* до більшості вправ наведено у відповідному розділі. Про походження понять, термінів і символів ви зможете дізнатися, прочитавши «Відомості з історії». У кінці підручника наведено довідковий матеріал.

ПЕРЕДМОВА ДЛЯ ВЧИТЕЛЯ

Пропонований підручник спрямовано на реалізацію основних положень концепції профільного навчання в старшій школі, на організацію особистісно-орієнтованого навчання математики. Підручник підготовлено відповідно до чинної програми з алгебри і початків аналізу академічного рівня з урахуванням програми профільного рівня та програми і змісту зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Відзначимо основні відмінності пропонованого підручника від інших підручників з алгебри і початків аналізу. Це *дворівневий підручник*, у кожному розділі якого поряд з параграфами, що призначені для оволодіння учнями стандартом математичної освіти на академічному рівні, є систематичний матеріал для організації індивідуальної роботи з учнями, які цікавляться математикою.

Основний матеріал, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі *довідкових таблиць* на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів для розв'язування завдань. У першу чергу учні повинні засвоїти матеріал, який міститься в таблицях.* Тому під час пояснення нового матеріалу доцільно працювати з підручником, використовуючи відповідні таблиці та рисунки. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено в підручнику, але кожен учень може вибирати свій рівень ознайомлення з цими обґрунтуваннями.

Підкреслимо, що будь-який підручник з алгебри і початків аналізу повинен забезпечити не тільки ознайомлення учнів з основними алгебраїчними поняттями та їх властивостями (тобто дати можливість формувати в учнів знання з алгебри і початків аналізу), а й формування способів дій із цими поняттями (тобто дати можливість формувати в учнів уміння з алгебри і початків аналізу). Систему умов, на яку реально спирається учень при виконанні дії, психологи називають орієнтовною основою дії. Якщо учням пропонують достатньо загальні орієнтовні основи для розв'язування відповідних завдань у вигляді спеціальних правил та алгоритмів, то кажуть, що їм пропонують орієнтовні основи другого і третього типів. Як правило, у підручниках алгебри і початків аналізу для 10 класів учням пропонуються тільки зразки розв'язувань завдань. Учні самостійно розв'язують ці завдання, орієнтуючись на зразки (тобто учням пропонуються орієнтовні основи першого типу). Таке навчання передбачає, що учень самостійно виконає систематизацію та узагальнення способів дій, орієнтуючись на запропоновані зразки, і виділить для себе орієнтовну основу розв'язування розглянутих завдань. Як правило, у цьому випадку орієнтовна основа, що створюється в учня, неповна. Крім того, вона часто не усвідомлена ним, бо учень не може пояснити, чому він виконував саме такі перетворення під час розв'язування завдання, а не інші.

Із цієї причини одним з принципів побудови пропонованого підручника було виділення для учнів орієнтовних основ відповідної діяльності з розв'язування алгебраїчних завдань безпосередньо в підручнику.

У кожному розділі розв'язанню вправ передує виділення загальних орієнтирів для розв'язування таких завдань. Тому важливою складовою роботи за пропонованим підручником є обговорення вибору відповідних орієнтирів та планів розв'язування завдань. Пояснення методів розв'язування ведеться за схемою:

Розв'язання	*Коментар*

За умови такої подачі навчального матеріалу коментар, у якому пояснюється розв'язання, не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв'язування завдань певного типу. Це дозволяє учневі, який уже засвоїв спосіб розв'язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв'язувати завдання, а учневі, якому потрібна консультація з розв'язування, — отримати детальну консультацію, що міститься в коментарі.

За рахунок чіткого виділення загальних орієнтирів роботи з практичними завданнями курсу вдається частину «нестандартних» (з точки зору традиційних підручників) завдань перевести в розряд «стандартних» (наприклад, рівняння, для розв'язування яких доводиться використовувати властивості функцій). Це дозволяє, зокрема, ознайомити учнів з методами розв'язування навіть складних завдань з алгебри і початків аналізу, які пропонуються в зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, та з оформленням їх розв'язання.

Умовні позначення

	головне в навчальному матеріалі
▶	початок розв'язання задачі
◁	закінчення розв'язання задачі
●	початок обґрунтування твердження
○	закінчення обґрунтування твердження

Позначення, які застосовано в підручнику

N — множина всіх натуральних чисел

Z — множина всіх цілих чисел

Z_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел

Q — множина всіх раціональних чисел

R — множина всіх дійсних чисел, числова пряма

R_+ — множина всіх додатних дійсних чисел

$[a; b]$ — відрізок (замкнений проміжок) з кінцями a і b, $a < b$

$(a; b)$ — інтервал (відкритий проміжок) з кінцями a і b, $a < b$

$(a; b]$, $[a; b)$ — напіввідкриті проміжки з кінцями a і b, $a < b$

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ — нескінченні проміжки

$(-\infty; +\infty)$ — нескінченний проміжок, числова пряма

$|x|$ — модуль (абсолютна величина) числа x

$[x]$ — ціла частина числа x

$\{x\}$ — дробова частина числа x

$f(x)$ — значення функції f у точці x

$D(f)$ — область визначення функції f

$E(f)$ — область значень функції f

sin — функція синус

cos — функція косинус

tg — функція тангенс

ctg — функція котангенс

arcsin — функція арксинус

arccos — функція арккосинус

arctg — функція арктангенс

arcctg — функція арккотангенс

$\sqrt{a}$ — арифметичний корінь із числа a

$\sqrt[2k]{a}$ — арифметичний корінь $2k$-го степеня із числа a $(k \in N)$

$\sqrt[2k+1]{a}$ — корінь $(2k+1)$-го степеня із числа a $(k \in N)$

Розділ 1
ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

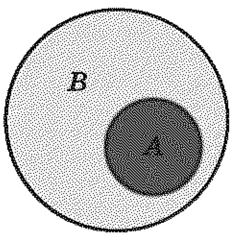
В основній частині цього розділу ви систематизуєте та узагальните свої знання й уміння, пов'язані з множинами, функціями, рівняннями і нерівностями, уточните, як досліджують і обґрунтовують основні характеристики функцій. Також ви отримаєте рекомендації щодо розв'язування рівнянь та нерівностей різними методами.

У додатковій частині розділу ви зможете ознайомитися з важливим методом доведення математичних тверджень (методом математичної індукції) та з методами розв'язування деяких складних завдань, що їх пропонують у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання чи державної підсумкової атестації з математики.

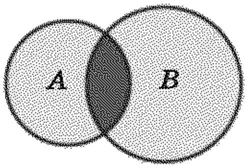
§ 1 МНОЖИНИ

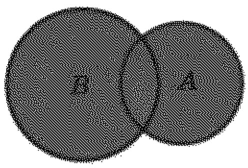
1.1. Множини та операції над ними

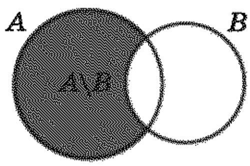
Таблиця 1

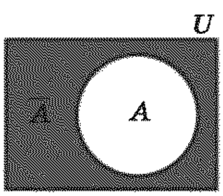
Поняття множини та її елементів	
Елемент a належить множині A $\Leftrightarrow$ $a \in A$ Елемент b не належить множині A $\Leftrightarrow$ $b \notin A$ У множині немає елементів $\Leftrightarrow$ $\varnothing$	**Множину можна уявити собі як сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за якоюсь ознакою. У математиці множини — це одне з основних неозначуваних понять.** Кожний об'єкт, що входить до множини A, називається *елементом* цієї *множини*. **Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою* множиною і позначається $\varnothing$**
Підмножина ($\subset$)	
 $A \subset B$ $\Longleftrightarrow$ Якщо $x \in A$, то $x \in B$	Якщо кожен елемент однієї множини A є елементом другої множини B, то кажуть, що перша множина A є підмножиною другої множини B, **і записують так: $A \subset B$.** **Використовують також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B**
Рівність множин	
$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$	Дві множини називаються *рівними*, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини, і навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини

Продовження табл. 1

<table>
<tr><td colspan="2">Перетин множин (∩)</td></tr>
<tr><td>

$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \in B$</td><td>Перетином множин A і B називають їх спільну частину, тобто множину C всіх елементів, що належать як множині A, так і множині B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Об'єднання множин (∪)</td></tr>
<tr><td>

$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$</td><td>Об'єднанням множин A і B називають множину C, складену з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин (A або B)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Різниця множин (\)</td></tr>
<tr><td>

$C = A \setminus B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \notin B$</td><td>Різницею множин A і B називається множина C, що складається з усіх елементів, які належать множині A і не належать множині B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Доповнення множин</td></tr>
<tr><td>

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$</td><td>Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої універсальної множини U, то різниця U \ A називається доповненням множини A. Тобто доповненням множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A (але належать універсальній множині U)</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття множини. Одним з основних понять, які використовують у математиці, є поняття *множини*. Для нього не дають означення. Можна пояснити, що *множиною* називають довільну сукупність об'єктів, а самі об'єкти — *елементами* даної *множини*. Так, можна говорити про множину учнів у класі (елементи — учні), множину днів тижня (елементи — дні тижня), множину натуральних дільників числа 6 (елементи — числа 1, 2, 3, 6) тощо. У курсах алгебри та алгебри і початків аналізу найчастіше розглядають множини, елементами яких є числа, і тому їх називають *числовими множинами*.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту. Наприклад, якщо множина M складається із чисел 1; 2; 3, то її позначають так: $M = \{1;\ 2;\ 3\}$. Той факт, що число 2 входить до цієї множини (є елементом даної множини M), записують за допомогою спеціального значка $\in$ так: $2 \in M$; а те, що число 5 не входить до цієї множини (не є елементом даної множини), записують так: $5 \notin M$.

Можна розглядати також множину, яка не містить жодного елемента, — *порожню множину*.

Наприклад, множина простих дільників числа 1 — порожня множина.

Для деяких множин існують спеціальні позначення. Так, порожню множину позначають символом $\varnothing$, множину всіх натуральних чисел — літерою $\boldsymbol{N}$, множину всіх цілих чисел — літерою $\boldsymbol{Z}$, множину всіх раціональних чисел — літерою $\boldsymbol{Q}$, а множину всіх дійсних чисел — літерою $\boldsymbol{R}$. Множини бувають *скінченні* і *нескінченні* залежно від того, яку кількість елементів вони містять. Так, множини $A = \{7\}$; $M = \{1;\ 2;\ 3\}$ — скінченні, бо містять скінченне число елементів, а множини $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ — нескінченні.

Множини задають або за допомогою переліку їх елементів (це можна зробити лише для скінченних множин), або за допомогою опису, коли задається правило — *характеристична властивість*, яке дозволяє визначити, належить чи ні даний об'єкт розглядуваній множині. Наприклад, множина $A = \{-1;\ 0;\ 1\}$ задана переліком елементів, а множина B парних цілих чисел — характеристичною властивістю елементів множини. Останню множину інколи записують так: $B = \{b \mid b$ — парне ціле число$\}$ або так: $B = \{b \mid b = 2m,$ де $m \in \boldsymbol{Z}\}$ — тут після вертикальної риски записана характеристична властивість.[1]

У загальному вигляді запис множини за допомогою характеристичної властивості можна подати так: $A = \{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ — характеристична властивість. Наприклад, $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}$ і $x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

---

[1] У цьому випадку і в записах розв'язків тригонометричних рівнянь і нерівностей в розділі 4 запис $m \in \boldsymbol{Z}$ означає, що m приймає будь-яке ціле значення, що також можна записувати так: $m = 0;\ \pm1;\ \pm2;\ \dots$

2. Рівність множин. Нехай A — множина цифр трицифрового числа 312, тобто $A = \{3;\ 1;\ 2\}$, а B — множина натуральних чисел, менших від 4, тобто $B = \{1;\ 2;\ 3\}$. Оскільки ці множини складаються з одних і тих самих елементів, то їх вважають рівними. Це записують так: $A = B$. Для нескінченних множин таким способом (порівнюючи всі елементи) установити їх рівність неможливо. Тому в загальному випадку рівність множин означають таким чином.

Дві множини називаються *рівними*, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини.

З наведеного означення рівності множин випливає, що в множині однакові елементи не розрізняються. Дійсно, наприклад, $\{1;\ 2;\ 2\} = \{1;\ 2\}$, оскільки кожний елемент першої множини (1 або 2) є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини (1 або 2) є елементом першої. Тому, записуючи множину, найчастіше кожний її елемент записують тільки один раз.

3. Підмножина

Якщо кожен елемент однієї множини A є елементом множини B, то кажуть, що перша множина A є *підмножиною* множини B.

Це записують так: $A \subset B$. Наприклад, $\{1;\ 2\} \subset \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ (оскільки будь-яке натуральне число — ціле), $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ (оскільки будь-яке ціле число — раціональне), $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ (оскільки будь-яке раціональне число — дійсне).

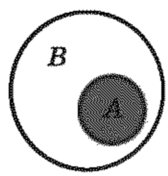
Вважають, що завжди $\varnothing \subset A$, тобто *порожня множина є підмножиною будь-якої непорожньої множини.*

Інколи замість запису $A \subset B$ використовують також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B. Наприклад, $A \subseteq A$.

Співставимо означення рівності множин з означенням підмножини. Якщо множини A і B рівні, то: 1) кожний елемент множини A є елементом множини B, отже, A — підмножина B ($A \subseteq B$); 2) кожний елемент множини B є елементом множини A, отже, B — підмножина A ($B \subseteq A$). Таким чином,

дві множини рівні, якщо кожна з них є підмножиною іншої.

Інколи співвідношення між множинами зручно ілюструвати за допомогою кругів (які часто називають кругами Ейлера—Венна). Наприклад, рисунок 1 ілюструє означення підмножини, а рисунок 2 — співвідношення між множинами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$.



$\boxed{A \subset B} \Leftrightarrow \boxed{\text{Якщо } x \in A, \text{ то } x \in B}$

Рис. 1

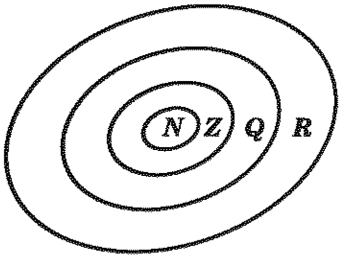


Рис. 2

4. Операції над множинами. Над множинами можна виконувати певні дії: перетин, об'єднання, знаходження різниці множин. Дамо означення цих операцій і проілюструємо їх за допомогою кругів Ейлера—Венна.

Перетином множин ***A*** **і** ***B*** **називають їхню спільну частину, тобто множину** ***C*** **усіх елементів, що належать як множині** ***A*****, так і множині** ***B*****.**

Перетин множин позначають знаком $\cap$ (на рисунку 3 наведено ілюстрацію означення перетину множин).

Наприклад, якщо $A = \{2; 3; 4\}$, $B = \{0; 2; 4; 6\}$, то $A \cap B = \{2; 4\}$.

Об'єднанням множин ***A*** **і** ***B*** **називають множину** ***C*****, що складається з усіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин (*A або B*).**

Об'єднання множин позначають знаком $\cup$ (на рисунку 4 наведено ілюстрацію означення об'єднання множин).

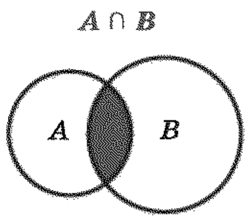
Наприклад, для множин A і B з попереднього прикладу

$$A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6\}.$$

Якщо позначити множину ірраціональних чисел через M, то $M \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}$.

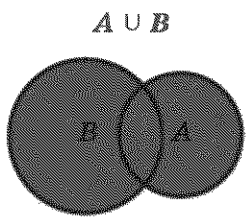
Різницею множин ***A*** **і** ***B*** **називається множина** ***C*****, яка складається з усіх елементів, які належать множині** ***A*** **і не належать множині** ***B*****.**

Різницю множин позначають знаком \ (на рисунку 5 наведеню ілюстрацію означення різниці множин).



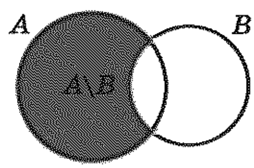
$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \in B$

Рис. 3



$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$

Рис. 4



$C = A \setminus B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \notin B$

Рис. 5

Наприклад, якщо $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, то $A \setminus B = \{1\}$, а $B \setminus A = \{4; 5\}$.

Якщо B — підмножина A, то різницю $A \setminus B$ називають *доповненням множини B до множини A* (рис. 6).

Наприклад, якщо знову позначити множину ірраціональних чисел через M, то $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} = M$: кажуть, що множина M ірраціональних чисел доповнює множину Q раціональних чисел до множини R усіх дійсних чисел.

Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої *універсальної множини* U (на рисунку її зазвичай зображують у вигляді прямокутника, а всі інші множини — кругами всередині цього прямокутника), то різницю $U \setminus A$ називають доповненням множини A (рис. 7). Тобто

> ***доповненням множини*** A **називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині** A**,**

але які належать універсальній множині U.

Доповнення множини A позначають $\overline{A}$ (читають: «A з рискою» або «доповнення A»).

Наприклад, якщо $U = R$ і $A = [0;\ 1]$, то $\overline{A} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. (Для цього прикладу зручно використати традиційну ілюстрацію множини дійсних чисел на числовій прямій — рис. 8).

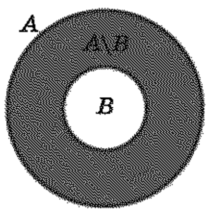


Рис. 6

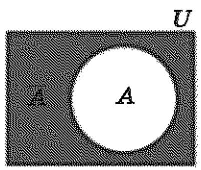


Рис. 7

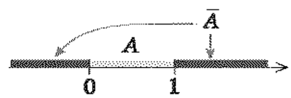


Рис. 8

Запитання для контролю

1. Наведіть приклади множин, укажіть декілька елементів кожної множини.
2. Як позначають порожню множину, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел?
3. Дайте означення рівності множин. Наведіть приклади двох рівних множин.
4. Дайте означення підмножини. Наведіть приклади. Проілюструйте це поняття за допомогою кругів Ейлера—Венна.
5. Дайте означення перетину, об'єднання, різниці двох множин. Наведіть приклади. Проілюструйте за допомогою кругів Ейлера—Венна.
6. Поясніть, що називають доповненням однієї множини до іншої; доповненням множини. Наведіть приклади. Проілюструйте ці поняття за допомогою відповідних рисунків.

Вправи

1°. Запишіть за допомогою фігурних дужок множину:
1) букв у слові «алгебра»; 2) парних однозначних натуральних чисел; 3) непарних однозначних натуральних чисел; 4) однозначних простих чисел.

2°. За якою характеристичною властивістю записані такі множини:
1) {понеділок, вівторок, середа, четвер, п'ятниця, субота, неділя};
2) {січень, лютий, березень, квітень, травень, червень, липень, серпень, вересень, жовтень, листопад, грудень};
3) {Австралія, Азія, Америка, Антарктида, Африка, Європа};
4) {до, ре, мі, фа, соль, ля, сі};
5) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

3°. Наведіть приклади порожніх множин.

4°. A — множина натуральних чисел, які розміщені між числами 15 і 35. Запишіть множину A за допомогою фігурних дужок. Які з чисел 18, 28, 36, 40 належать множині A? Відповідь запишіть за допомогою знаків $\in$ і $\notin$.

5°. Запишіть за допомогою фігурних дужок і позначте множину:
1) натуральних дільників числа 12;
2) натуральних дільників числа 30;
3) цілих дільників числа 6;
4) простих дільників числа 12.

6°. Відомо, що $M = \{1; 2; 5\}$, $N = \{1; 4; 5; 7; 9\}$, $K = \{4; 7; 9\}$. Запишіть за допомогою фігурних дужок або знака $\varnothing$:
1) перетин M і N; 2) перетин M і K; 3) перетин N і K; 4) об'єднання M і N; 5) об'єднання M і K; 6) об'єднання N і K; 7) різницю M і N; 8) різницю M і K; 9) різницю N і K; 10) доповнення K до N.

7°. Поясніть, чому виконуються такі рівності:
1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cup A = A$; 3) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 4) $A \cap A = A$.

8°. Запишіть множину всіх двоцифрових чисел, які можна записати за допомогою цифр 0, 1, 3.

9°. Відомо, що A — множина натуральних дільників числа 12, а B — множина цілих дільників числа 6. Запишіть множини:
1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

10*. Нехай A і B — деякі множини. Доведіть указані рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера—Венна:
1) $A \cup B = B \cup A$ — *переставний закон для об'єднання*;
2) $A \cap B = B \cap A$ — *переставний закон для перетину*.

11. В одній множині 40 різних елементів, а в другій — 30. Скільки елементів може бути в їх: 1) перетині; 2) об'єднанні?

12*. Нехай A, B, C — деякі множини. Доведіть указані рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера—Венна:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — *сполучний закон для об'єднання*;

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — *сполучний закон для перетину*;

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$\left.\begin{array}{l} 5)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ 6)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}\right|$ — *закони де Моргана*.

13. Кожний учень у класі вивчає англійську або французьку мову. Англійську мову вивчають 25 учнів, французьку — 27 учнів, а обидві мови — 18 учнів. Скільки учнів у класі?

14*. Частина жителів міста вміє розмовляти тільки українською мовою, частина — тільки російською, а частина — обома мовами. Українською мовою розмовляє 95 % жителів, а російською — 85 %. Скільки відсотків жителів міста розмовляє обома мовами?

15*. Доведіть рівності і проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера—Венна:

1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; 2) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

16*. Запишіть множину всіх правильних дробів $\frac{a}{b}$, де $a \in A$, $b \in B$ і $A = \{2; 3; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$.

17*. Які трицифрові числа можна записати, якщо:

$A = \{3; 1; 2\}$ — множина цифр для позначення сотень;

$B = \{2; 8\}$ — множина цифр для позначення десятків;

$C = \{5; 7\}$ — множина цифр для позначення одиниць?

Скільки таких чисел одержимо? Спробуйте сформулювати загальне правило підрахунку кількості таких чисел, якщо в множині A — m елементів ($O \notin A$), у множині B — n елементів, у множині C — k елементів.

1.2. Числові множини. Множина дійсних чисел

Таблиця 2

1. Числові множини

Дійсні числа R

Числа, які можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу

Раціональні числа Q

Можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число. Записують у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу $\left(\frac{1}{3}=0{,}333...=0{,}(3)\right)$

Ірраціональні числа

Не можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число. Записують у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу $(\sqrt{2}=1{,}4142135...)$

Цілі числа Z

Включають натуральні числа, числа, їм протилежні, та число 0

Дробові числа

Числа, складені із цілого числа часток одиниці $\left(\frac{2}{5}\right.$ — звичайний дріб, 1,23 — десятковий дріб: $\left.1{,}23=\frac{123}{100}\right)$

Натуральні числа N (цілі додатні)

У шкільному курсі математики натуральне число — основне неозначуване поняття

Число 0

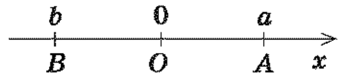
Таке число, що будь-яке число при додаванні до нього не змінюється ($a + 0 = 0 + a = a$)

Цілі від'ємні числа

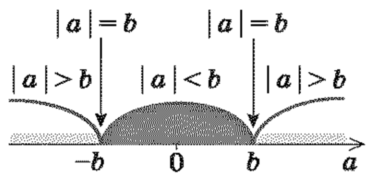
Числа, протилежні натуральним

Продовження табл. 2

2. Модуль дійсного числа та його властивості

Означення	Геометричний зміст модуля
Модулем додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне, модуль нуля дорівнює нулю. $$\lvert a\rvert=\begin{cases} a \text{ при } a>0, \\ 0 \text{ при } a=0, \\ -a \text{ при } a<0 \end{cases}$$	 $\lvert a\rvert = OA$, $\lvert b\rvert = OB$ $\lvert a-b\rvert = AB$ На координатній прямій модуль — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число. *Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій*

Властивості

1.	$\boxed{\lvert a\rvert \geqslant 0}$	*Модуль будь-якого числа — невід'ємне число*
2.	$\boxed{\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert}$	*Модулі протилежних чисел рівні*
3.	$\boxed{a \leqslant \lvert a\rvert}$, тобто $\boxed{-\lvert a\rvert \leqslant a \leqslant \lvert a\rvert}$	*Величина числа не перевищує величини його модуля*
4.	$\boxed{\text{При } b>0\ \lvert a\rvert \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b}$	
5.	$\boxed{\text{При } b>0\ \lvert a\rvert \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ або } a \geqslant b}$	
6.	$\boxed{\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert}$	*Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників*
7.	$\boxed{\left\lvert \dfrac{a}{b}\right\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}\ (b\neq 0)}$	*Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника* (якщо знаменник не дорівнює нулю)
8.	$\boxed{\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n}$ $\quad \lvert a\rvert^2 = a^2 \quad \lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$	
9.	$\boxed{\lvert a+b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert}$ $\boxed{\lvert a_1+a_2+\ldots+a_n\rvert \leqslant \lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert + \ldots + \lvert a_n\rvert}$	*Модуль суми не перевищує суми модулів доданків*
10.	$\boxed{\big\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \big\rvert \leqslant \lvert a\pm b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert}$	

Пояснення й обґрунтування

1. Числові множини. У курсі математики ви зустрічалися з різними числами: натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними, дійсними. Уявлення про числа у людства складалися поступово, під впливом вимог практики. Наприклад, *натуральні числа* з'явилися у зв'язку з необхідністю підрахунку предметів. Але для того щоб дати відповідь на запитання «Скільки сірників у порожній коробці з-під сірників?», множини натуральних чисел $N = \{1; 2; 3; ...\}$ недостатньо — для цього потрібно мати ще й число нуль. Приєднуючи до множини N натуральних чисел число 0, одержуємо множину *невід'ємних цілих чисел*. Її часто позначають $Z_0 = \{0; 1; 2; 3; ...\}$. Одних тільки невід'ємних цілих чисел виявилося недостатньо для розв'язування задач практики (а отже, і математичних задач, що відображують задану реальну ситуацію). Так, для того щоб охарактеризувати температуру повітря вище і нижче нуля чи рух тіла в протилежних напрямках, потрібні протилежні до натуральних числа, тобто *від'ємні числа*. Для натурального числа n протилежним вважають число $-n$, а для числа $-n$ протилежним вважають число n. Нуль вважають числом, протилежним самому собі.

Натуральні числа, нуль і числа, протилежні натуральним, складають множину $\boldsymbol{Z}$ *цілих чисел*.

Вимірювання величин привело до необхідності розширення множини цілих чисел і введення *раціональних чисел*. Наприклад, середня багаторічна температура повітря в січні в м. Харкові становить −7,3 °С, тривалість уроку — 45 хв, або $\frac{3}{4}$ год.

Таким чином, вибираючи якусь одиницю виміру, ми одержуємо числове значення величин, що можна виразити за допомогою різних раціональних чисел — цілих і дробових, додатних і від'ємних.

Цілі і дробові числа складають множину Q *раціональних чисел*.

Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$ (тобто чисельник m є цілим числом, а знаменник n — натуральним).

Раціональне число можна записати різними дробами. Наприклад,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{10}{20},\quad -\frac{2}{7}=\frac{-2}{7}=\frac{-8}{28}=\frac{-10}{35},\quad 1{,}2=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=\frac{120}{100},\quad 5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{50}{10}.$$

Як видно з наведених прикладів, серед дробів, що зображують дане раціональне число, завжди є єдиний нескоротний дріб (для цілих чисел — це дріб, знаменник якого дорівнює 1).

Зауважимо, що раціональне число, записане у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$, можна записати також у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу, поділивши чисельник на знаменник. Наприклад, $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$.

Домовимося, що скінченний десятковий дріб можна зображувати у вигляді нескінченного, у якого після останнього десяткового знака, відмінного від нуля, на місці наступних десяткових знаків записують нулі, наприклад, $\frac{3}{4}=0{,}75=0{,}75000\ldots$.

Цілі числа також домовимося записувати у вигляді нескінченного десяткового дробу, у якого справа від коми на місці десяткових знаків стоять нулі, наприклад $13 = 13{,}000\ldots$. Таким чином, будь-яке раціональне число може бути записане як нескінченний періодичний дріб. Нагадаємо, що у нескінченного періодичного дробу, починаючи з деякого місця, усі десяткові знаки повторюються. Групу цифр, що повторюється, називають *періодом дробу*; у записі дробу період наводять у дужках. Наприклад, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots=0{,}(3)$, $\frac{3}{22}=0{,}136363636\ldots=0{,}1(36)$.

Отже, *кожне раціональне число може бути записане у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу і, навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб задає раціональне число.*

Зауважимо, що будь-який періодичний десятковий дріб, який має своїм періодом дев'ятку, дорівнює нескінченному десятковому дробу з періодом нуль, у якого десятковий розряд, що передує періоду, збільшений на одиницю порівняно з відповідним розрядом першого дробу. Наприклад, нескінченні періодичні дроби $0{,}2(9)$ і $0{,}3(0)$ є записом одного й того самого раціонального числа $\frac{3}{10}$. Дійсно, ураховуючи, що сума нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом a_1 і знаменником q обчислюється за формулою $S=\frac{a_1}{1-q}$, маємо:

$$0{,}2(9)=0{,}2999\ldots=0{,}2+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\ldots=0{,}2+\frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{10}}=0{,}2+\frac{1}{10}=0{,}3=0{,}3(0).$$

У подальшому, записуючи раціональні числа за допомогою нескінченних періодичних десяткових дробів, домовимося не розглядати нескінченні періодичні дроби, період яких дорівнює дев'яти.

Кожне раціональне число можна зобразити точкою на координатній прямій (тобто на прямій, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю виміру). Наприклад, на рисунку 9 зображено декілька раціональних чисел $\left(0; 1; -\frac{1}{2}; 2{,}5\right)$.

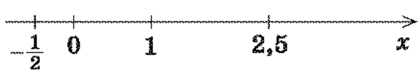


Рис. 9

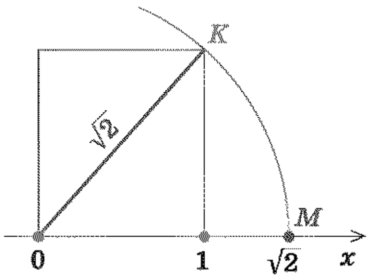


Рис. 10

Але на координатній прямій розташовані точки, які зображають числа, що не є раціональними. Наприклад, з курсу алгебри відомо, що число $\sqrt{2}$ не є раціональним. Це так зване ірраціональне число. Якщо побудувати квадрат із стороною, рівною 1, на координатній прямій x (рис. 10), то його діагональ дорівнюватиме $\sqrt{2}$. Тоді, провівши дугу кола з центром у точці O і радіусом $OM = \sqrt{2}$, одержимо точку M, координата якої дорівнює $\sqrt{2}$. Крім числа $\sqrt{2}$, ви також зустрічалися з ірраціональними числами $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ тощо.

Раціональні та ірраціональні числа складають *множину дійсних чисел R*. На координатній прямій кожному дійсному числу відповідає єдина точка і, навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число (у такому разі кажуть, що між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої встановлюється взаємно однозначна відповідність).

Кожне дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу: раціональні числа — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, ірраціональні — у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Нагадаємо, що для порівняння дійсних чисел і виконання дій над ними (у випадку, коли хоча б одне з них не є раціональним) використовують наближені значення цих чисел. Зокрема, *щоб порівняти два дійсних числа, треба розглядати послідовно їх наближені значення з недостачею з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д. доти, поки не одержимо якесь наближене значення одного числа, більше за відповідне наближене значення другого. Тоді те число, наближене значення якого більше, і вважається більшим*. Наприклад, якщо $\alpha = \sqrt{3} = 1{,}7320508...$, $\beta = 1\frac{3}{4} = 1{,}7500000...$, то $\alpha < \beta$ (оскільки $1{,}73 < 1{,}75$).

Для того щоб виконати додавання чи множення розглянутих чисел α і β, послідовно записують їх наближені значення з недостачею та з надлишком (з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д.) і виконують дії над одержаними раціональними числами. У результаті послідовно отримують значення суми чи добутку з потрібною точністю.

α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha\beta$
$1<\alpha<2$	$1<\beta<2$	$2<\alpha+\beta<4$	$1<\alpha\beta<4$
$1{,}7<\alpha<1{,}8$	$1{,}7<\beta<1{,}8$	$3{,}4<\alpha+\beta<3{,}6$	$2{,}89<\alpha\beta<3{,}24$
$1{,}73<\alpha<1{,}74$	$1{,}75<\beta<1{,}76$	$3{,}48<\alpha+\beta<3{,}50$	$3{,}0275<\alpha\beta<3{,}0624$
$1{,}732<\alpha<1{,}733$	$1{,}750<\beta<1{,}751$	$3{,}482<\alpha+\beta<3{,}484$	$3{,}031<\alpha\beta<3{,}034483$
...	...	...	...

Як бачимо, $\alpha+\beta=3{,}48...$, $\alpha\beta=3{,}03...$.

У курсі математичного аналізу доводиться, що у випадку, коли наближені значення чисел α і β послідовно беруть з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д., то значення суми $\alpha+\beta$ з недостачею і з надлишком прямує до одного й того самого числа, яке приймають за значення суми $\alpha+\beta$ (аналогічно означають і добуток $\alpha\beta$).

2. Модуль дійсного числа та його властивості. Нагадаємо означення модуля.

Модулем додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа — число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю.

Це означення можна коротко записати декількома способами.

$$|a|=\begin{cases}a \text{ при } a>0,\\ 0 \text{ при } a=0,\\ -a \text{ при } a<0,\end{cases} \quad \text{або} \quad |a|=\begin{cases}a \text{ при } a\geqslant 0,\\ -a \text{ при } a<0,\end{cases} \quad \text{або} \quad |a|=\begin{cases}a \text{ при } a>0,\\ -a \text{ при } a\leqslant 0,\end{cases} \quad \text{або}$$

$$|a|=\begin{cases}a \text{ при } a\geqslant 0,\\ -a \text{ при } a\leqslant 0.\end{cases}$$ За потреби ми будемо користуватися будь-яким із цих записів означення модуля. Для того щоб знайти $|a|$, за означенням необхідно знати знак числа a і використати відповідну формулу. Наприклад, $|5|=5$, $|-3|=-(-3)=3$, $\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3}$.

На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображає це число.

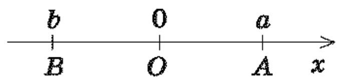


Рис. 11

Дійсно, якщо $a>0$ (рис. 11), то відстань $OA=a=|a|$.

Якщо $b<0$, то відстань $OB=-b=|b|$.

Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій.

Для доведення можна скористатися тим, що при паралельному перенесенні вздовж осі координат на b одиниць абсциса відповідної точки змінюється на b: до абсциси заданої точки додається число b, тобто при

$b > 0$ точка переноситься вправо, а при $b < 0$ — уліво. Позначимо на координатній прямій числа a, b, $a - b$ відповідно точками A, B, C. На рисунку 12 ці точки зображено для випадку $a > 0$ і $b < 0$, хоча наведене далі обґрунтування не залежить від знаків a і b. При паралельному перенесенні вздовж осі Ox на b одиниць точка O перейде в точку B, а точка C (з координатою $a - b$) — у точку з координатою $a - b + b = a$, тобто в точку A. Тоді $CO = AB$. Але відстань CO — це відстань від точки $a - b$ до початку координат, тобто $CO = |a - b|$, а отже, і $AB = |a - b|$. ○

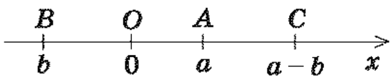


Рис. 12

Використовуючи означення модуля та його геометричний зміст, можна обґрунтувати властивості модуля, наведені в таблиці 2.

Наприклад, ураховуючи, що $|a|$ — це відстань від точки a до точки O, а відстань може виражатися тільки невід'ємним числом, одержуємо

$$|a| \geqslant 0,$$

тобто *модуль будь-якого числа є невід'ємним числом.*

Ураховуючи, що точки a і $-a$ розташовані на однаковій відстані від точки O, одержуємо

$$|-a| = |a|,$$

це означає, що *модулі протилежних чисел рівні.*

Якщо $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, а якщо $a < 0$, то $a < |a|$. Отже, завжди

$$a \leqslant |a|,$$

тобто *величина числа не перевищує величини його* модуля.

Якщо в останню нерівність замість a підставити $-a$ і врахувати, що $|-a| = |a|$, то одержуємо нерівність $-a \leqslant |a|$. Звідси $a \geqslant -|a|$, що разом із нерівністю $a \leqslant |a|$ свідчить, що для будь-якого дійсного числа a виконується подвійна нерівність

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|. \qquad (1)$$

При $b > 0$ нерівність $|a| \leqslant b$ означає, що число a на координатній прямій розміщене від точки O на відстані, яка не перевищує b (рис. 13), тобто в проміжку $[-b; b]$. Навпаки, якщо число a належить цьому проміжку, тобто $-b \leqslant a \leqslant b$, то $|a| \leqslant b$. Отже,

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b. \qquad (2)$$

Зауважимо, що останнє твердження справедливе і при $b = 0$ (тоді обом нерівностям задовольняє тільки одне значення $a = 0$).

Аналогічно при $b > 0$ нерівність $|a| \geqslant b$ означає, що число a на координатній прямій знаходиться від точки O на відстані, яка більша або дорівнює b (рис. 13), тобто

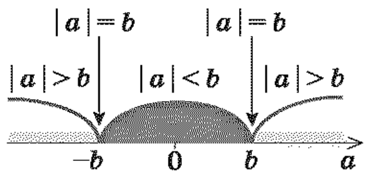


Рис. 13

в цьому випадку $a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$. Навпаки, якщо число a задовольняє одній із цих нерівностей, то $|a| \geqslant b$. Отже, при $b > 0$ нерівність $|a| \geqslant b$ рівносильна сукупності нерівностей $a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$, що можна записати так:

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ або } a \geqslant b.$$

Властивості модуля добутку і модуля дробу фіксують відомі правила дій над числами з однаковими і різними знаками:

модуль добутку дорівнює добутку модулів множників, тобто

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю), тобто

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0).$$

Формулу для знаходження модуля добутку можна узагальнити для випадку декількох множників:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|. \qquad (3)$$

Якщо у формулі (3) взяти $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, одержуємо формулу

$$|a^n| = |a|^n.$$

Застосовуючи останню формулу справа наліво при $n = 2k$ і враховуючи, що $a^{2k} \geqslant 0$ при всіх значеннях a, одержуємо $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$. Отже,

$$|a|^{2k} = a^{2k}.$$

Для обґрунтування нерівності

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \qquad (4)$$

запишемо нерівність (1) для чисел a і b:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|; \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Додаючи почленно ці нерівності, одержуємо

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Ураховуючи нерівність (2), маємо

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

тобто *модуль суми не перевищує суми модулів доданків*.

Якщо в нерівності (4) замінити b на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|. \qquad (5)$$

Якщо записати число a так: $a = b + (a - b)$ і використати нерівність (4), то одержимо нерівність $|a| \leqslant |b| + |a - b|$. Звідси

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|. \qquad (6)$$

Якщо в нерівності (6) замінити b на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a| - |b| \leqslant |a + b|, \qquad (7)$$

тобто *модуль суми двох чисел не менше різниці їх модулів*.

Міняючи місцями букви a і b у нерівностях (6) і (7) та враховуючи, що $|a-b|=|b-a|$, маємо також нерівності

$$|b|-|a| \leqslant |a \pm b|. \quad (8)$$

Одержані нерівності (4)–(8) можна коротко записати так:

$$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 **Доведіть, що сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка (якщо дільник не дорівнює нулю) двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.**

Розв'язання	*Коментар*
▶ Нехай задано два раціональних числа $r_1=\frac{m_1}{n_1}$ і $r_2=\frac{m_2}{n_2}$, де m_1 і m_2 — цілі, а n_1 і n_2 — натуральні числа. Оскільки сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка двох звичайних дробів завжди є звичайним дробом, то одержаний результат завжди буде раціональним числом. Наприклад, $r_1+r_2=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+n_1m_2}{n_1n_2}$, де $m_1n_2+n_1m_2$ — ціле число, а n_1n_2 — натуральне. ◁	Будь-яке раціональне число можна записати як дріб $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число. Щоб довести твердження задачі, достатньо довести, що сума, різниця, добуток і частка двох дробів виду $\frac{m}{n}$ буде дробом такого самого виду.

Приклад 2 **Доведіть, що для будь-якого натурального числа n число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне.**

Коментар

Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного: припустити, що задане додатне число є раціональним ненатуральним (тобто дробом), і отримати суперечність з умовою або з якимсь відомим фактом.

Записуючи $\sqrt{n}$ у вигляді нескоротного дробу, слід ураховувати, що при натуральних значеннях n це число завжди буде невід'ємним.

Розв'язання

▶ Припустимо, що $\sqrt{n}$ не є ірраціональним числом (тоді це число раціональне) і не є натуральним числом. Отже, це число може бути тільки раціональним нескоротним дробом $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, де p і q — натуральні числа

$(q \neq 1)$. За означенням квадратного кореня маємо $n=\frac{p^2}{q^2}$, тобто $n=\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$.

Ураховуючи, що $q \neq 1$, одержуємо, що дріб $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$, який дорівнює натуральному числу n, повинен бути скоротним. Отже, у натуральних множників, що стоять у чисельнику і знаменнику цього дробу, повинен бути спільний натуральний дільник, який відрізняється від 1. Але в чисельнику стоять тільки множники p, а в знаменнику — тільки множники q. Тоді числа p і q мають натуральний дільник, який відрізняється від 1, тобто дріб $\frac{p}{q}$ є скоротним дробом, що суперечить умові. Таким чином, наше припущення неправильне, і для будь-якого натурального числа n число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне. ◁

Наприклад, оскільки числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ не є натуральними числами $\left(1<\sqrt{3}<2,\ 3<\sqrt{10}<4\right)$, то $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ — ірраціональні числа.

Приклад 3* Доведіть, що сума $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — число ірраціональне.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Припустимо, що число $\sqrt{3}+\sqrt{5}=r$ — раціональне. Тоді $\sqrt{5}=r-\sqrt{3}$. Піднісши обидві частини останньої рівності до квадрата, маємо $5=r^2-2r\sqrt{3}+3$. Звідси $2r\sqrt{3}=r^2-2$. Отже, $\sqrt{3}=\frac{r^2-2}{2r}$. Але права частина цієї рівності — раціональне число (оскільки за припущенням r — раціональне число), а ліва — ірраціональне. Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і число $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — ірраціональне. ◁	Для доведення твердження задачі можна використати метод «від супротивного» — припустити, що задане число є раціональним, і отримати суперечність з якимсь відомим фактом, наприклад з тим, що $\sqrt{3}$ — ірраціональне число. Аналізуючи одержані вирази, використовуємо результат прикладу 1: *якщо число r — раціональне, то числа r^2-2 і $2r$ та їх частка теж будуть раціональними.* Зазначимо, що знаменник отриманого дробу $2r=2(\sqrt{3}+\sqrt{5})\neq 0$.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння[1] $\lvert 2x+5 \rvert = 7$.

---

[1] Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля, докладніше розглянуто в § 8.

Розв'язання	*Коментар*

I спосіб

▶ $2x + 5 = 7$ або $2x + 5 = -7$,

$2x = 2$ або $2x = -12$,

$x = 1$ або $x = -6$.

Відповідь: 1; –6. ◁

Задане рівняння має вигляд $|t| = 7$ (у даному випадку $t = 2x + 5$). Його зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля: $|2x + 5|$ — це відстань від точки 0 до точки $2x + 5$. Але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число –7). Отже, рівність $|2x + 5| = 7$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x + 5 = 7$ або $2x + 5 = -7$.

II спосіб

▶ $|2x - (-5)| = 7$,

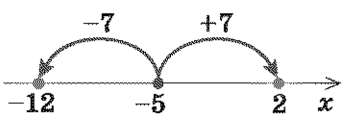


Рис. 14

$2x = 2$ або $2x = -12$,

$x = 1$ або $x = -6$.

Відповідь: 1; –6. ◁

З геометричної точки зору $|a - b|$ є відстань між точками a і b на координатній прямій. Запишемо задане рівняння так: $|2x - (-5)| = 7$. Тоді рівність $|2x - (-5)| = 7$ означає, що відстань від точки $2x$ до точки –5 дорівнює 7. На відстані 7 від точки –5 знаходяться точки 2 і –12 (рис. 14). Отже, задана рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $2x = 2$ або $2x = -12$, тобто задане рівняння рівносильне цій сукупності рівнянь.

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $|x^2 - 5x| \leqslant 6$.

Розв'язання	*Коментар*

▶ $-6 \leqslant x^2 - 5x \leqslant 6$,

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leqslant 6, \\ x^2 - 5x \geqslant -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-6) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-6) \geqslant 0, \end{cases}$$

Розв'язуючи ці нерівності (рис. 15), отримуємо

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 6, \\ x \leqslant 2 \text{ або } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Задана нерівність має вигляд $|t| \leqslant 6$ (у даному випадку $t = x^2 - 5x$), і її можна розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. З геометричної точки зору, $|t|$ — це відстань від точки 0 до точки t. На відстані 6 від 0 знаходяться числа 6 і –6.

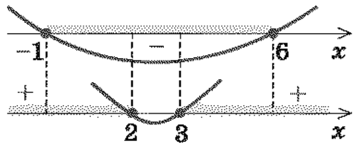


Рис. 15

Отже, $-1 \leqslant x \leqslant 2$ або $3 \leqslant x \leqslant 6$.
Відповідь: $[-1; 2] \cup [3; 6]$. ◁

Тоді нерівності $|t| \leqslant 6$ задовольняють усі ті і тільки ті точки, які знаходяться в проміжку $[-6; 6]$, тобто $-6 \leqslant t \leqslant 6$. Для розв'язування одержаної подвійної нерівності її зручно замінити відповідною системою.

Запитання для контролю

1. Поясніть, які числа входять до множин цілих, раціональних і дійсних чисел. Наведіть приклади. Зобразіть відповідні точки на координатній прямій.
2. Поясніть, чим відрізняються записи у вигляді нескінченного десяткового дробу раціонального та ірраціонального чисел.
3. Поясніть, як порівнюють дійсні числа.
4. Дайте означення модуля дійсного числа. а) Сформулюйте властивості модуля. б*) Обґрунтуйте властивості модуля дійсного числа.

Вправи

1. Поясніть, чому задане дійсне число не може бути раціональним:
   1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}-5$; 3) $\sqrt{10}$;
   4) $\sqrt{7}+3$; 5) $2-\sqrt{5}$.

2*. Доведіть, що сума (різниця, добуток і частка) раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним (добуток і частка тільки у випадку, коли задане раціональне число не дорівнює нулю).

3*. Доведіть, що задані дійсні числа є ірраціональними:
   1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$;
   3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

4. Користуючись геометричним змістом модуля, зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівності:
   1°) $|x| \leqslant 2$; 2°) $|x| > 5$;
   3) $|x-3| \leqslant 0,5$; 4) $|x+1| < 0,3$.

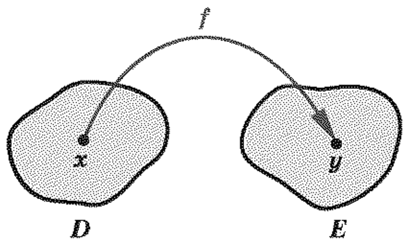
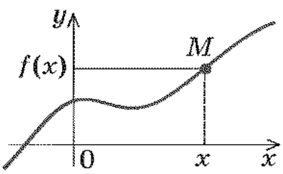
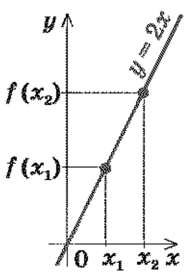
5. Розв'яжіть рівняння:
   1) $|3x+1| = 4$; 2) $|4x-2| = 6$;
   3*) $||x-1|-2| = 1$; 4*) $||2x+3|-5| = 3$.

6. Розв'яжіть нерівність:
   1) $|2x-7| \leqslant 1$; 2) $|3x+5| > 7$;
   3*) $||2x-1|+3| \geqslant 5$; 4*) $||4x+7|-11| < 4$.

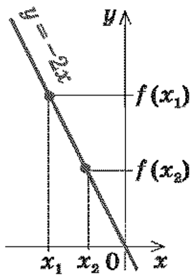
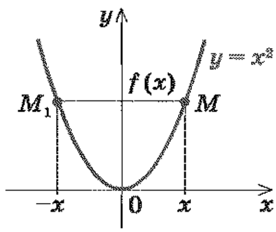
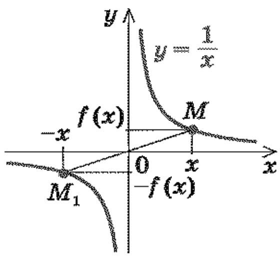
§ 2 ФУНКЦІЇ

2.1. Поняття числової функції. Найпростіші властивості числових функцій

Таблиця 3

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття числової функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D (області визначення) ставиться у відповідність єдине число y.
Записують цю відповідність так:
$y = f(x)$.
Позначення і терміни
$D(f)$ — область визначення
$E(f)$ — область значень
x — аргумент (незалежна змінна)
y — функція (залежна змінна)
f — функція
$f(x_0)$ — значення функції f у точці x_0</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Графік функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Графіком функції f називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Зростаючі і спадні функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Функція $f(x)$
зростаюча на множині P:
якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$
для всіх $x \in P$
(при збільшенні аргументу відповідні точки графіка піднімаються)</td></tr>
</table>

Продовження табл. 3

<table>
<tr><td></td><td>Функція $f\ (x)$
спадна на множині P**:**
якщо $x_2 > x_1$**, то** $f\ (x_2) < f\ (x_1)$
для всіх $x \in P$
(при збільшенні аргументу відповідні точки графіка опускаються).</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Парні і непарні функції</td></tr>
<tr><td></td><td>Функція $f\ (x)$ парна:
$f\ (-x) = f\ (x)$
для всіх x з області визначення.
Графік парної функції симетричний відносно осі Oy</td></tr>
<tr><td></td><td>Функція $f\ (x)$ непарна:
$f\ (-x) = -f\ (x)$
для всіх x із області визначення.
Графік непарної функції симетричний відносно початку координат — точки O</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття функції. З поняттям функції ви ознайомилися в курсі алгебри. Нагадаємо, що залежність змінної y від змінної x називається *функцією*, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо користуватися таким означенням числової функції.

Числовою функцією з областю визначення D **називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність єдине число y.**

Функції позначають латинськими (інколи грецькими) буквами. Розглянемо довільну функцію f. Число y, яке відповідає числу x (на рисунку до пункту 1 табл. 3 це показано стрілкою), називають значенням функції f у точці x і позначають $f\ (x)$.

Область визначення функції f — це множина тих значень, яких може набувати аргумент x. Вона позначається $D(f)$.

Область значень функції f — це множина, яка складається з усіх чисел $f(x)$, де x належить області визначення. Її позначають $E(f)$.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо немає додаткових обмежень, то *областю визначення функції, заданої формулою, вважають множину всіх значень змінної, при яких ця формула має зміст*. Наприклад, якщо функція задана формулою $y=\sqrt{x}+1$, то її область визначення — $x \geqslant 0$, тобто $D(y)=[0;\ +\infty)$, а область значень — $y \geqslant 1$, тобто $E(y)=[1;\ +\infty)$.

Іноді функція може задаватися різними формулами на різних множинах значень аргументу. Наприклад, $y=|x|=\begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x<0. \end{cases}$

Функцію можна задати не тільки за допомогою формули, а й за допомогою таблиці, графіка чи словесного опису. Наприклад, на рисунку 16 графічно задана функція $y=f(x)$ з областю визначення $D(f)=[-1;\ 3]$ і множиною значень $E(f)=[1;\ 4]$.

Значення, що приймає функція $f(x)$ в деякій точці x_0 множини M, на якій ця функція задана, називається *найбільшим* (*найменшим*) на цій множині, якщо ні в якій іншій точці множини функція не має більшого (меншого) значення. Тобто для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x) \leqslant f(x_0)$ (відповідно $f(x) \geqslant f(x_0)$ для найменшого значення). Іноді це записують так: $\max\limits_M f(x)=f(x_0)$ (відповідно $\min\limits_M f(x)=f(x_0)$). Наприклад, для функції $y=f(x)$, графічно заданої на відрізку $[-1;\ 3]$ на рисунку 16, найменше значення дорівнює 1, а найбільше — 4. Тобто $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=4$, $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=1$.

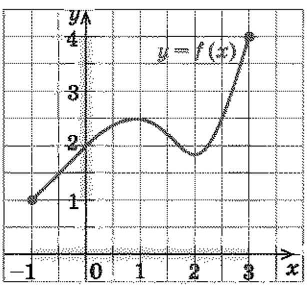


Рис. 16

2. **Графік функції.** Нагадаємо, що *графіком функції $y=f(x)$* називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x;\ f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x.

На рисунках до пункту 4 таблиці 3 наведено графіки функцій $y=x^2$ та $y=\frac{1}{x}$, а на рисунку 17 — графік функції $y=|x|$.

Наведемо також графік функції $y=[x]$, де $[x]$ — позначення *цілої частини* числа x, тобто найбільшого цілого числа, яке не перевищує x (рис. 18). Область визначення цієї функції $D(y)=\boldsymbol{R}$ — множина всіх дійсних чисел, а область значень $E(y)=\boldsymbol{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

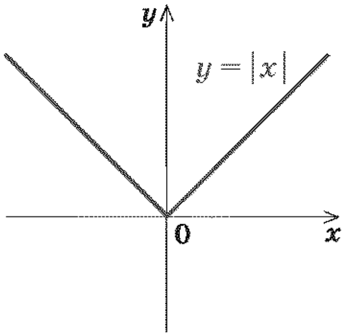


Рис. 17

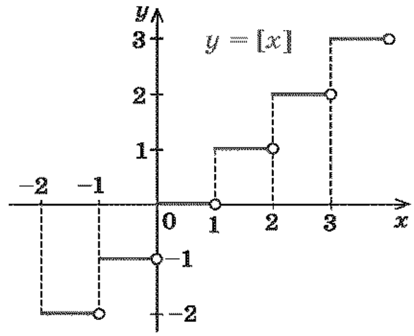


Рис. 18

На рисунку 19 наведено графік числової функції $y = \{x\}$, де $\{x\}$ — позначення *дробової частини* числа x (за означенням $\{x\} = x - [x]$).

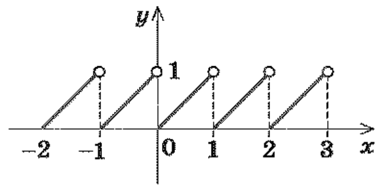


Рис. 19

3. Зростаючі та спадні функції. Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.

Функція $f(x)$ називається *зростаючою на множині P*, якщо більшому значенню аргументу із цієї множини відповідає більше значення функції,

тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 з множини P,

якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Наприклад, функція $f(x) = 2x$ зростаюча (на всій області визначення, тобто на множині R), оскільки, якщо $x_2 > x_1$, то $2x_2 > 2x_1$, отже, $f(x_2) > f(x_1)$.

Відповідні точки графіка зростаючої функції при збільшенні аргументу піднімаються (рис. 20).

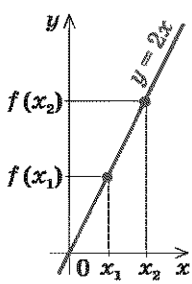


Рис. 20

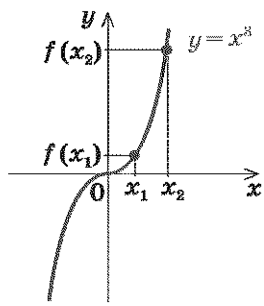


Рис. 21

На рисунку 21 наведено графік зростаючої функції $y = x^3$. Дійсно, при $x_2 > x_1$ маємо $x_2^3 > x_1^3$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $f(x)$ називається *спадною на множині P*, якщо більшому значенню аргументу із цієї множини відповідає менше значення функції,

тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 з множини P,

якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Наприклад, функція $f(x) = -2x$ спадна (на всій області визначення, тобто на множині R), оскільки, якщо $x_2 > x_1$, то $-2x_2 < -2x_1$, отже, $f(x_2) < f(x_1)$. Відповідні точки графіка спадної функції при збільшенні аргументу опускаються (рис. 22).

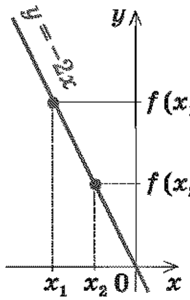


Рис. 22

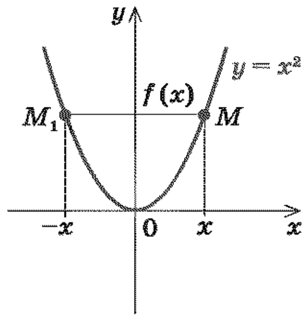


Рис. 23

Розглядаючи графік функції $y = x^2$ (рис. 23), бачимо, що на всій області визначення ця функція не є ні зростаючою, ні спадною. Але можна виділити проміжки області визначення, де ця функція зростає і де спадає. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ функція $y = x^2$ зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ — спадає.

Зазначимо, що для зростаючих і спадних функцій виконуються властивості, обернені до тверджень, що містяться в означеннях.

Якщо функція зростає, то більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу.

Якщо функція спадає, то більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу.

● Обґрунтуємо першу із цих властивостей методом від супротивного. Нехай функція $f(x)$ зростає і $f(x_2) > f(x_1)$. Припустимо, що аргумент x_2 не більше аргументу x_1, тобто $x_2 \leqslant x_1$. Із цього припущення одержуємо:

якщо $x_2 \leqslant x_1$ і $f(x)$ зростає, то $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, що суперечить умові $f(x_2) > f(x_1)$. Отже, наше припущення неправильне і, якщо $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, що і потрібно було довести.

Аналогічно можна обґрунтувати і другу властивість. ○

Наприклад, якщо $x^3 > 8$, тобто $x^3 > 2^3$, то, ураховуючи зростання функції $f(x) = x^3$, одержуємо $x > 2$.

4. Парні і непарні функції. Розглянемо функції, області визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто разом з кожним числом x містять і число $-x$. Для таких функцій визначено поняття парності і непарності.

Функція f називається *парною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = f(x)$.

Наприклад, функція $y = x^2$ (тобто функція $f(x) = x^2$) — парна, оскільки

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

- Якщо функція $f(x)$ парна, то до її графіка разом з кожною точкою M з координатами $(x;\ y) = (x;\ f(x))$ входить також і точка M_1 з координатами $(-x;\ y) = (-x;\ f(-x)) = (-x;\ f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно осі Oy (рис. 24), тому й **графік парної функції розміщений симетрично відносно осі Oy.** ○

Наприклад, графік парної функції $y = x^2$ (рис. 23) симетричний відносно осі Oy.

Функція f називається *непарною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ (тобто функція $f(x) = \frac{1}{x}$) — непарна, оскільки

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

- Якщо функція $f(x)$ непарна, то до її графіка разом з кожною точкою M з координатами $(x;\ y) = (x;\ f(x))$ входить також і точка M_1 з координатами $(-x;\ y) = (-x;\ f(-x)) = (-x;\ -f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно початку координат (рис. 25), тому й **графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат.** ○

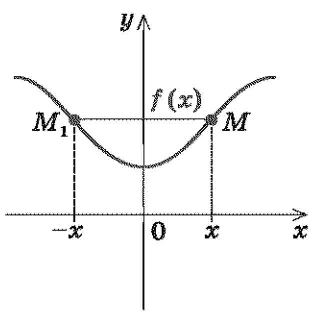


Рис. 24

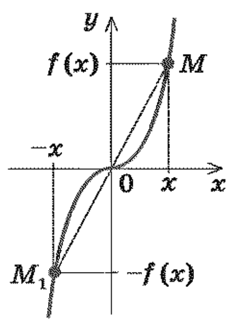


Рис. 25

Наприклад, графік непарної функції $y = \frac{1}{x}$ (див. пункт 4 табл. 3) симетричний відносно початку координат, тобто відносно точки O.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x}{x^2 + x}$; 3) $y = \sqrt{x+5}$.

Розв'язання

1) ▶ Обмежень для знаходження значень виразу $x^2 + x$ немає, отже, $D(y) = R$. ◁

2) ▶ Область визначення функції $y = \frac{x}{x^2 + x}$ задана обмеженням $x^2 + x \neq 0$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. З'ясуємо, коли $x^2 + x = 0$. Маємо $x(x + 1) = 0$, $x = 0$ або $x = -1$. Тоді область визначення можна задати обмеженнями $x \neq 0$, $x \neq -1$ або записати так: $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. ◁

3) ▶ Область визначення функції $y = \sqrt{x+5}$ задана обмеженням $x + 5 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -5$, оскільки під знаком квадратного кореня повинен стояти невід'ємний вираз. Отже, $D(y) = [-5; +\infty)$. ◁

Коментар

Оскільки всі функції задано формулами, то їх області визначення — це множина всіх значень змінної x, при яких має зміст формула, тобто вираз, який стоїть у правій частині формули $y = f(x)$.

У курсі алгебри зустрічалися тільки два *обмеження*, які необхідно враховувати *при знаходженні області визначення*:

1) *якщо вираз записано у вигляді дробу* $\frac{A}{B}$, *то знаменник* $B \neq 0$;

2) *якщо запис виразу містить квадратний корінь* $\sqrt{A}$, *то підкореневий вираз* $A \geqslant 0$.

У всіх інших випадках, які вам доводилося розглядати, областю визначення виразу були всі дійсні числа[1].

Приклад 2* Знайдіть область значень функції $y = x^2 - 3$.

Розв'язання

▶ Складаємо рівняння $x^2 - 3 = a$. Воно рівносильне рівнянню $x^2 = a + 3$, яке має розв'язки, якщо $a + 3 \geqslant 0$, тобто при $a \geqslant -3$. Усі ці числа і складуть область значень функції.

Отже, область значень заданої функції

$E(f) = [-3; +\infty)$ (тобто $y \geqslant -3$). ◁

Коментар

Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $x^2 - 3$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x (при цьому значенні x значення $f(x) = a$).

Тоді всі числа a, для яких існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = a$, увійдуть до області значень функції $f(x)$. Множина всіх таких a і складе область значень функції.

---

[1] Надалі в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу з'являться нові вирази з обмеженнями: $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\sqrt[n]{a}$, a^{α}, де α — нецiле число.

Корисно пам'ятати, що

область значень функції $y = f(x)$ збігається з множиною тих значень a, при яких рівняння $f(x) = a$ має розв'язки.

Приклад 3* Доведіть, що при $k \neq 0$ областю значень лінійної функції $y = kx + b$ є множина всіх дійсних чисел.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Якщо $kx + b = a$ (де $k \neq 0$), то розв'язок цього рівняння $x = \frac{a-b}{k}$ існує для будь-якого $a \in R$ ($k \neq 0$ за умовою). ◁ Таким чином, значенням заданої функції може бути будь-яке дійсне число, отже, її область значень $E(f) = R$.	Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $kx + b$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x, таке, що $f(x) = a$. Множина всіх таких значень a і буде складати область значень функції $f(x)$.

Приклад 4* Доведіть, що лінійна функція $y = kx + b$ при $k > 0$ є зростаючою, а при $k < 0$ — спадною.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Нехай $x_2 > x_1$ (тоді $x_2 - x_1 > 0$). Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$. Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то при $k > 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, отже, $f(x_2) > f(x_1)$ — функція зростає. При $k < 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, отже, $f(x_2) < f(x_1)$ — функція спадає. ◁	Для обґрунтування зростання або спадання функції корисно пам'ятати, що *для доведення нерівності $f(x_2) > f(x_1)$ чи $f(x_2) < f(x_1)$ достатньо знайти знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$.* Задана функція $f(x) = kx + b$ буде зростаючою, якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливатиме нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, а для доведення останньої нерівності достатньо знайти знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$. Аналогічно обґрунтовують і спадання функції.

Приклад 5* Доведіть, що:

1) сума двох зростаючих на множині P функцій завжди є зростаючою функцією на цій множині;

2) сума двох спадних на множині P функцій завжди є спадною функцією на цій множині.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими на одній і тій самій множині P. Якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ і $g(x_2) > g(x_1)$. Додаючи почленно останні нерівності, одержуємо $$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$$ Це і означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючою функцією на множині P. ◁ 2) ▶ Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є спадними на множині P. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ маємо $f(x_2) < f(x_1)$ і $g(x_2) < g(x_1)$. Після почленного додавання останніх нерівностей одержуємо: $$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1),$$ а це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є спадною функцією на множині P. ◁	Для доведення зростання суми двох зростаючих функцій $f(x)$ і $g(x)$ достатньо довести, що на множині P з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$$ Аналогічно для доведення того, що сума двох спадних функцій є спадною функцією, достатньо довести: $$\text{якщо } x_2 > x_1, \text{ то}$$ $$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1).$$

Приклад 6 **Доведіть, що зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.**

Розв'язання	*Коментар*
▶ Нехай функція $f(x)$ є зростаючою і $$f(x_1) = f(x_2). \qquad (1)$$ Припустимо, що $$x_1 \neq x_2.$$ Якщо $x_1 \neq x_2$, то або $x_1 > x_2$, або $x_1 < x_2$. Ураховуючи зростання $f(x)$, у випадку $x_1 > x_2$ маємо $f(x_1) > f(x_2)$, що суперечить рівності (1). У випадку $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$, що також суперечить рівності (1). Отже, наше припущення неправильне, і рівність $f(x_1) = f(x_2)$ можлива тільки при $x_1 = x_2$.	Доведемо це твердження методом від супротивного. Для цього достатньо припустити, що виконується протилежне твердження (функція може набувати одного й того самого значення принаймні у двох точках), і одержати суперечність. Це означатиме, що наше припущення неправильне, а правильним є задане твердження.

Тобто зростаюча функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.

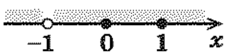
Аналогічно доводиться твердження і для спадної функції. ◁

Приклад 7 Дослідіть, які із заданих функцій є парними, які непарними, а які — ні парними, ні непарними:

1) $y=\frac{1}{x+1}$; 2) $y = x^4$; 3) $y = x^3 + x$.

Розв'язання

1) ▶ Область визначення функції $y=\frac{1}{x+1}$: $x \neq -1$, тобто вона не симетрична відносно точки O (точка $x = 1$ входить до області визначення, а $x = -1$ — ні).



Отже, задана функція не може бути ні парною, ні непарною. ◁

2) ▶ Область визначення функції $y = x^4$: $D(y) = R$, тобто вона симетрична відносно точки O.
$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, а отже, функція парна. ◁

3) ▶ Область визначення функції $y = x^3 + x$: $D(y) = R$, отже, вона симетрична відносно точки O. ◁
$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x =$
$= -(x^3 + x) = -f(x)$,
отже, функція непарна.

Коментар

Для дослідження функції $y = f(x)$ на парність чи непарність достатньо, по-перше, упевнитися, що область визначення цієї функції симетрична відносно точки O (разом з кожною точкою x містить і точку $-x$), і, по-друге, порівняти значення $f(-x)$ і $f(x)$.

Запитання для контролю

1. Що називається числовою функцією? Наведіть приклади таких функцій.
2. На прикладах поясніть, що таке область визначення функції, область значень функції, найбільше та найменше значення функції на множині M. Які обмеження необхідно врахувати, щоб знайти область визначення функції $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$? Знайдіть її область визначення.

3. Що називається графіком функції $y = f(x)$? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається зростаючою? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається спадною? Наведіть приклади.
6. Яка функція називається парною? Наведіть приклади. Як розміщено графік парної функції на координатній площині? Наведіть приклади.
7. Яка функція називається непарною? Наведіть приклади. Як розміщено графік непарної функції на координатній площині? Наведіть приклади.

Вправи

1°. Знайдіть значення функції в указаних точках:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ у точках 2; –1; 3; a ($a \neq 0$);

2) $g(x) = x^2 - 3$ в точках 0; 1; –2; b;

3) $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$ у точках 0; 3; –1; m ($m > 0$).

2. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1°) $y = 2x + 3$; 2°) $y=\sqrt{x+3}$; 3°) $y=\frac{1}{x+1}$; 4) $y=\frac{x}{x^2+1}$;

5) $y=\sqrt{x^2-1}$; 6) $y=\sqrt{x^2+1}$; 7) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$; 8) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$;

9*) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$; 10*) $y=\frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$; 11*) $y=\frac{\sqrt{x}}{|x|-2}$; 12*) $y=\sqrt{x^2+x+1}$.

3. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1) $f(x) = 5$; 2) $f(x) = x$; 3) $f(x) = x^2$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$;

5*) $y = -3x + 1$; 6*) $y = x^2 - 5$; 7*) $y = |x| + 3$.

4°. Для функцій, які задано своїми графіками на рисунку 26, укажіть область визначення, область значень, найбільше та найменше значення на всій області визначення, проміжки зростання і спадання та значення кожної функції при $x = 1$.

5. Обґрунтуйте, що задана функція є зростаючою (на її області визначення):

1) $y = 3x$; 2) $y = x + 5$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^5$; 5*) $y=\sqrt{x}$.

6*. Доведіть, що на заданому проміжку функція зростає:

1) $y=-\frac{2}{x}$, де $x > 0$; 2) $y=-\frac{1}{x}$, де $x < 0$.

7. Обґрунтуйте, що задана функція є спадною (на її області визначення):

1) $y = -3x$; 2) $y = -x - 1$; 3*) $y = -x^3$; 4*) $y = -x^5$.

8*. Доведіть, що на заданому проміжку функція спадає:

1) $y=\frac{3}{x}$, де $x < 0$; 2) $y=\frac{5}{x}$, де $x > 0$.

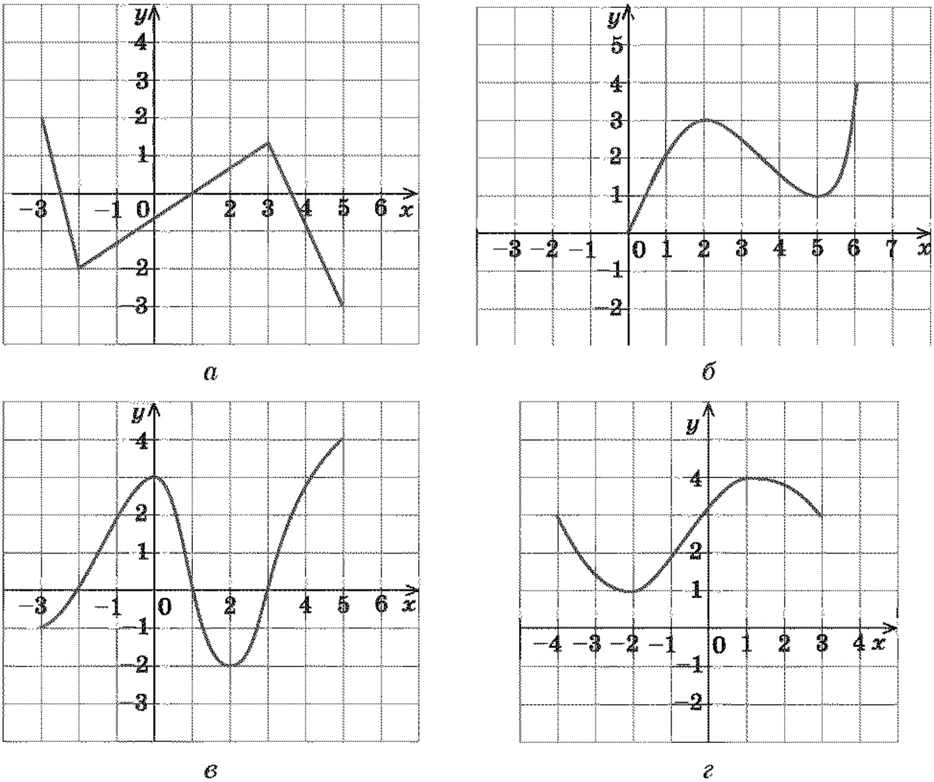


Рис. 26

9*. Доведіть, що функція $y = x^2$ на проміжку $[0; +\infty)$ зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ спадає.

10*. Користуючись твердженнями, доведеними в прикладі 5 (с. 35), укажіть, які із заданих функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = x^3 + x$; 2) $y = -x - x^5$; 3) $y = x + \sqrt{x}$; 4) $y = -x^3 - x^5$.

11*. Користуючись твердженнями, доведеними в прикладі 6 (с. 36):

1) обґрунтуйте, що рівняння $x^3 + x = 10$ має єдиний корінь $x = 2$;

2) підберіть корінь рівняння $\sqrt{x} + x = 6$ і доведіть, що інших коренів це рівняння не має.

12. Обґрунтуйте, що задана функція є парною:

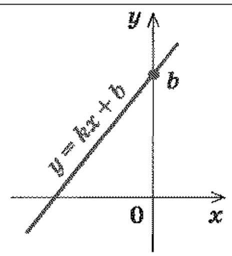
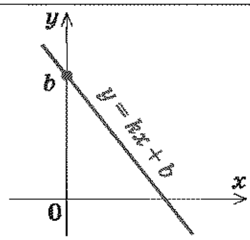
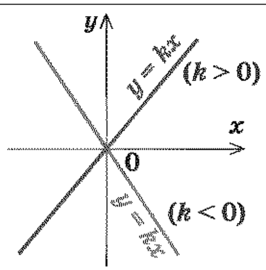
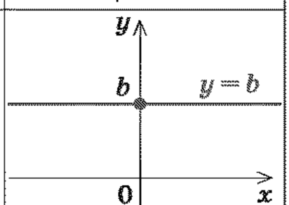
1) $y = x^6$; 2) $y = \frac{1}{x^2} + 1$; 3) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; 4) $y = \sqrt{|x| + x^4}$.

13. Обґрунтуйте, що задана функція є непарною:

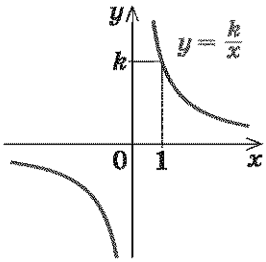
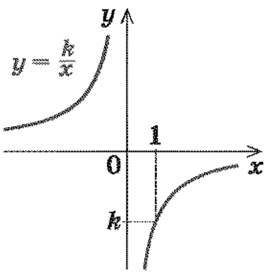
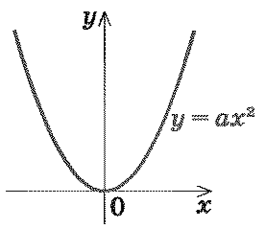
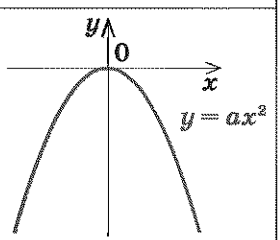
1) $y = x^5$; 2) $y = -\frac{1}{x^3}$; 3) $y = x\,|x|$; 4) $y = x^3 - x$.

2.2. ВЛАСТИВОСТІ І ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ВИДІВ ФУНКЦІЙ

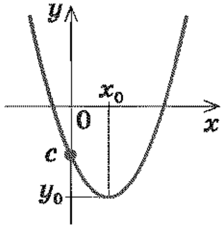
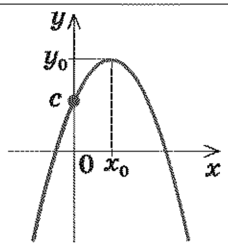
Таблиця 4

<table>
<tr><th rowspan="2">Умови для коефіцієнтів</th><th rowspan="2">Графік</th><th colspan="4">Властивості</th></tr>
<tr><th>$D(y)$</th><th>$E(y)$</th><th>парність і непарність</th><th>зростання і спадання</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="6">1. Лінійна функція $y = kx + b$</td></tr>
<tr><td>$k > 0$
$b \neq 0$</td><td></td><td rowspan="4">$\boldsymbol{R}$</td><td rowspan="3">$\boldsymbol{R}$</td><td rowspan="2">ні парна, ні непарна</td><td>зростає</td></tr>
<tr><td>$k < 0$
$b \neq 0$</td><td></td><td>спадає</td></tr>
<tr><td>$b = 0$
$y = kx$</td><td></td><td>непарна</td><td>при $k > 0$ зростає
при $k < 0$ спадає</td></tr>
<tr><td>$k = 0$
$y = b$</td><td></td><td>b</td><td>парна</td><td>постійна</td></tr>
</table>

Продовження табл. 4

1	2	3	4	5	6
2. Обернена пропорційність, функція $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$					
$k > 0$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	непарна	спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$
$k < 0$					зростає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$
3. Функція $y = ax^2$ $(a \neq 0)$					
$a > 0$		R	$[0;\ +\infty)$	парна	спадає на проміжку $(-\infty;\ 0]$, зростає на проміжку $[0;\ +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty;\ 0]$		зростає на проміжку $(-\infty;\ 0]$, спадає на проміжку $[0;\ +\infty)$

Продовження табл. 4

1	2	3	4	5	6
4. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ $\left(a \neq 0, x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$					
$a > 0$		R	$[y_0; +\infty)$	у загальному випадку — ні парна, ні непарна при $b = 0$ функція $y = ax^2 + c$ парна	спадає на проміжку $(-\infty; x_0]$, зростає на проміжку $[x_0; +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty; y_0]$		зростає на проміжку $(-\infty; x_0]$, спадає на проміжку $[x_0; +\infty)$

Пояснення й обґрунтування

1. Лінійна функція $y = kx + b$. *Лінійною функцією* називається функція виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа.

Обґрунтуємо основні характеристики цієї функції: область визначення, область значень, парність чи непарність, зростання і спадання.

Область визначення — множина всіх дійсних чисел: $D(y) = R$, оскільки формула $kx + b$ має зміст при всіх дійсних значеннях x (тобто для будь-якого дійсного x ми можемо обчислити значення $kx + b$).

Область значень лінійної функції буде різною залежно від значення коефіцієнта k.

Якщо $k = 0$, то функція має вигляд $y = b$, тобто її область значень складається з одного числа b. У такому випадку **графіком лінійної функції $y = b$ є пряма, паралельна осі Ox, яка перетинає вісь Oy у точці b** (рис. 27).

Якщо $k \neq 0$, то $E(y) = R$ (обґрунтування наведено в розв'язанні прикладу 3 до пункту 2.1).

Парність і непарність лінійної функції суттєво залежить від значень коефіцієнтів b і k.

При $b = 0$ і $k \neq 0$ функція $y = kx + b$ перетворюється на функцію $y = kx$, яка непарна, оскільки для всіх x з її області визначення

$$f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x).$$

Отже, графік функції $y = kx$ (рис. 28) симетричний відносно точки O.

При $k = 0$ одержуємо функцію $y = b$, яка є парною, оскільки для всіх x з її області визначення $f(-x) = b = f(x)$. Тобто графік функції $y = b$ симетричний відносно осі Oy (рис. 27).

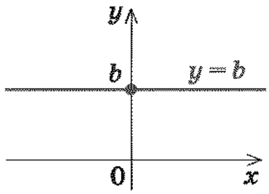


Рис. 27

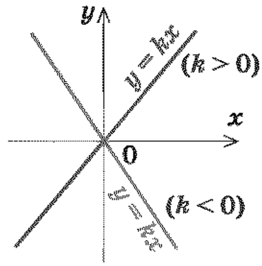


Рис. 28

У загальному випадку при $k \neq 0$ і $b \neq 0$ функція $y = kx + b$ не буде ні парною, ні непарною, оскільки $f(-x) = k(-x) + b = -kx + b \neq f(x)$ і також

$$f(-x) = -kx + b = -(kx - b) \neq -f(x).$$

Зростання і спадання лінійної функції залежить від значення коефіцієнта k.

При $k = 0$ одержуємо функцію $y = b$ — постійну.

При $k > 0$ функція $y = kx + b$ зростає, а при $k < 0$ — спадає (обґрунтування наведено в розв'язанні прикладу 4 до пункту 2.1).

У курсі геометрії було обґрунтовано, що **графіком лінійної функції $y = kx + b$ завжди є пряма лінія.**

Оскільки при $x = 0$ функція набуває значення $y = b$, то *ця пряма завжди перетинає вісь Oy у точці b*. Графіки лінійних функцій наведено в таблиці 4.

2. Функція $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$). Ця функція виражає *обернено пропорційну залежність.*

Область визначення: $x \neq 0$. Це можна записати також так:

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Область значень: $y \neq 0$. Це можна записати також так:

$$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Для обґрунтування області значень функції $y = \frac{k}{x}$ позначимо $\frac{k}{x} = a$. Тоді із цієї рівності одержимо $x = \frac{k}{a}$ для всіх $a \neq 0$. Тобто для всіх $a \neq 0$ існує значення $x = \frac{k}{a}$, при якому $y = \frac{k}{x} = \frac{k}{\frac{k}{a}} = a$. Отже, y набуває всіх дійсних значень, які не рівні нулю.

Функція непарна, оскільки її областю визначення є множина, симетрична відносно точки O, і $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$. Отже, її графік симетричний відносно початку координат (рис. 29 і 30).

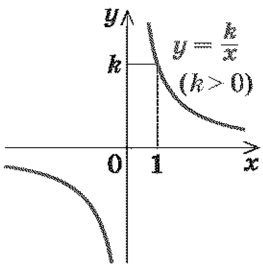


Рис. 29

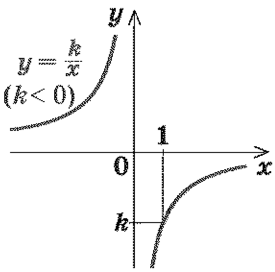


Рис. 30

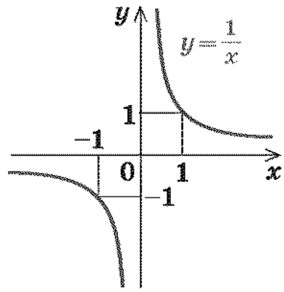


Рис. 31

Зростання і спадання функції залежить від знака коефіцієнта k.

- Якщо $x_2 > x_1$ (тобто $x_2 - x_1 > 0$), то для порівняння значень $f(x_2)$ і $f(x_1)$ розглянемо їхню різницю:

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}=\frac{kx_1-kx_2}{x_1x_2}=\frac{-k(x_2-x_1)}{x_1x_2}. \qquad (1)$$

На проміжку $(0; +\infty)$ значення $x_1 > 0$ і $x_2 > 0$, отже, $x_1x_2 > 0$. На проміжку $(-\infty; 0)$ значення $x_1 < 0$ і $x_2 < 0$, отже, $x_1x_2 > 0$.

Ураховуючи, що $x_2 - x_1 > 0$, у кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ або $(0; +\infty)$ при $k > 0$ з рівності (1) отримуємо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, а при $k < 0$ одержуємо $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

При $k > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$ якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$, отже, функція спадає на кожному із цих проміжків.

При $k < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$ якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$, отже, функція зростає на кожному з цих проміжків. ○

З курсу алгебри відомо, що графік функції $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ називається *гіперболою* (вона складається з двох віток). При $k > 0$ вітки гіперболи знаходяться в I і III координатних чвертях, а при $k < 0$ — у II і IV чвертях (рис. 29 і 30).

Зауваження. Характеризуючи зростання чи спадання функції $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, слід пам'ятати, що, наприклад, функція $y=\frac{1}{x}$ (рис. 31) спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$, але на всій області визначення $(x \neq 0)$ ця функція не є спадною (і не є зростаючою). Дійсно, якщо взяти

$x_1 = -1$ і $x_2 = 1$, то $x_2 > x_1$, але $f(x_2) = f(1) = 1$ і $f(x_1) = f(-1) = -1$, тобто більшому значенню аргументу не відповідає менше значення функції і на всій її області визначення функція $f(x)=\frac{1}{x}$ не є спадною.

Із цієї ж причини не можна сказати, що функція $f(x)=\frac{1}{x}$ спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. **Функція $y = ax^2$ ($a \neq 0$).** Як відомо з курсу алгебри, графіком цієї функції є *парабола*, вітки якої напрямлені вгору при $a > 0$ (рис. 32) і вниз при $a < 0$ (рис. 33). Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік завжди проходить через початок координат.

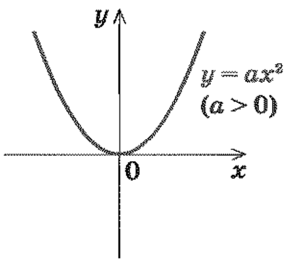


Рис. 32

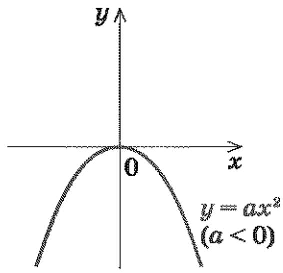


Рис. 33

Область визначення: $x \in R$, оскільки значення $y = ax^2$ можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Функція парна, оскільки $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$. Отже, її графік симетричний відносно осі Oy.

Інші властивості сформулюємо, скориставшись графіком функції $y = ax^2$ (рис. 32 і 33). Їх можна обґрунтувати аналітично (проведіть таке обґрунтування самостійно) або спираючись на властивості функції $y = x^2$ і на геометричні перетворення її графіка, які буде розглянуто в пункті 2.3.

Область значень. При $a > 0$ графік проходить через початок координат, а всі його інші точки розташовані вище осі Ox. Якщо значення x збільшується до нескінченності, то і значення y теж збільшується до нескінченності ($+\infty$), отже, $y \geqslant 0$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Аналогічно при $a < 0$ графік також проходить через початок координат, але всі інші його точки знаходяться нижче осі Ox. Якщо значення x збільшується до нескінченності, то значення y зменшується до мінус нескінченності ($-\infty$), отже, $y \leqslant 0$, тобто $E(y) = (-\infty; 0]$.

Зростання і спадання. При $a > 0$ на проміжку $(-\infty; 0]$ функція спадає, а на проміжку $[0; +\infty)$ — зростає.

При $a < 0$ на проміжку $(-\infty; 0]$ функція зростає, а на проміжку $[0; +\infty)$ — спадає.

4. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). З курсу алгебри 9 класу відомо, що функція виду $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — дійсні числа, причому $a \neq 0$, називається *квадратичною*. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору при $a > 0$ і вниз при $a < 0$.

Абсциса вершини цієї параболи $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Для обґрунтування цього достатньо в заданій формулі виділити повний квадрат:

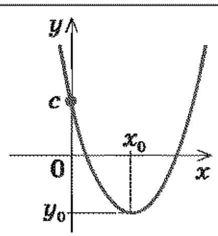
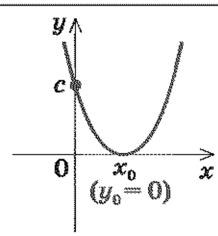
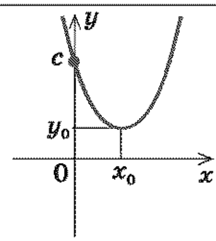
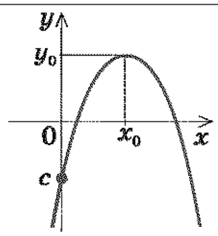
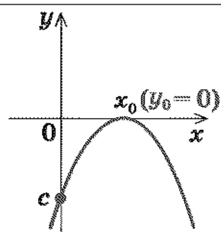
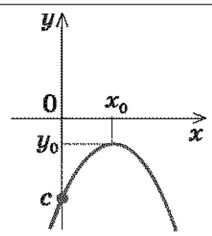
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ тобто}$$

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0, \text{ де } y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$$

($D = b^2 - 4ac$ — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$).

Нагадаємо, що залежно від знака дискримінанта D парабола або перетинає вісь Ox ($D > 0$), або не перетинає ($D < 0$), або дотикається до неї ($D = 0$). Основні варіанти розміщення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) зображено в таблиці 5.

Таблиця 5

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Охарактеризуємо властивості функції $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), спираючись на ці відомі нам графіки (самостійно обґрунтуйте відповідні властивості аналітично).

Область визначення: $D(y) = \boldsymbol{R}$, оскільки значення $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Область значень. При $a > 0$ функція набуває всіх значень $y \geqslant y_0$, тобто $E(y) = [y_0; +\infty)$.

При $a < 0$ функція набуває всіх значень $y \leqslant y_0$, тобто $E(y) = (-\infty; y_0]$.

Парність і непарність. При $b = 0$ одержуємо парну квадратичну функцію $y = \varphi(x) = ax^2 + c$. Дійсно, $\varphi(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = \varphi(x)$.

У загальному випадку (якщо $b \neq 0$) функція $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) не є ні парною, ні непарною, оскільки $f(-x) = a\ (-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq f(x)$ (і не дорівнює $-f(x)$).

Зростання і спадання. При $a > 0$ на проміжку $(-\infty;\ x_0]$ функція спадає, а на проміжку $[x_0;\ +\infty)$ — зростає.

При $a < 0$ на проміжку $(-\infty;\ x_0]$ функція зростає, а на проміжку $[x_0;\ +\infty)$ — спадає.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = c$, то *графік завжди перетинає вісь Oy у точці c.*

Відповідні графіки при $D > 0$ наведено також у таблиці 4.

Приклади розв'язання завдань

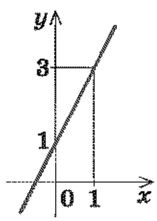
Приклад 1 Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -3x - 1$; 3) $y = 4$.

Розв'язання

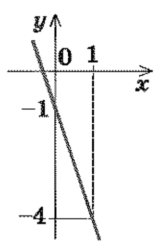
1) ▶ Графік функції $y = 2x + 1$ — пряма. ◁

x	0	1
y	1	3



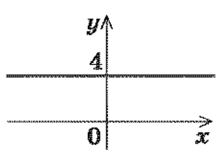
2) ▶ Графік функції $y = -3x - 1$ — пряма. ◁

x	0	1
y	–1	–4



3) ▶ Графік функції $y = 4$ — пряма, паралельна осі Ox, яка проходить через точку 4 на осі Oy. ◁

x	0	1
y	4	4



Коментар

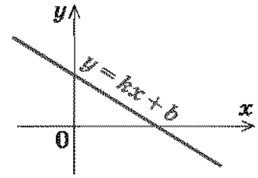
Усі задані функції лінійні, отже, їх графіками є прямі.

Щоб побудувати прямі в завданнях 1 і 2, достатньо побудувати дві точки цих прямих. Наприклад, можна взяти $x = 0$ і $x = 1$ і знайти відповідні значення y. Оформляти ці обчислення зручно у вигляді таблички:

x	0	1
y		

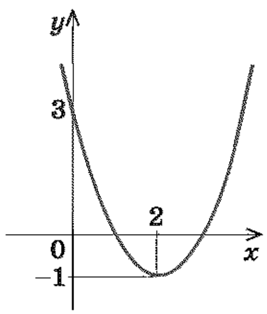
У завданні 3 розглядається окремий випадок лінійної функції ($y = b$). Для побудови цього графіка корисно пам'ятати, що пряма $y = 4$ — це пряма, паралельна осі Ox (при будь-якому значенні x значення y дорівнює 4).

Приклад 2* За наведеним графіком функції $y = kx + b$ укажіть знаки k і b.



Розв'язання	*Коментар*
▶ При $x = 0$ значення $y = b > 0$ — за рисунком. Оскільки зображено графік спадної лінійної функції, то $k < 0$. ◁ *Відповідь:* $b > 0$, $k < 0$.	Графік функції $y = kx + b$ — пряма, яка перетинає вісь Oy у точці b. На рисунку ця точка лежить вище нуля, отже, $b > 0$. Лінійна функція $y = kx + b$ при $k > 0$ зростаюча, а при $k < 0$ — спадна. На рисунку зображено графік спадної функції, отже, $k < 0$.

Приклад 3 Побудуйте графік[1] функції $y = x^2 - 4x + 3$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Графік заданої функції — парабола (виду $y = x^2$), вітки якої напрямлені вгору. Абсциса вершини: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2.$ Тоді $y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ і графік має такий вигляд:  ◁	Функція $y = x^2 - 4x + 3$ — квадратична (має вигляд $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$). Отже, її графіком буде парабола (виду $y = ax^2$), вітки якої напрямлені вгору ($a = 1 > 0$). Абсциса вершини параболи обчислюється за формулою $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината y_0 — це відповідне значення заданої функції при $x = x_0$, тобто $y_0 = y(x_0)$. Якщо потрібно уточнити, як проходить графік, то можна знайти координати кількох додаткових точок, наприклад, при $x = 0$ одержуємо $y = c = 3$.

[1] Побудову таких графіків за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = x^2$ розглядатимемо в пункті 2.3.

Запитання для контролю

1. Яка функція називається лінійною? Назвіть властивості лінійної функції. Яка лінія є графіком лінійної функції? Наведіть приклади лінійних функцій та їх графіків.
2. Яка лінія є графіком функції $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$? Наведіть приклади графіків функцій $y=\frac{k}{x}$ при $k > 0$ і при $k < 0$. За графіками вкажіть властивості цієї функції при $k > 0$ і при $k < 0$. Доведіть непарність функції $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$.
3. Яка лінія є графіком функції $y = ax^2$ $(a \neq 0)$? Як розміщено цей графік при $a > 0$ і при $a < 0$? Наведіть приклади графіків функцій $y = ax^2$ при $a > 0$ і при $a < 0$. За графіками вкажіть властивості цієї функції при $a > 0$ і при $a < 0$.
   Доведіть парність функції $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.
4. Яка лінія є графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$? Як розміщено цей графік при $a > 0$ і при $a < 0$? Як знайти абсцису вершини графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$? Наведіть приклади графіків цієї функції при $a > 0$ і при $a < 0$. За графіками вкажіть властивості цієї функції при $a > 0$ і при $a < 0$.

Вправи

1°. Побудуйте графік функції:
   1) $y = 3x - 2$; 2) $y = -x + 4$; 3) $y = -2$; 4) $y = -5x$; 5) $y = 0$; 6) $y = 4x$.
   Чи є серед цих функцій парні або непарні? Відповідь обґрунтуйте.

2*. За наведеними графіками функцій $y = kx + b$ (рис. 34) укажіть знаки k і b у кожному випадку.

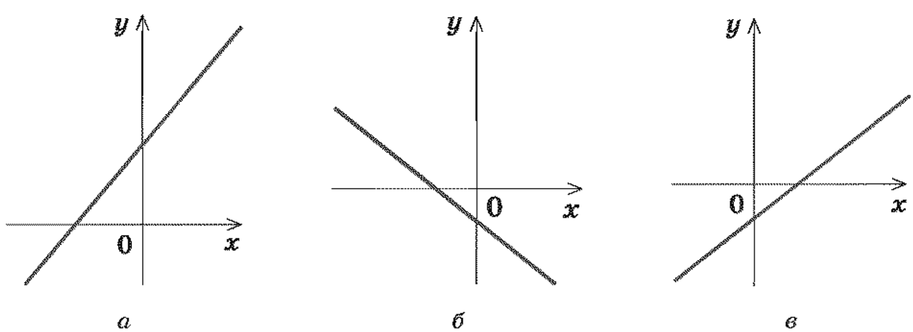


Рис. 34

Побудуйте графік функції (3–5).

3°. 1) $y=-\frac{2}{x}$; 2) $y=\frac{3}{x}$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{5}{x}$.

4°. 1) $y=-2x^2$; 2) $y=3x^2$; 3) $y=-3x^2$; 4) $y=5x^2$.

5. 1) $y=x^2-6x+7$; 2) $y=-x^2+4x+2$;
3) $y=2x^2-2x+1$; 4) $y=-3x^2+6x$.

6*. За наведеними графіками функції $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ (рис. 35) укажіть знаки a, b і c у кожному випадку.

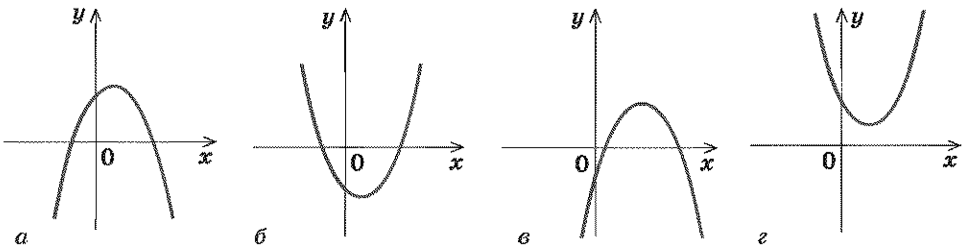


Рис. 35

7*. На рисунку зображено графіки функцій $y=\sqrt{x+3}$ і $y=x-3$ (рис. 36). Укажіть проміжок, на якому виконується нерівність $\sqrt{x+3} \leqslant x-3$.

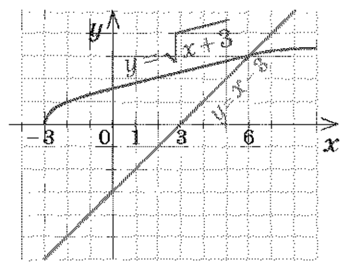
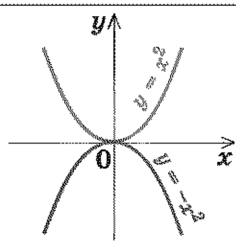


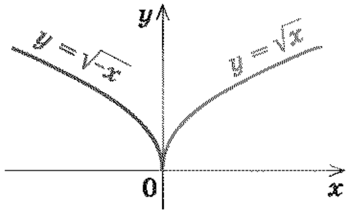
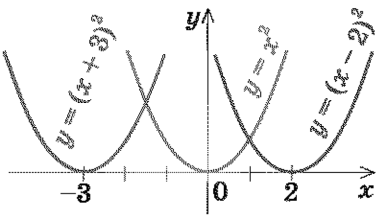
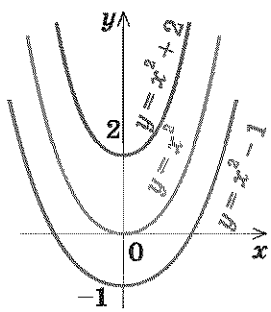
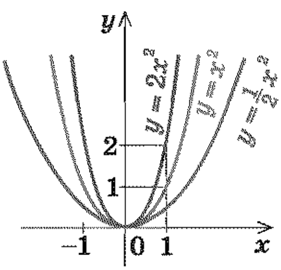
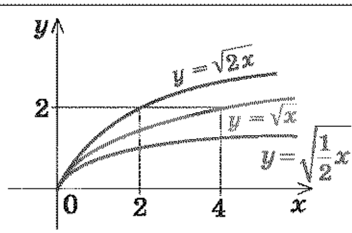
Рис. 36

2.3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій

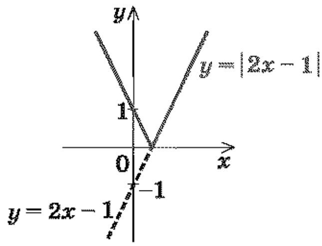
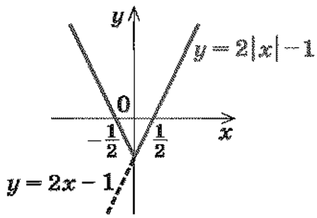
Таблиця 6

Перетворення графіка функції $y=f(x)$			
№	Формула залежності	Приклад	Перетворення
1	2	3	4
1	$y=-f(x)$		Симетрія відносно осі Ox

Продовження табл. 6

1	2	3	4
2	$y = f(-x)$		Симетрія відносно осі Oy
3	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць
4	$y = f(x) + c$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy на c одиниць
5	$y = kf(x)$ ($k > 0$)		Розтяг або стиск графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy (при $k > 1$ розтяг, при $0 < k < 1$ — стиск)
6	$y = f(\alpha x)$ ($\alpha > 0$)		Розтяг або стиск графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox (при $\alpha > 1$ — стиск, при $0 < \alpha < 1$ — розтяг)

Продовження табл. 6

1	2	3	4
7	$y = \| f(x) \|$		Вище осі Ox (і на самій осі) графік функції $y = f(x)$ — без зміни, нижче осі Ox — симетрія відносно осі Ox
8	$y = f(\| x \|)$		Праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y = f(x)$ — без зміни, і та сама частина графіка — симетрія відносно осі Oy

Приклади й обґрунтування

Розглянемо способи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

1. **Побудова графіка функції $y = -f(x)$.** Порівняємо графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x^2$ (див. перший рядок табл. 6). Очевидно, що графік функції $y = -x^2$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$ симетричним відображенням його відносно осі Ox. Покажемо, що завжди графік функції $y = -f(x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ симетричним відображенням відносно осі Ox.

Дійсно, за означенням графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок M координатної площини, які мають координати $(x; y) = (x; f(x))$. Тоді графік функції $y = -f(x)$ складається з усіх точок K координатної площини, які мають координати $(x; y) = (x; -f(x))$.

Точки $M(x; f(x))$ і $K(x; -f(x))$ розміщено на координатній площині симетрично відносно осі Ox (рис. 37). Отже, кожна точка K графіка функції $y = -f(x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Ox деякої точки M графіка функції $y = f(x)$. Тому

графік функції $y = -f(x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox. ○

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y = |f(x)|$. Маємо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geqslant 0 \text{ (графік не змінюється);} \\ -f(x) \text{ при } f(x) < 0 \text{ (симетрія відносно осі } Ox). \end{cases}$$

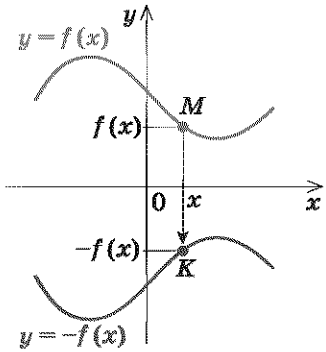


Рис. 37

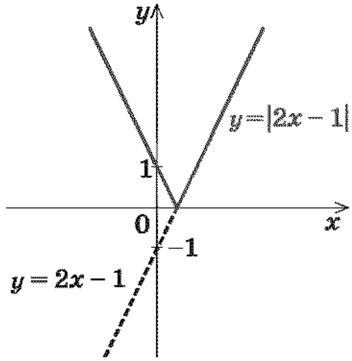


Рис. 38

Отже,

графік функції $y = | f(x) |$ може бути побудований так: частина графіка функції $y = f(x)$, яка лежить вище осі Ox (і на самій осі), залишається без зміни, а та частина, яка лежить нижче осі Ox, відображується симетрично відносно цієї осі.

Наприклад, на рисунку 38 і в таблиці 6 (рядок сьомий) з використанням цього правила зображено графік функції $y = | 2x - 1 |$.

2. Побудова графіка функції $y = f(-x)$.

Для побудови графіка функції $y = f(-x)$ урахуємо, що в означенні графіка функції перша координата для точок графіка вибирається довільно з області визначення функції. Якщо вибрати як першу координату $(-x)$, то графік функції $y = f(-x)$ складатиметься з усіх точок T координатної площини з координатами $(-x;\ y) = (-x;\ f(x))$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x;\ f(x))$.

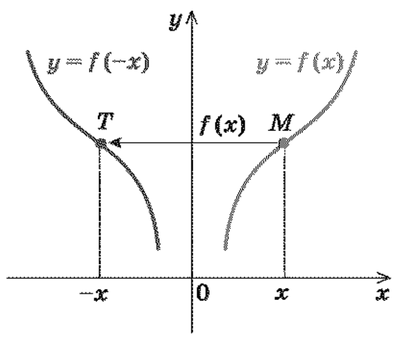


Рис. 39

Точки $M(x;\ f(x))$ і $T(-x;\ f(x))$ розміщено на координатній площині симетрично відносно осі Oy (рис. 39). Отже, кожна точка T графіка функції $y = f(-x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Oy деякої точки M графіка функції $y = f(x)$. Тому

графік функції $y = f(-x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Oy. ○

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y = f(|x|)$. Маємо:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \geqslant 0 \text{ (графік не змінюється);} \\ f(-x) \text{ при } x < 0 \text{ (симетрія відносно осі } Oy\text{).} \end{cases}$$

Інакше кажучи, для того щоб отримати графік $y = f(|x|)$ при $x < 0$ (тобто ліворуч від осі Oy), потрібно відобразити симетрично відносно осі Oy ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy. Таким чином, частину графіка функції $y = f(x)$, яка розташована ліворуч від осі Oy, узагалі не використовують у побудові графіка функції $y = f(|x|)$. Отже,

графік функції $y = f(|x|)$ будують так: частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy (і на самій осі), залишають без зміни і саме цю частину відображують симетрично відносно осі Oy.

Наприклад, на рисунку 40 та в табл. 6 (рядок восьмий) з використанням цього правила зображено графік функції $y = 2|x| - 1$.

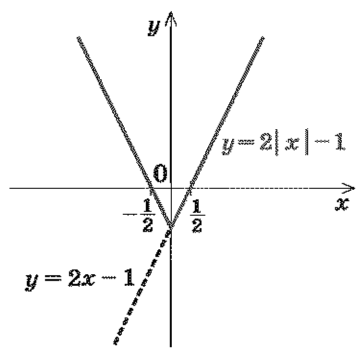


Рис. 40

3. Побудова графіка функції $y = f(x - a)$.

Для того щоб побудувати графік функції $y = f(x - a)$, виберемо як першу координату точки N цього графіка значення $x + a$. Тоді графік функції $y = f(x - a)$ складається з усіх точок N координатної площини з координатами $(x + a; y) = (x + a; f(x + a - a)) = (x + a; f(x))$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x; f(x))$.

Якщо точка M має координати $(x; y)$, а точка N — координати $(x + a; y)$, то перетворення точок $(x; y) \to (x + a; y)$ — це паралельне перенесення точки M уздовж осі Ox на a одиниць (тобто на вектор $(\overline{a; 0})$).

Оскільки кожну точку N графіка функції $y = f(x - a)$ одержують паралельним перенесенням деякої точки M графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць (рис. 41), то

графік функції $y = f(x - a)$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць. ○

Наприклад, у третьому рядку таблиці 6 зображено графік функції $y = (x - 2)^2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y = x^2$ на +2 одиниці вздовж осі Ox) та графік функції $y = (x + 3)^2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y = x^2$ на –3 одиниці вздовж осі Ox).

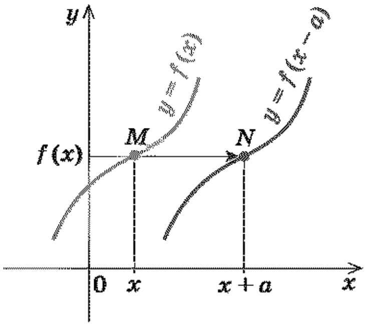


Рис. 41

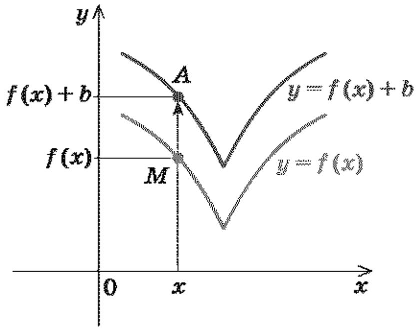


Рис. 42

4. Побудова графіка функції $y = f(x) + b$.

Графік функції $y = f(x) + b$ складається з усіх точок A координатної площини з координатами $(x;\ y) = (x;\ f(x) + b)$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x;\ f(x))$.

Але якщо точка M має координати $(x;\ y)$, а точка A — координати $(x;\ y + b)$, то перетворення точок $(x;\ y) \to (x;\ y + b)$ — це паралельне перенесення точки M уздовж осі Oy на b одиниць (тобто на вектор $\left(\overline{0; b}\right)$).

Оскільки кожна точка A графіка функції $y = f(x) + b$ одержується паралельним перенесенням деякої точки M графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць (рис. 42), то

графік функції $y = f(x) + b$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць.

Наприклад, у четвертому рядку таблиці 6 зображено графік функції $y = x^2 + 2$ (виконано паралельне перенесення графіка функції $y = x^2$ на $+2$ одиниці вздовж осі Oy) та графік функції $y = x^2 - 1$ (виконано паралельне перенесення графіка функції $y = x^2$ на -1 уздовж осі Oy).

5. Побудова графіка функції $y = kf(x)$.

Графік функції $y = kf(x)$ $(k > 0)$ складається з усіх точок $B(x;\ kf(x))$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x;\ f(x))$ (рис. 43).

Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі Oy з коефіцієнтом k* (де $k > 0$) таке перетворення фігури F, при якому кожна її точка $(x;\ y)$ переходить у точку $(x;\ ky)$.

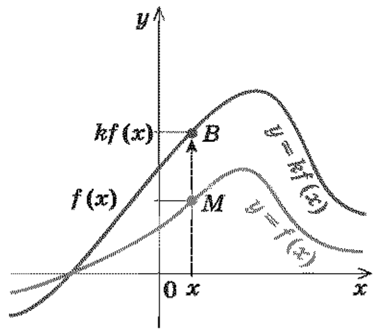


Рис. 43

Перетворення розтягу вздовж осі Oy задають формулами: $x' = x$; $y' = ky$. Ці

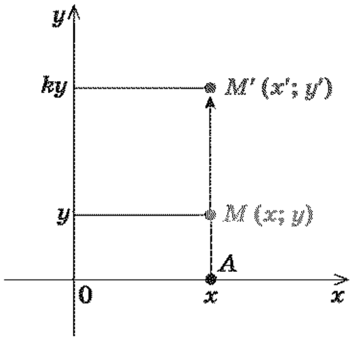


Рис. 44

формули виражають координати (x'; y') точки M', у яку переходить точка M (x; y) при перетворенні розтягу вздовж осі Oy (рис. 44). При цьому відбувається розтягування відрізка AM у k разів, і в результаті точка M переходить у точку M'. (Зауважимо, що іноді вказане перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають *розтягом* тільки *при* $k > 1$, а при $0 < k < 1$ його називають *стиском уздовж осі* Oy у $\frac{1}{k}$ разів.)

Як бачимо, кожна точка B графіка функції $y = kf(x)$ одержується з точки M перетворенням розтягу вздовж осі Oy. При цьому загальна форма графіка не змінюється: він розтягується або стискається вздовж осі Oy. Наприклад, якщо графіком функції $y = f(x)$ була парабола, то після розтягування або стискування графік залишається параболою. Тому

графік функції $y = kf(x)$ ($k > 0$) одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $k > 1$ розтяг у k разів) або стискуванням (при $0 < k < 1$ стиск у $\frac{1}{k}$ разів) уздовж осі Oy. ○

6. Побудова графіка функції $y = f(\alpha x)$.

Для побудови графіка функції $y = f(\alpha x)$ ($\alpha > 0$) виберемо як першу координату точки C цього графіка значення $\frac{x}{\alpha}$. Тоді графік функції $y = f(\alpha x)$ складатиметься з усіх точок C з координатами $\left(\frac{x}{\alpha}; y\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f\left(\alpha\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f(x)\right)$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок M (x; $f(x)$) (рис. 45).

Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі Ox з коефіцієнтом* α (де $\alpha > 0$) таке перетворення фігури F, при якому кожна її точка (x; y) переходить у точку (αx; y).

Перетворення розтягу вздовж осі Ox задається формулами: $x' = \alpha x$; $y' = y$. Ці формули виражають координати (x'; y') точки M', у яку переходить точка M (x; y) при перетворенні розтягу вздовж осі Ox (рис. 46). При цьому перетворенні відбувається розтягування відрізка BM в α разів, і в результаті точка M переходить у точку M'. (Зауважимо, що іноді вказане перетворення називають розтягом (у $\frac{1}{\alpha}$ разів) тільки при $0 < \alpha < 1$, а при $\alpha > 1$ його називають *стис-*

ком уздовж осі Ox (у α разів). Як бачимо, кожна точка C графіка функції $y = f(\alpha x)$ одержується з точки M графіка функції $y = f(x)$ перетворенням розтягу вздовж осі Ox (при цьому загальна форма графіка не змінюється). Тому

графік функції $y = f(\alpha x)$ ($\alpha > 0$) одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $0 < \alpha < 1$ розтяг в $\frac{1}{\alpha}$ разів) або стискуванням (при $\alpha > 1$ стиск в α разів) уздовж осі Ox. ○

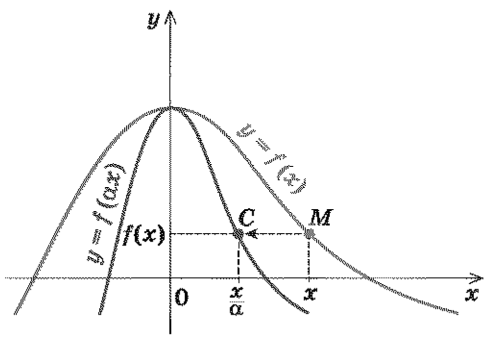


Рис. 45

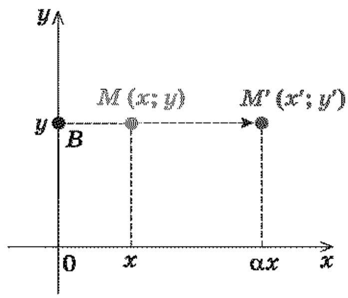
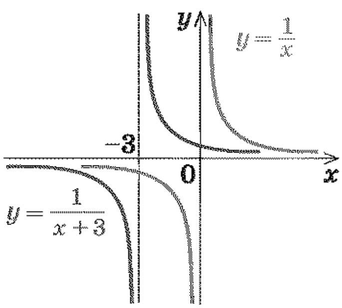


Рис. 46

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{x+3}$.

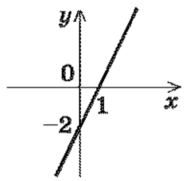
Розв'язання	*Коментар*
▶  ◁	Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \frac{1}{x}$. Тоді графік функції $y = \frac{1}{x+3} = f(x+3) = f(x-(-3))$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на -3 одиниці (тобто вліво).

Приклад 2 Побудуйте графік функції $y = -|2x - 2|$.

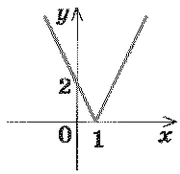
Розв'язання

▶ Послідовно будуємо графіки:

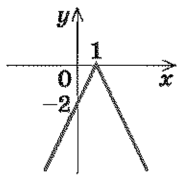
1. $y = 2x - 2$



2. $y = |2x - 2|$



3. $y = -|2x - 2|$



◁

Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції.

1. Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = 2x - 2$ (пряма).
2. Потім можна побудувати графік функції $y = \varphi(x) = |2x - 2| = |f(x)|$ (вище осі Ox графік функції $y=2x-2$ залишається без зміни, а частина графіка, розташована нижче осі Ox, відображається симетрично відносно осі Ox).
3. Після цього можна побудувати графік функції
$$y = -|2x - 2| = -\varphi(x)$$
(симетрія графіка функції $y = \varphi(x)$ відносно осі Ox).

Приклад 3* Побудуйте графік функції $y=\sqrt{4-|x|}$.

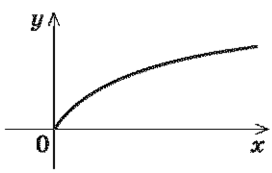
Розв'язання

▶ Запишемо рівняння заданої функції так:

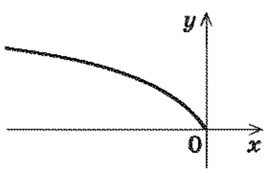
$$y=\sqrt{4-|x|}=\sqrt{-(|x|-4)}.$$

Послідовно будуємо графіки:

1. $y=\sqrt{x}$



2. $y=\sqrt{-x}$



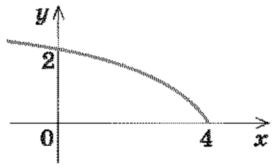
Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції. Для того щоб можна було скористатися перетвореннями графіків, наведеними в таблиці 4, підкореневий вираз функції запишемо так:

$$y=\sqrt{-(|x|-4)}.$$

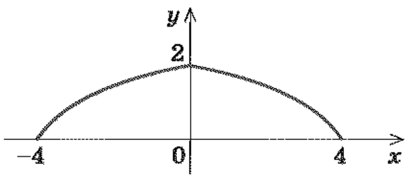
1. Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\sqrt{x}$.
2. Потім можна побудувати графік функції $y=g(x)=\sqrt{-x}=f(-x)$ (симетрія графіка функції $f(x)$ відносно осі Oy).

3. $y=\sqrt{-(x-4)}$



3. Після цього можна побудувати графік функції
$$y=\varphi(x)=\sqrt{-(x-4)}=g(x-4)$$
(паралельне перенесення графіка функції $g(x)$ уздовж осі Ox на 4 одиниці).

4. $y=\sqrt{-(|x|-4)}$



4. Потім уже можна побудувати графік заданої функції
$$y=\sqrt{-(|x|-4)}=\varphi(|x|)=\sqrt{4-|x|}$$
(праворуч від осі Oy відповідна частина графіка функції $y=\varphi(x)$ залишається без зміни, і та сама частина відображується симетрично відносно осі Oy).

Запитання для контролю

1. На прикладах поясніть, як можна з графіка функції $y = f(x)$ одержати графік функції:
   1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$; 3) $y = f(x - a)$;
   4) $y = f(x) + c$; 5) $y = kf(x)$, де $k > 0$; 6) $y = f(\alpha x)$, де $\alpha > 0$;
   7) $y = |f(x)|$; 8) $y = f(|x|)$.

2*. Обґрунтуйте геометричні перетворення, за допомогою яких із графіка функції $y = f(x)$ можна одержати графіки вказаних вище функцій.

Вправи

Побудуйте графіки функцій та відповідностей (1–7):

1. 1) $y = |x - 5|$; 2) $y = |x| - 5$; 3) $y = ||x| - 5|$; 4*) $|y| = x - 5$.
2. 1°) $y = x^2 - 9$; 2) $y = |x^2 - 9|$; 3) $y = |x^2| - 9$; 4*) $|y| = x^2 - 9$.
3. 1°) $y = (x + 1)^2$; 2) $y = (|x| + 1)^2$;
   3) $y = (x + 1)^2 - 3$; 4) $y = |(x + 1)^2 - 3|$.
4. 1°) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=\left|\frac{1}{x+2}\right|$; 3) $y=\frac{1}{|x|+2}$; 4*) $|y|=\frac{1}{x+2}$.
5. 1°) $y=-\frac{2}{x}$; 2°) $y=3-\frac{2}{x}$; 3) $y=-\frac{2}{x-1}$; 4) $y=-\frac{2}{|x|}$.

6. 1°) $y=\sqrt{x-3}$; 2°) $y=\sqrt{x}-3$; 3) $y=\sqrt{|x|-3}$; 4) $y=\left|\sqrt{x}-3\right|$;

5*) $y=\left|\sqrt{|x|}-3\right|$; 6*) $|y|=\sqrt{x-3}$; 7*) $|y|=\sqrt{x}-3$.

7. 1°) $y=-\sqrt{x}$; 2°) $y=-\sqrt{x}+4$; 3) $y=-\sqrt{|x|}$; 4) $y=-\sqrt{x-1}$.

8. Функція $y = f(x)$ задана на проміжку [0; 12] і має графік, зображений на рисунку 47. Побудуйте графіки функцій (та відповідностей 9* і 10*):

1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$; 3) $y = |f(x)|$; 4) $y = f(|x|)$;

5*) $y = 2f(x)$; 6*) $y = f(2x)$; 7*) $y=\frac{1}{2}f(x)$; 8*) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

9*) $|y| = f(x)$; 10*) $|y| = f(|x|)$.

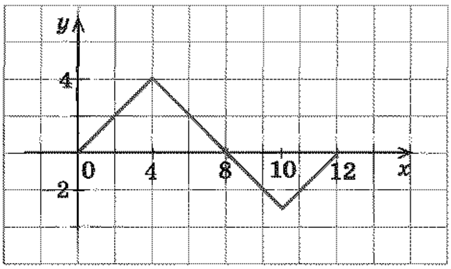


Рис. 47

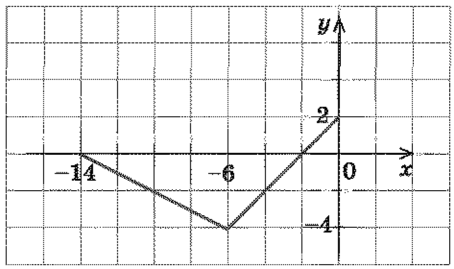


Рис. 48

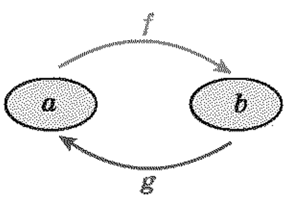
9. Виконайте завдання вправи 8 для функції $y = f(x)$, заданої на проміжку [–14; 0], графік якої зображено на рисунку 48.

2.4. Обернена функція

Таблиця 7

1. Поняття оберненої функції

Якщо функція $y = f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення, то можна задати функцію $y = g(x)$, яка називається *оберненою до функції* $y = f(x)$:

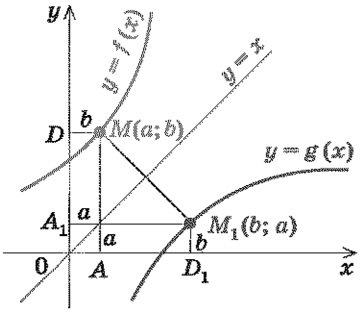
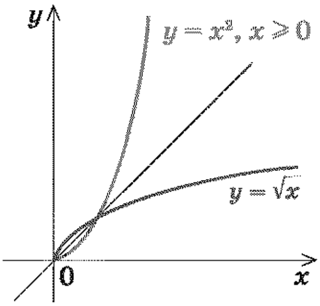


для кожного $a \in D(f)$,
якщо $f(a) = b$, то $g(b) = a$

$E(f) = D(g)$; $D(f) = E(g)$

Функції $f(x)$ і $g(x)$ взаємно обернені

Продовження табл. 7

<table>
<tr><td colspan="2">2. Властивості оберненої функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1) Графіки прямої та оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2) Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Практичний спосіб знаходження формули функції,
оберненої до функції $y = f(x)$</td></tr>
<tr><td>Алгоритм</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>1. З'ясувати, чи буде функція $y = f(x)$ оборотною на всій області визначення: для цього достатньо з'ясувати, чи має рівняння $y = f(x)$ єдиний корінь відносно змінної x.
Якщо ні, то виділити (якщо можливо) проміжок, де існує обернена функція (наприклад, це може бути проміжок, де функція $y = f(x)$ зростає або спадає).
2. З рівності $y = f(x)$ виразити x через y.
3. В одержаній формулі ввести традиційні позначення — аргумент позначити через x, а функцію — через y.</td><td>Знайдіть функцію, обернену до функції $y = 2x + 4$.
▶ З рівності $y = 2x + 4$ можна однозначно виразити x через y:
$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$
Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x.
Позначимо в одержаній формулі аргумент через x, а функцію — через y.
Маємо функцію $y = \frac{1}{2}x - 2$, обернену до функції $y = 2x + 4$. ◁</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття оберненої функції. Відомо, що залежність шляху від часу для тіла, яке рухається рівномірно з постійною швидкістю v_0, виражається формулою $S = v_0 t$. З цієї формули можна знайти обернену залежність — часу від пройденого шляху $t = \frac{S}{v_0}$. Функцію $t(S) = \frac{S}{v_0}$ називають *оберненою до функції* $S(t) = v_0 t$. Зазначимо, що в розглянутому прикладі кожному значенню t ($t \geqslant 0$) відповідає єдине значення S і, навпаки, кожному значенню S ($S \geqslant 0$) відповідає єдине значення t.

Розглянемо процедуру одержання оберненої функції в загальному вигляді.

Нехай функція $f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення (така функція називається *оборотною*). Тоді для кожного числа $y_0 = b$ (з області значень функції $f(x)$) існує єдине значення $x_0 = a$, таке, що $f(a) = b$. Розглянемо нову функцію $g(x)$, яка кожному числу b з області значень функції $f(x)$ ставить у відповідність число a, тобто $g(b) = a$ для кожного b з області значень функції $f(x)$. У цьому випадку функція $g(x)$ називається оберненою до функції $f(x)$, а функція $f(x)$ — оберненою до функції $g(x)$.

З означення оберненої функції випливає, що область значень прямої функції $E(f)$ є областю визначення оберненої функції $D(g)$, а область визначення прямої функції $D(f)$ є областю значень оберненої функції $E(g)$.

Отже,

$$E(f) = D(g),\ D(f) = E(g).$$

2. Властивості оберненої функції

Властивість 1. Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

● Ураховуючи наведену вище процедуру побудови функції, оберненої до функції $y = f(x)$, маємо: якщо $f(a) = b$, то за означенням графіка функції точка M з координатами $(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Аналогічно, оскільки $g(b) = a$, то точка M_1 з координатами $(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$. Точки $M(a; b)$ і $M_1(b; a)$ розміщені на координатній площині симетрично відносно прямої $y = x$ (рис. 49).

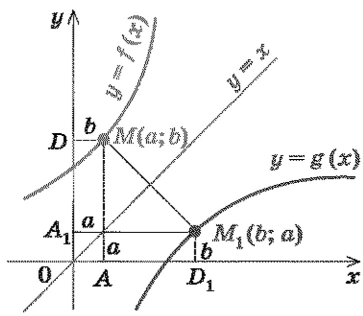


Рис. 49

Дійсно, пряма $y = x$ є віссю симетрії системи координат. Отже, при симетрії відносно прямої $y = x$ вісь Ox відображається на вісь Oy, а вісь Oy — на вісь Ox. Тоді (наприклад, при $a > 0$ і $b > 0$) прямокутник $OAMD$ із сторонами $OA = a$ і $OD = b$ на осях координат відображається на прямокутник $OA_1M_1D_1$ із сторонами на осях координат, у якого $OA_1 = OA = a$ і $OD_1 = OD = b$. Таким чином, при симетрії відносно прямої $y = x$ точка M $(a;\ b)$ відображається в точку M_1 $(b;\ a)$ (а точка M_1 — у точку M). Отже, при симетрії відносно прямої $y = x$ будь-яка точка M $(a;\ b)$, що належить графіку функції $y = f(x)$, має відповідну точку M_1 $(b;\ a)$, яка належить графіку функції $y = g(x)$, а будь-яка точка M_1 $(b;\ a)$, що належить графіку функції $y = g(x)$, має відповідну точку M $(a;\ b)$, яка належить графіку функції $y = f(x)$. Отримуємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. ○

Властивість 2. Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає.

● Дійсно, якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то за властивістю зростаючої (спадної) функції кожного свого значення вона набуває в єдиній точці з цього проміжку (див. приклад 6 до пункту 2.1), отже, вона має обернену функцію $g(x)$ на цьому проміжку. Обґрунтувати, що функція $g(x)$ зростає, якщо $f(x)$ зростає, можна методом від супротивного.

Нехай числа a_1 і a_2 входять до області визначення функції $f(x)$ і

$$a_2 > a_1. \tag{1}$$

Позначимо $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Якщо функція $f(x)$ зростає, то $f(a_2) > f(a_1)$, тобто $b_2 > b_1$. За означенням оберненої функції $g(x)$ числа b_1 і b_2 входять до її області визначення і

$$g(b_1) = a_1,\ g(b_2) = a_2. \tag{2}$$

Якщо припустити, що функція $g(x)$ не є зростаючою, то з нерівності $b_2 > b_1$ не може випливати нерівність $g(b_2) > g(b_1)$ (інакше функція $g(x)$ буде зростаючою), отже, може виконуватися тільки нерівність $g(b_2) \leqslant g(b_1)$. Але тоді за формулами (2) одержуємо $a_2 \leqslant a_1$, що суперечить умові (1). Отже, наше припущення неправильне, і функція $g(x)$ зростає, якщо $f(x)$ зростає.

Аналогічно обґрунтовується, що у випадку, коли функція $f(x)$ спадає, обернена до неї функція $g(x)$ теж спадає. ○

3. Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y = f(x)$. З означення оберненої функції випливає, що для отримання оберненої залежності необхідно знати, як значення x виражається через значення y. Це можна зробити, розв'язавши рівняння $y = f(x)$ відносно змінної x. Якщо задана функція оборотна, то рівняння матиме єдиний розв'язок для всіх y з області значень функції $f(x)$, і ми одержимо формулу $x = g(y)$, яка задає обернену функцію. Але в цій формулі аргумент позначено через y, а функцію — через x. Якщо поміняти позначення на традиційні, то одержимо запис функції, оберненої до функції $y = f(x)$.

Ці міркування разом із відповідним алгоритмом наведено в таблиці 7 і зреалізовано в наступних прикладах.

Приклади розв'язування завдань

Приклад 1 Знайдіть функцію, обернену до функції $y=\frac{1}{x-1}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Область визначення: $x \neq 1$. Тоді з рівності $y=\frac{1}{x-1}$ маємо $$xy - y = 1,\ xy = y + 1,\ x=\frac{y+1}{y}.$$ Позначаємо аргумент через x, а функцію — через y і одержуємо функцію $y=\frac{x+1}{x}$, обернену до заданої. ◁	На всій області визначення ($x \neq 1$) задана функція оборотна, оскільки з рівняння $y=\frac{1}{x-1}$ можна однозначно виразити x через y ($y \neq 0$ на області значень заданої функції). Одержана формула $x=\frac{y+1}{y}$ задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

Приклад 2 Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ З рівності $y = x^2$ при $y \geqslant 0$ одержуємо $x=\pm\sqrt{y}$. Тоді при $y > 0$ одному значенню y відповідають два значення x. Отже, на всій області визначення $x \in (-\infty;\ +\infty)$ функція $y = x^2$ не є оборотною, і для неї неможливо знайти обернену функцію. ◁	Область значень заданої функції: $y \geqslant 0$. Але при $y > 0$ з рівності $y = x^2$ не можна однозначно виразити x через y. Наприклад, при $y = 4$ одержуємо $x = \pm 2$. Через це ми не можемо значенню $y = 4$ поставити у відповідність єдине число, щоб побудувати обернену функцію.

Приклад 3 Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2$ при $x \geqslant 0$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ З рівності $y = x^2$ при $y \geqslant 0$ одержуємо $x = \pm\sqrt{y}$. Ураховуючи, що за умовою $x \geqslant 0$, маємо $x = \sqrt{y}$. Позначимо аргумент через x, а функцію — через y і одержимо, що функцією, оберненою до функції $y = x^2$, яка задана тільки при $x \geqslant 0$, буде функція $y = \sqrt{x}$. ◁	Множина значень заданої функції: $y \geqslant 0$. При $x \geqslant 0$ задана функція $y = x^2$ зростає, отже, на проміжку $x \geqslant 0$ вона має обернену функцію. Тому на цьому проміжку рівняння $x^2 = y$ ми зможемо однозначно розв'язати: при $x \geqslant 0$ маємо $x = \sqrt{y}$. Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Замінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

З а у в а ж е н н я. У прикладах 2 і 3 ми фактично розглядаємо різні функції (вони мають різні області визначення), хоча в обох випадках ці функції задаються однією й тією самою формулою. Як відомо, графіком функції $y = x^2$ (приклад 2) є парабола, а графіком функції $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ (приклад 3) є тільки права вітка цієї параболи (рис. 50).

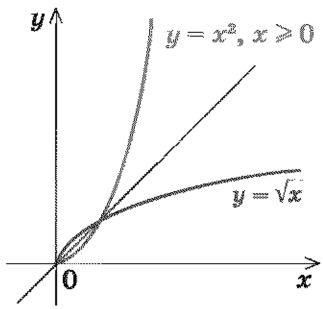


Рис. 50

Запитання для контролю

1. За якої умови для заданої функції $y = f(x)$ можна побудувати обернену функцію?
2. Поясніть побудову графіка оберненої функції на прикладі функції $y = f(x)$, яка задана таблицею:

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Задайте обернену функцію $y = g(x)$ за допомогою таблиці:

x				
$g(x)$				

3. Як розміщено графіки прямої і оберненої функцій, якщо їх побудовано в одній системі координат? Проілюструйте відповідну властивість графіків на прикладі.
4. Обґрунтуйте взаємне розміщення графіків прямої і оберненої функцій.
5. Чи існує функція, обернена до функції $y = x^2$, де $x \leqslant 0$? Поясніть це, спираючись на відповідні властивості оберненої функції. Якщо обернена функція існує, то задайте її формулою виду $y = g(x)$.

Вправи

1. Запишіть формулу, яка задає функцію $y = g(x)$, обернену до заданої. Укажіть область визначення і множину значень функції $g(x)$:

   1°) $y = 3x - 6$; 2°) $y = -3x - 6$; 3) $y=\frac{2}{x}$; 4) $y=-\frac{1}{x}$; 5) $y=\sqrt{x}$.

2. На одному рисунку побудуйте графік даної функції і функції, оберненої до даної:

   1°) $y = 2x$; 2°) $y = x - 2$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4*) $y=\frac{1}{x-1}$; 5*) $y=\sqrt{x+1}$.

3. Знайдіть функцію, обернену до даної на заданому проміжку, і побудуйте на одному рисунку графік даної функції і функції, оберненої до неї:

   1) $y=\frac{1}{4}x^2$ при $x \geqslant 0$; 2) $y=\frac{1}{4}x^2$ при $x \leqslant 0$;

   3) $y = (x - 2)^2$ при $x \geqslant 2$; 4) $y = x^2 - 2$ при $x \leqslant 0$.

§ 3 РІВНЯННЯ

3.1. Рівняння-наслідки та рівносильні перетворення рівнянь

Таблиця 8

1. Поняття рівняння та його коренів	
Означення	**Приклад**
Рівність зі змінною називається рівнянням. У загальному вигляді рівняння з однією змінною x записують так: $f(x) = g(x)$. Під цим коротким записом розуміють математичний запис задачі про знаходження значень аргументу, при яких значення двох даних функцій рівні	$2x = -1$ — лінійне рівняння; $x^2 - 3x + 2 = 0$ — квадратне рівняння; $\sqrt{x+2}=x$ — ірраціональне рівняння (містить змінну під знаком кореня)

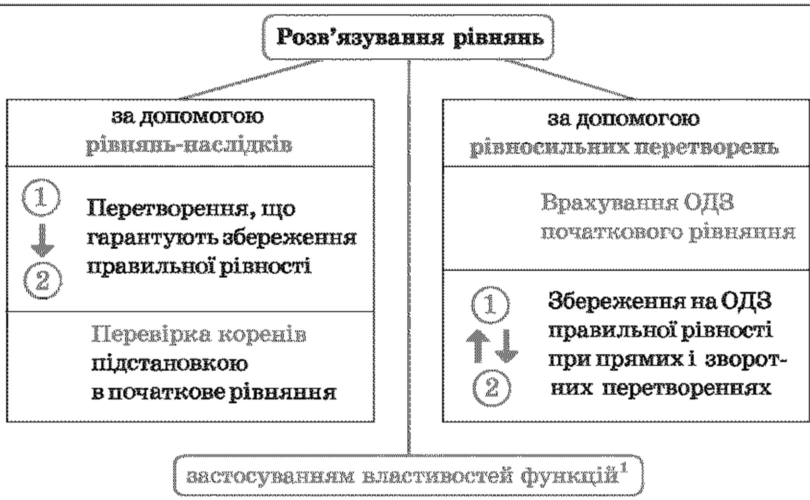
Продовження табл. 8

Коренем (або розв'язком) *рівняння* з однією змінної називається значення змінної, яке перетворює це рівняння на правильну рівність. **Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає**	$x = 2$ — корінь рівняння $\sqrt{x+2}=x$, оскільки при $x = 2$ одержуємо правильну рівність: $\sqrt{4}=2$, тобто $2 = 2$
2. Область допустимих значень (ОДЗ)	
Областю допустимих значень (або областю визначення) *рівняння* називається спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, що стоять у лівій і правій частинах рівняння	Для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+2}$ визначається умовою $x + 2 \geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x) = x$ є множина всіх дійсних чисел
3. Рівняння-наслідки	
Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називається *наслідком* першого. Якщо з **правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, то одержуємо рівняння-наслідки.** *При використанні рівнянь-наслідків не втрачаються корені початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів.* Тому **при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування** (див. пункт 5 цієї таблиці)	$\sqrt{x+2}=x.$ ▶ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2,$ $x + 2 = x^2,$ $x^2 - x - 2 = 0,$ $x_1 = 2,\ x_2 = -1.$ *Перевірка.* $x = 2$ — корінь (див. вище); $x = -1$ — сторонній корінь (при $x = -1$ одержуємо неправильну рівність $1 = -1$). ◁ *Відповідь:* 2.

Продовження табл. 8

4. Рівносильні рівняння	
Означення	**Найпростіші теореми**
Два рівняння називаються *рівносильними* на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі корені. Це означає, що *кожен корінь першого рівняння є коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого є коренем першого* (схема розв'язування рівнянь за допомогою рівносильних перетворень наведена в пункті 5 цієї таблиці)	**1. Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на будь-якій множині)** **2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого рівняння)**

5. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь



① — початкове рівняння;

② — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

[1] Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь розглянуто в пункті 3.2.

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття рівняння та його коренів. Рівняння в математиці найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження значень аргументу, при яких значення двох даних функцій рівні. Тому в загальному вигляді рівняння з однією змінною x записують так:

$$f(x) = g(x).$$

Найчастіше рівняння означають коротше — як рівність із змінною.

Нагадаємо, що *коренем* (*або розв'язком*) *рівняння називається значення змінної, при підстановці якого в рівняння утворюється правильна рівність. Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.*

Наприклад, рівняння $2x = -1$ має єдиний корінь $x = -\frac{1}{2}$, а рівняння $|x| = -1$ не має коренів, оскільки значення $|x|$ не може бути від'ємним числом.

2. Область допустимих значень (ОДЗ) рівняння. Якщо задано рівняння $f(x) = g(x)$, то спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається *областю допустимих значень* цього *рівняння*. (Іноді використовують також терміни «область визначення рівняння» або «множина допустимих значень рівняння».) Наприклад, для рівняння $x^2 = x$ областю допустимих значень є всі дійсні числа. Це можна записати, наприклад, так: ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$, оскільки функції $f(x) = x^2$ і $g(x) = x$ мають області визначення $\mathbf{R}$.

Зрозуміло, що кожен корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$ (інакше ми не зможемо отримати правильну числову рівність). Отже, *кожен корінь рівняння обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння.* Це дозволяє в деяких випадках використовувати аналіз ОДЗ рівняння при його розв'язуванні.

Наприклад, у рівнянні $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=x$ функція $g(x) = x$ визначена при всіх дійсних значеннях x, а функція $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$ — тільки за умови, що під знаком квадратного кореня будуть стояти невід'ємні вирази. Отже, ОДЗ цього рівняння задається системою $\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0, \end{cases}$ з якої одержуємо систему $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 1, \end{cases}$ що не має розв'язків. Таким чином, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

Зазначимо, що знаходження ОДЗ заданого рівняння може бути корисним для його розв'язування, але не завжди є обов'язковим елементом розв'язування.

3. Методи розв'язування рівнянь. Для розв'язування рівнянь використовують методи *точного* і *наближеного розв'язування*. Зокрема, для точного розв'язування рівнянь у курсі математики 5–6 класів використовували залежності між компонентами та результатами дій і властивості числових рівностей; у курсі алгебри 7–9 класів — рівносильні перетворення рівнянь, а для наближеного розв'язування рівнянь — графічний метод.

Графічний метод розв'язування рівнянь не дає високої точності знаходження коренів рівняння, і за його допомогою найчастіше можна дістати лише грубі наближення коренів. Іноді зручно графічно визначити кількість коренів рівняння або знайти межі, у яких знаходяться ці корені. У деяких випадках можна графічно довести, що рівняння не має коренів. З указаних причин у шкільному курсі алгебри і початків аналізу під вимогою «розв'язати рівняння» розуміється вимога «використовуючи методи точного розв'язування, знайти корені даного рівняння». Наближеними методами розв'язування рівнянь можна користуватися тільки тоді, коли це зазначено в умові задачі (наприклад, якщо ставиться задача розв'язати рівняння графічно).

Переважно при розв'язуванні рівнянь різних видів нам доведеться використовувати один із двох методів розв'язування. Перший із них полягає в тому, що задане рівняння замінюють більш простим рівнянням, яке має ті самі корені, — рівносильним рівнянням. У свою чергу, одержане рівняння замінюють простішим, рівносильним йому, і т. д. У результаті одержують найпростіше рівняння, яке рівносильне заданому і корені якого легко знайти. Ці корені і тільки вони є коренями даного рівняння.

Другий метод розв'язування рівнянь полягає в тому, що задане рівняння замінюють простішим рівнянням, до коренів якого належать усі корені даного рівняння, тобто замінюють так званим рівнянням-наслідком. У свою чергу, одержане рівняння замінюють більш простим рівнянням-наслідком доти, поки не одержать найпростіше рівняння, корені якого легко знайти. Тоді всі корені заданого рівняння знаходяться серед коренів останнього рівняння. Отже, щоб знайти корені заданого рівняння, достатньо корені останнього рівняння підставити в задане рівняння. За допомогою такої перевірки відділяють корені заданого рівняння (вилучають так звані *сторонні корені* — ті корені останнього рівняння, які не задовольняють заданому).

У наступному пункті буде також показано застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь певного виду.

Рівняння-наслідки

Розглянемо докладніше, як можна розв'язувати рівняння за допомогою рівнянь-наслідків. При розв'язуванні рівнянь головне — не загубити корені заданого рівняння, і тому в першу чергу ми повинні стежити за тим, щоб кожен корінь початкового рівняння залишався коренем наступного. Фактично це і є означенням рівняння-наслідку:

у тому випадку, коли кожний корінь першого рівняння є коренем другого, друге рівняння називається наслідком першого.

Це означення дозволяє обґрунтувати такий орієнтир: **для одержання рівняння-наслідку достатньо розглянути задане рівняння як правильну числову рівність і гарантувати (тобто мати можливість обґрунтувати), що кожне наступне рівняння ми можемо одержати як правильну числову рівність.**

Дійсно, якщо дотримуватися цього орієнтира, то кожен корінь першого рівняння перетворює це рівняння на правильну числову рівність. Але тоді друге рівняння теж буде правильною числовою рівністю, тобто розглядуване значення змінної є коренем і другого рівняння, а це й означає, що друге рівняння є наслідком першого.

Застосуємо наведений орієнтир до розв'язування рівняння $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ (поки що не використовуючи відому умову рівності дробу нулю).

Якщо правильно, що дріб дорівнює нулю, то обов'язково його чисельник дорівнює нулю. Отже, з даного рівняння одержуємо рівняння-наслідок $x^2 - 1 = 0$. Але тоді правильно, що $(x - 1)(x + 1) = 0$. Останнє рівняння має два корені: $x = 1$ та $x = -1$. Підставляючи їх у задане рівняння, бачимо, що тільки корінь $x = 1$ задовольняє початковому рівнянню. Чому це сталося?

Це відбувається тому, що, використовуючи рівняння-наслідки, ми гарантуємо тільки те, що корені заданого рівняння не втрачаються (кожний корінь першого рівняння є коренем другого). Але друге рівняння, крім кореня першого рівняння, має ще й інший корінь, який не є коренем першого рівняння. Для першого рівняння цей корінь є *стороннім*, і, щоб його відсіяти, виконуємо перевірку підстановкою коренів у початкове рівняння. (Більш детально причини появи сторонніх коренів розглянуто в таблиці 9.) Отже, щоб правильно використовувати рівняння-наслідки для розв'язування рівнянь, необхідно пам'ятати ще один орієнтир: **при використанні рівнянь-наслідків можлива поява сторонніх коренів, і тому перевірка підстановкою коренів у початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.**

Схема застосування цих орієнтирів подана в таблиці 8. У пункті 3 цієї таблиці наведено розв'язання рівняння

$$\sqrt{x+2}=x. \tag{1}$$

Для того щоб розв'язати це рівняння за допомогою рівнянь-наслідків, достатньо задане рівняння розглянути як правильну числову рівність і зазначити, що у випадку, коли два числа рівні, то і їхні квадрати теж будуть рівні:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2. \tag{2}$$

Отже, ми гарантуємо, що у випадку, коли рівність (1) правильна, то і рівність (2) теж буде правильною, а це й означає (як було показано вище), що рівняння (2) є наслідком рівняння (1). Якщо ми хоча б один раз використаємо рівняння-наслідки (а не рівносильні перетворення), то можемо отримати сторонні корені, і тоді до розв'язання обов'язково входить перевірка одержаних коренів підстановкою їх у задане рівняння.

Зауваження. Перехід від заданого рівняння до рівняння-наслідку можна позначити спеціальним значком $\Rightarrow$, але його використання для запису розв'язання не є обов'язковим. Разом з тим, якщо цей значок використано, то це свідчить про те, що ми скористалися рівняннями-наслідками, і тому обов'язково до запису розв'язання необхідно включити перевірку одержаних коренів.

Рівносильні рівняння

З поняттям рівносильності ви знайомі з курсу алгебри 7 класу, де рівносильними називалися рівняння, які мали одні й ті самі корені. Зауважимо, що рівносильними вважалися і такі два рівняння, які не мали коренів. Формально будемо вважати, що і в цьому випадку рівняння мають одні й ті самі корені, оскільки відповіді до таких рівнянь однакові: «рівняння не має коренів» (точніше: однаковими є множини коренів таких рівнянь — вони обидві порожні, що позначають символом $\varnothing$).

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо розглядати більш загальне поняття рівносильності, а саме рівносильність на певній множині.

Два рівняння називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі корені, тобто якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого рівняння є коренем першого.

Для рівнянь, які задано на множині всіх дійсних чисел (наприклад, для лінійних), ми можемо дати однозначну відповідь на запитання «Чи рівносильні задані рівняння?». Наприклад, рівняння $x + 3 = 0$ і $2x + 6 = 0$ рівносильні, оскільки обидва мають однаковий корінь $x = -3$ і інших коренів не мають. Отже, кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге.

При розгляді рівносильності рівнянь на множині, яка відрізняється від множини всіх дійсних чисел, відповідь на запитання «Чи рівносильні задані рівняння?» може суттєво залежати від того, на якій множині ми розглядаємо ці рівняння. Наприклад, якщо розглянути рівняння:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0, \qquad (3)$$

$$x^2 - 1 = 0, \qquad (4)$$

то, як було показано вище, рівняння (3) має тільки один корінь $x = 1$, а рівняння (4) — два корені: $x = 1$ та $x = -1$. Таким чином, на множині всіх дійсних чисел ці рівняння не є рівносильними, оскільки у рівняння (4) є корінь $x = -1$, якого немає у рівняння (3). Але на множині додатних дійсних чисел ці рівняння рівносильні, оскільки на цій множині рівняння (3) має єдиний додатний корінь $x = 1$ і рівняння (4) теж має тільки один додатний корінь $x = 1$. Отже, на множині додатних чисел кожне із цих рівнянь має ті самі розв'язки, що й друге.

Зазначимо, що множина, на якій розглядають рівносильність рівнянь, як правило, не задається штучно (як в останньому випадку). Найчастіше за таку множину вибирають ОДЗ заданого рівняння. Домовимося, що надалі

всі рівносильні перетворення рівнянь (*а також* нерівностей і систем рівнянь та нерівностей) ми будемо виконувати на ОДЗ заданого рівняння (нерівності чи системи).

Зазначимо, що в тому випадку, коли ОДЗ заданого рівняння є множина всіх дійсних чисел, ми не завжди будемо її записувати (як не записували ОДЗ при розв'язуванні лінійних чи квадратних рівнянь). І в інших випадках головне — не записати ОДЗ до розв'язання рівняння, а реально врахувати її, виконуючи рівносильні перетворення заданого рівняння.

Наприклад, для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ задається нерівністю $x + 2 \geqslant 0$. Коли ми переходимо до рівняння $x + 2 = x^2$, то для всіх його коренів це рівняння є правильною рівністю. Тоді вираз x^2, який стоїть у правій частині цієї рівності, завжди невід'ємний ($x^2 \geqslant 0$), а отже, рівний йому вираз $x + 2$ теж буде невід'ємним: $x + 2 \geqslant 0$. Але це й означає, що ОДЗ заданого рівняння ($x + 2 \geqslant 0$) врахована автоматично для всіх коренів другого рівняння і тому при переході від рівняння $\sqrt{x+2}=x$ до рівняння $x + 2 = x^2$ ОДЗ заданого рівняння можна не записувати до розв'язання.

Для виконання рівносильних перетворень спробуємо виділити загальні орієнтири, аналогічні відповідним орієнтирам для одержання рівнянь-наслідків.

Як указано вище, виконуючи *рівносильні перетворення рівнянь*, необхідно **врахувати ОДЗ заданого рівняння** — це перший орієнтир для виконання рівносильних перетворень рівнянь.

За означенням рівносильності рівнянь потрібно гарантувати, щоб кожен корінь першого рівняння був коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого рівняння був коренем першого. Для першої частини цієї вимоги ми вже виділили загальний орієнтир: достатньо гарантувати збереження правильної рівності при переході від першого рівняння до другого.

Щоб виконати другу частину цієї вимоги, достатньо друге рівняння розглянути як правильну рівність (тобто взяти таке значення змінної, яке є коренем другого рівняння) і гарантувати, що при переході до першого рівняння правильна рівність зберігається (цей корінь залишається і коренем першого рівняння). Фактично з означення рівносильності рівнянь одержуємо, що *кожне з рівносильних рівнянь є наслідком другого рівняння.* Таким чином, **виконуючи рівносильні перетворення, ми повинні гарантувати збереження правильної рівності на кожному кроці розв'язування не тільки при прямих перетвореннях, а й при зворотних** — це другий орієнтир для розв'язування рівнянь за допомогою рівносильних перетворень. (Відповідні орієнтири схематично подано в пункті 5 таблиці 8.)

Наприклад, щоб розв'язати за допомогою рівносильних перетворень рівняння $\frac{x^2-1}{x+1}=0,$ достатньо врахувати його ОДЗ: $x + 1 \neq 0$ і умову рівності дробу нулю (дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю). Також слід звернути увагу на те, що на ОДЗ всі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної рівності.

Запис розв'язання в цьому разі може бути таким:

$\frac{x^2-1}{x+1}=0.$ ОДЗ: $x + 1 \neq 0$. Тоді $x^2 - 1 = 0$. Отже, $x = 1$ (задовольняє умові ОДЗ) або $x = -1$ (не задовольняє умові ОДЗ). *Відповідь:* 1.

Для виконання рівносильних перетворень рівнянь можна також користуватися спеціальними теоремами про рівносильність. У зв'язку з уточненням означення рівносильності рівнянь узагальнимо також формулювання найпростіших теорем про рівносильність, відомих з курсу алгебри 7 класу.

Теорема 1. ***Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на будь-якій множині).***

Теорема 2. ***Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого).***

Обґрунтування цих теорем повністю аналогічне обґрунтуванню орієнтирів для рівносильних перетворень заданого рівняння.

Зауваження. Для позначення переходу від заданого рівняння до рівносильного йому рівняння можна використовувати спеціальний значок $\Leftrightarrow$, але в записі розв'язань це не є обов'язковим. (Хоча іноді ми його будемо використовувати, щоб підкреслити, що було виконано саме рівносильні перетворення.)

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-1}$.

Розв'язання	*Коментар*

ОДЗ: $x-2\neq 0$ і $x-1\neq 0$.

На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{5(x-1)-3(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}=0, \qquad (3)$$

$$2x+1=0, \qquad (4)$$

тобто $x=-\frac{1}{2}$.

Урахуємо ОДЗ: при $x=-\frac{1}{2}$

$$x-2=-\frac{1}{2}-2=-2\frac{1}{2}\neq 0,$$

$$x-1=-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{2}\neq 0.$$

Отже, $x=-\frac{1}{2}$ — корінь.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Використаємо рівносильні перетворення для розв'язування заданого рівняння. Для цього необхідно врахувати ОДЗ, тому зафіксуємо її обмеження на початку розв'язання.

Зазначимо, що *в рівняннях обмеження ОДЗ можна тільки зафіксувати, але не розв'язувати, а в кінці перевірити, чи виконуються ці обмеження для знайдених коренів.*

При перенесенні члена заданого рівняння з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком одержуємо рівняння (1), рівносильне заданому.

Зводячи до спільного знаменника, розкриваючи дужки і зводячи подібні члени, знову одержуємо правильну рівність і можемо обґрунтувати, що при виконанні зворотних дій рівність теж не порушується, отже, одержані рівняння (1)–(3) рівносильні заданому (на його ОДЗ).

Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Але друга умова вже врахована в обмеженнях ОДЗ, отже, одержуємо рівняння (4), рівносильне заданому рівнянню на його ОДЗ. Оскільки всі перетворення були рівносильними тільки з урахуванням ОДЗ, то ми повинні перевірити, чи задовольняє одержане число обмеженням ОДЗ.

4. Причини появи сторонніх коренів та втрати коренів при розв'язуванні рівнянь. Найбільш типові випадки появи сторонніх коренів та втрати коренів рівняння наведено в таблиці 9. Там же вказано, як у кожному з цих випадків одержати правильне (чи повне) розв'язання.

Причина	Перетворення, при яких це може відбуватися	Приклад неправильного (чи неповного) розв'язання
		1. Поява сторонніх коренів
Одержання рівнянь-наслідків за рахунок:	**1. Зведення подібних членів**	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}.$ Перенесемо з правої частини рівняння в ліву доданок $\sqrt{x-2}$ з протилежним знаком і зведемо подібні члени. Одержимо $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$
а) переходу до рівняння, у якого ОДЗ ширша, ніж у заданого рівняння;	**2. Зведення обох частин рівняння до спільного знаменника** (при відкиданні знаменника)	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}.$ Помножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник усіх дробів $(x+2)(x+3)$. Одержимо $4(x+3)+7(x+2)=4$, $11x=-22$, $x=-2$
	3. Піднесення обох частин ірраціонального рівняння до квадрата	$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}.$ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. $2x+1=x$, $x=-1$
б) виконання перетворень, при яких відбувається неявне множення на нуль;	**Множення обох частин рівняння на вираз зі змінною**	$x^2+x+1=0.$ Помножимо обидві частини рівняння на $x-1$. $(x-1)(x^2+x+1)=0.$ Одержимо $x^3-1=0$, $x=1$

Таблиця 9

	У чому полягає помилка	Як одержати правильне (чи повне) розв'язання	Приклад правильного (чи повного) розв'язання
	при розв'язуванні рівняння		
	$x_1 = 0$ не є коренем заданого рівняння	**Виконати перевірку підстановкою коренів у задане рівняння**	$x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}.$ ▶ $x^2 - 6x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$. Перевірка показує, що $x_1 = 0$ — сторонній корінь, $x_2 = 6$ — корінь. *Відповідь:* 6. ◁
	$x = -2$ не є коренем заданого рівняння		$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2+5x+6}.$ ▶ $4(x + 3) + 7(x + 2) = 4$; $11x = -22$, $x = -2$. Перевірка показує, що $x = -2$ — сторонній корінь. *Відповідь:* коренів немає. ◁
	$x = -1$ не є коренем заданого рівняння		$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}.$ ▶ $2x + 1 = x$, $x = -1$. Перевірка показує, що $x = -1$ — сторонній корінь. *Відповідь:* коренів немає. ◁
	$x = 1$ не є коренем заданого рівняння		Для розв'язання цього рівняння не було необхідності множити на $x - 1$. $x^2 + x + 1 = 0.$ ▶ $D = -3 < 0$. *Відповідь:* коренів немає. ◁ Якщо помножити обидві частини рівняння на $x - 1$, то перевірка показує, що $x = 1$ — сторонній корінь, тобто рівняння не має коренів.

Причина	Перетворення, при яких це може відбуватися	Приклад неправильного (чи неповного) розв'язання
		1. Поява сторонніх коренів
в) застосування до обох частин рівняння функції, яка не є зростаючою або спадною	**Піднесення обох частин рівняння до парного степеня або застосування до обох частин рівняння тригонометричних функцій** (див. с. 365)	$x - 1 = 2x + 1.$ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $(x - 1)^2 = (2x + 1)^2.$ Одержимо $3x^2 + 6x = 0,$ $x_1 = 0,\ x_2 = -2$
		2. Втрата коренів
Явне чи неявне *звуження ОДЗ заданого рівняння*, зокрема виконання перетворень, у процесі яких відбувається неявне ділення на нуль	**1. Ділення обох частин рівняння на вираз зі змінною**	$x^2 = x.$ Поділивши обидві частини рівняння на x, одержимо $x = 1$
	2. Додавання, віднімання, множення або ділення обох частин рівняння на вираз, у якого ОДЗ вужча, ніж у заданого рівняння	$x^2 = 1.$ Якщо до обох частин рівняння додати $\sqrt{x}$, то одержимо рівняння $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x},$ у якого тільки один корінь $x = 1$

Продовження табл. 9

У чому полягає помилка	Як одержати правильне (чи повне) розв'язання	Приклад правильного (чи повного) розв'язання
при розв'язуванні рівняння		
$x_1 = 0$ не є коренем заданого рівняння	Виконати перевірку підстановкою коренів у задане рівняння	У даному рівнянні не було необхідності підносити до квадрата. $x - 1 = 2x + 1$. ▶ $x - 2x = 1 + 1$, $x = -2$. *Відповідь:* -2. ◁ Якщо використати піднесення до квадрата, то перевірка показує, що $x_2 = -2$ — корінь, а $x_1 = 0$ — сторонній корінь
при розв'язуванні рівняння		
Втратили корінь $x = 0$, оскільки після ділення на x фактично одержали рівняння $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, у якого ОДЗ: $x \neq 0$, тобто звузили ОДЗ заданого рівняння	Ті значення, на які звузилася ОДЗ, необхідно розглянути окремо	$x^2 = x$. ▶ 1. При $x = 0$ одержуємо $0^2 = 0$ — правильна рівність, отже, $x = 0$ — корінь. 2. При $x \neq 0$ одержуємо $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, $x = 1$. *Відповідь:* 0; 1. ◁ (Зазвичай *зручніше розв'язувати так:* $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$; $x = 0$, $x = 1$.)
Втратили корінь $x = -1$, оскільки ОДЗ заданого рівняння: x — будь-яке число, а $\sqrt{x}$ існує тільки при $x \geqslant 0$		У даному рівнянні не було необхідності додавати до обох частин $\sqrt{x}$. ▶ $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. *Відповідь:* ± 1. ◁ (Якби довелося додавати до обох частин $\sqrt{x}$, то при $x < 0$ задане рівняння потрібно було б розглянути окремо, і тоді одержали б ще й корінь $x = -1$.)

Запитання для контролю

1. Що називається коренем рівняння? Наведіть приклади.
2. Дайте означення області допустимих значень (ОДЗ) рівняння. Наведіть приклади.
3. Дайте означення рівняння-наслідку заданого рівняння. Наведіть приклади. Поясніть, у якому випадку можна гарантувати, що в результаті перетворення рівняння одержали рівняння-наслідок.
4. Дайте означення рівносильних рівнянь. Наведіть приклади. Поясніть, у якому випадку можна гарантувати, що в результаті перетворення рівняння одержали рівняння, рівносильне заданому.
5. Сформулюйте основні теореми про рівносильність рівнянь. Наведіть приклади їх використання.
6. Поясніть, у результаті яких перетворень заданого рівняння можна одержати сторонні для заданого рівняння корені. Як можна відсіяти сторонні корені? Наведіть приклади.
7. Поясніть, у результаті яких перетворень заданого рівняння можна втратити корені цього рівняння. Наведіть приклади. Поясніть на прикладах, як необхідно доповнити відповідні перетворення, щоб не втратити корені заданого рівняння.

Вправи

1°. Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

1) $\frac{x-5}{x+2}-\frac{2x-3}{x}=0;$ 3) $\sqrt{x}=\frac{3x-6}{x-1};$

2) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{x^2+1}=0;$ 4) $\sqrt{x^2+5}-\frac{x-5}{x+4}=0.$

2. З'ясуйте: а) чи є друге рівняння наслідком першого;
б) чи є ці рівняння рівносильними (відповідь обґрунтуйте):

1) $2x^2-8x-9=0$ і $x^2-4x-4{,}5=0;$ 2) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$ і $x^2-4=0.$

3°. Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:
1) $5x-8=7-3x$ і $5x+3x=7+8;$
2) $(2x-1)(x^2+5)=x(x^2+5)$ і $2x-1=x.$

4°. Обґрунтуйте, що задані рівняння не є рівносильними:

1) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ і $x^2=9;$ 2) $(2x-1)(x^2-5)=x(x^2-5)$ і $2x-1=x.$

5°. Поясніть, які перетворення було використано при переході від першого рівняння до другого і чи можуть вони приводити до порушення рівносильності:
1) $3x+1{,}1=6{,}8-2x$ і $3x+2x=6{,}8-1{,}1;$

2) $\frac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ і $x-9+3x^2-1=0;$

3) $\frac{5}{3x-1}+x=3$ і $5+x(3x-1)=3(3x-1)$;

4) $\sqrt{x^2-1}=x-2$ і $x^2-1=x^2-4x+4$.

6. Чи є рівносильними задані рівняння на ОДЗ першого з них:

1) $5-x=x+7$ і $5-x+\frac{1}{x-3}=x+7+\frac{1}{x-3}$;

2) $\frac{12-2x}{x-2}=\frac{x-5}{x-2}$ і $12-2x=x-5$;

3) $6-x=10$ і $6-x+\sqrt{x}-\sqrt{x}=10$;

4) $(x^2+2x-3)(x^2+6)=5(x^2+6)$ і $x^2+2x-3=5$;

5) $x^2-1=6x-1$ і $\frac{x^2-1}{x}=\frac{6x-1}{x}$?

7. Розв'яжіть рівняння і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5-x}{2}=\frac{8+3x}{x}-x$;
2) $\frac{x}{4}+\frac{(x-2)^2+8}{x}=\frac{(4-x)(2-x)}{x}$;

3) $\frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x}=\frac{6}{x^2-9}-\frac{x-4}{3+x}$;
4) $\frac{1}{x-2}+\frac{x-6}{3x^2-12}=\frac{1}{2-x}-1$.

8. Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $3x+\sqrt{x-2}=5x-1+\sqrt{x-2}$;
2) $\sqrt{2x+5}=x+1$;

3) $\sqrt{3-2x}=1-x$;
4) $\sqrt{5+x^2}=x-4$.

9. За якої умови рівняння є рівносильними:

1) $\frac{f(x)}{2x-3}=g(x)$ і $f(x)=g(x)(2x-3)$;

2) $f(x)+\sqrt{x}=g(x)+\sqrt{x}$ і $f(x)=g(x)$?

10. Чи може відбутися втрата коренів або поява сторонніх коренів, якщо:

1) рівняння $(x^2+7)f(x)=4x^2+28$ замінити рівнянням $f(x)=4$;

2) рівняння $(x-1)f(x)=(x-1)g(x)$ замінити рівнянням $f(x)=g(x)$;

3) рівняння $\frac{f(x)}{x+3}=\frac{g(x)}{x+3}$ замінити рівнянням $f(x)=g(x)$;

4) рівняння $\frac{f(x)}{3x^2+5}=0$ замінити рівнянням $f(x)=0$?

11. Розв'яжіть рівняння і обґрунтуйте, що побудовано ланцюжок рівносильних рівнянь:

1) $13-(x-1)^2+(2x-1)(x+1)=(x+2)^2$;

2) $(x-1)^3-(x-3)^3=3x+26$;

3) $(x+1)^3-(x-1)^3=6(x^2+x+1)$;

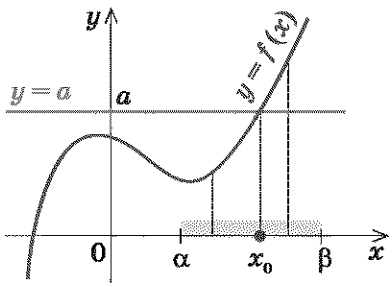
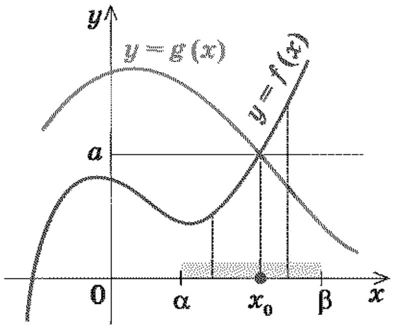
4) $(3x-1)^2+(6x-3)(2x+1)=(x-1)^2+5(2x+1)^2$.

3.2. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь

Таблиця 10

Орієнтир	Приклад
	1. Скінченна ОДЗ
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення	$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}.$ ▶ ОДЗ: $\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ 2-2x^2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geqslant 1,\\ x^2\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1.$ *Перевірка.* $x=1$ — корінь $\left(\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}, 1=1\right)$, $x=-1$ — не корінь $\left(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}\right)$. *Відповідь:* 1. ◁
	2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння
$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a, \\ g(x)\leqslant a\end{array}}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=a,\\ g(x)=a\end{cases}$ Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a	$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}.$ ▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$, $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\geqslant 1$ (бо $\sqrt{\lvert x\rvert}\geqslant 0$). Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}1-x^2=1,\\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ *Відповідь:* 0. ◁
$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x)+f_2(x)+\\ \quad+\ldots+f_n(x)=0 \\ \hline f_1(x)\geqslant 0,\\ f_2(x)\geqslant 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)\geqslant 0\end{array}}\Leftrightarrow\begin{cases}f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)=0.\end{cases}$ *Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю*	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0.$ ▶ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\geqslant 0$, $f_3(x)=(x^2-4)^2\geqslant 0$. Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sqrt{x-2}=0,\\ \lvert x^2-2x\rvert=0,\\ (x^2-4)^2=0.\end{cases}$ З першого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє всій системі *Відповідь:* 2. ◁

Продовження табл. 10

3. Використання зростання та спадання функцій	
Схема розв'язування рівняння	
1. *Підбираємо один або декілька коренів рівняння.* 2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має* (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння)	
	Теореми про корені рівняння **1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.** Приклад **Рівняння $\sqrt{x}+2x^3=3$ має єдиний корінь $x = 1$ $\left(\sqrt{1}+2\cdot 1^3=3\right.$, тобто $3 = 3)$, оскільки функція $f(x)=\sqrt{x}+2x^3$ зростає на всій області визначення $x \geqslant 0$**
	**2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.** Приклад **Рівняння $\sqrt{x}+x^3=3-x$ має єдиний корінь $x = 1$ $\left(\sqrt{1}+1^3=3-1\right.$, тобто $2 = 2)$, оскільки $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ зростає на всій області визначення $x \geqslant 0$, а $g(x) = 3 - x$ спадає (на множині R, а отже, і при $x \geqslant 0$)**

Пояснення й обґрунтування

1. Скінченна ОДЗ. Нагадаємо, що у разі, коли задано рівняння $f(x) = g(x)$, спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається *областю допустимих значень* цього рівняння. Зрозуміло, що кожен корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$. Отже, *кожен корінь рівняння* *обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння.* Це дозволяє в деяких випадках, аналізуючи ОДЗ, одержати розв'язки рівняння.

Наприклад, якщо задано рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=3x-6$, то його ОДЗ можна записати за допомогою системи $\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 4-2x \geqslant 0. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, одержуємо $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$ тобто $x = 2$. Отже, ОДЗ заданого рівняння складається лише з одного значення $x = 2$. Але якщо тільки для одного числа потрібно з'ясувати, чи є воно коренем заданого рівняння, то для цього достатньо підставити це значення в рівняння. У результаті одержуємо правильну числову рівність ($0 = 0$). Отже, $x = 2$ — корінь цього рівняння, інших коренів бути не може, оскільки всі корені рівняння знаходяться в його ОДЗ, а там немає інших значень, крім $x = 2$.

Розглянутий приклад дозволяє виділити орієнтир для розв'язування аналогічних рівнянь:

якщо ОДЗ рівняння (а також нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення.

Зауваження. *У тому випадку, коли ОДЗ — порожня множина* (не містить жодного числа), *ми можемо зразу дати відповідь, що задане рівняння не має коренів.*

Наприклад, якщо потрібно розв'язати рівняння $\sqrt{x-3}=\sqrt{2-x}+5x$, то його ОДЗ задається системою $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$ яка не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння. Деякі рівняння можна розв'язати за допомогою оцінки значень лівої та правої частин рівняння.

Нехай ми розв'язуємо рівняння $f(x) = g(x)$ і нам удалося з'ясувати, що для всіх допустимих значень x значення $f(x) \geqslant a$, а значення $g(x) \leqslant a$.

Розглянемо два випадки: 1) $f(x) > a$; 2) $f(x) = a$.

Якщо $f(x) > a$, то рівність $f(x) = g(x)$ не може виконуватися, бо $g(x) \leqslant a$, тобто при $f(x) > a$ задане рівняння коренів не має. Залишається тільки випадок $f(x) = a$, але, ураховуючи необхідність виконання рівності $f(x) = g(x)$, маємо, що тоді $g(x) = a$. Отже, ми обґрунтували, що виконання рівності $f(x) = g(x)$ (за умов $f(x) \geqslant a$ і $g(x) \leqslant a$) гарантує одночасне виконання рівностей $f(x) = a$ і $g(x) = a$ (і навпаки, якщо одночасно виконуються рівності $f(x) = a$

і $g(x) = a$, то виконується і рівність $f(x) = g(x)$). Як було показано в пункті 3.1, це й означає, що рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$ Коротко це можна записати так:

$f(x) = g(x)$
$f(x) \geqslant a,$ $g(x) \leqslant a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$$

○

Приклад використання такого способу розв'язування рівнянь наведено в пункті 2 таблиці 10.

Аналогічно до попередніх міркувань можна обґрунтувати і орієнтир для розв'язування рівняння $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$, у якому всі функції-доданки невід'ємні ($f_1(x) \geqslant 0$; $f_2(x) \geqslant 0$; ...; $f_n(x) \geqslant 0$).

● Якщо припустити, що $f_1(x) > 0$, то сума всіх функцій, що стоять у лівій частині цього рівняння, може дорівнювати нулю тільки тоді, коли сума $f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ буде від'ємною. Але це неможливо, оскільки за умовою всі функції невід'ємні. Отже, при $f_1(x) > 0$ задане рівняння не має коренів. Ці самі міркування можна повторити для будь-якої іншої функції-доданка. Залишається єдина можливість — усі функції-доданки дорівнюють нулю (очевидно, що в цьому випадку рівність $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$ обов'язково буде виконуватися). Таким чином, *сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю.* ○

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $x^4 + |x - 1| = 2x^2 - 1$, достатньо перенести всі члени в один бік, записати рівняння у вигляді $(x^2 - 1)^2 + |x - 1| = 0$ і взяти до уваги, що $(x^2 - 1)^2$ і $|x - 1|$ — невід'ємні функції. Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ |x - 1| = 0. \end{cases}$ З другого рівняння одержуємо $x = 1$, що задовольняє всій системі, тобто задане рівняння має єдиний корінь $x = 1$.

3. **Використання зростання та спадання функцій** до розв'язування рівнянь спирається на таку властивість: *зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.*

Корисно пам'ятати спеціальні теореми про корені рівняння.

Теорема 1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Графічно твердження теореми проілюстровано на рисунку 51. Пряма $y = a$ перетинає графік зростаючої на проміжку $[\alpha; \beta]$ функції $y = f(x)$ тільки в одній точці. Це й означає, що рівняння $f(x) = a$ не може мати більше одного кореня на проміжку $[\alpha; \beta]$. Доведемо це твердження аналітично.

- Якщо на проміжку $[\alpha; \beta]$ рівняння має корінь x_0, то $f(x_0) = a$. Інших коренів бути не може, оскільки для зростаючої функції $f(x)$ при $x > x_0$ одержуємо $f(x) > f(x_0) = a$, а при $x < x_0$ маємо $f(x) < f(x_0) = a$. Отже, при $x \neq x_0$ $f(x) \neq a$. Аналогічно для спадної функції при $x \neq x_0$ одержуємо $f(x) \neq a$. ○

Теорема 2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Графічно твердження теореми проілюстровано на рисунку 52.

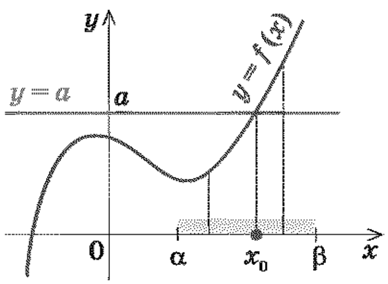


Рис. 51

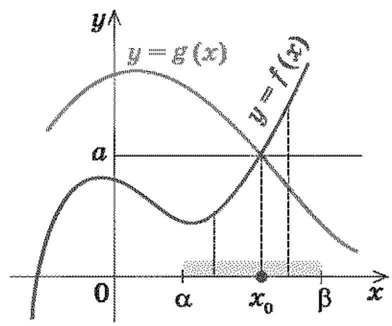


Рис. 52

- Якщо на проміжку $[\alpha; \beta]$ рівняння має корінь x_0, то $f(x_0) = g(x_0) = a$. Інших коренів бути не може, оскільки, наприклад, для зростаючої функції $f(x)$ і спадної функції $g(x)$ при $x > x_0$ маємо $f(x) > a$, а $g(x) < a$, отже, $f(x) \neq g(x)$. Аналогічно і при $x < x_0$ $f(x) \neq g(x)$. ○

Кожна із цих теорем стверджує, що *в розглянутому проміжку задане рівняння може мати не більш ніж один корінь*, тобто *або це рівняння зовсім не має коренів, або воно має тільки єдиний корінь*. Якщо нам удалося підібрати один корінь такого рівняння, то інших коренів у заданому проміжку рівняння не має.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $x^3 + x = 10$, достатньо помітити, що функція $f(x) = x^3 + x$ є зростаючою на всій числовій прямій (як сума двох зростаючих функцій) і що $x = 2$ — корінь[1] цього рівняння

[1] Корінь $x = 2$ одержано підбиранням. Як правило, підбір починають із цілих значень: $x = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, які підставляють у задане рівняння.

($2^3 + 2 = 10$; $10 = 10$). Отже, задане рівняння $f(x) = 10$ має єдиний корінь $x = 2$.

Зазначимо, що кожна з цих теорем гарантує єдиність кореня рівняння (якщо він є) тільки на проміжку зростання (чи спадання) відповідної функції. Якщо функція має декілька проміжків зростання і спадання, то доводиться розглядати кожен з них окремо.

Приклад Розв'яжемо за допомогою теореми 2 рівняння $x^3 + x = \frac{2}{x}$.

▶ Спочатку слід урахувати його ОДЗ: $x \neq 0$ і згадати, що функція $y = \frac{2}{x}$ на всій області визначення не є ні спадною, ні зростаючою (пункт 2.2), але вона спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Тому розглянемо кожен проміжок окремо.

1) При $x > 0$ задане рівняння має корінь $x = 1$ $\left(1^3 + 1 = \frac{2}{1}, 2 = 2\right)$.

   Функція $f(x) = x^3 + x$ зростає при $x > 0$ (як показано вище, вона зростає на множині $\boldsymbol{R}$), а функція $g(x) = \frac{2}{x}$ спадає на проміжку $x > 0$. Отже, задане рівняння $f(x) = g(x)$ при $x > 0$ має єдиний корінь $x = 1$.

2) При $x < 0$ задане рівняння має корінь $x = -1$ $\left((-1)^3 + (-1) = \frac{2}{-1}, -2 = -2\right)$.

   Функція $f(x) = x^3 + x$ зростає при $x < 0$, а функція $g(x) = \frac{2}{x}$ спадає на цьому проміжку. Тому задане рівняння $f(x) = g(x)$ при $x < 0$ має єдиний корінь $x = -1$.

   У відповідь слід записати всі знайдені корені (хоч на кожному з проміжків корінь єдиний, але всього коренів — два). Отже, задане рівняння має тільки два корені: 1 і −1. ◁

Приклади розв'язування завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 - (x-1)^2$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ ОДЗ: $x \neq 0$. На ОДЗ $x^4 > 0$. Тоді функція $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4} \geqslant 2$ (як сума двох взаємно обернених додатних чисел), а функція $g(x) = 2 - (x-1)^2 \leqslant 2$.	Якщо розкрити дужки і звести обидві частини рівняння до спільного знаменника, то для знаходження коренів одержаного рівняння доведеться розв'язувати повне рівняння восьмого степеня, усі корені якого ми не зможемо знайти.

Таким чином, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^4 + \frac{1}{x^4} = 2, \\ 2-(x-1)^2 = 2. \end{cases}$

З другого рівняння системи одержуємо $x = 1$, що задовольняє і першому рівнянню, тобто система (отже, і задане рівняння) має єдиний розв'язок $x = 1$.

Відповідь: 1. ◁

Спробуємо оцінити області значень функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння. Оскільки на ОДЗ ($x \neq 0$) $x^4 > 0$, то в лівій частині рівняння стоїть *сума двох взаємно обернених додатних чисел*, яка *завжди більша або дорівнює* 2. У правій частині від 2 віднімається невід'ємне число $(x - 1)^2$. Отже, при всіх значеннях x одержуємо значення, менші або рівні 2. Рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли обидві частини дорівнюють 2.

Приклад 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x} + x^3 = \sqrt{y} + y^3, \\ x^2 + 3y^2 = 36. \end{cases}$

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ Розглянемо функцію $f(t) = \sqrt{t} + t^3$. На своїй області визначення ($t \geqslant 0$) ця функція є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій). Тоді перше рівняння заданої системи, яке має вигляд $f(x) = f(y)$, рівносильне рівнянню $x = y$. Отже, на ОДЗ задана система рівносильна системі $\begin{cases} x = y, \\ x^2 + 3y^2 = 36. \end{cases}$

Підставляючи $x = y$ у друге рівняння системи, маємо $4y^2 = 36$, $y^2 = 9$, $y = \pm 3$. Ураховуючи, що на ОДЗ $y \geqslant 0$, одержуємо $y = 3$. Тоді $x = y = 3$.

Відповідь: (3; 3). ◁

Коментар

Іноді властивості функцій удається використати при розв'язуванні систем рівнянь. Якщо помітити, що в лівій і правій частинах першого рівняння заданої системи стоять значення однієї і тієї ж функції, яка є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то *рівність $f(x) = f(y)$ для зростаючої функції можлива тоді і тільки тоді, коли $x = y$, оскільки однакових значень зростаюча функція може набувати тільки при одному значенні аргументу.* (Зауважимо, що така сама властивість матиме місце і для спадної функції.)

Зауваження. Твердження, яке було обґрунтовано в коментарі до прикладу 2, може бути використано при розв'язуванні аналогічних завдань. Коротко його можна сформулювати так: *якщо функція $f(x)$ є зростаючою (або спадною) на певній множині, то на цій множині $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.*

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна використати властивості функцій до розв'язування рівнянь.
2*. Обґрунтуйте правильність орієнтирів для розв'язування рівнянь з використанням властивостей функцій, які наведено в таблиці 10.

Вправи

Розв'язіть рівняння (1–4), використовуючи властивості відповідних функцій.

1°. 1) $\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{8-4x}+x+2$;

2) $2x+\sqrt{x^2-9}=x^2+\sqrt{18-2x^2}-3$;

3) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+3x}+\sqrt{4x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-1}-2y+3$.

2°. 1) $\sqrt{4+x^2}=2-x^4$; 2) $1+\left|x^5+3x\right|=\sqrt{1-x^2}$;

3*) $x^6+\frac{1}{x^6}=1-2x-x^2$; 4*) $\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}=2-|2x-1|$.

3. 1) $|x^2-7x+12|+|x^2-9|+|6-2x|=0$;

2) $|x+2|+|y-5|+|2x^2-8|=0$;

3) $\sqrt{1-y}+\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-3x}=0$;

4) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x}=0$;

5) $x^2+y^2+5=4x+2y$;

6) $3x^2+y^2+2z^2=4y-6x-12z-25$.

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}=2$; 2) $x+\sqrt{x}+x^9=3$;

3) $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}=5-x$; 4) $\sqrt{x-2}+x=\frac{40}{x-1}$;

5) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2}=\frac{10}{x}$; 6) $2x+\sqrt{x}=\sqrt{10-x}$.

5*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+x^5=y+y^5, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{-x}-x=\sqrt{-y}-y, \\ x^3+y^3=-16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-y^3=y^5-x^5, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{-3x}-\sqrt{-3y}=x-y, \\ 3x^2-y^2=8. \end{cases}$

§ 4 НЕРІВНОСТІ: РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ІНТЕРВАЛІВ

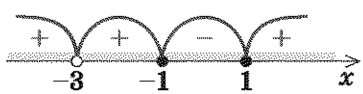
Таблиця 11

1. Поняття нерівності зі змінною та її розв'язків	
Означення	**Приклад**
Якщо два вирази зі змінною сполучити одним із знаків $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то одержуємо *нерівність зі змінною*. У загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») записують так: $f(x) > g(x)$	$3x < 1$ — лінійна нерівність; $x^2 - 3x + 2 > 0$ — квадратна нерівність; $\frac{x-5}{2x+4} < 1$ — дробова нерівність
Розв'язком нерівності з однією змінною **називається значення змінної, яке перетворює задану нерівність на правильну числову нерівність.** *Розв'язати нерівність — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає*	$x = 4$ — один з розв'язків нерівності $2x - 3 > x$, оскільки при $x = 4$ одержуємо правильну нерівність: $2 \cdot 4 - 3 > 4$, тобто $5 > 4$
2. Область допустимих значень (ОДЗ)	
Областю допустимих значень (або областю визначення) *нерівності* називається спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, що стоять у лівій і правій частинах нерівності	Для нерівності $\sqrt{x+2} < x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x) = \sqrt{x+2}$ визначається умовою $x + 2 \geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x) = x$ є множина всіх дійсних чисел
3. Рівносильні нерівності	
Означення	**Найпростіші теореми**
Дві нерівності називаються *рівносильними* на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки	1. **Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на будь-якій множині)**

Продовження табл. 11

тобто якщо кожен розв'язок першої нерівності є розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності є розв'язком першої	**2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число** (*або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності*)**, не змінюючи знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)**
	3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (*або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності*) **і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)**

4. Метод інтервалів
(розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План	Приклад
1. Знайти ОДЗ. **2. Знайти нулі функції $f(x) = 0$.** **3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.** **4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності**	**Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$.** ▶ **Нехай $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+3)^2}$.** **1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$.** **2. Нулі функції: $f(x) = 0$.** $\frac{x^2-1}{(x+3)^2}=0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ **(входять до ОДЗ)** **3.**  *Відповідь:* $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$.

Продовження табл. 11

5. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

за допомогою рівносильних перетворень	за допомогою методу інтервалів ($f(x) \gtrless 0$)
Врахувати ОДЗ початкової нерівності	**1. Знайти ОДЗ.** **2. Знайти нулі функції: $f(x)=0$.** **3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.** **4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.**
① ↓↑ ② **Зберігати на ОДЗ правильну нерівність при прямих і зворотних перетвореннях.**	

① — **початкова нерівність;**

② — **нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;**

↓, ↑ — **символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою напрямку їх виконання)**

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття нерівності зі змінною та її розв'язків. Якщо два вирази зі змінною сполучити одним із знаків $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то одержимо нерівність зі змінною.

Аналогічно до рівняння, нерівність зі змінною (наприклад, із знаком $>$) найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження тих значень аргументів, при яких значення однієї із заданих функцій більше за значення другої заданої функції. Тому в загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») записують так: $f(x) > g(x)$.

Нагадаємо, що *розв'язком нерівності називається значення змінної, яке перетворює цю нерівність на правильну числову нерівність.*

Розв'язати нерівність — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Наприклад, розв'язками нерівності $3x < 6$ є всі $x < 2$, розв'язками нерівності $x^2 > -1$ є всі дійсні числа (R), а нерівність $x^2 < -1$ не має розв'язків, оскільки значення x^2 не може бути від'ємним числом, меншим за -1.

2. Область допустимих значень (ОДЗ) нерівності означають аналогічно до ОДЗ рівняння. Якщо задано нерівність $f(x) > g(x)$, то спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається областю допустимих значень цієї нерівності (іноді використовують також терміни «область визначення нерівності» або «множина допустимих значень нерівності»). Наприклад, для нерівності $x^2 < x$ областю допустимих значень є всі дійсні числа (це можна записати, наприклад, так: ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$), оскільки функції $f(x) = x^2$ і $g(x) = x$ мають області визначення $x \in \boldsymbol{R}$.

Зрозуміло, що кожен розв'язок заданої нерівності входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$ (інакше ми не зможемо отримати правильну числову нерівність). Отже, *кожен розв'язок нерівності обов'язково входить до ОДЗ цієї нерівності*. Це дозволяє в деяких випадках використовувати аналіз ОДЗ нерівності для її розв'язування.

Наприклад, у нерівності $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}>x$ функція $g(x) = x$ визначена при всіх дійсних значеннях x, а функція $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$ — тільки за умови, що під знаком квадратного кореня будуть стояти невід'ємні вирази. Отже, ОДЗ цієї нерівності задається системою $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0, \end{cases}$ з якої одержуємо систему $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$ що не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданої нерівності не містить жодного числа, через те ця нерівність не має розв'язків.

Узагалі при розв'язуванні нерівностей різних видів нам доведеться використовувати один із двох методів розв'язування: рівносильні перетворення нерівностей або так званий метод інтервалів.

3. Рівносильні нерівності. З поняттям рівносильності нерівностей ви знайомі з курсу алгебри 9 класу. Як і для випадку рівносильних рівнянь, рівносильність нерівностей ми будемо розглядати на певній множині.

> ***Дві нерівності називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки, тобто якщо кожен розв'язок першої нерівності є розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності є розв'язком першої.***

Домовимося, що надалі **всі рівносильні перетворення нерівностей будемо виконувати на ОДЗ заданої нерівності.** Зазначимо, що у випадку, коли ОДЗ заданої нерівності є множина всіх дійсних чисел, ми не завжди будемо її записувати (як не записували ОДЗ при розв'язуванні лінійних чи квадратних нерівностей). І в інших випадках головне — не записати ОДЗ до розв'язання нерівності, а дійсно врахувати її, виконуючи рівносильні перетворення заданої нерівності.

Загальні орієнтири для виконання рівносильних перетворень нерівностей аналогічні до відповідних орієнтирів для виконання рівносильних перетворень рівнянь.

Як було указано вище, виконуючи *рівносильні перетворення нерівностей*, необхідно **врахувати ОДЗ заданої нерівності** — це і є перший орієнтир для виконання рівносильних перетворень нерівностей.

За означенням рівносильності нерівностей потрібно забезпечити, щоб кожен розв'язок першої нерівності був розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності був розв'язком першої. Для цього **достатньо забезпечити збереження правильної нерівності на кожному кроці розв'язування не тільки при прямих, а й при зворотних перетвореннях.** Це і є другий орієнтир для розв'язування нерівностей за допомогою рівносильних перетворень. Дійсно, кожен розв'язок нерівності перетворює її на правильну числову нерівність, і якщо правильна нерівність зберігається, то розв'язок кожної з нерівностей буде також і розв'язком іншої, а отже, нерівності будуть рівносильні (відповідні орієнтири схематично подано в пункті 5 таблиці 11).

Наприклад, щоб розв'язати за допомогою рівносильних перетворень нерівність

$$\frac{x-3}{x+1} > 0, \qquad (1)$$

достатньо врахувати її ОДЗ: $x + 1 \neq 0$ і умову додатності дробу (*дріб буде додатним тоді і тільки тоді, коли чисельник і знаменник дробу мають однакові знаки*), а також звернути увагу на те, що на ОДЗ всі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямку зі збереженням правильної нерівності.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Задана нерівність рівносильна сукупності двох систем: $$\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x-3<0, \\ x+1<0. \end{cases} \qquad (2)$$ Тоді одержуємо $\begin{cases} x>3, \\ x>-1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x<3, \\ x<-1. \end{cases}$ Отже, $x > 3$ або $x < -1$. *Відповідь:* $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. ◁	Зауважимо, що, записуючи умову додатності дробу — сукупність систем (2), ми неявно врахували ОДЗ нерівності (1). Дійсно, якщо $x + 1 > 0$ або $x + 1 < 0$, то $x + 1 \neq 0$, тому в явному вигляді ОДЗ заданої нерівності не записана при оформленні розв'язання.

Крім виділених загальних орієнтирів, виконуючи рівносильні перетворення нерівностей, можна також користуватися спеціальними теоремами про рівносильність. У зв'язку з уточненням означення рівносильності нерівностей узагальнимо також формулювання найпростіших теорем про рівносильність нерівностей, відомих з курсу алгебри 9 класу.

1. ***Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на будь-якій множині).***

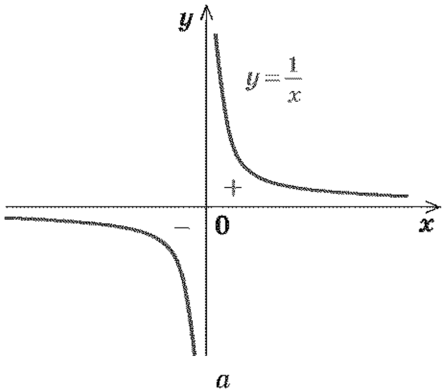
2. ***Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знака нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).***

3. ***Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).***

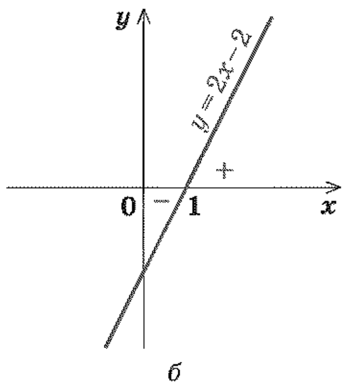
Обґрунтування цих теорем повністю аналогічне до обґрунтування орієнтирів для рівносильних перетворень заданої нерівності.

Зауваження. Для позначення переходу від заданої нерівності до рівносильної їй нерівності можна використовувати спеціальний значок $\Leftrightarrow$, але його використання при записуванні розв'язань не є обов'язковим (хоча іноді ми будемо ним користуватися, щоб підкреслити, що було виконано саме рівносильні перетворення).

4. Метод інтервалів. Розв'язування нерівностей методом інтервалів спирається на властивості функцій, пов'язані зі зміною знаків функції. Пояснимо ці властивості, використовуючи графіки відомих нам функцій, наприклад $y=\frac{1}{x}$ і $y = 2x - 2$ (рис. 53).



а



б

Рис. 53

Розглядаючи ці графіки, помічаємо, що функція може змінити свій знак тільки у двох випадках:

1) якщо графік розривається (як у випадку функції $y = \frac{1}{x}$ (рис. 53, *а*) — графік розривається в точці 0, і знак функції змінюється в точці 0);
2) якщо графік без розриву переходить з нижньої півплощини у верхню (або навпаки), але тоді графік перетинає вісь Ox (як у випадку функції $y = 2x - 2$) (рис. 53, *б*). На осі Ox значення функції дорівнюють нулю. (Нагадаємо, що значення аргументу, при яких функція перетворюється на нуль, називають *нулями функції*.) Отже, **будь-яка функція може поміняти свій знак тільки в нулях або в точках, де розривається графік функції** (у так званих *точках розриву* функції[1]).

Точки, у яких розривається графік функції $f(x)$, ми виділяємо, як правило, коли знаходимо область визначення цієї функції. Наприклад, якщо $f(x) = \frac{1}{x}$, то її область визначення $x \neq 0$, і саме в точці 0 графік функції розривається (рис. 53, *а*). Якщо ж на якомусь проміжку області визначення графік функції не розривається і функція не дорівнює нулю, то за наведеним вище висновком вона не може в цьому проміжку поміняти свій знак[2]. Отже, якщо відмітити нулі функції на її області визначення, то область визначення розіб'ється на проміжки, усередині яких знак функції змінитися не може (і тому цей знак можна визначити в будь-якій точці з цього проміжку).

У таблиці 12 наведено розв'язання дробово-раціональної нерівності $\frac{2x+4}{x-1} > 0$ методом інтервалів; коментар, який пояснює кожен крок розв'язування; *план розв'язування нерівностей виду* $f(x) \gtrless 0$ *методом інтервалів*.

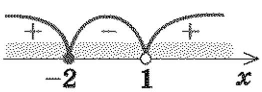
Таблиця 12

Приклад	Коментар	План розв'язування
$\frac{2x+4}{x-1} > 0$ ▶ $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$	Розглянемо функцію, яка стоїть у лівій частині цієї нерівності, і позначимо її через $f(x)$: $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$	

[1] Докладніше це поняття буде розглянуто в 11 класі.

[2] В 11 класі ми уточнимо формулювання цієї властивості (так званих неперервних функцій). Для всіх відомих вам функцій (лінійних, квадратичних, степеневих, дробово-раціональних) ця властивість має місце.

Продовження табл. 12

1. ОДЗ: $x - 1 \neq 0$, тобто $x \neq 1$	Розв'язком нерівності $f(x) > 0$ можуть бути тільки числа, що входять до області визначення функції $f(x)$, тобто числа, які входять до ОДЗ нерівності. Тому першим етапом розв'язування нерівності методом інтервалів буде знаходження її ОДЗ	1. Знайти ОДЗ нерівності
2. Нулі $f(x)$: ($f(x) = 0$). $\frac{2x+4}{x-1}=0$, тоді $x = -2$.	Нас цікавлять ті проміжки області визначення функції $f(x)$, на яких ця функція додатна. Як було зазначено вище, функція $f(x)$ може поміняти знак у своїх нулях, тому другим етапом розв'язування нерівності $f(x) > 0$ буде знаходження нулів функції (для цього прирівнюємо функцію $f(x)$ до нуля і розв'язуємо одержане рівняння)	2. Знайти нулі $f(x)$ ($f(x) = 0$)
3. 	Якщо тепер відмітити нулі на області визначення функції $f(x)$, то область визначення розбивається на проміжки, причому всередині кожного проміжку функція $f(x)$ не змінює свій знак (рис. 1). Тому знак функції в кожному проміжку можна визначати в будь-якій точці цього проміжку. Це і є третім етапом розв'язування	3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції в кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ
4. *Відповідь:* $(-\infty;\ -2) \cup (1;\ +\infty)$. ◁	На рисунку до пункту 3 видно, що розв'язком нерівності є об'єднання проміжків $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$	4. Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності

Наведемо приклади розв'язування більш складної дробово-раціональної нерівності методом інтервалів та за допомогою рівносильних перетворень.

Приклад Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0.$

I спосіб (метод інтервалів)

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

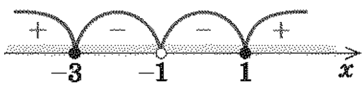
1 ОДЗ: $x \neq -1$.

2. Нулі $f(x)$: $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0$,

$x^2 + 2x - 3 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = -3$ (входять до ОДЗ).

3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.



4. *Відповідь:* $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Коментар

Задана нерівність має вигляд $f(x) \leqslant 0$, і для її розв'язування можна застосувати метод інтервалів. Для цього використаємо план, наведений вище та в таблиці 11.

При знаходженні нулів $f(x)$ стежимо за тим, щоб знайдені значення входили до ОДЗ (або виконуємо перевірку знайдених коренів рівняння $f(x) = 0$).

Записуючи відповідь до нестрогої нерівності, слід урахувати, що всі нулі функції повинні ввійти до відповіді (у даному випадку — числа -3 і 1).

II спосіб (за допомогою рівносильних перетворень)

Коментар

Виберемо для розв'язування метод рівносильних перетворень нерівності. Виконуючи рівносильні перетворення, ми повинні врахувати ОДЗ заданої нерівності, тобто врахувати обмеження $(x + 1)^2 \neq 0$.

Але якщо $x \neq -1$, то $(x + 1)^2 > 0$, і тоді в заданому дробу знаменник додатний. Якщо виконується задана нерівність, то чисельник дробу $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ (і навпаки, якщо виконується остання нерівність, то на ОДЗ дріб $\left.\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0\right)$, тобто задана нерівність рівносильна на ОДЗ нерівності $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$.

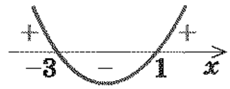
Щоб розв'язати одержану квадратну нерівність, знайдемо корені квадратного тричлена $x^2 + 2x - 3$ і побудуємо ескіз графіка функції $y = x^2 + 2x - 3$. Розв'язок квадратної нерівності: $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

Оскільки всі перетворення були рівносильними тільки на ОДЗ, то ми повинні вибрати тільки ті розв'язки квадратної нерівності, які задовольняють обмеження ОДЗ.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $(x+1)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -1$.

Тоді $(x+1)^2 > 0$ і задана нерівність на її ОДЗ рівносильна нерівності $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$. Оскільки $x^2 + 2x - 3 = 0$ при $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ (ці значення x входять до ОДЗ), одержуємо $-3 \leqslant x \leqslant 1$ (див. рисунок).



Ураховуючи ОДЗ, отримуємо відповідь.

Відповідь: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах зміст понять: «розв'язок нерівності», «розв'язати нерівність», «область допустимих значень нерівності», «рівносильні нерівності».
2. Сформулюйте відомі вам теореми про рівносильність нерівностей. Проілюструйте їх на прикладах.
3. Сформулюйте план розв'язування нерівностей методом інтервалів. Проілюструйте використання цього плану на прикладі.
4. Поясніть на прикладі, як можна виконувати рівносильні перетворення нерівностей у тих випадках, які не описуються відомими теоремами про рівносильність нерівностей.

Вправи

Розв'яжіть нерівність (1–2) двома способами: за допомогою рівносильних перетворень і за допомогою методу інтервалів.

1°. 1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{2}{x+2} < \dfrac{1}{x-3}$;

3) $\dfrac{x^2-25}{(x+5)(x-4)} \leqslant 0$; 4) $\dfrac{x^2+12}{x^2-2x-8} \geqslant 1$.

2*. 1) $x^4 - 5x^2 + 4 \leqslant 0$; 2) $9x^4 - 10x^2 + 1 > 0$;

3) $\dfrac{81}{x} \geqslant x^3$; 4) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) < 105$.

3°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$;

3) $y = \sqrt{5 - x - \dfrac{6}{x}}$; 4) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

§ 5 ГРАФІКИ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ДВОМА ЗМІННИМИ

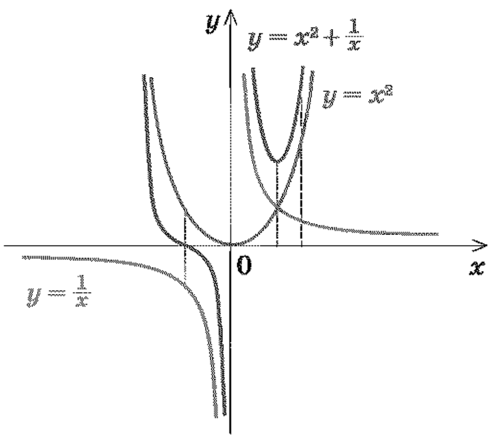
Таблиця 13

1. Побудова графіків функцій виду $y = f(x) + g(x)$

Якщо нам відомі графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, то ескіз графіка функції $y = f(x) + g(x)$ можна побудувати так: зобразити в одній системі координат графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$, а потім будувати шуканий графік за точками, виконуючи для кожного значення x (з області визначення функції $f(x) + g(x)$) необхідні операції над відрізками, які зображають відповідні ординати $f(x)$ і $g(x)$.

Аналогічно можна будувати і схематичні графіки функцій

$$y = f(x) \cdot g(x) \text{ та } y = \frac{1}{f(x)}$$

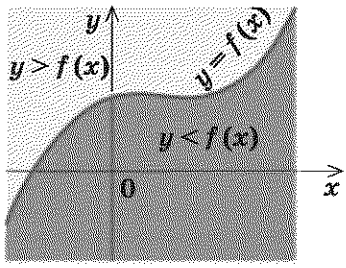
Приклад	Коментар
Побудуйте графік функції $y = x^2 + \frac{1}{x}$. 	Будуємо в одній системі координат графіки функцій-доданків: $y = x^2$ та $y = \frac{1}{x}$ (на рисунку вони побудовані відповідно зеленою та синіми лініями). Для кожного значення x (крім $x = 0$, яке не входить до області визначення заданої функції) додаємо відповідні відрізки — значення функцій (справа від осі Oy) або віднімаємо, якщо значення $f(x)$ і $g(x)$ протилежні за знаком (у даному випадку — зліва від осі Oy). На рисунку рожевою лінією зображено результат — графік функції $y = x^2 + \frac{1}{x}$

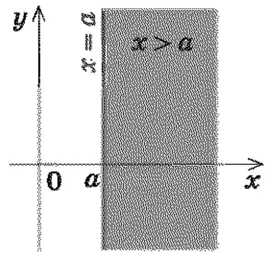
Продовження табл. 13

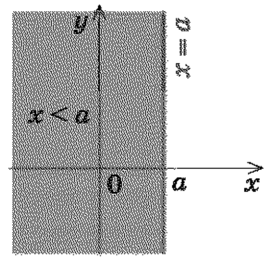
2. Графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними

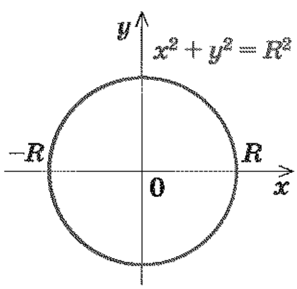
О з н а ч е н н я. ***Графіком рівняння (нерівності) з двома змінними x і y*** **називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; y)$, де пара чисел $(x; y)$ є розв'язком відповідного рівняння (нерівності).**

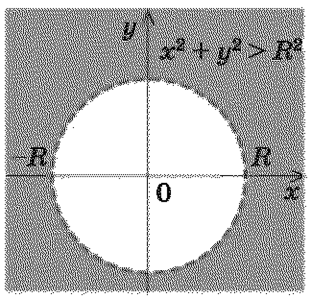
Графіки деяких рівнянь і нерівностей

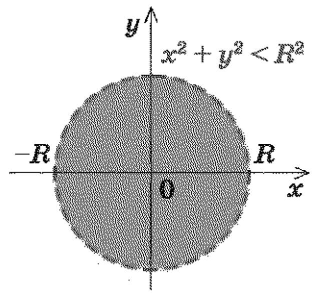




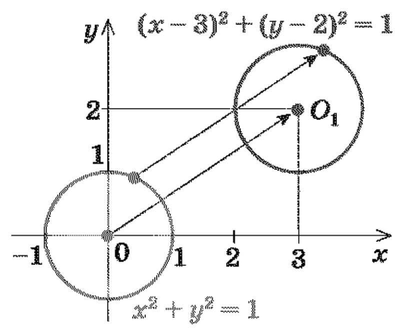




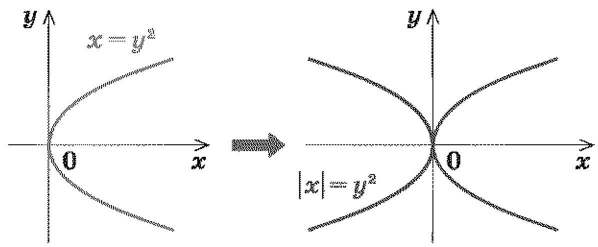
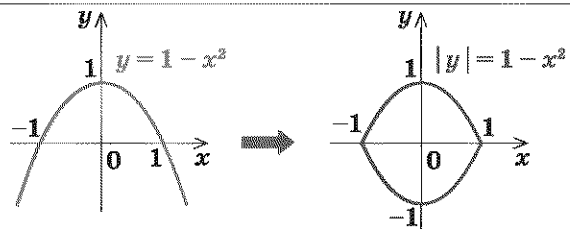




3. Геометричні перетворення графіка рівняння $F(x; y) = 0$

Перетворення	Приклад
$F(x - a; y - b) = 0$ *Паралельне перенесення* графіка рівняння $F(x; y) = 0$ *на вектор* $\overline{n}(a; b)$	

Продовження табл. 13

$F(\lvert x\rvert; y) = 0$ Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$ *праворуч від осі Оу* (і на самій осі) *залишається без зміни, і ця сама частина відображується симетрично відносно осі Оу.*	
$F(x; \lvert y\rvert) = 0$ Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$ *вище від осі Ох* (і на самій осі) *залишається без зміни, і ця сама частина відображується симетрично відносно осі Ох.*	

Пояснення й обґрунтування

1. Побудова графіків функцій виду $y = f(x) + g(x)$. Якщо відомі графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, то можна побудувати орієнтовний вид графіка функції $y = f(x) + g(x)$, або $y = f(x) \cdot g(x)$, або $y = \frac{1}{f(x)}$. Для цього достатньо зобразити в одній системі координат графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$, а потім побудувати шуканий графік за точками, виконуючи для кожного значення x (з області визначення заданої функції) необхідні операції над відрізками (або над довжинами цих відрізків), які зображають відповідні ординати $f(x)$ і $g(x)$.

Приклад побудови графіка функції виду $y = f(x) + g(x)$ наведено в таблиці 13, а графіка функції виду $y = \frac{1}{f(x)}$ — далі в прикладі 1 (в останньому випадку зручно будувати графіки функцій $y = f(x)$ і $y = \frac{1}{f(x)}$ не в одній системі координат, а в різних, розміщених так, щоб їхні осі ординат розташовувалися на одній прямій).

Зауважимо, що такий спосіб побудови графіка функції не завжди дає можливість виявити всі характерні особливості поведінки графіка (часто це можна зробити тільки в результаті спеціального дослідження функції, яке буде розглянуто в 11 класі), але в багатьох випадках наведений спосіб дозволяє отримати певне уявлення про вид графіка заданої функції.

2. Графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними. З поняттям графіка рівняння з двома змінними ви ознайомилися в курсі алгебри. Аналогічно вводиться і поняття графіка нерівності з двома змінними. Тому можна дати спільне означення цих графіків:

Графіком рівняння (нерівності) з двома змінними x і y називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; y)$, де пара чисел $(x; y)$ є розв'язком відповідного рівняння (нерівності).

● Для побудови графіка нерівності $y > f(x)$ (чи $y < f(x)$) достатньо мати графік функції $y = f(x)$. Дійсно, за означенням графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок M координатної площини з координатами $(x; y) = (x; f(x))$. Тоді для кожного значення x точки, координати яких задовольняють нерівності $y > f(x)$, будуть розташовані вище точки M (рис. 54, *а*), а точки, координати яких задовольняють нерівності $y < f(x)$, будуть розташовані нижче точки M (рис. 54, *б*). Таким чином,

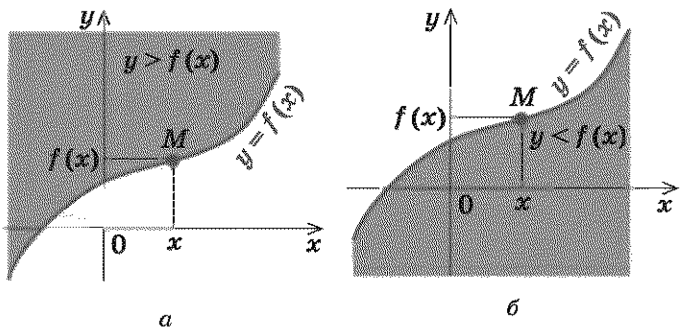


Рис. 54

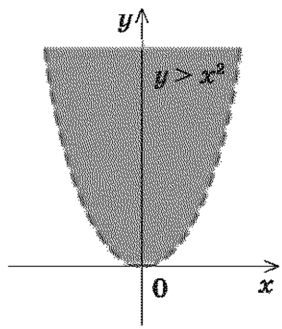


Рис. 55

графік нерівності $y > f(x)$ складається з усіх точок координатної площини, які знаходяться вище від графіка функції $y = f(x)$, а графік нерівності $y < f(x)$ складається з усіх точок координатної площини, які знаходяться нижче від графіка функції $y = f(x)$. ○

Наприклад, на рисунку 55 зображено графік нерівності $y > x^2$, а на рисунку 56 графік нерівності $y \leqslant x^2$. Оскільки точки графіка $y = x^2$ не належать графіку нерівності $y > x^2$, то на першому графіку парабола $y = x^2$ зображена штриховою лінією; але точки графіка $y = x^2$ належать графіку нерівності $y \leqslant x^2$, тому на другому графіку парабола $y = x^2$ зображена суцільною лінією.

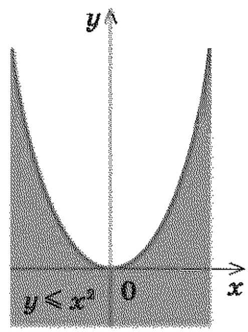


Рис. 56

Аналогічно, якщо на координатній площині є пряма $x = a$, то графіком нерівності $x > a$ будуть усі точки координатної площини, які розташовані праворуч від цієї прямої, а графіком нерівності $x < a$ будуть усі точки координатної площини, які розташовані ліворуч від цієї прямої.

Наприклад, на рисунку 57 зображено графік нерівності $x > 2$, а на рисунку 58 — графік нерівності $x \leqslant -1$.

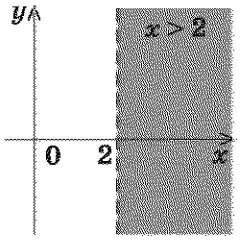


Рис. 57

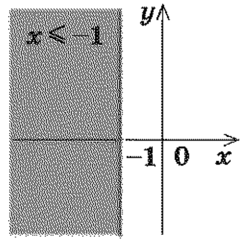
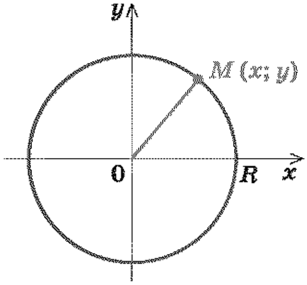


Рис. 58

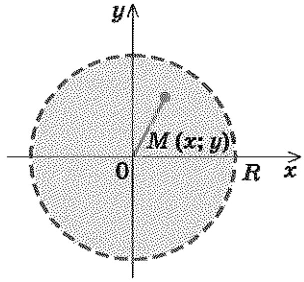
Зазначимо, що в тому випадку, коли на координатній площині є зображення кола $x^2 + y^2 = R^2$, то

графіком нерівності $x^2 + y^2 < R^2$ будуть усі точки координатної площини, які розташовані всередині кола, а графіком нерівності $x^2 + y^2 > R^2$ будуть всі точки координатної площини, які розташовані поза колом.

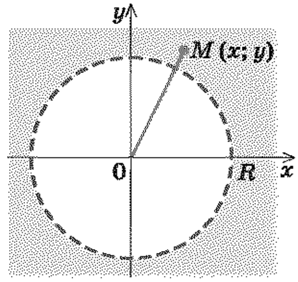
- Дійсно, якщо на координатній площині розглянути точку $M(x, y)$, то $OM^2 = x^2 + y^2$ (точка O — початок координат). Якщо $x^2 + y^2 = R^2$ (де $R > 0$), то $OM^2 = R^2$, отже, $OM = R$ — точка M лежить на колі радіуса R із центром у початку координат (рис. 59, *а*).
Якщо $x^2 + y^2 < R^2$, то $OM^2 < R^2$, отже, $OM < R$. Тобто нерівності $x^2 + y^2 < R^2$ задовольняють координати всіх точок (і тільки цих точок), які розташовані всередині круга, обмеженого колом радіуса R із центром у початку координат (рис. 59, *б*).



а



б



в

Рис. 59

Якщо $x^2 + y^2 > R^2$, то $OM^2 > R^2$, отже, $OM > R$. Тобто нерівності $x^2 + y^2 > R^2$ задовольняють координати всіх точок (і тільки цих точок), які знаходяться поза кругом, обмеженим колом радіуса R із центром у початку координат (рис. 59, *в*).

Аналогічно, якщо на площині є зображення кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, то графіком нерівності $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ будуть усі точки координатної площини, які розташовані всередині кола, а графіком нерівності $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$ будуть усі точки координатної площини, які розташовані поза колом. Наприклад, на рисунку 60 зображено графік нерівності $x^2 + y^2 > 9$, а на рисунку 61 — графік нерівності $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 16$. ○

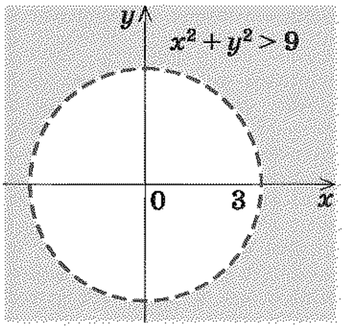


Рис. 60

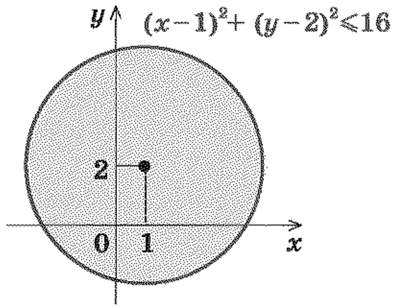


Рис. 61

3. Геометричні перетворення графіка рівняння $F(x; y) = 0$.

За означенням графік рівняння

$$F(x; y) = 0 \qquad (1)$$

складається з усіх точок $M(x_0; y_0)$ координатної площини, координати $(x_0; y_0)$ яких є розв'язками цього рівняння. Це означає, що при підстановці пари чисел $(x_0; y_0)$ у задане рівняння воно перетворюється на правильну числову рівність, отже, $F(x_0; y_0) = 0$ — правильна рівність.

Розглянемо точку $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$. Якщо координати цієї точки підставити в рівняння

$$F(x - a; y - b) = 0, \qquad (2)$$

то одержимо рівність $F(x_0; y_0) = 0$, яка є правильною. Тому координати точки M_1 є розв'язками рівняння (2), а отже, точка M_1 належить графіку рівняння $F(x - a; y - b) = 0$. Точку $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$ можна одержати з точки $M(x_0; y_0)$ паралельним перенесенням її на вектор $\overline{n}(a; b)$. Оскільки кожну точку M_1 графіка рівняння $F(x - a; y - b) = 0$ можна одержати з точки M графіка рівняння

$F(x; y) = 0$ паралельним перенесенням її на вектор $\overline{n}(a; b)$ (рис. 62), то і весь

графік рівняння $F(x - a; y - b) = 0$ можна одержати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ паралельним перенесенням його на вектор $\overline{n}(a; b)$. ○

● Для обґрунтування зв'язку між графіками $F(x; y) = 0$ і $F(|x|; y) = 0$ достатньо помітити, що при $x \geqslant 0$ рівняння $F(|x|; y) = 0$ збігається з рівнянням $F(x; y) = 0$, отже, збігаються і їхні графіки праворуч від осі Oy і на самій осі. Нехай точка $M(x_0; y_0)$ (де $x_0 \geqslant 0$) — одна із спільних точок цих графіків. Тоді $F(x_0; y_0) = 0$ — правильна рівність. Розглянемо точку $M_1(-x_0; y_0)$. Якщо координати цієї точки підставити в рівняння $F(|x|; y) = 0$ і врахувати, що $x_0 \geqslant 0$, то одержимо рівність $F(x_0; y_0) = 0$, яка є правильною. Тому координати точки M_1 є розв'язками рівняння $F(|x|; y) = 0$, а отже, точка M_1 належить графіку цього рівняння. Ураховуючи, що точки M і M_1 симетричні відносно осі Oy (рис. 63),

графік рівняння $F(|x|; y) = 0$ можна одержати із графіка рівняння $F(x; y) = 0$ так: частину графіка рівняння $F(x; y) = 0$ праворуч від осі Oy (і на самій осі) залишити без змін і цю саму частину відобразити симетрично відносно осі Oy. ○

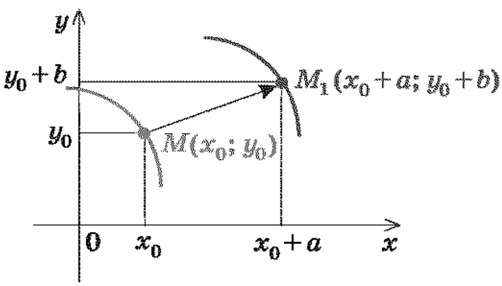


Рис. 62

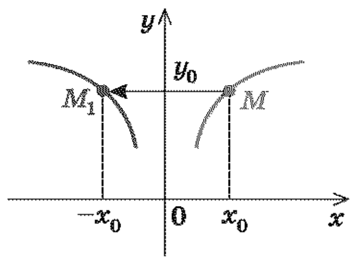


Рис. 63

Аналогічно можна обґрунтувати, що

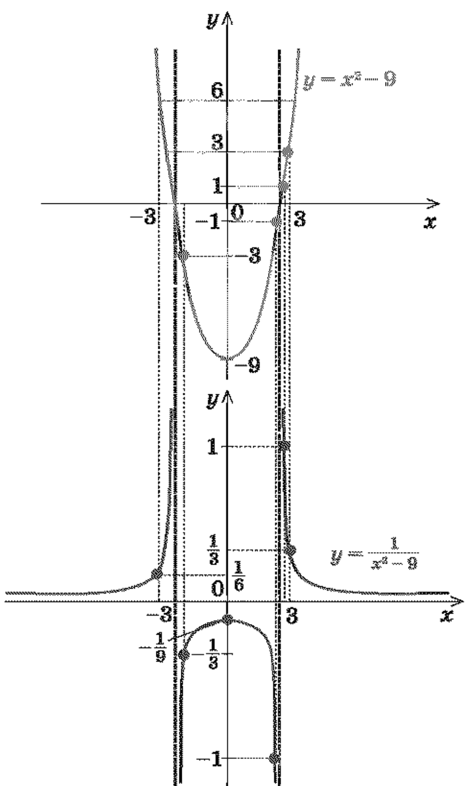
для побудови графіка рівняння $F(x; |y|) = 0$ частину графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вище від осі Ox (і на самій осі) потрібно залишити без змін і цю саму частину відобразити симетрично відносно осі Ox.

У таблиці 13 наведено найпростіші приклади використання геометричних перетворень графіків рівнянь. Указані співвідношення використовують у завданнях типу: побудувати графік рівняння чи нерівності або зобразити на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють заданому рівнянню (нерівності).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Побудуйте графік функції $y=\frac{1}{x^2-9}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $x^2-9=0$ при $x=\pm 3$. Тому область визначення заданої функції: $x^2-9\neq 0$, тобто $x\neq\pm 3$. ◁	Побудуємо дві системи координат так, щоб осі ординат у них були на одній прямий. У тих точках, де функція $f(x)=x^2-9$ дорівнює нулю ($x=\pm 3$), не існує графіка функції $y=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2-9}$. Тому проведемо через ці точки вертикальні прямі, що не перетинають графік функції $y=\frac{1}{f(x)}$. Потім для кожного значення x поділимо 1 на відповідне значення ординати $f(x)$ (використовуючи те, що ординати $f(x)$ відмічені на верхньому графіку). На рисунку червоною лінією зображено результат — графік функції $y=\frac{1}{x^2-9}$. (Для побудови цього графіка вибрано різний масштаб по осях Ox і Oy.)



Приклад 2 Покажіть штриховкою на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі $\begin{cases} x^2+y\leqslant 0, \\ x-y<2. \end{cases}$

Розв'язання	*Коментар*

► Задана система рівносильна системі

$$\begin{cases} y\leqslant -x^2, \\ y>x-2. \end{cases}$$

Зобразимо штриховкою графіки нерівностей системи (першої — вертикальною, другої — горизонтальною):

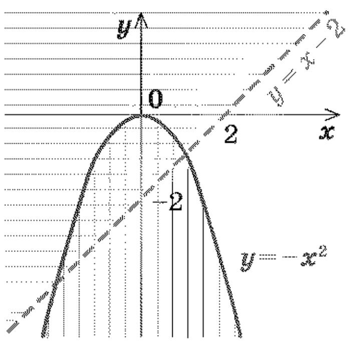


Рис. 64

Тоді множина точок, координати яких задовольняють системі, буде такою:

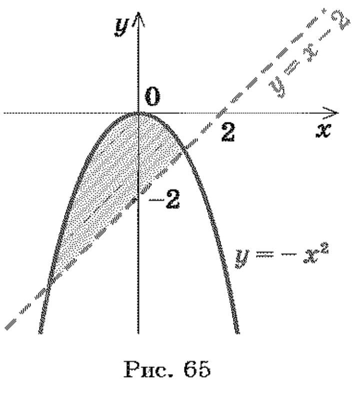


Рис. 65 ◁

Перепишемо задану систему так, щоб нам було зручно зображати графіки заданих нерівностей (тобто запишемо нерівності у вигляді $y > f(x)$ або $y < f(x)$). Множиною точок, координати яких задовольняють нерівності $y \leqslant -x^2$, є об'єднання параболи $y = -x^2$ і точок координатної площини, які розташовані нижче цієї параболи (на рис. 64 ця множина позначена вертикальною штриховкою). Множина точок, координати яких задовольняють нерівності $y > x - 2$, складається з точок координатної площини, які знаходяться вище прямої $y = x - 2$ (на рисунку ця множина позначена горизонтальною штриховкою).

Системі нерівностей задовольняють координати тих і тільки тих точок, які належать перетину множин точок, що задаються кожною з нерівностей заданої системи (на рисунку перетину множин відповідає та область, де штриховки наклалися одна на одну).

Зауважимо, що в подібних завданнях можна не виконувати проміжних рисунків, а відразу штрихувати шукану множину точок координатної площини (вище прямої $y = x - 2$ і нижче параболи $y = -x^2$ разом з тією частиною параболи, яка лежить вище прямої; рис. 65).

Приклад 3 Побудуйте графік рівняння $|x - y| + 2|x + y| = x + 6.$

Орієнтир

Для спрощення виразу з кількома модулями з двома змінними можна знайти нулі підмодульних виразів (тобто прирівняти їх до нуля) і розбити область визначення розглядуваного виразу на декілька частин, у кожній з яких всі модулі розкриваються однозначно.

Використовуючи цей орієнтир, одержуємо *план розв'язання* прикладу. Прирівняємо до нуля підмодульні вирази $x - y = 0$ (звідси $y = x$) і $x + y = 0$ (звідси $y = -x$). Прямі $y = x$ і $y = -x$ розбивають координатну площину на чотири області. У кожній із цих областей всі модулі розкриваються однозначно, і після перетворення одержаної рівності можна будувати відповідну частину графіка заданого рівняння.

Розв'язання

1. Область визначення: $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.
2. $x - y = 0$ при $y = x$; $x + y = 0$ при $y = -x$.
3. Прямі $y = x$ і $y = -x$ розбивають координатну площину на чотири частини, у кожній з яких позначено знаки першого і другого підмодульних виразів (рис. 66, *а*). (Будемо вважати, що кожна область береться разом із променями, які її обмежують.) Дійсно, якщо точки розташовані в області I або на її межі, то їхні координати задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ яку можна записати так: $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$ Тоді в області I перший підмодульний вираз є від'ємним, а другий — додатним, і тому задане рівняння має вигляд: $-(x - y) + 2(x + y) = x + 6$. Звідси $y = 2$. Будуємо частину графіка цієї функції, що розміщується в області I (рис. 66, *б*).

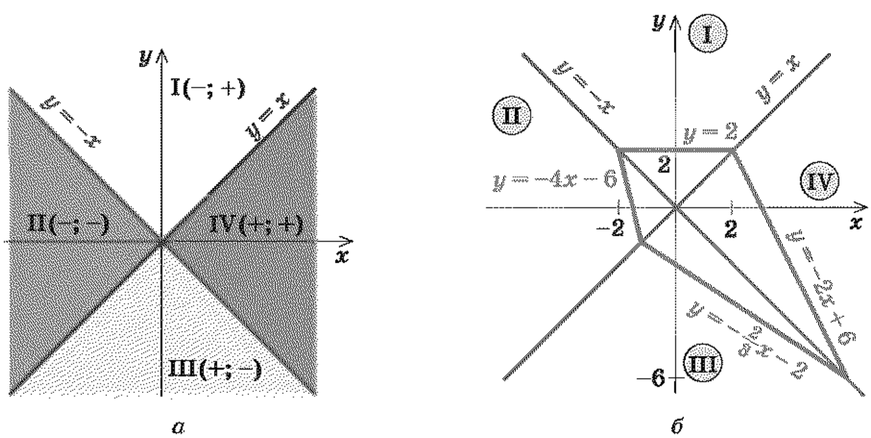


Рис. 66

Аналогічно для точок області II: $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 0. \end{cases}$

Отже, в області II задане рівняння має вигляд: $-(x - y) - 2(x + y) = x + 6$. Звідси $y = -4x - 6$. Будуємо частину графіка цієї функції, що розташовується в області II.

Якщо точки розташовані в області III: $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 0, \end{cases}$ із заданого рівняння одержуємо $(x - y) - 2(x + y) = x + 6$. Звідси $y = -\frac{2}{3}x - 2$.

Якщо точки лежать в області IV: $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y \geqslant 0, \end{cases}$ із заданого рівняння маємо $(x - y) + 2(x + y) = x + 6$. Звідси $y = -2x + 6$. Остаточний вигляд графіка рівняння наведено на рисунку 66, *б*. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна, маючи графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, побудувати ескіз графіка функції $y = f(x) + g(x)$ та функції $y = \frac{1}{f(x)}$.
2. Що називається графіком рівняння з двома змінними? Що називається графіком нерівності з двома змінними? Наведіть приклади.
3. Як, знаючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік нерівності $y > f(x)$ та нерівності $y < f(x)$? Наведіть приклади.
4. Як, знаючи графік рівняння $F(x; y) = 0$, можна побудувати графік рівняння $F(x - a; y - b) = 0$ та рівнянь $F(|x|; y) = 0$ і $F(x; |y|) = 0$? Наведіть приклади.
5. Обґрунтуйте правила геометричних перетворень графіка рівняння $F(x; y) = 0$ для одержання графіків рівнянь $F(x - a; y - b) = 0$, $F(|x|; y) = 0$, $F(x; |y|) = 0$.
6. Поясніть на прикладі, як можна знайти на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі нерівностей із двома змінними.

Вправи

1. Побудуйте ескіз графіка функції:

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = x - \frac{1}{x}$; 3) $y = x^3 + \frac{1}{x}$; 4) $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

2. Побудуйте графік рівняння:
   1) $|y| = x - 2$; 2) $|y| = x^2 - x$; 3) $|x| = -y^2$;
   4) $|x| + |y| = 2$; 5) $|x| - |y| = 2$.
3. Побудуйте графік нерівності:
   1) $y > x^2 - 3$; 2) $y < \frac{1}{x}$; 3) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;
   4) $(x-2)^2 + (y+3)^2 > 4$.
4. Покажіть штриховкою на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі:
   1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ y > x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x^2, \\ y < -x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x, \\ y \geqslant x, \\ y \leqslant 2x + 4. \end{cases}$
5. Побудуйте графік рівняння:
   1) $|x - y| - |x + y| = y + 3$;
   2) $|x - 2y| + |2x - y| = 2 - y$;
   3) $|3x + y| + |x - y| = 4$.

§ 6 МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

При розв'язуванні математичних завдань інколи виникає потреба обґрунтувати, що певна властивість виконується для довільного натурального числа n.

Перевірити задану властивість для кожного натурального числа ми не можемо — їх кількість нескінченна. Доводиться міркувати так: 1) я можу перевірити, що ця властивість виконується при $n = 1$; 2) я можу показати, що для кожного наступного значення n вона теж виконується, отже, властивість буде виконуватись для кожного наступного числа починаючи з одиниці, тобто для всіх натуральних чисел.

Такий спосіб міркувань при доведенні математичних тверджень називається *методом математичної індукції*. Він є одним з універсальних методів доведення математичних тверджень, у яких містяться слова «для довільного натурального n» (можливо, не сформульовані явно). Доведення за допомогою цього методу завжди складається з двох етапів:

1) *початок індукції*: перевіряють, чи виконується розглядуване твердження при $n = 1$;
2) *індуктивний перехід*: доводять, що коли задане твердження виконується для k, то воно виконується і для $k + 1$.

Таким чином, почавши з $n = 1$, ми на основі доведеного індуктивного переходу одержуємо справедливість сформульованого твердження для $n = 2, 3, \ldots$, тобто для будь-якого натурального n.

На практиці цей метод зручно використовувати за схемою, наведеною в таблиці 14.

Таблиця 14

Схема доведення тверджень за допомогою методу математичної індукції	Приклад
	Доведіть, що для довільного натурального n: $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$ ▶ Для зручності запису позначимо $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1).$
1. *Перевіряємо*, чи виконується дане твердження при $n = 1$ (іноді починають з $n = p$).	1. При $n = 1$ рівність виконується: $1\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$, тобто $2 = 2$.
2. *Припускаємо*, що задане твердження справедливе при $n = k$, де $k \geqslant 1$ (другий варіант — при $n \leqslant k$).	2. Припускаємо, що задана рівність є правильною при $n = k$, де $k \geqslant 1$, тобто $S_k = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k+1) =$ $=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$ (1)
3. *Доводимо* (спираючись на припущення) справедливість нашого твердження і при $n = k + 1$.	3. Доведемо, що рівність виконується і при $n = k + 1$, тобто доведемо, що $S_{k+1} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k+1) +$ $+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$ Ураховуючи, що $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2),$ і підставляючи S_k з рівності (1), одержуємо $S_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=$ $=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3),$ що й потрібно було довести.
4. *Робимо висновок*, що дане твердження справедливе для будь-якого натурального числа n (для будь-якого $n \geqslant p$)	4. Отже, задана рівність правильна для будь-якого натурального n. ◁

Приклади розв'язування завдань

Приклад 1 Доведіть, що $10^n - 9n - 1$ ділиться на 81 при будь-якому натуральному n.

Коментар

Оскільки твердження необхідно довести для будь-якого натурального n, то використаємо метод математичної індукції за схемою, наведеною в таблиці 14. Виконуючи індуктивний перехід (від $n = k$ до $n = k + 1$), подамо вираз, який одержуємо при $n = k + 1$, як суму двох виразів: того, що одержали при $n = k$, і ще одного виразу, який ділиться на 81.

Розв'язання

1. ▶ Перевіряємо, чи виконується задане твердження при $n = 1$. Якщо $n = 1$, заданий вираз дорівнює 0, тобто ділиться на 81. Отже, задана властивість виконується при $n = 1$.
2. Припускаємо, що задане твердження виконується при $n = k$, тобто що $10^k - 9k - 1$ ділиться на 81.
3. Доведемо, що задане твердження виконується і при $n = k + 1$, тобто що $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$ ділиться на 81.
   $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1 = 10^k \cdot 10 - 9k - 9 - 1 = 10(10^k - 9k - 1) + 81k.$
   Вираз у дужках — це значення заданого виразу при $n = k$, яке за припущенням індукції ділиться на 81. Отже, кожний доданок останньої суми ділиться на 81, тоді і вся сума, тобто $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$, ділиться на 81. Таким чином, задане твердження виконується і при $n = k + 1$.
4. Отже, вираз $10^k - 9n - 1$ ділиться на 81 при будь-якому натуральному n. ◁

Приклад 2 Доведіть, що $2^n > 2n + 1$, якщо $n \geqslant 3$, $n \in N$.

Коментар

Оскільки твердження повинно виконуватися починаючи з $n = 3$, то перевірку проводимо саме для цього числа. Записуючи припущення індукції, зручно використати, що за означенням поняття «більше» $a > b$ тоді і тільки тоді, коли $a - b > 0$. Доводячи нерівність при $n = k + 1$, знову використовуємо те саме означення і доводимо, що різниця між лівою і правою частинами відповідної нерівності додатна.

Розв'язання

1. При $n = 3$ одержуємо $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, тобто $8 > 7$ — правильна нерівність. Отже, при $n = 3$ задана нерівність виконується.
2. Припускаємо, що задана нерівність виконується при $n = k$ (де $k \geqslant 3$):
   $$2^k > 2k + 1, \text{ тобто } 2^k - 2k - 1 > 0. \qquad (1)$$
3. Доведемо, що задана нерівність виконується і при $n = k + 1$, тобто доведемо, що $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.
   Розглянемо різницю
   $$2^{k+1} - (2(k + 1) + 1) = 2^k \cdot 2 - 2k - 3 = 2(2^k - 2k - 1) + 2k - 1 > 0$$
   (оскільки вираз у дужках за нерівністю (1) додатний і при $k \geqslant 3$ вираз $2k - 1$ теж додатний). Отже, $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$, тобто задана нерівність виконується і при $n = k + 1$.
4. Таким чином, задана нерівність виконується при всіх натуральних $n \geqslant 3$.

Вправи

Доведіть за допомогою методу математичної індукції (1–12).

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ при всіх натуральних n ($n \in N$).
2. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$, де $n \in N$.
3. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, де $n \in N$.
4. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$, де $n \in N$.
5. Добуток $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ позначається $n!$ (читається: «n факторіал»). Доведіть, що $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$, де $n \in N$.
6. $4^n > 7n - 5$, якщо $n \in N$.
7. $2^n > n^3$, якщо $n \geqslant 10$.
8. Доведіть, що $9^n - 8n - 1$ ділиться на 16 при будь-якому натуральному n.
9. Доведіть, що $5^n + 2\cdot 3^n - 3$ ділиться на 8 при будь-якому натуральному n.
10. Доведіть, що $7^n + 3^n - 2$ ділиться на 8 при будь-якому натуральному n.
11. Доведіть, що $2^{3n+3} - 7n + 41$ ділиться на 49 при будь-якому натуральному n.
12. Доведіть, що коли $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, то $a_n = 3^n - 1$, де $n \in N$.

§ 7 МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ДІЇ НАД НИМИ

7.1. Означення многочленів від однієї змінної та їх тотожна рівність

Розглянемо одночлен і многочлен, які залежать тільки від однієї змінної, наприклад від змінної x.

За означенням одночлена числа і букви (у нашому випадку одна буква — x) у ньому пов'язані тільки двома діями — множенням і піднесенням до натурального степеня. Якщо в цьому одночлені добуток усіх чисел записати перед буквою, а добуток усіх степенів букви записати як цілий невід'ємний степінь цієї букви (тобто записати одночлен у стандартному вигляді), то одержимо вираз виду ax^n, де a — деяке число. Тому *одночлен від однієї змінної x — це вираз виду ax^n, де a — деяке число, n — ціле невід'ємне число*. Якщо $a \neq 0$, то показник степеня n змінної x називається *степенем одночлена*. Наприклад, $25x^6$ — одночлен шостого степеня, $\frac{2}{3}x^2$ — одночлен другого степеня. Якщо одночлен є числом (не рівним нулю), то його степінь вважають рівним нулю. *Для* *одночлена, який заданий числом* 0, *поняття степеня не означають* (оскільки $0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 \ldots$).

За означенням многочлен від однієї змінної x — це сума одночленів від однієї змінної x. Тому

многочленом від однієї змінної x називається вираз виду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

де коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ ***— деякі числа.***

Якщо $a_n \neq 0$, то цей многочлен називають *многочленом n-го степеня* від змінної x. При цьому член $a_n x^n$ називають *старшим членом многочлена* $f(x)$, число a_n — *коефіцієнтом при старшому члені*, а член a_0 — *вільним членом*. Наприклад, $5x^3 - 2x + 1$ — многочлен третього степеня, у якого вільний член дорівнює 1, а коефіцієнт при старшому члені дорівнює 5.

Зазначимо, що іноді нумерацію коефіцієнтів многочлена починають з початку запису виразу (1), і тоді загальний вид многочлена $f(x)$ записують так:

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n,$$

де $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — деякі числа.

Теорема 1. ***Одночлени*** ax^n, ***де*** $a \neq 0$, ***та*** bx^m, ***де*** $b \neq 0$, ***тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли*** $a = b$ ***і*** $n = m$.

Одночлен ax^n ***тотожно рівний нулю тоді і тільки тоді, коли*** $a = 0$.

Оскільки рівність одночленів

$$ax^n = bx^m \qquad (2)$$

виконується при всіх значеннях x (за умовою ці одночлени тотожно рівні), то, підставляючи в цю рівність $x = 1$, отримуємо $a = b$. Скорочуючи обидві частини рівності (2) на a (де $a \neq 0$ за умовою), одержуємо $x^n = x^m$. При $x = 2$ із цієї рівності маємо: $2^n = 2^m$. Оскільки $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ разів}}$, а $2^m = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{m \text{ разів}}$, то рівність $2^n = 2^m$ можлива лише тоді, коли $n = m$. Отже, з тотожної рівності $ax^n = bx^m$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) отримуємо, що $a = b$ і $n = m$.

Якщо відомо, що $ax^n = 0$ для всіх x, то при $x = 1$ одержуємо $a = 0$. Тому одночлен ax^n тотожно рівний нулю при $a = 0$ (тоді $ax^n = 0 \cdot x^n \equiv 0$[1]). ○

Надалі будь-який одночлен виду $0 \cdot x^n$ замінюватимемо на 0.

Теорема 2. ***Якщо многочлен*** $f(x)$ ***тотожно рівний нулю*** (*тобто набуває нульових значень при всіх значеннях x*), ***то всі його коефіцієнти рівні нулю.***

[1] Значком $\equiv$ позначено тотожну рівність многочленів.

Для доведення використовуємо метод математичної індукції.
Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$.
При $n = 0$ маємо $f(x) = a_0 \equiv 0$, тому $a_0 = 0$. Тобто в цьому випадку твердження теореми виконується.
Припустимо, що при $n = k$ це твердження також виконується: якщо многочлен $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$, то $a_k = a_{k-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.
Доведемо, що задане твердження виконується й при $n = k + 1$. Нехай
$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0. \qquad (3)$$
Оскільки рівність (3) виконується при всіх значеннях x, то, підставляючи в цю рівність $x = 0$, одержуємо, що $a_0 = 0$. Тоді рівність (3) перетворюється на таку рівність: $a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x \equiv 0$. Винесемо x у лівій частині цієї рівності за дужки та одержимо
$$x\,(a_{k+1}x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1) \equiv 0. \qquad (4)$$
Рівність (4) повинна виконуватися при всіх значеннях x. Для того щоб вона виконувалася при $x \neq 0$, повинна виконуватися тотожність
$$a_{k+1}x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1 \equiv 0.$$
У лівій частині цієї тотожності стоїть многочлен із степенями змінної від x^0 до x^k. Тоді за припущенням індукції всі його коефіцієнти дорівнюють нулю: $a_{k+1} = a_k = \ldots = a_1 = 0$. Але ми довели також, що $a_0 = 0$, тому наше твердження виконується і при $n = k + 1$. Отже, твердження теореми справедливе для будь-якого цілого невід'ємного n, тобто для всіх многочленів. ○

Многочлен, у якого всі коефіцієнти рівні нулю, зазвичай називають *нульовим многочленом*, або *нуль-многочленом*, і позначають 0 (x) або просто 0 (оскільки 0 (x) = 0).

Теорема 3. ***Якщо два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тотожно рівні, то вони збігаються (тобто їхні степені однакові й коефіцієнти при однакових степенях рівні).***

Нехай многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, а многочлен $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$. Розглянемо многочлен $f(x) - g(x)$. Оскільки многочлени $f(x)$ і $g(x)$ за умовою тотожно рівні, то многочлен $f(x) - g(x)$ тотожно дорівнює 0. Отже, усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.
Але $f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\,x + (a_2 - b_2)\,x^2 + \ldots$.
Тоді $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, ... Звідси $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... Як бачимо, якщо припустити, що в якогось із двох заданих многочленів степінь вищий, ніж у другого многочлена (наприклад, n більше m), то коефіцієнти різниці дорівнюватимуть нулю. Тому, починаючи з $(m + 1)$-го номера, усі коефіцієнти a_i також дорівнюватимуть нулю. Отже, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ дійсно мають однаковий степінь і відповідно рівні коефіцієнти при однакових степенях. ○

Теорема 3 є основою так званого *методу невизначених коефіцієнтів*. Покажемо його застосування на такому прикладі.

Приклад Доведіть, що $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$ є повним квадратом.

▶ Заданий многочлен є многочленом четвертого степеня, тому він може бути повним квадратом тільки многочлена другого степеня. Многочлен другого степеня має вигляд $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Одержуємо тотожність:

$$(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 = (ax^2 + bx + c)^2. \qquad (5)$$

Розкриваючи дужки в лівій і правій частинах цієї тотожності та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему рівностей. Цей етап зручно оформляти в такому вигляді:

x^4	$1 = a^2$
x^3	$2 + 4 + 6 + 8 = 2ab$
x^2	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = b^2 + 2ac$
x^1	$2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 8 = 2bc$
x^0	$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 + 16 = c^2$

З першої рівності одержуємо $a = 1$ або $a = -1$.

При $a = 1$ із другої рівності маємо $b = 10$, а з третьої — $c = 20$. Як бачимо, при цих значеннях a, b і c останні дві рівності також виконуються. Отже, тотожність (5) виконується при $a = 1$, $b = 10$, $c = 20$ (аналогічно можна також одержати $a = -1$, $b = -10$, $c = -20$).

Таким чином, $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 = (x^2 + 10x + 20)^2$. ◁

Вправи

1. Знаючи, що многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тотожно рівні, знайдіть значення коефіцієнтів a, b, c, d:
   1) $f(x) = 2x^2 - (3 - a)x + b$, $g(x) = cx^3 + 2dx^2 + x + 5$;
   2) $f(x) = (a + 1)x^3 + 2$, $g(x) = 3x^3 + bx^2 + (c - 1)x + d$.
2. Знайдіть такі числа a, b, c, щоб задана рівність $(x^2 - 1)a + b(x - 2) + c(x + 2) = 2$ виконувалася при будь-яких значеннях x.
3. Доведіть тотожність:
   1) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^6 - 1$;
   2) $1 + x^4 = (1 + x\sqrt{2} + x^2)(1 - x\sqrt{2} + x^2)$.
4. Доведіть, що заданий вираз є повним квадратом:
   1) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$;
   2) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$.

5. Знайдіть такі a і b, щоб при будь-яких значеннях x виконувалася рівність
$$3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x + 2 = (3x^2 + ax + 1)(x^2 + x + b).$$

6. Запишіть алгебраїчний дріб $\frac{2}{15x^2 + x - 2}$ як суму двох алгебраїчних дробів виду $\frac{a}{3x-1}$ і $\frac{b}{5x+2}$.

7.2. Дії над многочленами. Ділення многочлена на многочлен з остачею

Додавання і множення многочленів від однієї змінної виконують за допомогою відомих правил додавання і множення многочленів. У результаті виконання дій додавання або множення над многочленами від однієї змінної завжди одержують многочлен від тієї самої змінної.

З означення добутку двох многочленів випливає, що *старший член добутку двох многочленів дорівнює добутку старших членів множників, а вільний член добутку дорівнює добутку вільних членів множників. Звідси одержуємо, що степінь добутку двох многочленів дорівнює сумі степенів множників.*

При додаванні многочленів одного степеня одержують многочлен цього самого степеня, хоча іноді можна одержати многочлен меншого степеня.

Наприклад, $2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 + (-2x^3 + 5x^2 + x + 5) = 4x + 6$.

При додаванні многочленів різних степенів завжди одержуємо многочлен, степінь якого дорівнює більшому степеню доданку.

Наприклад, $(3x^3 - 5x + 7) + (x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + x^2 - 3x + 8$.

Ділення многочлена на многочлен означається аналогічно діленню цілих чисел. Нагадаємо, що ціле число a ділиться на ціле число b ($b \neq 0$), якщо існує таке ціле число q, що $a = b \cdot q$.

Означення. Многочлен $A(x)$ ділиться на многочлен $B(x)$ (де $B(x)$ — ненульовий многочлен), якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що
$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

Як і для цілих чисел, операція ділення многочлена на многочлен виконується не завжди, тому в множині многочленів уводять операцію *ділення з остачею*. Кажуть, що

многочлен $A(x)$ ділиться на многочлен $B(x)$ (де $B(x)$ — ненульовий многочлен) з остачею, якщо існує така пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$, що $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, причому степінь остачі $R(x)$ менший за степінь дільника $B(x)$. (Зазначимо, що в цьому випадку многочлен $Q(x)$ називається *неповною часткою*.)

Наприклад, оскільки $x^3 - 5x + 2 = (x^2 - 5)\ x + 2$, то при діленні многочлена $x^3 - 5x + 2$ на многочлен $x^2 - 5$ одержуємо неповну частку x і остачу 2.

Іноді ділення многочлена на многочлен, як і ділення багатозначних чисел, зручно виконувати «куточком», користуючись таким алгоритмом.

Приклад Розділимо многочлен $A\ (x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20$ на многочлен $B\ (x) = x^2 - 2x + 3$.

▶
$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
x^4 - 2x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 - 3x - 8 \\ \cline{1-1}
-3x^3 - 2x^2 + 8x - 20 & \\
-3x^3 + 6x^2 - 9x \qquad & \\ \cline{1-1}
-8x^2 + 17x - 20 & \\
-8x^2 + 16x - 24 & \\ \cline{1-1}
x + 4 &
\end{array}$$
◁

Доведемо, що одержаний результат дійсно є результатом ділення $A\ (x)$ на $B\ (x)$ з остачею.

Якщо позначити результат виконання першого кроку алгоритму через $f_1\ (x)$, другого кроку — через $f_2\ (x)$, третього — через $f_3\ (x)$, то операцію ділення, яку виконали вище, можна записати у вигляді системи рівностей:

$$f_1\ (x) = A\ (x) - x^2 \cdot B\ (x); \qquad (1)$$

$$f_2\ (x) = f_1\ (x) - (-3x) \cdot B\ (x); \qquad (2)$$

$$f_3\ (x) = f_2\ (x) - (-8) \cdot B\ (x). \qquad (3)$$

Додамо почленно рівності (1), (2), (3) та отримаємо

$$A\ (x) = (x^2 - 3x - 8)\ B\ (x) + f_3\ (x). \qquad (4)$$

Ураховуючи, що степінь $f_3\ (x) = x + 4$ менший за степінь дільника $B\ (x) = x^2 - 2x + 3$, позначимо $f_3\ (x) = R\ (x)$ (остача), а $x^2 - 3x - 8 = Q\ (x)$ (неповна частка). Тоді з рівності (4) маємо: $A\ (x) = B\ (x) \cdot Q\ (x) + R\ (x)$, тобто $x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 = (x^2 - 2x + 3)\ (x^2 - 3x - 8) + x + 4$, а це й означає, що ми розділили $A\ (x)$ на $B\ (x)$ з остачею.

Очевидно, що наведене обґрунтування можна провести для будь-якої пари многочленів $A\ (x)$ і $B\ (x)$ у випадку їх ділення стовпчиком. Тому описаний вище алгоритм дозволяє для довільних діленого $A\ (x)$ і дільника $B\ (x)$ (де $B\ (x)$ — не нульовий многочлен) знайти неповну частку $Q\ (x)$ та остачу $R\ (x)$.

Зазначимо, що у випадку, коли степінь діленого $A\ (x)$ менший за степінь дільника $B\ (x)$, вважають, що неповна частка $Q\ (x) = 0$, а остача $R\ (x) = A\ (x)$.

Вправи

1. Виконайте ділення многочлена на многочлен:
   1) $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ на $x - 2$; 2) $x^{10} + 1$ на $x^2 + 1$;
   3) $x^5 + 3x^3 + 8x - 6$ на $x^2 + 2x + 3$.
2. Виконайте ділення многочлена на многочлен з остачею:
   1) $4x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ на $x^2 + x + 2$;
   2) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ на $x^2 - x - 2$.
3. При яких значеннях a і b многочлен $A(x)$ ділиться без остачі на многочлен $B(x)$?
   1) $A(x) = x^3 + ax + b$, $B(x) = x^2 + 5x + 7$;
   2) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 - 4$;
   3) $A(x) = x^4 - x^3 + x^2 - ax + b$, $B(x) = x^2 - x + 2$.
4. Знайдіть неповну частку і остачу при діленні многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$ методом невизначених коефіцієнтів:
   1) $A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $B(x) = x^2 - 1$;
   2) $A(x) = x^3 - 19x - 30$, $B(x) = x^2 + 1$.

7.3. Теорема Безу. Корені многочлена. Формули Вієта

Розглянемо ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x - a)$. Оскільки степінь дільника дорівнює 1, то степінь остачі, яку ми одержимо, повинен бути меншим за 1, тобто в цьому випадку остачею буде деяке число R. Таким чином, якщо розділити многочлен $f(x)$ на двочлен $(x - a)$, то одержимо

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Ця рівність виконується тотожно, тобто при будь-якому значенні x. При $x = a$ маємо: $f(a) = R$. Одержаний результат називають теоремою Безу[1].

Теорема 1 (теорема Безу). ***Остача від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x - a)$ дорівнює $f(a)$ (тобто значенню многочлена при $x = a$).***

Приклад 1 Доведіть, що $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ ділиться без остачі на $x - 1$.

▶ Підставивши в $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ замість x значення 1, одержуємо: $f(1) = 0$. Отже, остача від ділення $f(x)$ на $(x - 1)$ дорівнює 0, тобто $f(x)$ ділиться на $(x - 1)$ без остачі. ◁

Означення. *Число α називається коренем многочлена $f(x)$, якщо $f(\alpha) = 0$.*

---

[1] Безу Етьєн (1730–1783) — французький математик, який зробив значний внесок у розвиток теорії алгебраїчних рівнянь.

Якщо многочлен $f(x)$ ділиться на $(x-\alpha)$, то α — корінь цього многочлена.

Дійсно, якщо $f(x)$ ділиться на $(x-\alpha)$, то $f(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)$ і тому $f(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot Q(\alpha)=0$. Отже, α — корінь многочлена $f(x)$. ○

Справедливе і зворотне твердження. Воно є *наслідком теореми Безу*.

Теорема 2. ***Якщо число α є коренем многочлена $f(x)$, то цей многочлен ділиться на двочлен $(x-\alpha)$ без остачі.***

За теоремою Безу остача від ділення $f(x)$ на $(x-\alpha)$ дорівнює $f(\alpha)$. Але за умовою α — корінь $f(x)$, отже, $f(\alpha)=0$. ○

Узагальненням теореми 2 є таке твердження.

Теорема 3. ***Якщо многочлен $f(x)$ має попарно різні корені $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, то він ділиться без остачі на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_n)$.***

Для доведення використовуємо метод математичної індукції.

При $n=1$ твердження доведено в теоремі 2.

Припустимо, що твердження справедливе при $n=k$. Тобто, якщо $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ — попарно різні корені многочлена $f(x)$, то він ділиться на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_k)$. Тоді

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_k)\cdot Q(x). \qquad (1)$$

Доведемо, що твердження теореми справедливе й при $n=k+1$. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}$ — попарно різні корені многочлена $f(x)$. Оскільки α_{k+1} — корінь $f(x)$, то $f(\alpha_{k+1})=0$. Беручи до уваги рівність (1), яка виконується згідно з припущенням індукції, одержуємо:

$$f(\alpha_{k+1})=(\alpha_{k+1}-\alpha_1)(\alpha_{k+1}-\alpha_2)\cdot...\cdot(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\cdot Q(\alpha_{k+1})=0.$$

За умовою всі корені $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}$ різні, тому жодне із чисел $\alpha_{k+1}-\alpha_1, \alpha_{k+1}-\alpha_2, ..., \alpha_{k+1}-\alpha_k$ не дорівнює нулю. Тоді $Q(\alpha_{k+1})=0$. Отже, α_{k+1} — корінь многочлена $Q(x)$. За теоремою 2 многочлен $Q(x)$ ділиться на $(x-\alpha_{k+1})$, тобто $Q(x)=(x-\alpha_{k+1})\cdot Q_1(x)$ і з рівності (1) маємо

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})\cdot Q_1(x).$$

Це означає, що $f(x)$ ділиться на добуток

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1}),$$

тобто теорема доведена й при $n=k+1$.

Отже, теорема справедлива для будь-якого натурального n. ○

Наслідок. ***Многочлен степеня n має не більше n різних коренів.***

Припустимо, що многочлен n-го степеня має $(n+1)$ різних коренів: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$. Тоді $f(x)$ ділиться на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_{n+1})$ — многочлен степеня $(n+1)$, але це неможливо. Тому многочлен n-го степеня не може мати більше ніж n коренів. ○

Нехай тепер многочлен n-го степеня $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ має n різних коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тоді цей многочлен ділиться без остачі на добуток $(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$. Цей добуток є многочленом того самого n-го степеня. Отже, у результаті ділення можна одержати тільки многочлен нульового степеня, тобто число. Таким чином,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n). \quad (2)$$

Якщо розкрити дужки в правій частині рівності (2) і прирівняти коефіцієнти при старших степенях, то одержимо, що $b = a_n$, тобто

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)} \quad (3)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, що стоять в тотожності (3) зліва і справа, одержуємо співвідношення між коефіцієнтами рівняння та його коренями, які називають **формулами Вієта**:

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}; \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{gathered}} \quad (4)$$

Наприклад, при $n = 2$ маємо:

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2},}$$

а при $n = 3$:

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3}; \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_1}{a_3}; \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{gathered}} \quad (5)$$

Виконання таких рівностей є необхідною і достатньою умовою того, щоб числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ були коренями многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \ (a_n \neq 0).$$

Формули (3) і (4) справедливі не тільки для випадку, коли всі корені многочлена $f(x)$ різні. Введемо *поняття кратного кореня многочлена.*

Якщо многочлен $f(x)$ ділиться без остачі на $(x - \alpha)^k$, але не ділиться без остачі на $(x - \alpha)^{k+1}$, то кажуть, що число α є корінь кратності k многочлена $f(x)$.

Наприклад, якщо добуток $(x + 2)^3 (x - 1)^2 (x + 3)$ записати у вигляді многочлена, то для цього многочлена число (-2) є коренем кратності 3, число 1 є коренем кратності 2, а число (-3) є коренем кратності 1.

Використовуючи формули Вієта у випадку кратних коренів, необхідно кожен корінь записати таке число разів, яке дорівнює його кратності.

Приклад 2 Перевірте справедливість формул Вієта для многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

▶ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x + 2) - 4(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)^2$. Тому $f(x)$ має корені: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -2$ (оскільки -2 — корінь кратності 2).

Перевіримо справедливість формул (5).

У нашому випадку: $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = -4$, $a_0 = -8$. Тоді

$$2+(-2)+(-2)=-\frac{2}{1};\quad 2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)=\frac{-4}{1};\quad 2\cdot(-2)\cdot(-2)=-\frac{-8}{1}.$$

Як бачимо, усі рівності виконуються, тому формули Вієта є справедливими для даного многочлена. ◁

Приклад 3 Складіть квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів рівняння $x^2 - 8x + 4 = 0$.

▶ Позначимо корені рівняння $x^2 - 8x + 4 = 0$ через x_1 і x_2. Тоді коренями шуканого рівняння повинні бути числа $\alpha_1 = x_1^2$ і $\alpha_2 = x_2^2$. Отже, це рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$,

де $p=-(\alpha_1+\alpha_2)=-\left(x_1^2+x_2^2\right)=-\left(\left(x_1x_2\right)^2-2x_1x_2\right)$, $q=\alpha_1\alpha_2=x_1^2x_2^2=\left(x_1x_2\right)^2$.

За формулами Вієта маємо: $x_1 + x_2 = 8$ і $x_1x_2 = 4$. Звідси знаходимо, що

$$q = (x_1x_2)^2 = 4^2 = 16, \text{ а } p=-\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)=-(8^2-2\cdot 4)=-56.$$

Таким чином, шукане рівняння має вигляд $x^2 - 56x + 16 = 0$. ◁

Вправи

1. Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ на $x + 2$.
2. Знайдіть коефіцієнт a, знаючи, що остача від ділення многочлена $x^3 - ax^2 + 5x - 3$ на $x - 1$ дорівнює 6.

3. Многочлен $f(x)$ при діленні на $x - 1$ має остачу 4, а при діленні на $x - 3$ — остачу 6. Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на $x^2 - 4x + 3$.
4. При яких значеннях a і b многочлен $x^4 + 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ ділиться без остачі на $x + 2$, а при діленні на $x - 1$ має остачу, яка дорівнює 3?
5. Остача від ділення многочлена $f(x)$ на $3x^2 - 5x + 2$ дорівнює $7x + 1$. Знайдіть остачу від ділення цього многочлена на двочлени $x - 1$ і $3x - 2$.
6. Запишіть формули Вієта при $n = 4$.
7. Складіть кубічний многочлен, який має корені 5, -2, 1 і коефіцієнт при старшому члені -2. Розв'яжіть задачу двома способами.
8. При яких значеннях a сума квадратів коренів тричлена $x^2 - (a + 2)x + 3a$ дорівнює 12?
9. Яку кратність має корінь 2 для многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?
10. Складіть кубічний многочлен, який має корінь 3 кратності 2 і корінь (-1), а коефіцієнт при старшому члені 2.
11. Знайдіть такі a і b, щоб число 3 було коренем не менш ніж другої кратності для многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$.
12. Складіть квадратне рівняння, корені якого протилежні кореням рівняння $x^2 - 5x + 1 = 0$.
13. Складіть квадратне рівняння, корені якого обернені до коренів рівняння $2x^2 - 5x + 1 = 0$.
14. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів рівняння $x^2 + 6x + 3 = 0$.

7.4. Схема Горнера

Ділити многочлен $f(x)$ на двочлен $(x - a)$ іноді зручно за допомогою спеціальної схеми, яку називають *схемою Горнера*.

Нехай многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ потрібно розділити на двочлен $(x - a)$. У результаті ділення многочлена n-го степеня на многочлен першого степеня одержимо деякий многочлен $Q(x)$ $(n - 1)$-го степеня (тобто $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, де $b_0 \neq 0$) і остачу R. Тоді $f(x) = (x - a)\cdot Q(x) + R$, тобто

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x - a)\cdot(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R.$$

Оскільки ліва і права частини тотожно рівні, то перемножимо многочлени, які стоять справа, і прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях x:

$$\begin{array}{l|l}
x^n & a_0 = b_0 \\
x^{n-1} & a_1 = b_1 - ab_0 \\
x^{n-2} & a_2 = b_2 - ab_1 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^1 & a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2} \\
x^0 & a_n = R - ab_{n-1}
\end{array}$$

Знайдемо із цих рівностей коефіцієнти $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ і остачу R:
$b_0 = a_0$, $b_1 = ab_0 + a_1$, $b_2 = ab_1 + a_2$, ..., $b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$, $R = ab_{n-1} + a_n$.

Як бачимо, перший коефіцієнт неповної частки дорівнює першому коефіцієнту діленого. Решту коефіцієнтів неповної частки і остачу знаходять таким чином: для того щоб знайти коефіцієнт b_{k+1} неповної частки, достатньо попередньо знайдений коефіцієнт b_k помножити на a і додати k-й коефіцієнт діленого. Цю процедуру доцільно оформляти у вигляді спеціальної схеми-таблиці, яка називається *схемою Горнера*.

	a_0 $\oplus$	a_1 $\oplus$	a_2 $\oplus$	...	a_{n-1} $\oplus$	a_n
a $\otimes$	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	...	b_{n-1}	R остача

Приклад 1 Розділіть за схемою Горнера многочлен $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x + 1$ на двочлен $x - 2$.

▶ Запишемо спочатку всі коефіцієнти многочлена $f(x)$ (якщо в многочлені пропущено степінь 2, то відповідний коефіцієнт вважаємо рівним 0), а потім знайдемо коефіцієнти неповної частки і остачу за вказаною схемою:

	3	−2	0	−4	1
2 $\otimes$	3 $\oplus$	4 $\oplus$	8 $\oplus$	12 $\oplus$	25 остача

Отже, $3x^4 - 2x^3 - 4x + 1 = (x-2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 12) + 25$. ◁

Приклад 2 Перевірте, чи є $x = -3$ коренем многочлена

$$f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 2x - 42.$$

▶ За теоремою Безу остача від ділення многочлена $f(x)$ на $x - a$ дорівнює $f(a)$, тому знайдемо за допомогою схеми Горнера остачу від ділення $f(x)$ на $x - (-3) = x + 3$.

	2	6	4	−2	−42
−3	2	0	4	−14	0 (остача = $f(-3)$)

Оскільки $f(-3) = 0$, то $x = -3$ — корінь многочлена $f(x)$. ◁

Вправи

1. Використовуючи схему Горнера, знайдіть неповну частку та остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:
1) $A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $B(x) = x + 1$;
2) $A(x) = 5x^3 - 26x^2 + 25x - 4$; $B(x) = x - 5$;
3) $A(x) = x^3 - 15x^2 + 10x + 24$; $B(x) = x + 3$.

2. Використовуючи схему Горнера, перевірте, чи ділиться многочлен $f(x)$ на двочлен $q(x)$:
   1) $f(x) = 4x^3 - x^2 - 27x - 18$; $q(x) = x + 2$;
   2) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$; $q(x) = x - 2$.
3. Розділіть многочлен $A(x)$ на двочлен $B(x)$:
   1) $A(x) = 2x^3 - 19x^2 + 32x + 21$; $B(x) = x - 7$;
   2) $A(x) = 4x^3 - 24x^2 + 21x - 5$; $B(x) = 2x - 1$.

7.5. Знаходження раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами

Теорема 4. ***Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ має раціональний корінь $x = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$, то p є дільником вільного члена (a_0), а q — дільником коефіцієнта при старшому члені a_n.***

Якщо $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$, то $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Підставляємо $\frac{p}{q}$ замість x у $f(x)$ і з останньої рівності маємо

$$a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0. \quad (1)$$

Помножимо обидві частини рівності (1) на q^n $(q \neq 0)$. Одержуємо

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0. \quad (2)$$

У рівності (2) всі доданки, окрім останнього, діляться на p. Тому $a_0q^n = -(a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1})$ ділиться на p.

Але коли ми записуємо раціональне число у вигляді $\frac{p}{q}$, то цей дріб вважається нескоротним, тобто p і q не мають спільних дільників. Добуток a_0q^n може ділитися на p (коли p і q — взаємно прості числа) тільки тоді, коли a_0 ділиться на p. Тобто p — дільник вільного члена a_0.

Аналогічно всі доданки рівності (2), крім першого, діляться на q. Тоді $a_np^n = -(a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n)$ ділиться на q. Оскільки p і q взаємно прості числа, то a_n ділиться на q, тобто q — дільник коефіцієнта при старшому члені. ○

Відзначимо два наслідки із цієї теореми. Якщо взяти $q = 1$, то коренем многочлена буде ціле число p — дільник a_0. Отже, має місце такий наслідок.

Наслідок 1. ***Будь-який цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами є дільником його вільного члена.***

Якщо в заданому многочлені $f(x)$ $a_n = 1$, то дільниками a_n можуть бути тільки числа ±1, тобто в цьому випадку $q = \pm 1$, і має місце:

> Наслідок 2. ***Якщо коефіцієнт при старшому члені рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то всі раціональні корені цього рівняння (якщо вони існують) — цілі числа.***

Приклад 1 Знайдіть раціональні корені многочлена $2x^3 - x^2 + 12x - 6$.

▶ Нехай нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена. Тоді p необхідно шукати серед дільників вільного члена, тобто серед чисел ±1, ±2, ±3, ±6, а q — серед дільників старшого коефіцієнта: ±1, ±2.
Таким чином, раціональні корені многочлена потрібно шукати серед чисел $\pm\frac{1}{2}$, ±1, $\pm\frac{3}{2}$, ±2, ±3, ±6. Перевіряти, чи є дане число коренем многочлена, доцільно за допомогою схеми Горнера. При $x = \frac{1}{2}$ маємо таблицю.

	2	–1	12	–6
$\frac{1}{2}$	2	0	12	0

Крім того, за схемою Горнера можна записати, що

$$2x^3 - x^2 + 12x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 12\right).$$

Многочлен $2x^2 + 12$ не має дійсних коренів (а тим більше раціональних), тому заданий многочлен має єдиний раціональний корінь $x = \frac{1}{2}$. ◁

Приклад 2 Розкладіть многочлен $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2$ на множники.

▶ Шукаємо цілі корені многочлена серед дільників вільного члена: ±1, ±2. Підходить 1. Ділимо $P(x)$ на $x - 1$ за допомогою схеми Горнера.

	2	3	–2	–1	–2
1	2	5	3	2	0

Тоді $P(x) = (x - 1)(2x^3 + 5x^3 + 3x + 2)$. Шукаємо цілі корені кубічного многочлена $2x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ серед дільників його вільного члена: ±1, ±2. Підходить (–2). Ділимо на $x + 2$.

	2	5	3	2
–2	2	1	1	0

Маємо $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$.
Квадратний тричлен $2x^2 + x + 1$ не має дійсних коренів і на лінійні множники не розкладається.
Відповідь: $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$. ◁

Зазначимо, що в множині дійсних чисел не завжди можна знайти всі корені многочлена (наприклад, уже квадратний тричлен $x^2 + x + 1$ не має дійсних коренів). Таким чином, многочлен n-го степеня не завжди можна розкласти в добуток лінійних множників. Але многочлен непарного степеня завжди можна розкласти в добуток лінійних і квадратних множників, а многочлен парного степеня — у добуток квадратних тричленів.

Наприклад, многочлен четвертого степеня розкладається в добуток двох квадратних тричленів. Для того щоб знайти коефіцієнти цього розкладу, іноді можна використовувати *метод невизначених коефіцієнтів*.

Приклад 3 Розкладіть на множники многочлен $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6$.

▶ Знайти раціональні корені не вдається — многочлен не має раціональних (цілих) коренів.

Спробуємо знайти розклад цього многочлена в добуток двох квадратних тричленів. Оскільки старший коефіцієнт многочлена дорівнює 1, то й у квадратних тричленах візьмемо старші коефіцієнти рівними 1. Тобто шукатимемо розклад нашого многочлена у вигляді:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \qquad (3)$$

де a, b, c і d — якісь невизначені (поки що) коефіцієнти.

Многочлени, що стоять у лівій і правій частинах цієї рівності, тотожно рівні, тому коефіцієнти при однакових степенях x у них однакові. Розкриємо дужки в правій частині рівності і прирівняємо відповідні коефіцієнти. Це зручно записати так:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^3 + bcx + bd.$$

Одержуємо систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^4 & 1 = 1, \\ x^3 & 1 = a + c, \\ x^2 & 3 = ac + b + d, \\ x^1 & 1 = bc + ad, \\ x^0 & 6 = bd. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Спроба розв'язати цю систему методом підстановки приводить до рівняння 4-го степеня, тому спробуємо розв'язати систему (4) у цілих числах. З останньої рівності системи (4) одержуємо, що b і d можуть бути тільки дільниками числа 6. Усі можливі варіанти запишемо в таблицю.

b	1	−1	2	−2
d	6	−6	3	−3

Коефіцієнти b і d у рівності (3) рівноправні, тому ми не розглядаємо випадки $b = 6$ і $d = 1$ або $b = -6$ і $d = -1$ і т. д.

Для кожної пари значень b і d з третьої рівності системи (4) знайдемо ac: $ac = 3 - (b + d)$, а з другої рівності $a + c = 1$.

Знаючи $a + c$ і ac, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, знаходимо a і c як корені квадратного рівняння. Коли буде знайдено всі числа a, b, c, d, то із четвертої рівності $bc + ad = 1$ системи (4) можна вибрати ті числа, які є розв'язками системи (4). Зручно ці міркування оформити у вигляді таблиці:

b	1	−1	2		−2
d	6	−6	3		−3
$a + c = 1$	1	1	1		1
$ac = 3 - (b + d)$	−4	10	−2		8
a	неціле	не існує	2	−1	не існує
c	неціле	не існує	−1	2	не існує
$bc + ad = 1$	—	—	$bc + ad = 4$ $4 \neq 1$	$bc + ad = 1$ $1 = 1$	—

Як бачимо, системі (4) задовольняє набір цілих чисел $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 3$. Тоді рівність (3) має вигляд

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 - x + 2)(x^2 + 2x + 3). \qquad (5)$$

Оскільки квадратні тричлени $x^2 - x + 2$ і $x^2 + 2x + 3$ не мають не тільки раціональних, але й дійсних коренів, то рівність (5) дає остаточну відповідь. ◁

Вправи

1. Знайдіть цілі корені многочлена:
1) $x^3 - 5x + 4$; 2) $2x^3 + x^2 - 13x + 6$;
3) $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8$; 4) $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$.

2. Знайдіть раціональні корені рівняння:
1) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; 2) $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$; 4) $3x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 7x - 2 = 0$.

3. Розкладіть многочлен на множники:
1) $2x^3 - x^2 - 5x - 2$; 2) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
3) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; 4) $x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 50x - 25$.

4. Знайдіть дійсні корені рівняння:
1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 7x - 6 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$; 4) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.

5*. Розкладіть многочлен на множники методом невизначених коефіцієнтів:
1) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 13x - 6$; 2) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2$.

6*. Розкладіть многочлен на множники, заздалегідь записавши його за допомогою методу невизначених коефіцієнтів у вигляді $(x^2 + bx + c)^2 - (mx + n)^2$:
1) $x^4 + 4x - 1$; 2) $x^4 - 4x^3 - 1$; 3) $x^4 + 4a^3x - a^4$.

§ 8 РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ ЗНАК МОДУЛЯ

Таблиця 15

1. Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля

за означенням

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ при } a > 0, \\ 0, \text{ при } a = 0, \\ -a, \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

за геометричним змістом

$|a|$ — *відстань на числовій прямій від точки* 0 *до точки* a.

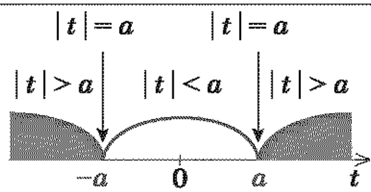
1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$.

за загальною схемою

1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій.
3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.
4. Знайти розв'язок у кожному з проміжків (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий проміжок).

з використанням спеціальних співвідношень

2. Використання геометричного змісту модуля (при $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ або $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ або $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ або $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Узагальнення

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ або $f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Продовження табл. 15

3. Використання спеціальних співвідношень
1. $\lvert u \rvert = u \Leftrightarrow u \geqslant 0.$
2. $\lvert u \rvert = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0.$
3. $\lvert u \rvert = \lvert v \rvert \Leftrightarrow u^2 = v^2.$
4. $\lvert u \rvert > \lvert v \rvert \Leftrightarrow u^2 > v^2$. Тоді $\lvert u \rvert - \lvert v \rvert > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$; *знак різниці модулів двох виразів збігається зі знаком різниці їх квадратів.*
5. $\lvert u\rvert+\lvert v\rvert=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$
6. $\lvert u\rvert+\lvert v\rvert=-u-v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $\lvert u \rvert + \lvert v \rvert = \lvert u + v \rvert \Leftrightarrow uv \geqslant 0.$
8. $\lvert u \rvert + \lvert v \rvert = \lvert u - v \rvert \Leftrightarrow uv \leqslant 0.$
9. $\lvert x - a \rvert + \lvert x - b \rvert = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, де $a < b$.

Приклади й обґрунтування

Розв'язувати будь-яке рівняння або нерівність, що містить знак модуля, можна одним з трьох основних способів: за означенням модуля, виходячи з геометричного змісту модуля або за загальною схемою. Деякі рівняння або нерівність, що містить знак модуля, можуть бути розв'язані також з використанням спеціальних співвідношень (табл. 15).

Залежно від обраного способу одержуємо різні записи розв'язання.

Приклад Розв'яжіть рівняння $\lvert 2x - 4 \rvert = 6$.

I спосіб (за означенням модуля)

Розв'язання

▶ 1) Якщо

$$2x - 4 \geqslant 0, \qquad (1)$$

то одержуємо рівняння

$$2x - 4 = 6.$$

Тоді $x = 5$, що задовольняє умові (1).

2) Якщо

$$2x - 4 < 0, \qquad (2)$$

то одержуємо рівняння

$$-(2x - 4) = 6.$$

Тоді $x = -1$, що задовольняє також умові (2).

Відповідь: 5; –1. ◁

Коментар

Ураховуючи означення модуля, розглянемо два випадки:

$$2x - 4 \geqslant 0 \text{ і } 2x - 4 < 0.$$

За означенням *модулем додатного (невід'ємного) числа є саме це число, а модулем від'ємного числа є протилежне йому число*. Тому при $2x - 4 \geqslant 0$ $\lvert 2x - 4 \rvert = 2x - 4$, а при $2x - 4 < 0$ $\lvert 2x - 4 \rvert = -(2x - 4)$.

У кожному випадку розв'язуємо одержане рівняння і з'ясовуємо, чи задовольняє кожен із знайдених коренів умові, за якої ми його знаходили.

II спосіб (використовуючи геометричний зміст модуля)

Розв'язання	*Коментар*
$2x - 4 = 6$ або $2x - 4 = -6$, $2x = 10$ або $2x = -2$, $x = 5$ або $x = -1$. *Відповідь:* 5; −1.	З геометричної точки зору $\lvert 2x - 4 \rvert$ — це відстань від точки 0 до точки $2x - 4$. За умовою рівняння вона дорівнює 6, але відстань 6 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 6), так і ліворуч (одержуємо число −6). Отже, рівність $\lvert 2x - 4 \rvert = 6$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x - 4 = 6$ або $2x - 4 = -6$.

Зауваження. При застосуванні геометричного змісту модуля знак модуля розкривається неявно, тобто не доводиться використовувати означення в явному вигляді.

Загальна схема розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля, — це фактично трохи змінений метод інтервалів. Пояснимо зміст цієї схеми на прикладі рівняння, що містить два модулі, виду

$$\lvert f(x) \rvert + \lvert g(x) \rvert = a \quad (a > 0).$$

Щоб розв'язати це рівняння, необхідно розкрити знаки модулів, а для цього потрібно знати, де функції $f(x)$ і $g(x)$ будуть додатними, а де — від'ємними. Тобто фактично ми повинні розв'язати нерівності

$$f(x) \gtrless 0, \qquad (1)$$

$$g(x) \gtrless 0. \qquad (2)$$

Кожну із цих нерівностей ми вміємо розв'язувати методом інтервалів. Перебудуємо прийом розв'язування нерівностей методом інтервалів таким чином, щоб він давав можливість одночасно розв'язувати кожну з останніх нерівностей. Як відомо, розв'язування нерівності (1) методом інтервалів починається із знаходження її ОДЗ (тобто області визначення функції $f(x)$), а розв'язування нерівності (2) — із знаходження її ОДЗ (тобто області визначення функції $g(x)$). Щоб почати одночасно розв'язувати обидві нерівності, необхідно знайти спільну область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, тобто **знайти ОДЗ заданого рівняння** (це *перший з орієнтирів* потрібної схеми). Щоб продовжити розв'язування нерівностей $f(x) \gtrless 0$ та $g(x) \gtrless 0$ методом інтервалів, необхідно знайти нулі функцій $f(x)$ і $g(x)$, тобто **знайти нулі всіх підмодульних функцій** (це *другий орієнтир*). Якщо далі використовувати схему методу інтервалів одночасно для двох нерівностей, то необхідно **на ОДЗ позначити нулі підмодульних функцій і розбити ОДЗ на проміжки** (це *третій орієнтир*).

У кожному з одержаних проміжків знаки функцій $f(x)$ і $g(x)$ не змінюються. Отже, ми можемо **знайти знаки підмодульних функцій на кожному проміжку** (у будь-якій точці цього проміжку), **розкрити знаки модулів і знайти розв'язок заданого рівняння в кожному з цих проміжків** (це *четвертий орієнтир* загальної схеми). ◁

Можливість застосування наведеної схеми до розв'язування нерівностей, що містять знак модуля, обґрунтовують аналогічно.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x-2|=2.$

▶ 1. ОДЗ: $x \neq 1$.

2. Нулі підмодульних функцій: $\frac{x}{x-1}=0$ ($x = 0$) та $x - 2 = 0$ ($x = 2$).

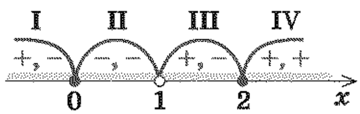


Рис. 67

3. Нулі 0 і 2 розбивають ОДЗ на чотири проміжки, у яких підмодульні функції мають знаки[1], показані на рисунку 67.
4. Знаходимо розв'язки заданого рівняння в кожному з проміжків (оскільки знаки підмодульних функцій однакові на проміжках I і III, зручно для розв'язання об'єднати ці проміжки).

Проміжки I і III: $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$. Ураховуючи знаки підмодульних функцій на цих проміжках і означення модуля, одержуємо, що в цих проміжках задане рівняння рівносильне рівнянню $\frac{x}{x-1}-(x-2)=2.$ Звідси $x = 0$ або $x = 2$. До розглянутих проміжків одержані значення не входять, отже, у цих проміжках коренів немає.

Проміжок II: $x \in [0; 1)$. (Слід звернути увагу на те, щоб не пропустити значення $x = 0$, яке входить до ОДЗ.) У цьому проміжку одержуємо рівняння $-\frac{x}{x-1}-(x-2)=2.$ Звідси $x = 0$ — корінь, оскільки входить у цей проміжок.

Проміжок IV: $x \in [2; +\infty)$ (і в цьому проміжку потрібно не забути значення $x = 2$). Одержуємо рівняння $\frac{x}{x-1}+x-2=2.$ Звідси $x = 2$ — корінь, оскільки входить у цей проміжок.

Об'єднуючи всі розв'язки, які ми одержали в кожному з проміжків, маємо розв'язок заданого рівняння на всій ОДЗ.

Відповідь: 0; 2. ◁

[1] На рисунку 67 у кожному з проміжків перший знак — це знак функції $\frac{x}{x-1}$, а другий — знак функції $x - 2$. Виконуючи рисунок, зручно спочатку позначити на числовій прямій ОДЗ, а потім на ОДЗ — нулі підмодульних функцій.

Проілюструємо також одержання і використання спеціальних співвідношень, наведених у таблиці 15.

Обґрунтуємо, наприклад, співвідношення 5: $|u|+|v|=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$

● Запишемо задану рівність у вигляді $u + v = |u| + |v|$ і проаналізуємо її, спираючись на відомі із 6 класу правила дій над числами з однаковими і з різними знаками. Щоб додати два числа u і v, ми додали їх модулі, отже, ці числа мають однакові знаки. Якби обидва ці числа були від'ємними, то їх сума була б теж від'ємною, але $u + v = |u| + |v| \geqslant 0$. Тоді одержуємо, що числа u і v — обидва невід'ємні. Навпаки, якщо $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \end{cases}$ то виконується рівність $u + v = |u| + |v|$. Отже, рівняння $|u| + |v| = u + v$ рівносильне системі нерівностей $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$ ○

Приклад 2* Розв'яжіть рівняння $|x - 5| + |2x + 5| = 3x$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Оскільки $3x = (x - 5) + (2x + 5)$, то задане рівняння має вигляд $|u| + |v| = u + v$, але ця рівність може виконуватися тоді і тільки тоді, коли числа u і v — обидва невід'ємні. Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ 2x+5 \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \geqslant -\frac{5}{2}. \end{cases}$ Отже, $x \geqslant 5$. *Відповідь:* $[5; +\infty)$. ◁	Якщо позначити $x - 5 = u$ і $2x + 5 = v$, то $u + v = 3x$ і задане рівняння має вигляд $|u| + |v| = u + v$, а за співвідношенням 5 таке рівняння рівносильне системі $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$ Зауважимо, що задане рівняння можна розв'язувати і за загальною схемою, але тоді розв'язання буде більш громіздким.

При розв'язуванні *нерівностей, що містять знак модуля,* міркування щодо розкриття знаків модулей повністю аналогічні міркуванням, які використовувалися при розв'язуванні рівнянь, що містять знак модуля.

Приклад 3 Розв'яжіть нерівність $|2x - 5| \leqslant 7$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ За геометричним змістом модуля задана нерівність рівносильна нерівності $$-7 \leqslant 2x - 5 \leqslant 7. \quad (1)$$	Нерівність виду $|f(x)| \leqslant a$ (де $a > 0$) зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. Зокрема, задана нерівність —

Тоді $-2 \leqslant 2x \leqslant 12$, отже,

$-1 \leqslant x \leqslant 6$.

Відповідь: $[-1; 6]$. ◁

це нерівність виду $|\,t\,| \leqslant 7$. Але модуль числа — це відстань на координатній прямій від точки, що зображує дане число, до точки 0. Тобто заданій нерівності задовольняють усі точки, які розташовані в проміжку $[-7; 7]$, отже, $-7 \leqslant t \leqslant 7$. Якщо виникають ускладнення з розв'язуванням подвійної нерівності (1), то її замінюють на рівносильну систему $\begin{cases} 2x-5 \geqslant -7, \\ 2x-5 \leqslant 7. \end{cases}$

Приклад 4 Розв'яжіть нерівність

$$\frac{|x-3|}{|x-2|-1} \geqslant 1. \qquad (1)$$

▶ 1. ОДЗ: $|\,x-2\,| - 1 \neq 0$. Тоді $|\,x-2\,| \neq 1$, тобто $x - 2 \neq \pm 1$, отже: $x \neq 3$ або $x \neq 1$.

2. Нулі підмодульних функцій: $x - 3 = 0$ ($x = 3$ — не входить до ОДЗ) та $x - 2 = 0$ ($x = 2$).

3. Нуль 2 розбиває ОДЗ на чотири проміжки, на яких підмодульні функції мають знаки, показані на рисунку 68 (на кожному з проміжків перший знак — це знак функції $x - 3$, а другий — знак функції $x - 2$).

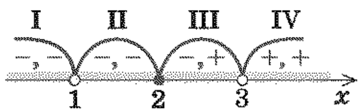


Рис. 68

4. Знаходимо розв'язки заданої нерівності в кожному з проміжків (оскільки знаки підмодульних функцій є однаковими на проміжках I і II, зручно для розв'язання об'єднати ці проміжки).

<u>Проміжки I і II:</u> $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$. Ураховуючи знаки підмодульних функцій у цих проміжках і означення модуля, одержуємо, що при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$ задана нерівність рівносильна нерівності $\frac{-(x-3)}{-(x-2)-1} \geqslant 1$. Тоді $\frac{3-x}{1-x} \geqslant 1$, тобто $\frac{2}{1-x} \geqslant 0$. Звідси $x < 1$. До проміжків, які ми розглянули, входять усі значення $x < 1$, отже, у цьому випадку розв'язком буде $x < 1$.

<u>Проміжок III:</u> $x \in [2; 3)$. На цьому проміжку одержуємо нерівність $\frac{-(x-3)}{x-2-1} \geqslant 1$, тобто $\frac{-(x-3)}{x-3} \geqslant 1$. Але при будь-якому значенні x із проміжку III остання нерівність перетворюється на хибну нерівність $(-1 \geqslant 1)$. Отже, у проміжку III нерівність (1) розв'язків не має.

Проміжок IV: $x \in (3; +\infty)$. У цьому проміжку одержуємо нерівність $\frac{x-3}{x-2-1} \geqslant 1$, тобто $\frac{x-3}{x-3} \geqslant 1$. Як бачимо, при будь-якому x із проміжку IV нерівність (1) перетворюється на правильну числову нерівність ($1 \geqslant 1$). Отже, розв'язком нерівності (1) у проміжку IV є будь-яке число із цього проміжку ($x > 3$).

Об'єднуючи всі розв'язки, які ми одержали в кожному з проміжків, маємо розв'язок заданої нерівності на всій ОДЗ: $x < 1$ або $x > 3$.

Відповідь: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. ◁

Зазначимо, що для розв'язування деяких нерівностей, що містять знак модуля, зручно використовувати також спеціальні співвідношення, наведені в таблиці 15.

Приклад 5* Розв'яжіть нерівність $\frac{(|x-1|-|x+3|)(|2x|-|x+6|)}{|1-x|-|x+2|} < 0$.

▶ Оскільки $|a| \geqslant 0$ і функція $y = t^2$ монотонно зростає на множині невід'ємних чисел, то всі різниці модулів у нерівності можна замінити на різниці їх квадратів (тобто скористатися співвідношенням 4: $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$). Тоді одержуємо нерівність, рівносильну заданій:

$$\frac{\left((x-1)^2-(x+3)^2\right)\left((2x)^2-(x+6)^2\right)}{(1-x)^2-(x+2)^2} < 0.$$

Тепер, розкладаючи на множники всі різниці квадратів, маємо:

$$\frac{(-4)(2x+2)(x-6)(3x+6)}{(-1-2x)\,3} < 0.$$

Далі методом інтервалів одержуємо $-2 < x < -1$ або $-\frac{1}{2} < x < 6$ (рис. 69).

Відповідь: $-2 < x < -1$ або $-\frac{1}{2} < x < 6$. ◁

Загальна схема, запропонована в таблиці 15, може бути використана не тільки при розв'язуванні рівнянь чи нерівностей, що містять знак модуля, але й при виконанні перетворень виразів, що містять знак модуля.

Наприклад, для побудови графіка функції $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ зручно спочатку за загальною схемою розкрити знаки модулів, а вже потім будувати графік функції $f(x)$.

Оформлення розв'язання подібного прикладу може бути таким.

Приклад 6 Побудуйте графік функції $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

▶ 1. Область визначення функції: всі $x \in R$.

2. Нулі підмодульних функцій: $x = -1$ і $x = 1$.
3. Позначаємо нулі на області визначення і розбиваємо область визначення на проміжки (на рисунку 70 також указано знаки підмодульних функцій у кожному з проміжків).

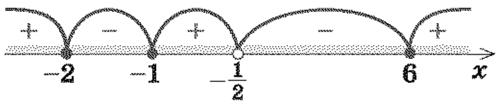


Рис. 69

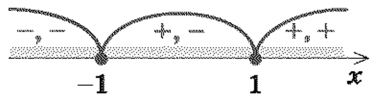


Рис. 70

4. Тоді

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1)-(x-1), \text{ якщо } x\leqslant -1,\\ x+1-(x-1), \text{ якщо } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1+x-1, \text{ якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Отже, $f(x)=\begin{cases}-2x, \text{ якщо } x\leqslant -1,\\ 2, \text{ якщо } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, \text{ якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$

Будуємо графік цієї функції (рис. 71).

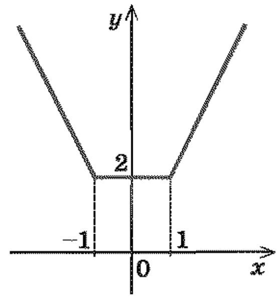


Рис. 71

Запитання для контролю

1. Поясніть, якими способами можна розв'язувати рівняння та нерівності, що містять знак модуля. Проілюструйте ці способи на прикладах.
2. Обґрунтуйте спеціальні співвідношення, наведені в таблиці 15. Проілюструйте їх застосування до розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля.
3. Обґрунтуйте узагальнення використання геометричного змісту модуля, наведені в таблиці 15. Проілюструйте їх застосування до розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля.

Вправи

Розв'яжіть рівняння і нерівності, що містять знак модуля (1–15).

1. 1) $|3x-5|=7$; 2) $|8-4x|=6$; 3) $|x^2-5x|=6$.
2. 1) $|2x-3|>5$; 2) $|3-5x|<7$; 3*) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>2$; 4) $\left|\frac{2x-3}{x-5}\right|<1$.
3. 1) $|x-2|-2x-1=0$; 2) $x^2+3x+|x+3|=0$.
4. 1) $|x-1|+|x-3|=2$; 2) $|x+1|+|x-5|=20$; 3) $|x+5|+|x-8|=13$.
5. 1) $|x+3|<x-2$; 2) $|x+1|+|x-2|\leqslant 2x-1$; 3) $|x+3|+|x-1|<|6-3x|$.
6. 1) $\sqrt{x^2-2x+1}+|x-2|=1$; 2) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x|=x+5$.
7. 1) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=8$; 2) $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}=5$.

8. 1) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

9. 1) $||x-1|-2|=1$; 2) $||2x-4|-5|=3$.

10. 1) $|x^2-4x|<5$; 2) $|x^2-x-6|>4$.

11. 1) $3|x-1|+x^2-7>0$; 2) $|x-6|\geqslant x^2-5x+9$.

12. 1) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$; 2) $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$.

13. 1) $||x-1|-5|\leqslant 2$; 2) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

14. 1) $|x-2x^2|>2x^2-x$; 2) $|x^2+x-20|\leqslant x^2+x-20$.

15. 1) $\frac{4}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$.

16. Побудуйте графік функції:

1) $y=|2x-4|+|2x+6|$; 2) $y=|x-5|+|3x+6|$.

§ 9 РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

9.1. Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами

Якщо крім змінної та числових коефіцієнтів до запису рівняння чи нерівності входять також буквені коефіцієнти — параметри, то при розв'язуванні можна користуватися таким орієнтиром.

Будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайне рівняння чи нерівність до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.

На етапі пошуку плану розв'язування рівняння чи нерівності з параметрами або в ході розв'язування часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання та чим відрізняється один випадок від іншого. Щоб на таких схемах (чи в записах громіздких розв'язань) не загубити якусь відповідь, доцільно поміщати остаточні відповіді в прямокутні рамки. Зауважимо, що відповідь треба записати для всіх можливих значень параметра.

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність зі змінною x: $3ax + 2 \geqslant x + 5a$.

Коментар

Задана нерівність є лінійною відносно змінної x, тому використаємо відомий алгоритм розв'язування лінійної нерівності:

1) переносимо члени зі змінною x в одну частину, а без x — у другу:
$$3ax - x \geqslant 5a - 2;$$

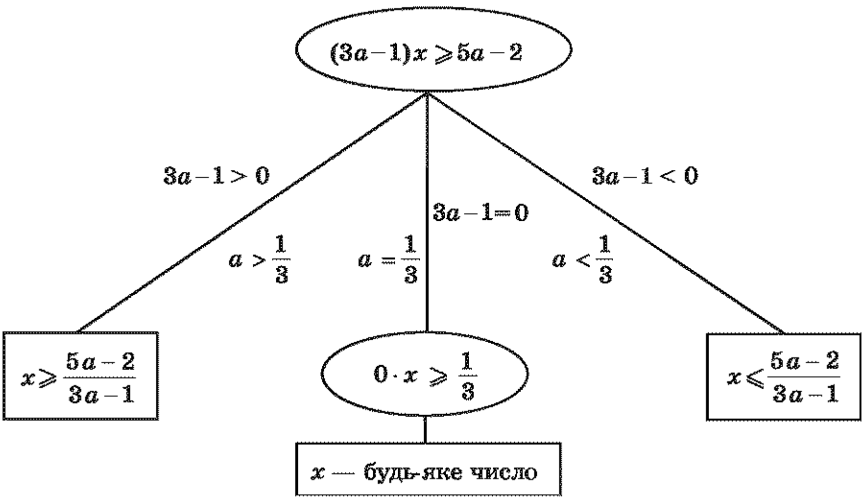
2) виносимо в лівій частині за дужки спільний множник x (тобто приводимо нерівність до вигляду $Ax \geqslant B$): $(3a - 1)\, x \geqslant 5a - 2$.

Для знаходження розв'язків останньої нерівності ми б хотіли поділити обидві її частини на $(3a - 1)$. Але якщо обидві частини нерівності поділити на додатне число, то знак нерівності не зміниться, а якщо на від'ємне, то знак нерівності необхідно змінити на протилежний. Крім того, слід урахувати, що на нуль ділити не можна. Отже, починаючи з цього моменту потрібно розглянути три випадки: $3a - 1 > 0$, $3a - 1 < 0$, $3a - 1 = 0$.

Наведені вище міркування можна наочно записати так:
$$3ax + 2 \geqslant x + 5a$$

Розв'язання

▶ $3ax - x \geqslant 5a - 2$



Відповідь: 1) якщо $a > \frac{1}{3}$, то $x \geqslant \frac{5a-2}{3a-1}$; 2) якщо $a < \frac{1}{3}$, то $x \leqslant \frac{5a-2}{3a-1}$;

3) якщо $a = \frac{1}{3}$, то x — будь-яке число. ◁

При розв'язуванні більш складних рівнянь чи нерівностей слід пам'ятати, що рівняння та нерівності з параметрами найчастіше розв'язують за допомогою рівносильних перетворень, а всі рівносильні перетворення рівнянь чи нерівностей виконують на області допустимих значень (ОДЗ) заданого рівняння чи нерівності (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису рівняння чи нерівності). Тому, перш ніж записати відповідь, *потрібно обов'язково врахувати ОДЗ заданого рівняння чи нерівності*.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}$, де x — змінна.

Коментар

Задані дробові вирази існують тоді і тільки тоді, коли знаменники заданих дробів не дорівнюють нулю, отже, ОДЗ рівняння: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз $x\,(x-3)$ — спільний знаменник дробів — і одержимо ціле рівняння, яке за умови $x\,(x-3) \neq 0$ (тобто на ОДЗ заданого рівняння) рівносильне заданому: $x^2 = x\,(x-3) + a\,(x-3)$. З цього рівняння одержуємо $x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a$, тобто $ax - 3x = 3a$. Тоді $(a-3)\,x = 3a$.

Для того щоб знайти значення змінної x, хотілося б поділити обидві частини останнього рівняння на $(a-3)$, але при $a = 3$ довелося б ділити на 0, що неможливо. Отже, починаючи з цього моменту, потрібно розглянути два випадки.

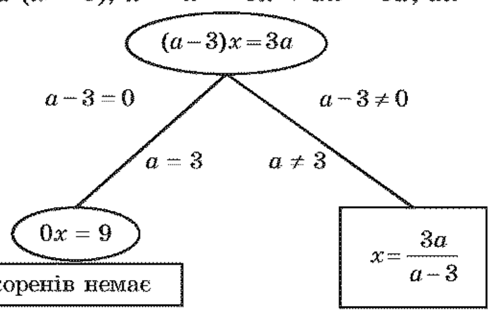
Розв'язання відповідно до наведених вище міркувань можна наочно записати у вигляді схеми.

$$\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}$$

Розв'язання

► ОДЗ: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

$x^2 = x\,(x-3) + a\,(x-3)$, $x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a$, $ax - 3x = 3a$,



З'ясуємо, при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ рівняння, тобто при яких значеннях a одержуємо $x = 3$ та $x = 0$.

$\frac{3a}{a-3}=3$, тоді $3a = 3\,(a-3)$, $3a = 3a - 9$ — розв'язків немає. Отже, при всіх значеннях a корінь $\frac{3a}{a-3}$ не дорівнює 3.

$\frac{3a}{a-3}=0$, тоді $a = 0$. Отже, при $a = 0$ маємо $x = 0$ — сторонній корінь (не входить до ОДЗ), тобто при $a = 0$ задане рівняння не має коренів.

Відповідь: 1) при $a = 3$ і $a = 0$ коренів немає;

2) при $a \neq 3$, $a \neq 0$ $x=\frac{3a}{a-3}$. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\frac{ax-1}{x-a}=\frac{4}{x}$ відносно змінної x.

Коментар

Будемо виконувати рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ (знаменники дробів не дорівнюють нулю). Якщо далі обидві частини рівняння помножити на добуток виразів, що стоять у знаменниках дробів (і який не дорівнює нулю на ОДЗ рівняння), то одержимо рівняння $ax^2 - 5x + 4a = 0$, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого). Але останнє рівняння буде квадратним тільки при $a \neq 0$, тому для його розв'язування слід розглянути два випадки ($a = 0$ і $a \neq 0$).

Якщо $a \neq 0$, то для дослідження одержаного квадратного рівняння потрібно розглянути ще три випадки: $D = 0$, $D < 0$, $D > 0$ і в кожному з них перевірити, чи входять знайдені корені до ОДЗ, чи ні. При $D = 0$ зручно використати, що значення кореня відповідного квадратного рівняння збігається з абсцисою вершини параболи $y = ax^2 - 5x + 4a$, тобто $x=x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2a}$. Розглядаючи випадок $D > 0$, слід пам'ятати також про попереднє обмеження: $a \neq 0$.

Оскільки корені рівняння (1) записуються достатньо громіздкими формулами (див. розв'язання), то замість підстановки одержаних коренів в обмеження ОДЗ підставимо «заборонені» значення x у рівняння (1) і з'ясуємо, при яких значеннях параметра a ми отримаємо значення x, які не входять до ОДЗ, а потім перевіримо отримані значення параметра.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq a$. На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням: $ax^2 - x = 4x - 4a$,

$$ax^2 - 5x + 4a = 0. \qquad (1)$$

1. Якщо $a = 0$, то з рівняння (1) одержуємо $x = 0$ — не входить до ОДЗ, отже, при $a = 0$ коренів немає.
2. Якщо $a \neq 0$, то рівняння (1) — квадратне. Його дискримінант $D = 25 - 16a^2$. Розглянемо три випадки:

1) $D = 0$, тобто $25 - 16a^2 = 0$, $a=\pm\frac{5}{4}$. Тоді рівняння (1) має одне значення кореня $x=\frac{5}{2a}$.

Якщо $a=\frac{5}{4}$, то корінь $x = 2$ рівняння (1) входить до ОДЗ і є коренем заданого рівняння.

Якщо $a=-\frac{5}{4}$, то корінь $x = -2$ рівняння (1) теж входить до ОДЗ і є коренем заданого рівняння.

2) $D < 0$, тобто $25 - 16a^2 < 0$, отже, $a<-\frac{5}{4}$ або $a>\frac{5}{4}$. Тоді рівняння (1) не має коренів.

3) $D > 0$, тобто $25 - 16a^2 > 0$, отже, $-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}$, але $a \neq 0$. Тоді рівняння (1) має два корені

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}. \tag{2}$$

З'ясуємо, при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто при яких значеннях a одержуємо $x = 0$ і $x = a$.

Підставляючи в рівняння (1) $x = 0$, одержуємо $a = 0$, але при $a = 0$ задане рівняння не має коренів.

Підставляючи в рівняння (1) $x = a$, одержуємо $a^3 - 5a + 4a = 0$, тобто $a^3 - a = 0$, $a(a^2 - 1) = 0$. Тоді $a = 0$ (задане рівняння не має коренів), або $a = \pm 1$. Перевіримо ці значення a.

При $a = 1$ ОДЗ записується так: $x \neq 0$, $x \neq 1$. Із формули коренів (2) маємо $x_1 = 4$ (входить до ОДЗ) і $x_2 = 1$ (не входить до ОДЗ). Отже, при $a = 1$ задане рівняння має тільки один корінь $x = 4$.

При $a = -1$ ОДЗ записується так: $x \neq 0$, $x \neq -1$, а із формули коренів (2) отримаємо: $x_1 = -4$ (входить до ОДЗ) і $x_2 = -1$ (не входить до ОДЗ). Отже, при $a = -1$ задане рівняння має тільки один корінь $x = -4$.

Таким чином, формулу коренів (2) можна використовувати, якщо $-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}$, тільки при $a \neq 0$ і $a \neq \pm 1$.

Відповідь: 1) якщо $a=\frac{5}{4}$, то $x = 2$;

2) якщо $a=-\frac{5}{4}$, то $x = -2$;

3) якщо $a = 1$, то $x = 4$;

4) якщо $a = -1$, то $x = -4$;

5) якщо $a\in\left(-\frac{5}{4};\ -1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(1;\ \frac{5}{4}\right)$, то $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}$;

6) якщо $a\in\left(-\infty;\ \frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$ або $a = 0$, то коренів немає. ◁

Зауваження. Щоб полегшити запис відповіді в цьому та аналогічних прикладах, можна користуватися таким способом. *Перед записом* *відповіді в складних або громіздких випадках зобразимо вісь параметра* (a) *і відмітимо на ній усі особливі значення параметра, які з'явилися в процесі розв'язування. Під віссю параметра (лівіше від неї) випишемо всі одержані розв'язки (крім розв'язку «коренів немає») і напроти кожної відповіді відмітимо, при яких значеннях параметра цю відповідь можна використовувати* (рис. 82). *Після цього відповідь записують для кожного з особливих значень параметра і для кожного з одержаних проміжків осі параметра.* Зокрема, у розглянутому прикладі перед записом відповіді зручно зобразити на чернетці таку схему (рис. 72).

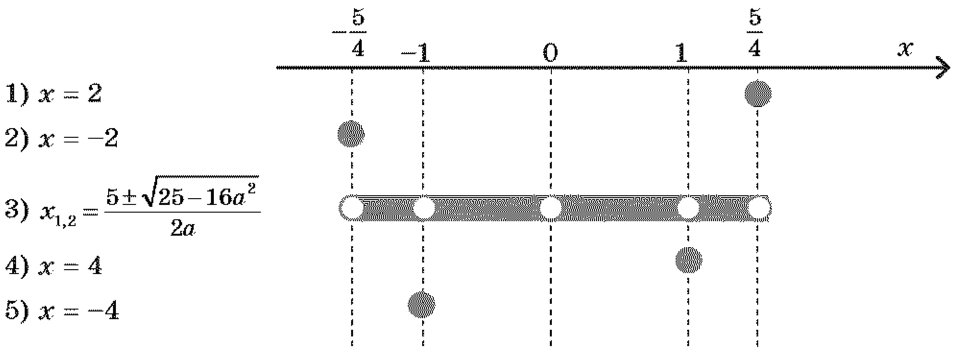


Рис. 72

9.2. Дослідницькі задачі з параметрами

Деякі дослідницькі задачі з параметрами вдається розв'язати за такою схемою: 1) *розв'язати задане рівняння чи нерівність;* 2) *дослідити одержаний розв'язок.*

Приклад 1 Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7} = 0$ має єдиний корінь.

Розв'язання	*Коментар*
▶ ОДЗ: $x \neq -7$. На ОДЗ одержуємо рівносильне рівняння $(x + a)(x - 5a) = 0$. Тоді $x + a = 0$ або $x - 5a = 0$. Одержуємо $x = -a$ або $x = 5a$. Урахуємо ОДЗ. Для цього з'ясуємо, коли $x = -7$: $-a = -7$ при $a = 7$, $5a = -7$ при $a = -\frac{7}{5}$.	Оскільки дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, то на ОДЗ ($x + 7 \neq 0$) задане рівняння рівносильне рівнянню $(x + a)(x - 5a) = 0$. Далі враховуємо, що добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю (а другий має зміст).

Тоді при $a = 7$ одержуємо:
$x = -a = -7$ — сторонній корінь;
$x = 5a = 35$ – єдиний корінь.

При $a = -\frac{7}{5}$ одержуємо:
$x = 5a = -7$ — сторонній корінь;
$x = -a = \frac{7}{5}$ — єдиний корінь.

Також задане рівняння матиме єдиний корінь, якщо $-a = 5a$, тобто при $a = 0$ (тоді $x = -a = 0$ та $x = 5a = 0 \neq \neq -7$).

Відповідь: $a = 7$, $a = -\frac{7}{5}$, $a = 0$. ◁

Після цього з'ясуємо, при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто $x = -7$: прирівнюємо корені до -7 і знаходимо відповідні значення a.

При знайдених значеннях a один із двох одержаних коренів буде стороннім ($x = -7$) і рівняння матиме єдиний корінь (одне значення кореня). Крім того, задане рівняння матиме єдиний корінь ще й у тому випадку, коли два одержані корені ($x = -a$ та $x = 5a$) збігатимуться (і входитимуть до ОДЗ).

Дослідження кількості розв'язків рівнянь та їх систем. При розв'язуванні деяких завдань із параметрами можна користуватися таким орієнтиром: *якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації часто зручно використовувати графічну ілюстрацію розв'язування.*

Достатньо простим є відповідне дослідження в тому випадку, коли задане рівняння можна подати у вигляді $f(x) = a$, оскільки графік функції $y = a$ — це пряма, паралельна осі Ox (яка перетинає вісь Oy у точці a). Відзначимо, що, замінюючи задане рівняння на рівняння $f(x) = a$, потрібно слідкувати за рівносильністю виконаних перетворень, щоб одержане рівняння мало ті самі корені, що й задане, а отже, і кількість коренів у них буде однаковою. Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$, достатньо визначити, скільки точок перетину має графік функції $y = f(x)$ з прямою $y = a$ при різних значеннях параметра a. (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

Приклад 2 Скільки коренів має рівняння $|x^2 - 4|x|| = a$ залежно від значення параметра a?

Розв'язання

▶ Побудуємо графіки функцій $y = |x^2 - 4|x||$ та $y = a$ (рис. 73). Аналізуючи взаємне розміщення одержаних графіків, отримуємо *відповідь*:

Коментар

Оскільки в цьому завданні мова йде про кількість розв'язків рівняння, то для аналізу заданої ситуації спробуємо використати графічну ілюстрацію розв'язування.

1) при $a < 0$ рівняння коренів не має;
2) при $a = 0$ рівняння має 3 корені;
3) при $a < 0 < 4$ рівняння має 6 коренів;
4) при $a = 4$ рівняння має 4 корені;
5) при $a > 4$ рівняння має 2 корені.

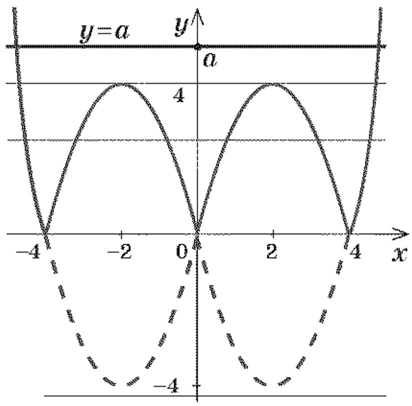


Рис. 73

1. Будуємо графік функції
$$y = |\, x^2 - 4\,|\, x\,||$$
(ураховуючи, що $x^2 = |\,x\,|^2$, побудова може відбуватися, наприклад, за такими етапами:
$$x^2 - 4x \to |\,x\,|^2 - 4\,|\,x\,| \to$$
$$\to |\, x^2 - 4\,|\,x\,||).$$
2. Будуємо графік функції $y = a$.
3. Аналізуємо взаємне розміщення одержаних графіків і записуємо відповідь (кількість коренів рівняння $f\,(x) = a$ дорівнює кількості точок перетину графіка функції $y = f\,(x)$ з прямою $y = a$).

Зазначимо, що значну кількість дослідницьких завдань не вдається розв'язати безпосередніми обчисленнями (або такі обчислення є дуже громіздкими). Тому часто доводиться спочатку обґрунтувати якусь властивість заданого рівняння або нерівності, а потім, користуючись цією властивістю, давати відповідь на запитання задачі.

Наприклад, беручи до уваги парність функцій, що входять до запису заданого рівняння, можна використовувати такий орієнтир.

Якщо в рівнянні $f\,(x) = 0$ функція $f\,(x)$ є парною або непарною, то разом з будь-яким коренем α ми можемо вказати ще один корінь цього рівняння $(-\alpha)$.

Приклад 3 Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння
$$x^4 - a\,|\,x\,|^3 + a^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$
має єдиний корінь.

Розв'язання	*Коментар*
Функція $f(x) = x^4 - a\,|\,x\,|^3 + a^2 - 4$ є парною ($D\,(f) = \boldsymbol{R}$, $f\,(-x) = f\,(x)$). Якщо $x = \alpha$ — корінь рівняння (1), то $x = -\alpha$ теж є коренем цього рівняння. Тому єдиний корінь	Помічаємо, що в лівій частині заданого рівняння стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир, наведений вище. Дійсно, якщо $x = \alpha$ — корінь рівняння $f\,(x) = 0$,

у заданого рівняння може бути тільки тоді, коли $\alpha = -\alpha$, тобто $\alpha = 0$. Отже, єдиним коренем заданого рівняння може бути тільки $x = 0$. Якщо $x = 0$, то з рівняння (1) одержуємо $a^2 - 4 = 0$, тоді $a = 2$ або $a = -2$.

При $a = 2$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^4 - 2\,|\,x\,|^3 = 0$. Тоді $|\,x\,|^4 - 2\,|\,x\,|^3 = 0$, $|\,x\,|^3 \cdot (|\,x\,| - 2) = 0$. Одержуємо $|\,x\,|^3 = 0$ (тоді $|\,x\,| = 0$, тобто $x = 0$) або $|\,x\,| - 2 = 0$ (тоді $|\,x\,| = 2$, тобто $x = \pm 2$). Отже, при $a = 2$ рівняння (1) має три корені, тобто умова задачі не виконується.

При $a = -2$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^4 + 2\,|\,x\,|^3 = 0$. Тоді $|\,x\,|^4 + 2\,|\,x\,|^3 = 0$, $|\,x\,|^3 \cdot (|\,x\,| + 2) = 0$. Оскільки $|\,x\,| + 2 \neq 0$, то одержуємо $|\,x\,|^3 = 0$. Тоді $|\,x\,| = 0$, тобто $x = 0$ — єдиний корінь. Отже, $a = -2$ задовольняє умові задачі.

Відповідь: $a = -2$. ◁

то $f(\alpha) = 0$ — правильна числова рівність. Ураховуючи парність функції $f(x)$, маємо $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Отже, $x = -\alpha$ — теж корінь рівняння $f(x) = 0$. Єдиний корінь у цього рівняння може бути тільки тоді, коли корені α і $-\alpha$ збігаються. Тоді $x = \alpha = -\alpha = 0$.

З'ясуємо, чи існують такі значення параметра a, при яких $x = 0$ є коренем рівняння (1). (Це значення $a = 2$ і $a = -2$.)

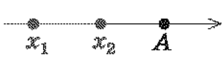
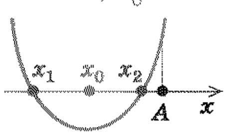
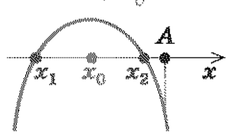
Оскільки значення $a = 2$ і $a = -2$ ми одержали з умови, що $x = 0$ — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях a задане рівняння матиме єдиний корінь.

При розв'язуванні одержаних рівнянь доцільно використати, що $x^4 = |\,x\,|^4$.

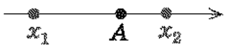
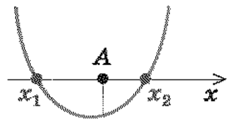
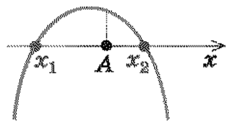
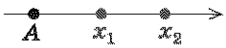
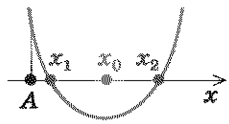
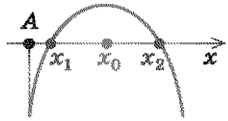
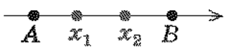
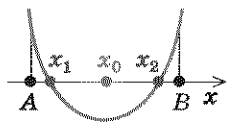
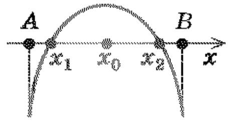
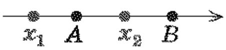
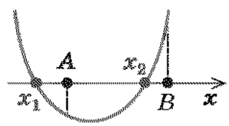
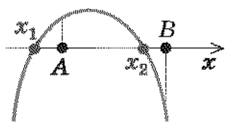
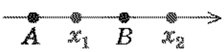
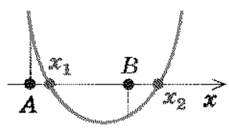
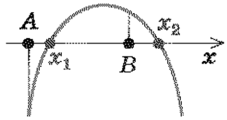
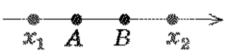
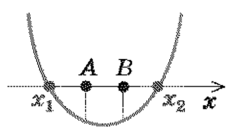
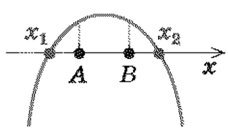
9.3. Використання умов розміщення коренів квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ відносно заданих чисел A і B

Розв'язування деяких дослідницьких задач з параметрами можна звести до використання необхідних і достатніх умов розміщення коренів квадратного тричлена. Основні з цих умов наведено в таблиці 16 (у таблиці використано традиційні позначення: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$).

Таблиця 16

<table>
<tr><th rowspan="2">Розміщення коренів</th><th colspan="3">Необхідні і достатні умови розміщення коренів</th></tr>
<tr><th>при $a > 0$</th><th>при $a < 0$</th><th>у загальному випадку $(a \neq 0)$</th></tr>
<tr><td>1. $x_1 < A$
$x_2 < A$
</td><td>$f(A) > 0$
$D \geqslant 0$; $x_0 < A$
</td><td>$f(A) < 0$
$D \geqslant 0$; $x_0 < A$
</td><td>$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 < A \end{cases}$</td></tr>
</table>

Продовження табл. 16

Розміщення коренів	Необхідні і достатні умови розміщення коренів		
	при $a > 0$	при $a < 0$	у загальному випадку ($a \neq 0$)
2. $x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 	$a \cdot f(A) < 0$
3. $x_1 > A$ $x_2 > A$ 	$f(A) > 0$ $D \geqslant 0;\ x_0 > A$ 	$f(A) < 0$ $D \geqslant 0;\ x_0 > A$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 > A \end{cases}$
4. $A < x_1 < B$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) > 0;\ f(B) > 0$ $D \geqslant 0;\ A < x_0 < B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) < 0$ $D \geqslant 0;\ A < x_0 < B$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0 \\ a \cdot f(B) > 0 \\ D \geqslant 0, \\ A < x_0 < B \end{cases}$
5. $x_1 < A$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) > 0$ 	$f(A) > 0;\ f(B) < 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
6. $A < x_1 < B$ $x_2 > B$ 	$f(A) > 0;\ f(B) < 0$ 	$f(A) < 0;\ f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$
7. $x_1 < A$ $x_2 > B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) < 0$ 	$f(A) > 0;\ f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$

Пояснення й обґрунтування

Для обґрунтування зазначених умов достатньо скористатися тим, що графік функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ — суцільна (нерозривна[1]) лінія. Якщо така функція на кінцях якогось проміжку набуває значень з різними знаками (тобто відповідні точки графіка розташовані в різних півплощинах відносно осі Ox), то всередині цього проміжку є принаймні одна точка, у якій функція дорівнює нулю (рис. 74).

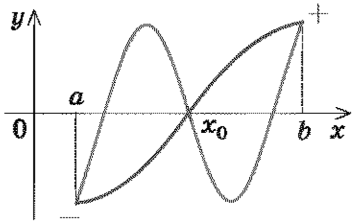


Рис. 74

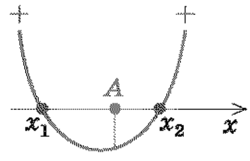


Рис. 75

Наприклад, *для того щоб два різні корені квадратного тричлена* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *при* $a > 0$ *були розміщені по різні боки від заданого числа A, достатньо зафіксувати тільки одну умову*: $f(A) < 0$ (рис. 75).

● Дійсно, графік квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ — парабола, вітки якої напрямлено вгору. Тоді у випадку, коли аргумент x прямує до $+\infty$ або до $-\infty$ (це позначають зазвичай так: $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$), функція $f(x)$ прямує до $+\infty$ ($f(x) \to +\infty$), отже, $f(x) > 0$ при $x \to +\infty$ або при $x \to -\infty$. Якщо виконується умова $f(A) < 0$, то зі зміною значення аргументу x від A до $+\infty$ квадратична функція $f(x)$ змінює свій знак з «−» на «+», отже, $f(x)$ має принаймні один корінь $x_2 > A$.

Так само зі зміною значення аргументу x від $-\infty$ до A квадратична функція $f(x)$ змінює свій знак з «+» на «−», отже, $f(x)$ має принаймні один корінь $x_1 < A$. Але квадратний тричлен $f(x)$ не може мати більше двох коренів, отже, при $a > 0$ умова $f(A) < 0$ необхідна і достатня для того, щоб два різні корені квадратного тричлена розміщувалися по різні боки від заданого числа A.

Аналогічні міркування при $a < 0$ показують, що для виконання цієї самої вимоги необхідно і достатньо, щоб $f(A) > 0$. Ці дві умови можна об'єднати в одну: $a \cdot f(A) < 0$.

Дійсно, $a \cdot f(A) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$ Отже,

[1] Відповідну властивість буде обґрунтовано більш строго в 11 класі під час розгляду так званих неперервних функцій.

квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) має два різні корені, що знаходяться по різні боки від заданого числа A, тоді і тільки тоді, коли виконується умова $a \cdot f(A) < 0$.

Аналогічно можна обґрунтовати й інші умови, наведені в таблиці 16.

Зауважимо, що наведені умови не обов'язково запам'ятовувати: для їхнього запису можна користуватися графіком квадратичної функції (зображеним для потрібного розміщення коренів) і таким орієнтиром.

Для того щоб корені квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) були розміщені заданим чином відносно даних чисел A і B, необхідно і достатньо виконання системи умов, яка включає:

1) *знак коефіцієнта при старшому члені;*
2) *знаки значень $f(A)$ і $f(B)$;*
3) *знак дискримінанта D;*
4) *положення абсциси вершини параболи $\left(x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$ відносно даних чисел A і B.*

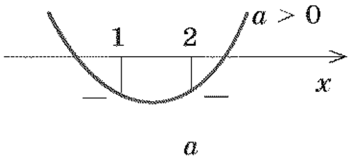
Зазначимо, що для випадків, у яких хоча б одне з даних чисел розміщено між коренями квадратного тричлена (див. другий, п'ятий, шостий і сьомий рядки табл. 16), достатньо, щоб виконувалися перші дві умови цього орієнтира, а для інших випадків доводиться розглядати всі чотири умови. Зауважимо також, що, записуючи кожну з указаних умов, слід розглядати, чи виконуватиметься вимога задачі в тому випадку, якщо в цій умові записати знак нестрогої нерівності.

Приклад 1 Знайдіть усі значення параметра a, для яких рівняння $ax^2 - x + 3a = 0$ має один корінь більший за 2, а другий — менший від 1.

Коментар

Оскільки задане рівняння має два різних корені, то воно квадратне (тобто $a \neq 0$). Тоді $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-12a^2}}{2a}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-12a^2}}{2a}$ і, щоб отримати відповідь на запитання задачі, достатньо розв'язати сукупність із двох систем ірраціональних нерівностей: $\begin{cases} x_1 > 2, \\ x_2 < 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 < 1, \\ x_2 > 2. \end{cases}$ Але такий шлях розв'язування достатньо громіздкий.

Спробуємо скористатися умовами розміщення коренів квадратного тричлена. Для цього можна безпосередньо використати відповідні умови, зафіксовані в таблиці 16, або отримати їх за допомогою запропонованого орієнтира. Зокрема, позначимо $f(x) = ax^2 - x + 3a$ і зобразимо графік квадратичної функції $f(x)$ (параболу) в таких положеннях, які задовольняють умові задачі (рис. 76, *а* і *б*).



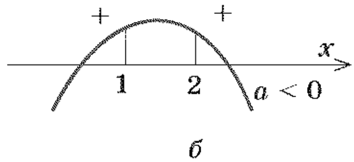


Рис. 76

Для того щоб корені квадратного тричлена розміщувалися по різні боки від чисел 1 і 2, необхідно і достатньо, щоб виконувалася сукупність умов: $\begin{cases} a>0, \\ f(1)<0, \\ f(2)<0 \end{cases}$ або $\begin{cases} a<0, \\ f(1)>0, \\ f(2)>0. \end{cases}$ Помічаємо, що в кожній системі знаки a і $f(1)$ та a і $f(2)$ протилежні, тому цю сукупність систем можна замінити рівносильною системою $\begin{cases} a\,f(1)<0, \\ a\,f(2)<0. \end{cases}$ З цього випливає такий план розв'язування.

Розв'язання

▶ Оскільки задане рівняння має два різних корені, то воно є квадратним (тобто $a \neq 0$). Позначимо $f(x) = ax^2 - x + 3a$. Як відомо, корені квадратного тричлена можуть розміщуватися по різні боки від чисел 1 і 2 тоді і тільки тоді, коли виконується система умов:

$$\begin{cases} a\,f(1)<0, \\ a\,f(2)<0. \end{cases}$$

Одержуємо систему
$$\begin{cases} a(4a-1)<0, & (1) \\ a(7a-2)<0. & (2) \end{cases}$$

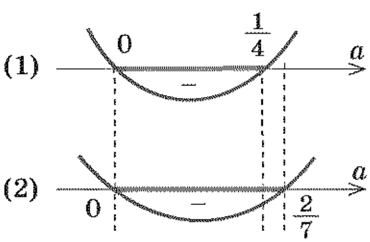


Рис. 77

Розв'язуємо нерівності (1) і (2) і знаходимо спільний розв'язок системи (рис. 77).

Відповідь: задане рівняння має один корінь більший за 2, а другий — менший від 1 при $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. ◁

Вправи

Розв'яжіть рівняння та нерівності зі змінною x (1–3).

1. 1) $5ax - a = ax + a$; 2) $4 - ax = 2x + 7a$;
3) $ax + 7a \leqslant ax + 8a$; 4) $2a - 6x > 2ax + 11$.
2. 1) $|x - 2| + |x + 1| = ax + 3$; 2) $|x - a| + |x| = 2$;
3) $|a - x| + |x + a + 1| = 1$.
3. 1) $ax+1=\frac{9a+3}{x}$; 2) $2ax-1=\frac{4a-1}{x-1}$; 3) $\frac{ax+1}{x+a}=\frac{2}{x}$.
4. Знайдіть усі значення a, при яких задане рівняння має єдиний корінь: 1) $\frac{(x-a)(x-2a)}{x-4}=0$; 2) $\frac{(x+2a)(x-6a)}{x+12}=0$.
5. Знайдіть усі значення a, при яких задане рівняння має єдиний корінь: 1) $x^8 + ax^6 + a^2 + 4a = 0$; 2) $x^4 + ax^2 + a^2 - a = 0$.
6. Для кожного значення параметра b знайдіть число коренів рівняння $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$.
7. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $|x^2 - 2ax| = 1$ має рівно три різних корені.
8. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $|x^2 + 2x + a| = 2$ має чотири різних корені.
9. Знайдіть найбільше значення параметра k, при якому обидва корені рівняння $x^2 + (2k + 6)x + 4k + 12 = 0$ більші від -1.
10. Знайдіть усі значення параметра m, для яких рівняння $(m - 2)x^2 - 2(m + 3)x + 4m = 0$ має один корінь більший за 3, а другий — менший від 2.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Визначте суму розв'язків рівняння:
1) $|x + 5| = 7$; 2) $|2x - 1| = 5$;
3) $|x + 7| = 2$; 4) $|4x - 8| + |2 - x| = 4$;
5) $2|x - 3| - |3 - x| = 5$; 6) $5|x + 4| - 2|4 - x| = 4$.
2. Визначте $x + y$, якщо:
1) $|x - y| + |4 - x| = 0$; 2) $|2x - y| + 2|2 - x| = 0$.
3. Визначте xy, якщо:
1) $|x - 2| + 4x^2 - 4xy + y^2 = 0$; 2) $|y - 1| + x^2 - 2xy + y^2 = 0$.
4. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності:
1) $|x - 1| \leqslant 2$; 2) $|x + 2| \leqslant 4$; 3) $|x - 3| \leqslant 6$; 4) $|x + 4| < 5$.
5. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності в проміжку $[-5; 5]$:
1) $|x + 2| \geqslant 3$; 2) $|x - 1| \geqslant 4$; 3) $|x - 2| \geqslant 3$; 4) $|2x - 1| \geqslant 3$.
6. Визначте найбільший цілий розв'язок нерівності:
1) $|3x - 1| < 2x + 2$; 2) $|2 - 3x| - x \leqslant 8$; 3) $|7 - 3x| - 2x \leqslant 2$.

7. Визначте найменший цілий розв'язок нерівності:
   1) $|1-2x|-x\leqslant 10$; 2) $|3x-2|+2x\leqslant 8$; 3) $|4x-4|+4x\geqslant 5$.
8. Визначте найменший розв'язок нерівності:
   1) $|3x+1|\leqslant x+7$; 2) $|2x+3|\leqslant x+12$; 3) $|4x+3|\leqslant x+21$.
9. Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому рівняння має розв'язок:
   1) $|2x-1|=1-4a$; 2) $|3x+2|=3-4a$.
10. Знайдіть найменше значення параметра a, при якому рівняння має розв'язок:
    1) $|2x-1|=4a+1$; 2) $|3x+3|=5a-7$.
11. Знайдіть найбільше ціле значення параметра a, при якому рівняння має розв'язок:
    1) $2|x-3|-a|3-x|=5$; 2) $3|x-2|+a|2-x|=-4$.
12. Знайдіть найменше ціле значення параметра a, при якому рівняння має розв'язок:
    1) $8|x-3|+a|3-x|=5$; 2) $3|x-2|-a|2-x|=-6$.
13. Визначте значення параметра m, при якому рівняння має точно чотири розв'язки:
    1) $|x(|x|-5)|=m$; 2) $|(x+1)(|x+1|-3)|=m$;
    3) $|2(5-|x|x)|=m$.
14. При якому найменшому цілому значенні параметра m рівняння $x^2-|16x-48|=m$ має чотири розв'язки?
15. При якому значенні параметра m рівняння $x^2-|14x-28|=m$ має один розв'язок?
16. Укажіть, скільки всього дійсних коренів має рівняння $x^3-3|x|=0$.
17. Знайдіть всі значення параметра a, при яких задана система рівнянь має єдиний розв'язок.
    1) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-4)^2=9, \\ x\cdot y=0; \end{cases}$
    3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ (x-7)^2+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-a)^2+y^2=4, \\ |y|=1-|x-12|. \end{cases}$

Розв'яжіть завдання (18–29), використовуючи складання рівнянь, нерівностей або їх систем.

18. Робітник повинен був за планом виготовити за декілька днів 72 деталі. Оскільки щодня він виготовляв на 2 деталі менше плану, то закінчив роботу через 3 дні після запланованого терміну. Скільки деталей в день повинен був виготовляти робітник за планом?
19. Три однакові комбайни, працюючи разом, зібрали врожай з першого поля, а потім два з них зібрали врожай з другого поля (іншої

площі). Уся робота зайняла 12 годин. Якби три комбайни виконали половину всієї роботи, а потім частину, що залишилася, виконав один з них, то робота зайняла б 20 годин. За який час два комбайни можуть зібрати врожай з першого поля?

20. Продуктивність першого верстата на 25% більша за продуктивність другого верстата. На другому верстаті виготовлено деталей на 4% більше, ніж на першому. На скільки відсотків час, витрачений робітником на виготовлення деталей на другому верстаті, більший за час, потрібний для цієї роботи на першому верстаті?

21. Перша труба наповнює басейн водою у два рази швидше, ніж друга. Якщо половину басейну наповнити через першу трубу, а частину, що залишилася, через другу, то для наповнення басейну буде потрібно 6 годин. За скільки годин можна наповнити басейн водою тільки через першу трубу?

22. Два велосипедисти виїжджають одночасно назустріч один одному з пунктів A і B, відстань між якими 30 км, і зустрічаються за годину. Не зупиняючись, вони продовжують шлях з тією самою швидкістю, і перший прибуває в пункт B на 1,5 години раніше, ніж другий у пункт A. Визначте швидкість першого велосипедиста.

23. Протягом 7 год 20 хв катер пройшов угору по річці 35 км і повернувся назад. Швидкість течії дорівнює 4 км за годину. З якою швидкістю катер ішов за течією?

24. Змішали 30%-вий розчин соляної кислоти з 10%-вим і одержали 600 г 15%-вого розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?

25. Є два сплави, що складаються з цинку, міді та олова. Відомо, що перший сплав містить 40% олова, а другий — 26% міді. Процентний вміст цинку в першому і в другому сплавах однаковий. Сплавивши 150 кг першого сплаву і 250 кг другого, одержали новий сплав, у якому виявилося 30% цинку. Визначте, скільки кілограмів олова міститься в новому сплаві.

26. Знайдіть таке двозначне число, у якому число одиниць на два більше від числа десятків, а добуток шуканого числа на суму його цифр дорівнює 144.

27. Біля дому посаджено берези та липи, причому загальна їх кількість більша за 14. Якщо кількість лип збільшити вдвічі, а кількість беріз збільшити на 18, то беріз стане більше. Якщо збільшити вдвічі кількість беріз, не змінюючи кількості лип, то лип все одно буде більше. Скільки беріз і скільки лип було посаджено?

28. Групу людей намагалися вишикувати в колону по 8 чоловік у ряд, але один ряд виявився неповним. Коли ту ж групу людей вишикували по 7 чоловік у ряд, то всі ряди виявилися повними, а число рядів виявилося на 2 більшим. Якби тих же людей вишикували по

5 чоловік в ряд, то рядів було б ще на 7 більше, причому один ряд був би неповним. Скільки людей було в групі?

29. У магазині продаються гвоздики і троянди. Гвоздика коштує 1 грн. 50 коп., троянда — 2 грн. На купівлю гвоздик і троянд можна витратити не більше 30 грн. 50 коп., при цьому число гвоздик не повинне відрізнятися від числа троянд більше ніж на 6. Необхідно купити максимально можливу сумарну кількість квітів, при цьому гвоздик потрібно купити якомога менше. Скільки гвоздик і скільки троянд можна купити за вказаних умов?

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Нагадаємо, що алгебра — розділ математики, присвячений вивченню буквених виразів і рівнянь. Довгий час алгебра була частиною науки про число — арифметики. Значну кількість задач, які виникають у процесі практичної діяльності людини, розв'язують однаковими способами. Використовуючи замість чисел букви, математики навчилися розв'язувати такі задачі в загальному вигляді. Цим шляхом і утворилася математична наука — алгебра.

Історично зачатки алгебри були відомі вавилонянам, єгиптянам і грекам задовго до нашої ери. Зберігся єгипетський папірус Ахмеса (XVII ст. до н. е.) з розв'язуванням алгебраїчних задач. Учені Вавилона (більше 4000 років тому) вміли знаходити наближене значення квадратного кореня з будь-якого натурального числа, а також розв'язувати квадратні рівняння. Це було пов'язано з розв'язуванням задач про знаходження площ земельних ділянок і з розвитком астрономії. Проте у вавилонян ще не було поняття від'ємного числа, і тому корінь квадратного рівняння міг бути тільки додатним.

Діофант, грецький математик, який жив у III ст. в Александрії, написав трактат «Арифметика», у якому він уже розв'язував лінійні та інші рівняння. У Середні віки особливо активно алгебра розвивалася в арабських країнах і Середній Азії.

Завдання, пов'язані з квадратними рівняннями, можна знайти і в працях індійських математиків V ст. Квадратні рівняння класифікував у трактаті «Алгебра» аль-Хорезмі. Він же навів і способи їх розв'язання.

Упродовж багатьох століть розвиток алгебри сильно гальмувався, тому що математикам довго не вдавалося ввести у свої дослідження доречні позначення. Тому виклад математичних робіт виглядав громіздко. Тільки починаючи із XVI ст. поступово до математики почали вводити сучасні позначення. Символи a^2, a^3, a^4 тощо вперше застосував французький учений Рене Декарт (1596–1650). Символ a^n для довільного числа n запропонував англійський учений Ісак Ньютон (1643–1727).

Завдяки дослідженням французького математика Франсуа Вієта (1540–1603) рівняння другого ступеня, третього і четвертого ступенів уперше стали розглядати в буквених позначеннях. Він увів буквені позначення для невідомих величин і коефіцієнтів рівнянь. Особливо цінував відкриті ним формули, названі згодом формулами Вієта. Проте Вієт визнавав тільки додатні корені. Лише в XVII ст., після робіт Р. Декарта, І. Ньютона й інших математиків, розв'язування квадратних та інших рівнянь набуло сучасного вигляду.

Ідея залежності величин теж бере початок від старогрецької науки. Але греки розглядали лише величини, що мають «геометричну» природу, і не ставили питання про загальне вивчення різних залежностей. Графічне зображення залежностей між величинами широко використовували Ґ. Ґалілей (1564–1642), П. Ферма (1601–1665) і Р. Декарт, який увів поняття змінної величини. Розвиток механіки і техніки привів до необхідності введення загального поняття функції, що зробив німецький філософ і математик Г. Лейбніц (1646–1716). Великі класи функцій вивчав у ході своїх досліджень І. Ньютон.

У 1718 р. учень Лейбніца, І. Бернуллі (1667–1748), дав означення функції, позбавлене геометричних образів. Наступний крок у розвитку поняття функції зробив його учень, член Петербурзької академії наук Л. Ейлер (1707–1783).

Після робіт ряду математиків (Ж. Фур'є (1768–1830), М. І. Лобачевський, П. Діріхле та ін.) було дано таке означення: «Змінна величина у називається функцією змінної величини x, якщо кожному значенню величини x відповідає єдине значення величини y». На сучасному етапі до слів «кожному значенню величини x» додають «що належить деякій множині», а замість змінних величин говорять про еле-

М. І. Лобачевський
(1792–1856)

П. Діріхле
(1805–1859)

менти цих множин. Цей підхід дозволяє розглядати з єдиної точки зору як числові функції, так і, наприклад, геометричні перетворення тощо.

Несумірність сторони квадрата та його діагоналі була відкрита в V ст. до н. е. в Стародавній Греції. Це відкриття показало, що для вимірювання геометричних величин недостатньо раціональних чисел. Тому грецькі математики відмовилися від вираження геометричних величин числами і стали розвивати геометричну алгебру (тому і зараз кажуть «квадрат числа», «куб числа» тощо). Грецький математик Евдокс (IV ст. до н. е.) розробив теорію відношень геометричних величин, що замінювала для старогрецьких математиків сучасну теорію дійсних чисел. В основу теорії Евдокса покладено ідею про нескінченну подільність відрізків та інших фігур.

Р. Декарт увів довільно вибраний одиничний відрізок, що дозволило йому виразити всі дії над числами через дії над відрізками. По суті, він уже працював з додатними дійсними числами. Лише в другій половині XIX ст. теорія дійсних чисел була зведена до теорії натуральних чисел.

Про поняття дійсного числа. Перші уявлення про числа формувалися поступово під впливом практики. З давніх часів числа застосовувались під час лічби і вимірювання величин.

Відповідь на запитання «Скільки елементів містить дана скінченна множина?» завжди виражається або натуральним числом, або числом «нуль». Отже, множина

$$\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$$

всіх невід'ємних чисел обслуговує всі потреби лічби.

Інакше з вимірюванням величин. Відстань між двома пунктами може дорівнювати 3,5 кілометра, площа кімнати — 16,45 квадратних метра тощо.

Історично додатні дійсні числа з'явились як відношення довжин відрізків.

З відкриттям несумірності діагоналі одиничного квадрата з його стороною стало зрозумілим, що відношення довжин відрізків не завжди можна виразити не тільки натуральним, а й раціональним числом. Щоб числове значення кожного відрізка при фіксованій одиниці виміру було визначене, потрібно було ввести нові числа — ірраціональні.

Усі практичні вимірювання величин мають лише наближений характер. Їх результат з потрібною точністю можна виразити за допомогою раціональних дробів або скінченних десяткових дробів. Наприклад, вимірюючи діагоналі квадрата із стороною 1 м з точністю до 1 см, ми виявимо, що її довжина наближено дорівнює 1,41 м. Вимірюючи з точністю до 1 мм, дістанемо, що ця довжина наближено дорівнює 1,414 м.

Проте в математиці часто відхиляються від наближеного характеру практичних вимірювань. Послідовний теоретичний підхід до вимірювання довжин відрізків приводить до необхідності розглядання нескінченних десяткових дробів. (Саме такими дробами є числа $\frac{2}{3}=0,666...$, $\sqrt{2}=1,41421356...$, $\pi = 3,14159265...$.)

Відношення довжини будь-якого відрізка до довжини відрізка, прийнятого за одиницю виміру, завжди можна виразити числом, поданим у вигляді нескінченного десяткового дробу.

Повна теорія дійсних чисел достатньо складна і не входить у програму середньої школи. Її зазвичай розглядають у курсах математичного аналізу. Проте з одним із способів її побудови ми ознайомимося в загальних рисах.

1. Покладають:

   а) кожному дійсному числу відповідає (як його запис) нескінченний десятковий дріб:

   $$x = a_0, a_1a_2...a_n...;$$

   б) кожний нескінченний десятковий дріб є записом дійсного числа. Але при цьому природно вважати десятковий дріб, що закінчується нескінченною послідовністю дев'яток, лише другим записом числа, поданим десятковим дробом, що закінчується нескінченною послідовністю нулів: $0,9999... = 1,0000...$; $12,765999... = 12,766000...$.
   Тільки вилучивши з розгляду десяткові дроби з дев'яткою в періоді, дістаємо взаємно однозначну відповідність між множиною дійсних чисел і множиною нескінченних десяткових дробів.
   Число a_0 — це *ціла частина* додатного числа x,
   $x - a_0 = 0,a_1a_2...a_n...$ — *дробова* частина числа x.
   Число $x_n = a_0,a_1a_2...a_n$ називають *десятковим наближенням x з точністю до 10^{-n} з недостачею*, а число $x'_n = x_n + 10^{-n}$ називають *десятковим наближенням з точністю до 10^{-n} з надлишком* для числа

   $$x = a_0,a_1a_2...a_n... .$$

   Якщо число x від'ємне, тобто

   $$x = -a_0,a_1a_2...a_n..., \text{ то вважають}$$
   $$x'_n = -a_0,a_1a_2...a_n \text{ і } x_n = x'_n - 10^{-n}.$$

2. Вводять *правило порівняння* двох дійсних чисел. За означенням число x менше від числа y, коли принаймні для одного n виконується нерівність $x_n < y_n$, де x_n і y_n — десяткові наближення з точністю до 10^{-n} з недостачею для чисел x і y. (Ми скористалися тим, що правило порівняння скінченних десяткових дробів уже відоме.)
3. Означають *арифметичні дії* над дійсними числами (при цьому також користуються тим, що ці дії вже означені для скінченних десяткових дробів).

Сумою двох дійсних чисел x і y (позначають: $x + y$) називають таке дійсне число z, що для будь-якого n виконуються нерівності

$$x_n + y_n < x + y < x'_n + y'_n.$$

У курсах математичного аналізу доводиться, що таке число існує і воно єдине.

Аналогічно *добутком* двох невід'ємних чисел x і y називають таке число z (позначають xy), що при будь-якому n виконуються нерівності

$$x_n y_n < xy < x'_n y'_n.$$

Таке число існує, і воно єдине.

Нагадаємо, що приклади виконання означених таким чином дій додавання і множення дійсних чисел було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Для дійсних чисел різних знаків, скориставшись тим, що добуток невід'ємних чисел $|x|$ і $|y|$ уже означений, покладають $xy = -|x|\cdot|y|$, а для чисел однакових знаків $xy = |x|\cdot|y|$ (зазвичай модулем кожного з чисел $a_0,a_1a_2...a_n...$ і $-a_0,a_1a_2...a_n...$ називають число $a_0,a_1a_2...a_n...$).

Віднімання означається як дія, обернена до додавання: *різницею* $x - y$ чисел x і y називається таке число z, що $y + z = x$. Ділення означають як дію, обернену до множення: *часткою* $x : y$ називається таке число z, що $yz = x$.

4. Показують, що нерівності та арифметичні операції, означені вище, зберігають основні властивості, притаманні їм у множині раціональних чисел.

Теорія дійсного числа була побудована відразу в декількох формах німецькими математиками Р. Дедекіндом (1831–1916), К. Вейєрштрассом (1815–1897) і Г. Кантором (1845–1918).

Розділ 2
СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

В основній частині цього розділу ви ознайомитеся з узагальненням поняття квадратного кореня — коренем n-го степеня та його властивостями, навчитеся розв'язувати ірраціональні рівняння та будувати графіки степеневих функцій і функції $y = \sqrt[n]{x}$ та використовувати їх властивості до розв'язування різноманітних задач.

У додатковій частині розділу ви зможете ознайомитися з методами розв'язування більш складних завдань з теми, які пропонують у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання чи державної підсумкової атестації з математики (це, у першу чергу, методи розв'язування ірраціональних нерівностей, застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь та методи розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметрами).

§ 10 КОРІНЬ n-го СТЕПЕНЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ФУНКЦІЯ $y=\sqrt[n]{x}$ ТА ЇЇ ГРАФІК

Таблиця 17

<table>
<tr><td colspan="3">1. Означення</td></tr>
<tr><td>Квадратний корінь</td><td colspan="2">Корінь n-го степеня</td></tr>
<tr><td>Квадратним коренем із числа a називається таке число b, квадрат якого дорівнює a.
Якщо $a = b^2$, то b — квадратний корінь із числа a.</td><td colspan="2">Коренем n-го степеня з числа a називається таке число b, n-й степінь якого дорівнює a.
Якщо $a = b^n$ $(n \in N,\ n \neq 1)$, то b — корінь n-го степеня з числа a.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Арифметичний корінь — невід'ємне значення кореня.
При $a \geqslant 0$: $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$ — позначення арифметичного значення кореня.</td></tr>
<tr><td>$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$</td><td colspan="2">$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Область допустимих значень (ОДЗ)</td></tr>
<tr><td>Квадратний корінь</td><td colspan="2">Корінь n-го степеня</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a}$ існує тільки при $a \geqslant 0$</td><td colspan="2">$\sqrt[2k]{a}$ існує тільки при $a \geqslant 0$ $(k \in N)$;
$\sqrt[2k+1]{a}$ існує при будь-яких значеннях a</td></tr>
<tr><td colspan="3">Запис розв'язків рівняння $x^n = a$ $(n \in N)$</td></tr>
<tr><td>$n = 2k + 1$ — непарне $(k \in N)$</td><td colspan="2">$n = 2k$ — парне $(k \in N)$</td></tr>
<tr><td>При будь-яких значеннях a рівняння $x^{2k+1} = a$ має єдиний корінь $x = \sqrt[2k+1]{a}$</td><td>При $a < 0$ рівняння $x^{2k} = a$ не має коренів</td><td>При $a \geqslant 0$ всі корені рівняння $x^{2k} = a$ можна записати так: $x = \pm\sqrt[2k]{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Приклади</td></tr>
<tr><td>Рівняння $x^5 = 3$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{3}$</td><td>Рівняння $x^8 = -7$ не має коренів</td><td>Рівняння $x^8 = 7$ має корені $x = \pm\sqrt[8]{7}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Властивості кореня n-го степеня</td></tr>
<tr><td>$n = 2k + 1$ — непарне число</td><td colspan="2">$n = 2k$ — парне число</td></tr>
<tr><td>1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$
2) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$</td><td colspan="2">$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}$</td></tr>
</table>

Продовження табл. 17

Для довільних значень n і k ($n \in N$, $n \neq 1$, $k \in N$)

3) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}}$

4) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}}$

5) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$

Наслідки

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}}$ — *винесення множника з-під знака кореня.*	При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}$ — *внесення множника під знак кореня.*

6) При $a \geqslant 0$, $b > 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

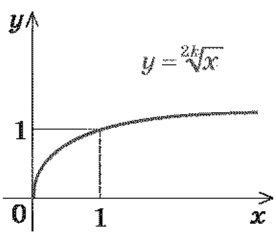
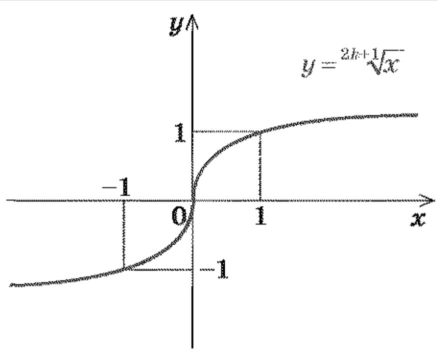
7) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}}$ — основна властивість кореня

Значення кореня з степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне й те саме натуральне число.

8) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\boxed{\text{якщо } a>b, \text{ то } \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}}$

4. Функція $y=\sqrt[n]{x}$ та її графік

Графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$)

n — парне ($n = 2k$, $k \in N$)	n — непарне ($n = 2k+1$, $k \in N$)
	

Продовження табл. 17

Властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$	
n — парне ($n = 2k$, $k \in N$)	n — непарне ($n = 2k + 1$, $k \in N$)
1. *Область визначення*: $x \geqslant 0$, тобто $D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.	1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число), тобто $D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.
2. *Область значень*: $y \geqslant 0$, тобто $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.	2. *Область значень*: $y \in \boldsymbol{R}$ (y — будь-яке дійсне число), тобто $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.
3. *Найбільшого значення функція* $y=\sqrt[2k]{x}$ *не має; найменше значення* — $y = 0$ (при $x = 0$).	3. Найбільшого і найменшого значень функція $y=\sqrt[2k+1]{x}$ не має.
4. *Функція ні парна, ні непарна.*	4. *Функція* **непарна**: $\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}$, *отже, графік функції симетричний відносно початку координат.*
5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\begin{cases}x=0,\\y=0;\end{cases}$ Ox $\begin{cases}y=0,\\x=0.\end{cases}$ **Графік проходить через початок координат.**	
6. *Проміжки зростання і спадання: на всій області визначення функція зростає.*	
7. *Проміжки знакосталості*: при $x > 0$ значення $y > 0$	7. *Проміжки знакосталості*: при $x > 0$ значення $y > 0$, при $x < 0$ значення $y < 0$

Пояснення й обґрунтування

1. Означення кореня n-го степеня. Поняття кореня квадратного з числа a вам відомо: це таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно означають і корінь n-го степеня з числа a, де n — довільне натуральне число, більше за 1.

> **Коренем n-го степеня з числа a називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Наприклад, корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, оскільки $3^3 = 27$; корінь третього степеня з числа -27 дорівнює -3, оскільки $(-3)^3 = -27$. Числа 2 і -2 є коренями четвертого степеня з 16, оскільки $2^4 = 16$ і $(-2)^4 = 16$.

При $n = 2$ та при $n = 3$ корені n-го степеня називають також відповідно квадратним та кубічним коренями.

Як і для квадратного кореня, для кореня n-го степеня вводять поняття арифметичного кореня.

***Арифметичним коренем n-го степеня з числа a* називається невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.**

При $a \geqslant 0$ для арифметичного значення кореня n-го степеня з числа a існує спеціальне позначення[1]: $\sqrt[n]{a}$; число n називають *показником кореня*, а саме число a — *підкореневим виразом*. Знак $\sqrt[n]{}$ і вираз $\sqrt[n]{a}$ називають також *радикалом*.

Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, записують так: $\sqrt[3]{27}=3$; те, що корінь четвертого степеня із 16 дорівнює 2, записують так: $\sqrt[4]{16}=2$. Але для запису того, що корінь четвертого степеня із 16 дорівнює -2, позначення немає.

При $a < 0$ значення кореня n-го степеня з числа a існує тільки при непарних значеннях n (оскільки не існує такого дійсного числа, парний степінь якого буде від'ємним числом). У цьому випадку корінь непарного степеня n із числа a теж позначають $\sqrt[n]{a}$. Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа -27 дорівнює -3, записують так: $\sqrt[3]{-27}=-3$. Оскільки -3 — від'ємне число, то $\sqrt[3]{-27}$ не є арифметичним значенням кореня. Але корінь непарного степеня з від'ємного числа можна виразити через арифметичне значення кореня за допомогою формули

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}}.$$

Щоб довести наведену формулу, зауважимо, що за означенням кореня n-го степеня ця рівність буде правильною, якщо $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=-a$. Дійсно, $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=(-1)^{2k+1}\cdot\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=-a$, а це й означає, що $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$. ○

Наприклад, $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$; $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-2$.

Зазначимо також, що ***значення $\sqrt[2k+1]{a}$ має той самий знак, що й число a***, оскільки при піднесенні до непарного степеня знак числа не змінюється.

Також за означенням кореня n-го степеня можна записати, що в тому випадку, коли існує значення $\sqrt[n]{a}$, виконується рівність

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a} \text{ і, зокрема, при } a \geqslant 0 \ \boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2=a}.$$

---

[1] Усі властивості виразів виду $\sqrt[n]{a}$ наведено для випадку $n \in N$, $n \geqslant 2$. При $n=1$ домовимося вважати, що $\sqrt[1]{a}=\sqrt{a}=a$.

2. Область допустимих значень виразів із коренями n-го степеня. Розв'язки рівняння $x^n = a$ ($n \in N$). Зазначимо, що

значення $\sqrt[2k+1]{a}$ — кореня непарного степеня з числа a — існує при будь-яких значеннях a.

Обґрунтуємо це, наприклад, для кореня третього степеня. Позначимо $\sqrt[3]{a} = x$. Тоді за означенням кореня n-го степеня $x^3 = a$ і значення $\sqrt[3]{a}$ буде існувати, якщо рівняння $x^3 = a$ матиме розв'язок.

Зобразивши графіки функцій $y = x^3$ і $y = a$ (рис. 78), бачимо, що при будь-яких значеннях a пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = x^3$ в одній точці. Отже, при будь-якому значенні a існує єдине значення $\sqrt[3]{a}$ (оскільки функція $y = x^3$ зростає і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$). ○

Аналогічне обґрунтування можна навести і для інших коренів непарного степеня (див. графіки і властивості функцій виду $y = x^{2k+1}$ у § 12).

Наведені міркування дозволяють записати розв'язки рівняння $x^n = a$ для непарних значень $n = 2k + 1$: **при будь-яких значеннях a рівняння $x^{2k+1} = a$ ($k \in N$) має єдиний корінь $x = \sqrt[2k+1]{a}$.**

Наприклад, рівняння $x^5 = 3$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{3}$, а рівняння $x^7 = -11$ має єдиний корінь $x = \sqrt[7]{-11}$ (ураховуючи, що $x = \sqrt[7]{-11} = -\sqrt[7]{11}$, корінь для рівняння $x^7 = -11$ можна записати так: $x = -\sqrt[7]{11}$).

Значення $\sqrt[2k]{a}$ — кореня парного степеня з числа a — існує тільки при $a \geqslant 0$.

Дійсно, у тому випадку, коли $\sqrt[2k]{a} = x$, за означенням кореня n-го степеня $a = x^{2k}$. Отже, $a \geqslant 0$.

Для квадратного кореня це можна також обґрунтувати, використовуючи відомий графік функції $y = x^2$.

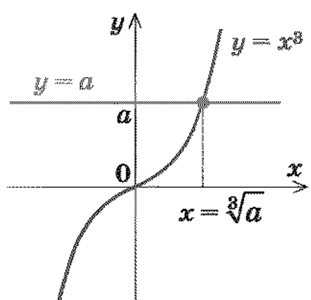


Рис. 78

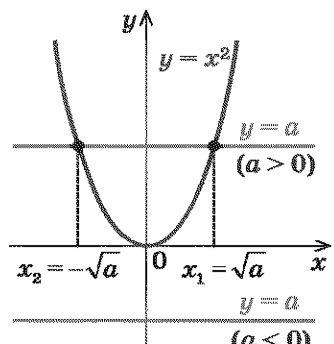


Рис. 79

- Нехай $\sqrt{a}=x$, тоді за означенням квадратного кореня $x^2 = a$ і значення $\sqrt{a}$ буде існувати, якщо рівняння $x^2 = a$ матиме розв'язок. Зобразивши графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$ (рис. 79), бачимо, що пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = x^2$ тільки при $a \geqslant 0$ (причому при $a > 0$ — у двох точках: $x_1=\sqrt{a}$ і $x_2=-\sqrt{a}$, а при $a = 0$ — тільки в одній точці $x = 0$). Отже, при будь-яких значеннях $a \geqslant 0$ існує значення $\sqrt{a}$, оскільки функція $y = x^2$ набуває всіх значень із проміжку $[0; +\infty)$. ○

Розглянемо розв'язки рівняння $x^n = a$ для парних значень $n = 2k$ ($k \in N$).

Рівняння $x^2 = a$ при $a < 0$ не має коренів, оскільки квадрат будь-якого числа не може бути від'ємним (на рисунку 79 пряма $y = a$ при $a < 0$ не перетинає графік функції $y = x^2$). Так само **рівняння $x^{2k} = a$** ($k \in N$) **при $a < 0$ не має коренів** (оскільки парний степінь будь-якого числа не може бути від'ємним).

При $a = 0$ **рівняння $x^{2k} = 0$ ($k \in N$) має єдиний корінь $x = 0$** (оскільки парний степінь будь-якого відмінного від нуля числа — число додатне, тобто не рівне нулю, а $0^{2k} = 0$).

При $a > 0$ за означенням кореня $2k$-го степеня $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=a$. Отже, $x=\sqrt[2k]{a}$ — корінь рівняння $x^{2k} = a$. Але $\left(-\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=a$, тому $x=-\sqrt[2k]{a}$ — теж корінь рівняння $x^{2k} = a$. Інших коренів це рівняння не має, оскільки властивості функції $y = x^{2k}$ аналогічні властивостям функції $y = x^2$: при $x \geqslant 0$ функція зростає, отже, значення a вона може набувати тільки при одному значенні аргументу $\left(x=\sqrt[2k]{a}\right)$. Аналогічно при $x \leqslant 0$ функція $y = x^{2k}$ спадає, тому значення a вона може набувати тільки при одному значенні аргументу $\left(x=-\sqrt[2k]{a}\right)$. Таким чином, **рівняння $x^{2k} = a$ при $a > 0$ має тільки два корені: $x=\pm\sqrt[2k]{a}$.**

Наприклад, рівняння $x^{10} = -1$ не має коренів, а рівняння $x^6 = 5$ має корені $x=\pm\sqrt[6]{5}$.

3. **Властивості кореня n-го степеня** можна обґрунтувати, спираючись на означення кореня n-го степеня.

1) Формула $\boxed{\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}}$ була обґрунтована в пункті 1 пояснень.

Обґрунтуємо інші формули, наведені в таблиці 17.

- Нагадаємо, що за означенням кореня n-го степеня для доведення рівності $\sqrt[n]{A}=B$ (при $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$) достатньо перевірити рівність $B^n = A$.

2) Вираз $\sqrt[n]{a^n}$ розглянемо окремо при $n = 2k + 1$ (непарне) і при $n = 2k$ (парне).

Якщо n — *непарне*, то враховуємо те, що вираз $\sqrt[n]{a^n}$ існує при будь-яких значеннях a і що знак $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$ збігається зі знаком a. Тоді за означенням кореня n-го степеня одержуємо

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}.$$

Якщо n — *парне*, то враховуємо те, що вираз $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}}$ позначає арифметичне значення кореня n-го степеня (отже, $\sqrt[2k]{a^{2k}} \geqslant 0$) і що $|a|^{2k} = a^{2k}$. Тоді

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}.$$

3) Формулу

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \text{ при } a \geqslant 0$$

обґрунтуємо, розглядаючи її справа наліво. Оскільки

$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$, то за означенням $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$.

4) Справедливість формули

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \text{ при } a \geqslant 0$$

випливає з рівності $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$.

5) Для обґрунтування формули

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

використовуємо рівність $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$.

6) Для обґрунтування формули

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ при } a \geqslant 0,\ b > 0$$

використовуємо рівність $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \dfrac{a}{b}$.

7) Властивість кореня

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a \geqslant 0$$

випливає з рівності $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$. ○

Наприклад, $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 3).

За допомогою формули $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$ можна одержати важливі наслідки: формули винесення множника з-під знака кореня або внесення множника під знак кореня.

Дійсно, при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}$. Розглядаючи одержану формулу зліва направо, маємо *формулу винесення невід'ємного множника з-під знака кореня:*

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}},$$

а справа наліво — *формулу внесення невід'ємного множника під знак кореня:*

$$\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}.$$

Наприклад, $\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{32\cdot 3}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=2\sqrt[5]{3}$.

8) Зазначимо ще одну властивість коренів n-го степеня:
для будь-яких невід'ємних чисел a і b

$$\boxed{\text{якщо } a > b, \text{ то } \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}}.$$

● Доведемо це методом від супротивного. Припустимо, що $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$. Тоді при піднесенні обох частин останньої нерівності з невід'ємними членами до n-го степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність $a \leqslant b$. Це суперечить умові $a > b$. Отже, наше припущення неправильне і $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$. ○

Наприклад, ураховуючи, що $21 > 16$, одержуємо $\sqrt[4]{21}>\sqrt[4]{16}$. Оскільки $\sqrt[4]{16}=2$, маємо, що $\sqrt[4]{21}>2$.

Узагальнення властивостей кореня n-го степеня[1]

Основна частина формул, які виражають властивості коренів n-го степеня, обґрунтована для невід'ємних значень підкореневих виразів. Але інколи доводиться виконувати перетворення виразів з коренями n-го степеня і в тому випадку, коли таких обмежень немає, наприклад добувати корінь квадратний (або в загальному випадку корінь парного степеня) з добутку ab від'ємних чисел $(a < 0,\ b < 0)$. Тоді $ab > 0$ і $\sqrt[2k]{ab}$ існує, проте формулою

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

скористатися не можна: вона обґрунтована тільки для невід'ємних значень a і b. Але у випадку $ab > 0$ маємо: $ab=|ab|=|a|\cdot|b|$ і тепер $|a|>0$ та $|b|>0$. Отже, для добування кореня з добутку $|a|\cdot|b|$ можна використати формулу (1).

[1] Цей матеріал є обов'язковим тільки для класів фізико-математичного профілю.

Тоді при $a < 0$, $b < 0$ можемо записати:

$$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a| \cdot |b|} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}.$$

Зазначимо, що одержана формула справедлива і при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, оскільки в цьому випадку $|a| = a$ і $|b| = b$. Отже,

$$\boxed{\text{при } ab \geqslant 0 \quad \sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}}.$$

Аналогічно можна узагальнити властивість 6.

$$\boxed{\text{При } \frac{a}{b} \geqslant 0 \quad \sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}}$$

Слід зазначити, що в тих випадках, коли обґрунтування основних формул можна повторити і для від'ємних значень a і b, такими формулами можна користуватися для будь-яких a і b (з ОДЗ лівої частини формули).

Наприклад, для коренів непарного степеня *для будь-яких значень a і b*

$$\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}. \qquad (2)$$

Дійсно, ліва і права частини цієї формули існують при будь-яких значеннях a та b і виконується рівність

$$\left(\sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}\left(\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = ab.$$

Тоді за означенням кореня $(2k + 1)$-го степеня виконується і рівність (2).

Наприклад, $\sqrt[3]{a^{15}b} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{b} = a^5\sqrt[3]{b}$ при будь-яких значеннях a і b.

Але деякими формулами не вдається скористатися для довільних значень a і b. Наприклад, якщо ми за основною властивістю кореня запишемо, що $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$ (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 2), то одержана рівність не є тотожністю, оскільки при $a = -1$ (ліва і права частини цієї рівності означені при всіх значеннях a) маємо $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[3]{-1}$, тобто $1 = -1$ — неправильну рівність.

Таким чином, при діленні показника кореня і показника степеня підкореневого виразу на парне натуральне число потрібно узагальнити основну властивість кореня. Для цього достатньо помітити, що $a^2 = |a|^2$, і тепер основа степеня підкореневого виразу $|a| \geqslant 0$, а отже, можна використати основну формулу (властивість 7): $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{|a|^2} = \sqrt[3]{|a|}$.

У загальному випадку, *якщо при використанні основної властивості кореня доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число, то в результаті основу степеня підкореневого виразу потрібно брати за модулем*, тобто

$$\boxed{\sqrt[2kn]{a^{2km}}=\sqrt[n]{|a|^m}}.$$

Аналогічно можна обґрунтувати й інші приклади використання основних властивостей коренів при довільних значеннях a і b (з ОДЗ лівої частини формули), які наведено в таблиці 18.

Таблиця 18

Основні формули для кореня n-го степеня (тільки для невід'ємних значень a і b, тобто $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$)	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких a і b з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — дано узагальнену формулу)	
	корінь непарного степеня	корінь парного степеня
1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	*можна*	*тільки для невід'ємних a*
2. $\sqrt[n]{a^n}=a$	*можна*	$\sqrt[2k]{a^{2k}}=\lvert a\rvert$
3. Корінь із кореня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$	*можна*	*можна*
4. Корінь із добутку $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	*можна*	$\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}$
і добуток коренів $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$		*можна*
5. Корінь із частки $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$	*можна*	$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}}$
і частка коренів $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$		*можна*
6. Основна властивість кореня: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$ і навпаки	можна, якщо всі корені непарного степеня (тобто перехід *непарний → непарний*)	Перехід *парний → парний можна* Перехід *непарний → парний* $\sqrt[n]{a^m}=\begin{cases}\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m\geqslant 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m<0\end{cases}$
$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$		$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{\lvert a^m\rvert}$

Продовження табл. 18

Основні формули для кореня n-го степеня (тільки для невід'ємних значень a і b, тобто $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$)	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких a і b з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — дано узагальнену формулу)	
	корінь непарного степеня	корінь парного степеня
7. Винесення множника з-під знака кореня $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	*можна*	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a \rvert \sqrt[n]{b}$
8. Внесення множника під знак кореня $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	*можна*	$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, \text{ при } a \geq 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b}, \text{ при } a < 0, \end{cases}$ де $b \geq 0$

Зауваження. Під терміном «перехід», який використано в таблиці 18, слід розуміти перехід у відповідній формулі від кореня n-го степеня до кореня m-го степеня.

Якщо n і m обидва парні, то такий перехід коротко охарактеризовано як «перехід парний → парний» (типу $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[8]{a^4}$).

Якщо n і m обидва непарні, то в таблиці записано, що виконано «перехід непарний → непарний» (типу $\sqrt[15]{a^9} = \sqrt[5]{a^3}$).

Якщо n — непарне число, а m — парне число, то в таблиці говориться, що виконано «перехід непарний → парний» (типу $\sqrt[5]{(-2)^3} = -\sqrt[10]{(-2)^6}$).

Таким чином, якщо за умовою завдання на перетворення виразів із коренями n-го степеня (ірраціональних виразів) відомо, що всі букви (які входять до запису заданого виразу) невід'ємні, то для перетворення цього виразу можна користуватися основними формулами, а якщо такої умови немає, то необхідно аналізувати ОДЗ заданого виразу і тільки після цього вирішувати, якими формулами користуватися — основними чи узагальненими.

4. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geq 2$) та її графік. Характеризуючи властивості функцій, найчастіше виділяють такі їх характеристики: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність чи непарність; 4) точки перетину з осями координат; 5) проміжки знакосталості; 6) проміжки зростання і спадання[1]; 7) найбільше і найменше значення функції.

---

[1] Проміжки зростання і спадання функції інколи називають проміжками монотонності функції.

Розглянемо властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$. Оскільки деякі властивості коренів непарного степеня не збігаються з властивостями коренів парного степеня, то для відповідних випадків ці корені будемо розглядати окремо.

Якщо n — **непарне** ($n = 2k + 1$, $k \in N$):

1. *Область визначення*. При непарних значеннях n ($n = 2k + 1$, $k \in N$) корінь непарного степеня з числа x існує при будь-яких значеннях x, тому областю визначення функції $y=\sqrt[2k+1]{x}$ є всі дійсні числа:
$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R.$$
2. При непарних значеннях n функція *непарна*, оскільки $\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}$, отже, *графік функції* $y=\sqrt[2k+1]{x}$ *симетричний відносно початку координат.*

Якщо n — **парне** ($n = 2k$, $k \in N$):

1. *Область визначення*. При парних значеннях n ($n = 2k$, $k \in N$) корінь парного степеня з числа x існує тільки при $x \geqslant 0$, тому областю визначення функції $y=\sqrt[2k]{x}$ є множина невід'ємних чисел:
$$D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty).$$
2. При парних значеннях n функція *ні парна, ні непарна* (тому що її область визначення несиметрична відносно початку координат).

3. Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то *графік функції* $y=\sqrt[n]{x}$ *завжди проходить через початок координат* (інших точок перетину з осями координат немає: при $y = 0$ з рівняння $\sqrt[n]{x}=0$ знову одержуємо тільки $x = 0$).

4. *На всій області визначення функція* $y=\sqrt[n]{x}$ *зростає*. Справді, для невід'ємних значень x_1 і x_2 за властивістю 8, якщо $x_1 > x_2$, то $\sqrt[n]{x_1}>\sqrt[n]{x_2}$, а це означає, що функція зростає при невід'ємних значеннях x. Отже, при парному значенні n функція дійсно зростає на всій області визначення. Для непарного значення n достатньо врахувати, що графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ симетричний відносно початку координат, і, відображуючи графік зростаючої при $x \geqslant 0$ функції, знову одержати графік зростаючої функції (див. нижче).

5. Для того щоб знайти *область значень* функції $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$), складемо рівняння
$$\sqrt[n]{x}=a.$$

Якщо n — непарне, то вираз $\sqrt[n]{x}$ набуває як невід'ємних, так і від'ємних значень, і рівняння $\sqrt[n]{x}=a$ при будь-якому a за означенням кореня n-го степеня має корінь $x=a^n$. Отже, для непарних n множина значень складається з усіх дійсних чисел: $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R$. Тому *найменшого і найбільшого значень функція $y=\sqrt[2k+1]{x}$ не має.*

6. *Проміжки знакосталості:*

при $x>0$ значення $y>0$ (оскільки в цьому випадку $y=\sqrt[2k+1]{x}$ — арифметичне значення кореня), а при $x<0$ значення $y<0$ (оскільки корінь непарного степеня з від'ємного числа є числом від'ємним).

Якщо n — парне, то вираз $\sqrt[n]{x}$ позначає арифметичне значення кореня $\left(\sqrt[n]{x}\geqslant 0\right)$, тому рівняння $\sqrt[n]{x}=a$ має корінь тільки при $a\geqslant 0$. Тоді для всіх $a\geqslant 0$ маємо $x=a^n$. Отже, для парних n множина значень складається з усіх невід'ємних чисел: $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.

Тому найбільшого значення функція $y=\sqrt[2k]{x}$ не має, а найменшого — $y=0$ — набуває при $x=0$.

6. *Проміжки знакосталості:*

при $x>0$ значення $y>0$ (оскільки $y=\sqrt[2k]{x}$ — арифметичне значення кореня).

Зазначимо також, що при $x=1$ маємо $y=1$, отже, графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ завжди проходить через точку (1; 1).

Наведене дослідження дозволяє побудувати графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ для непарних (рис. 80) і парних (рис. 81) значень n.

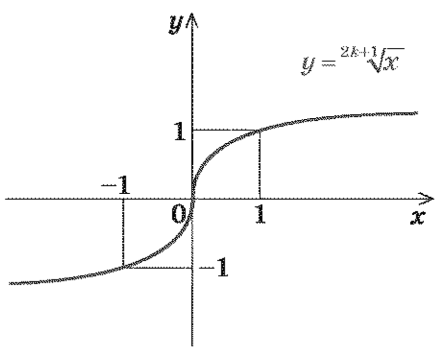


Рис. 80

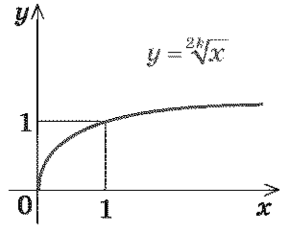


Рис. 81

На рисунку 82 в одній і тій самій системі координат зображено графіки функцій $y=\sqrt[3]{x}$ та $y=\sqrt[5]{x}$ і для порівняння графік функції $y=x$.

Зауважимо, що графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ можна побудувати, використовуючи графік функції $y = x^n$. Наприклад, функцію $y=\sqrt[3]{x}$ можна розглядати як обернену до функції $y = x^3$, а отже, побудувати її графік (рис. 83) як криву, симетричну кубічній параболі $y = x^3$ відносно прямої $y = x$. Аналогічно в пункті 2.4, використовуючи праву вітку параболи $y = x^2$, було побудовано графік функції $y=\sqrt{x}$ (рис. 50, с. 65).

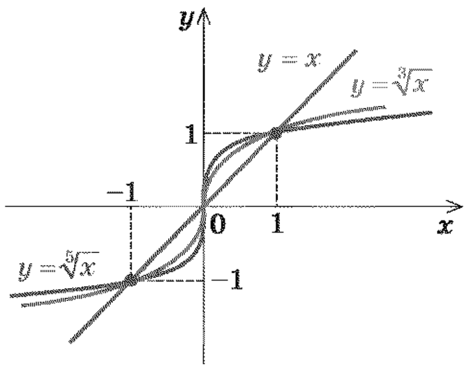


Рис. 82

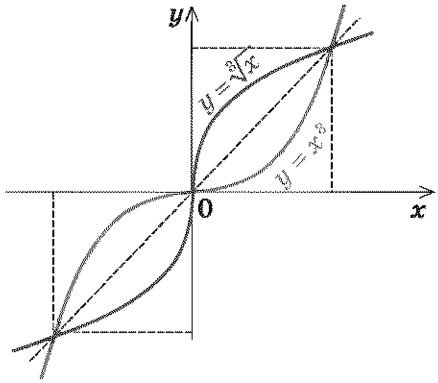


Рис. 83

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{625}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $\sqrt[4]{625}=5$, оскільки $5^4 = 625$. ◁ 2) ▶ $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$, оскільки $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$; ◁ 3) ▶ $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$, оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$. ◁	Використаємо означення кореня n-го степеня. Запис $\sqrt[n]{a}=b$ означає, що $b^n = a$.

Приклад 2 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{27\cdot 125}$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

Коментар

Використаємо властивості кореня n-го степеня і врахуємо, що кожну формулу, яка виражає ці властивості, можна застосувати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, для розв'язування завдання 1 скористаємося формулою $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, а для розв'язування завдання 2 — цією самою формулою, але записаною справа наліво, тобто:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ (\text{при } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

Розв'язання

1) ▶ $\sqrt[3]{27\cdot 125}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=3\cdot 5=15;$ ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot 8}=\sqrt[4]{16}=2.$ ◁

Приклад 3 Порівняйте числа:

1) $\sqrt[4]{50}$ і $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[3]{3}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $\sqrt{7}=\sqrt[4]{7^2}=\sqrt[4]{49}$. Оскільки $50>49$, то $\sqrt[4]{50}>\sqrt[4]{49}$, тобто $\sqrt[4]{50}>\sqrt{7}$; ◁ 2) ▶ $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$. Оскільки $27<81$, то $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{81}$, тобто $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$. ◁	Для порівняння заданих чисел у кожному завданні достатньо привести всі корені до одного показника кореня і врахувати, що *для будь-яких невід'ємних чисел* a *і* b, *якщо* $a>b$, *то* $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

Приклад 4 Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня n-го степеня:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$; 3*) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$.

Коментар

У завданні 1 урахуємо, що $\sqrt[5]{3^5}=3$, отже, після множення чисельника і знаменника заданого дробу на $\sqrt[5]{3^4}$ знаменник можна буде записати без знака радикала. У завданні 2 достатньо чисельник і знаменник заданого дробу домножити на різницю $\sqrt{5}-1\neq 0$ (щоб одержати в знаменнику формулу різниці квадратів).

Але виконання аналогічного перетворення в завданні 3 пов'язане з певними проблемами. ОДЗ виразу $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$ є $a\geqslant 0$ (і всі тотожні перетворення потрібно виконувати для всіх значень $a\geqslant 0$). Ми хочемо домножити чисельник і знаменник заданого дробу на вираз $\sqrt{a}-1$. За основною властивістю дробу це можна зробити тільки для випадку, коли $\sqrt{a}-1\neq 0$, тобто тільки при $a\neq 1$. Але $a=1$ входить до ОДЗ початкового виразу, і тому вибраний нами спосіб розв'язування приведе до звуження ОДЗ початкового виразу. Дійсно, якщо записати, що $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$, то ця рівність не є тотожністю, оскільки не виконується для $a = 1$ з ОДЗ початкового виразу. У цьому разі, щоб не припуститися помилок, можна користуватися таким орієнтиром: *якщо для тотожних перетворень* (чи для розв'язування рівнянь і нерівностей) *доводиться використовувати перетворення* (*чи формули*), *які призводять до звуження ОДЗ початкового виразу, то значення, на які звужується ОДЗ заданого виразу, слід розглянути окремо.*

Розв'язання

1) ▶ $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^4}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$. ◁

2) ▶ $\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\sqrt{5}-1$. ◁

3) ▶ Позначимо $A=\frac{1}{\sqrt{a}+1}$. Тоді при $a = 1$ одержуємо $A=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$.

При $a \neq 1$ $(a \geqslant 0)$ маємо $A=\frac{1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-1}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$.

Відповідь: при $a = 1$ $A=\frac{1}{2}$, при $a \neq 1$ $(a \geqslant 0)$ $A=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$

(тобто відповідь не можна записати однозначно). ◁

Приклад 5 Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$; 2) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$ при $a > 0$ і $b > 0$; 3*) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

Розв'язання

1) I спосіб

▶ $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{\left(\sqrt[6]{a}\right)^2-\left(\sqrt[6]{b}\right)^2}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=$

$=\frac{\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. ◁

II спосіб

▶ Позначимо $\sqrt[6]{a}=x$, $\sqrt[6]{b}=y$, де $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[3]{a}=\left(\sqrt[6]{a}\right)^2=x^2$ і $\sqrt[3]{b}=\left(\sqrt[6]{b}\right)^2=y^2$. Отже,

$\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}=$

$=x+y=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. ◁

Коментар

У завданні 1 ОДЗ заданого виразу: $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\neq 0$. Для невід'ємних значень a і b ми маємо право користуватися всіма основними формулами перетворення коренів (як зліва направо, так і справа наліво).

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ можна записати: $\sqrt[3]{a}=\left(\sqrt[6]{a}\right)^2$ і $\sqrt[3]{b}=\left(\sqrt[6]{b}\right)^2$. Тоді чисельник заданого дробу можна розкласти як різницю квадратів.

Для того щоб виділити в чисельнику різницю квадратів, можна також виконати заміну $\sqrt[6]{a}=x$; $\sqrt[6]{b}=y$.

2) ▶ $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$

$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. ◁

3) ▶ Позначимо $A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

При $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ $(\text{і } b+\sqrt{ab}\neq 0)$ маємо:

$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$

$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. ◁

При $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ $(\text{і } b+\sqrt{ab}\neq 0)$ маємо:

$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{-(-a)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}{-(-b)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}=$

$=\frac{-(\sqrt{-a})^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{-(\sqrt{-b})^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-a}(-\sqrt{-a}+\sqrt{-b})}{-\sqrt{-b}(\sqrt{-b}-\sqrt{-a})}=$

$=-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\sqrt{\frac{-a}{-b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Відповідь:

1) при $a\geqslant 0$ і $b>0$ $A=\sqrt{\frac{a}{b}}$;

2) при $a\leqslant 0$ і $b<0$ (з ОДЗ) $A=-\sqrt{\frac{a}{b}}$. ◁

У завданні 2 за даної умови $a>0$ і $b>0$, тому ми маємо право скористатися всіма основними формулами перетворення коренів. Тоді

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b},\quad a=(\sqrt{a})^2,\quad b=(\sqrt{b})^2.$$

У завданні 3 ОДЗ заданого виразу: $ab\geqslant 0$, $b+\sqrt{ab}\neq 0$. Але $ab\geqslant 0$ при $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ або $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0.\end{cases}$ При $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ ми маємо право користуватися всіма основними формулами перетворення коренів (як у завданні 2).

При $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ доведеться використати узагальнену формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ і врахувати, що при $a\leqslant 0$ одержуємо $(-a)\geqslant 0$. Тоді можна записати: $a=-(-a)=-(\sqrt{-a})^2$. Аналогічно при $b\leqslant 0$ можна записати $b=-(-b)=-(\sqrt{-b})^2$. Також слід урахувати, що при $a\leqslant 0$ і $b\leqslant 0$ маємо:

$$|a|=-a \text{ і } |b|=-b.$$

Записуючи відповідь, доцільно взяти до уваги, що $b=0$ не входить до ОДЗ заданого виразу.

Приклад 6* Спростіть вираз $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}$.

Коментар

В умові не сказано про те, що значення a невід'ємні, тому доведеться спочатку визначити ОДЗ заданого виразу.

Вираз $\sqrt[3]{a^2}$ існує при будь-яких значеннях a і є невід'ємним. Вираз a^4 також існує і невід'ємний при будь-яких значеннях a. Отже, при будь-яких значеннях a під знаком квадратного кореня буде міститися невід'ємний вираз $a^4\sqrt[3]{a^2}$, тобто заданий вираз існує при будь-яких значеннях a (ОДЗ: будь-яке $a \in R$), і його перетворення потрібно виконати на всій ОДЗ.

Можливими є декілька шляхів перетворення заданого виразу, наприклад: 1) спочатку розглянути корінь квадратний із добутку, а потім скористатися формулою кореня з кореня і основною властивістю кореня; 2) внести вираз a^4 під знак кубічного кореня, а потім теж використати формулу кореня з кореня і основну властивість кореня. На кожному з цих шляхів ураховуємо, що при будь-яких значеннях a значення $a^2 \geqslant 0$ і $a^4 \geqslant 0$ (а значить, для цих виразів можна користуватися основними формулами). Використовуючи основну властивість кореня, доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число 2. Тому в результаті основу степеня підкореневого виразу потрібно брати за модулем (оскільки $a \in R$).

Розв'язання

I спосіб

$$\blacktriangleright \sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2 \sqrt[6]{a^2} = a^2 \sqrt[6]{|a|^2} = a^2 \sqrt[3]{|a|}. \triangleleft$$

II спосіб

$$\blacktriangleright \sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12} \cdot a^2}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[6]{|a|^{14}} = \sqrt[3]{|a|^7} = \sqrt[3]{|a|^6 \cdot |a|} =$$

$$= \sqrt[3]{|a|^6}\sqrt[3]{|a|} = |a|^2 \sqrt[3]{|a|} = a^2 \sqrt[3]{|a|}. \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Дайте означення кореня n-го степеня з числа a. Наведіть приклади.
2. Дайте означення арифметичного кореня n-го степеня з числа a. Наведіть приклади.
3. При яких значеннях a існують вирази $\sqrt[2k]{a}$ та $\sqrt[2k+1]{a}$ $(k \in N)$?
4. Запишіть властивості кореня n-го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.
5*. Доведіть властивості кореня n-го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.
6*. Якими властивостями кореня n-го степеня можна користуватися при довільних значеннях букв (з ОДЗ лівої частини відповідної формули)? Наведіть приклади використання основних формул та їх узагальнень.
7. При яких значеннях a має корені рівняння:
   1) $x^{2k+1} = a$ $(k \in N)$; 2) $x^{2k} = a$ $(k \in N)$.
8. Запишіть усі розв'язки рівняння:
   1) $x^{2k+1} = a$ $(k \in N)$;
   2) $x^{2k} = a$ $(k \in N)$: а) при $a > 0$; б) при $a < 0$; в) при $a = 0$.
   Наведіть приклади таких рівнянь і розв'яжіть їх.

9. Побудуйте графік функції $y=\sqrt[2k]{x}$, де $k \in N$, та сформулюйте її властивості.

10. Побудуйте графік функції $y=\sqrt[2k+1]{x}$, де $k \in N$, та сформулюйте її властивості.

11*. Обґрунтуйте властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$):
1) для непарного значення n; 2) для парного значення n.

Вправи

1. Перевірте правильність рівності:
1°) $\sqrt[3]{64}=4$; 2°) $\sqrt[9]{-1}=-1$; 3) $\sqrt[10]{1024}=2$;
4°) $\sqrt[25]{0}=0$; 5°) $\sqrt[5]{-32}=-2$; 6°) $\sqrt[13]{1}=1$.

2°. Обчисліть:
1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[13]{-1}$;
4) $\sqrt[5]{32}$; 5) $\sqrt[3]{125}$; 6) $\sqrt[4]{81}$.

Знайдіть значення виразу (3–7).

3. 1°) $\sqrt[3]{8 \cdot 1000}$; 2°) $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$; 3) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; 4) $\sqrt[5]{48 \cdot 81}$.

4. 1) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$; 2) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; 3) $\sqrt[7]{8} \cdot \sqrt[7]{-16}$; 4) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{125}$.

5. 1) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{-5}}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[6]{16}}$.

6°. 1) $\sqrt[3]{7^3 \cdot 11^3}$; 2) $\sqrt[6]{2^6 \cdot 3^6}$; 3) $\sqrt[7]{3^7 \cdot 5^7}$; 4) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 10^5}$.

7°. 1) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 3^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$; 3) $\sqrt[4]{(0,1)^4 \cdot 3^8}$; 4) $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{30} \cdot 6^{20}}$.

8. Порівняйте числа:
1°) $\sqrt[9]{0,1}$ і 0; 2°) $\sqrt[11]{1,3}$ і 1; 3) $\sqrt[4]{23}$ і $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ і $\sqrt[3]{3}$.

9°. При яких x має зміст вираз:
1) $\sqrt[5]{5x+1}$; 2) $\sqrt[4]{2x-6}$; 3) $\sqrt[6]{x+2}$; 4) $\sqrt[8]{\frac{5}{x}}$.

10. Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня n-го степеня:
1) $\frac{3}{\sqrt[7]{2}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{7}-1}$; 3*) $\frac{1}{\sqrt{a}+3}$; 4*) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$.

11. Винесіть множник за знак кореня ($a > 0$, $b > 0$):
1) $\sqrt[5]{a^{11}b^7}$; 2) $\sqrt[4]{a^7b^{13}}$; 3) $\sqrt[3]{-27a^5b^{14}}$; 4) $\sqrt[6]{128a^9b^{17}}$.

12*. Винесіть множник за знак кореня:

1) $\sqrt[4]{a^4b^{14}}$; 2) $\sqrt[7]{a^9b^8}$; 3) $\sqrt[6]{64a^{12}b^7}$; 4) $\sqrt[8]{a^{17}b^9}$.

13. Внесіть множник під знак кореня ($a > 0$, $b > 0$):

1) $a\sqrt[3]{7}$; 2) $-b\sqrt[4]{ab}$; 3) $ab\sqrt[7]{5}$; 4) $ab^2\sqrt[6]{\frac{a}{b^{11}}}$.

14*. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{7}$; 2) $a^3\sqrt[7]{ab}$; 3) $ab\sqrt[6]{\frac{2b}{a^5}}$; 4) $-b\sqrt[8]{-3b^3}$.

15. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{a^8}$ при $a < 0$; 2) $\sqrt[5]{a^5}$ при $a < 0$;

3) $\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[8]{a^8}$ при $a > 0$; 4) $\sqrt[7]{a^7}+\sqrt[6]{a^6}$ при $a < 0$.

16*. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{2ab^3}\cdot\sqrt[4]{16a^3b^5}$; 2) $\sqrt[6]{ab^3c}\cdot\sqrt[6]{a^5b^4c}\cdot\sqrt[6]{b^5c^4}$;

3) $\sqrt[8]{a^6\sqrt[5]{a^4}}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{3a\sqrt[5]{2a^2}}}$.

17. Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}$; 2) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$;

3*) $\frac{\sqrt[3]{ab^2}-2\sqrt[6]{ab^5}+b}{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt{ab}}$, де $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$; 4*) $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[6]{xy}}$.

18°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = 7$; 2) $x^6 = 3$; 3) $x^5 = -5$;

4) $x^3 = -13$; 5) $x^4 = 16$; 6) $x^3 = -64$.

19. Побудуйте графік функції:

1°) $y=\sqrt[4]{x}$; 2°) $y=\sqrt[5]{x}$; 3°) $y=\sqrt[7]{x}$; 4°) $y=\sqrt[6]{x}$;

5) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 6) $y=-\sqrt[3]{x}$; 7) $y=\sqrt[4]{-x}$.

20. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt[3]{x}=2-x$; 2) $\sqrt{x}=6-x$; 3) $\sqrt[3]{x-2}=4-x$; 4) $\sqrt{-x}=x+2$.

Перевірте підстановкою, що значення x дійсно є коренем рівняння.

21*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 20, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

§ 11 ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Таблиця 19

<table>
<tr><td colspan="2">Поняття ірраціонального рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня, називають ірраціональними. Для того щоб розв'язати задане ірраціональне рівняння, його найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою деяких перетворень.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розв'язування ірраціональних рівнянь</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. За допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня</td></tr>
<tr><td>При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ)</td><td>При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, які відсіюють перевіркою</td></tr>
<tr><td>Приклад 1
Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-1}=2$.
▶ $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=2^3$,
$x-1=8$,
$x=9$.
Відповідь: 9. ◁</td><td>Приклад 2
Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+3}=x$.
▶ $\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=x^2$,
$x^2-2x-3=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$.
Перевірка. При $x=-1$ маємо: $\sqrt{1}=-1$ — неправильна рівність, отже, $x=-1$ — сторонній корінь.
При $x=3$ маємо: $\sqrt{9}=3$ — правильна рівність, отже, $x=3$ — корінь заданого рівняння.
Відповідь: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. За допомогою заміни змінних</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо до рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Приклад 3
Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=2$.
▶ Позначимо $\sqrt[3]{x}=t$. Тоді $\sqrt[3]{x^2}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=t^2$.
Одержуємо рівняння: $t^2+t=2$, $t^2+t-2=0$, $t_1=1$, $t_2=-2$.
Виконуємо обернену заміну: $\sqrt[3]{x}=1$, тоді $x=1$ або $\sqrt[3]{x}=-2$, звідси $x=-8$.
Відповідь: 1; –8. ◁</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Ірраціональними рівняннями називають такі рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня. Наприклад, $\sqrt{x-2}=5$, $\sqrt[3]{x}+x=2$ — ірраціональні рівняння.

Найчастіше розв'язування ірраціональних рівнянь ґрунтується на зведенні заданого рівняння за допомогою деяких перетворень до раціонального рівняння. Як правило, цього досягають піднесенням обох частин ірраціонального рівняння до одного й того самого степеня (часто декілька разів).

Слід ураховувати, що

при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).

Наприклад, рівняння $\sqrt[3]{x+7}=3$ (1)

рівносильне рівнянню $\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3=3^3$, (2)

тобто рівнянню $x+7=27$. Звідси $x=20$.

Для того щоб обґрунтувати рівносильність рівнянь (1) і (2), достатньо звернути увагу на те, що рівності $A=B$ і $A^3=B^3$ можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y=t^3$ є зростаючою (на рисунку 84 наведено її графік) і кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу t. Отже, усі корені рівняння (1) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (2), і навпаки, усі корені рівняння (2) будуть коренями рівняння (1). А це й означає, що рівняння (1) і (2) є рівносильними. Аналогічно можна обґрунтувати рівносильність відповідних рівнянь і у випадку піднесення обох частин рівняння до одного й того самого довільного непарного степеня.

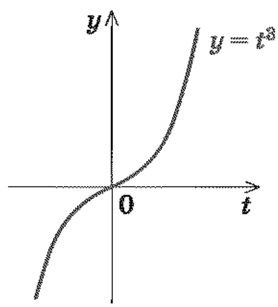


Рис. 84

Якщо для розв'язування ірраціонального рівняння обидві частини піднести до парного степеня, то одержуємо рівняння-наслідок — коли всі корені першого рівняння будуть коренями другого, але друге рівняння може мати корені, що не задовольняють заданому рівнянню. Такі корені називають *сторонніми* для заданого рівняння. **Щоб з'ясувати, чи є одержані числа коренями заданого рівняння, виконують перевірку цих розв'язків.**

Наприклад, для розв'язування рівняння

$$\sqrt{x}=2-x \qquad (3)$$

піднесемо обидві його частини до квадрата і одержимо рівняння

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=(2-x)^2. \qquad (4)$$

Ураховуючи, що $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, маємо $x = 4 - 4x + x^2$, тобто $x^2 - 5x + 4 = 0$. Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Виконуємо перевірку. При $x = 1$ рівняння (3) перетворюється на правильну рівність $\sqrt{1}=2-1$, $1 = 1$. Отже, $x = 1$ є коренем рівняння (3).

При $x = 4$ одержуємо неправильну рівність $\sqrt{4}=2-4$; $2 \neq -2$. Отже, $x = 4$ — сторонній корінь рівняння (3). Тобто до відповіді потрібно записати тільки $x = 1$.

Поява стороннього кореня пов'язана з тим, що рівність $A^2 = B^2$ можна одержати при піднесенні до квадрата обох частин рівності $A = B$ або рівності $A = -B$. Отже, виконання рівності $A^2 = B^2$ ще не гарантує виконання рівності $A = B$. Іншими словами, корені рівняння (4) не обов'язково є коренями рівняння (3) (проте кожен корінь рівняння (3) є коренем рівняння (4), оскільки при виконанні рівності $A = B$ обов'язково виконується і рівність $A^2 = B^2$).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}=4$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $\sqrt{5x-1}=4-\sqrt{x+3}$, $\left(\sqrt{5x-1}\right)^2=\left(4-\sqrt{x+3}\right)^2$, $5x-1=16-8\sqrt{x+3}+x+3$, $8\sqrt{x+3}=20-4x$; $2\sqrt{x+3}=5-x$, $\left(2\sqrt{x+3}\right)^2=(5-x)^2$, $4(x + 3) = 25 - 10x + x^2$, $x^2 - 14x + 13 = 0, x_1 = 1, x_2 = 13$. *Перевірка.* $x = 1$ — корінь $\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}=4, 4=4\right)$; $x = 13$ — сторонній корінь $\left(\sqrt{16}+\sqrt{64}\neq 4\right)$. *Відповідь:* 1. ◁	Ізолюємо один корінь і піднесемо обидві частини рівняння до квадрата — таким чином ми позбудемося одного кореня. Потім знову ізолюємо корінь і знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрата — унаслідок одержимо квадратне рівняння. Оскільки при піднесенні до квадрата можна одержати сторонні корені, то в кінці виконаємо перевірку отриманих розв'язків.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{8}{\sqrt{6-x}}-\sqrt{6-x}=2.$

Розв'язання	*Коментар*
▶ Нехай $\sqrt{6-x}=t$, де $t > 0$. Одержуємо $\frac{8}{t}-t=2$. Тоді $t^2+2t-8=0$. Звідси $t_1=2$, $t_2=-4$. $t_1=2$ — задовольняє умові $t>0$; $t_2=-4$ — не задовольняє умові $t>0$. Обернена заміна дає: $\sqrt{6-x}=2$, $6-x=4$, $x=2$. *Відповідь:* 2. ◁	Якщо в задане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді $(\sqrt{6-x})$, то зручно цей вираз із змінною позначити однією буквою — новою змінною $(\sqrt{6-x}=t)$. Якщо зафіксувати обмеження $t>0$ (арифметичне значення $\sqrt{6-x}\geqslant 0$ і в знаменнику не може стояти 0), то в результаті заміни і зведення одержаного рівняння до квадратного виконуватимуться рівносильні перетворення заданого рівняння. Можна було б не фіксувати обмеження $t>0$, але тоді в результаті перетворень отримаємо рівняння-наслідки й одержані розв'язки слід перевірити.

Приклад 3* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$

Розв'язання	*Коментар*
▶ Нехай $\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=u,\\ \sqrt{x+1}=v.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x-2=u^3,\\ x+1=v^2.\end{cases}$ Одержуємо систему $\begin{cases}u+v=3,\\ u^3-v^2=-3.\end{cases}$ З першого рівняння знаходимо $v=3-u$ і підставляємо в друге рівняння. $u^3-(3-u)^2=-3$, $u^3-(9-6u+u^2)=-3$, $u^3-u^2+6u-6=0$, $u^2(u-1)+6(u-1)=0$, $(u-1)(u^2+6)=0$. Ураховуючи, що $u^2+6\neq 0$, одержуємо $u=1$. Тоді $v=2$.	*Деякі ірраціональні рівняння, що містять кілька коренів n-го степеня, можна звести до систем раціональних рівнянь, замінивши кожен корінь новою змінною.* Після заміни $\sqrt[3]{x-2}=u$, $\sqrt{x+1}=v$ із заданого рівняння отримуємо тільки одне рівняння $u+v=3$. Для того щоб одержати друге рівняння, запишемо за означенням кореня n-го степеня $\begin{cases}x-2=u^3,\\ x+1=v^2.\end{cases}$ Віднімемо від першої рівності другу (щоб позбутися змінної x)

Маємо систему
$$\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=1,\\ \sqrt{x+1}=2.\end{cases}$$
З першого рівняння $x = 3$, що задовольняє і другому рівнянню.

Відповідь: 3. ◁

і одержимо ще один зв'язок між u і v: $u^3 - v^2 = -3$.

Одержану систему рівнянь розв'язуємо методом підстановки.

Слід звернути увагу на те, що, виконуючи обернену заміну, необхідно з'ясувати, чи існує значення x, яке задовольняє обом співвідношенням заміни.

При розв'язуванні систем рівнянь, що містять ірраціональні рівняння, найчастіше використовують традиційні методи розв'язування систем рівнянь: метод підстановки і метод заміни змінних. При цьому слідураховувати, що *заміна змінних* (*разом з оберненою заміною*) *завжди є рівносильним перетворенням* (звичайно, якщо при вибраній заміні не звужується ОДЗ заданого рівняння чи системи). Але якщо для подальшого розв'язування рівнянь, одержаних у результаті заміни, ми будемо користуватися рівняннями-наслідками, то можемо отримати сторонні розв'язки, і тоді одержані розв'язки доведеться перевіряти.

Приклад 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3.\end{cases}$

Розв'язання

▶ Заміна $\sqrt[4]{x}=u$ і $\sqrt[4]{y}=v$ дає систему
$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^2-v^2=3.\end{cases}$$
З першого рівняння цієї системи:
$$u = 3 - v.$$
Тоді з другого рівняння одержуємо
$$(3 - v)^2 - v^2 = 3.$$
Звідси $v = 1$, тоді $u = 2$.
Обернена заміна дає:
$$\sqrt[4]{y}=1,\ \text{отже, } y = 1;$$
$$\sqrt[4]{x}=2,\ \text{отже, } x = 16.$$

Відповідь: (16; 1). ◁

Коментар

Якщо позначити $\sqrt[4]{x}=u$ і $\sqrt[4]{y}=v$, то $\sqrt{x}=u^2$ і $\sqrt{y}=v^2$. Тоді задана система буде рівносильна алгебраїчній системі, яку легко розв'язати, а після оберненої заміни одержати систему найпростіших ірраціональних рівнянь.

Ураховуючи, що заміна та обернена заміна приводили до рівносильних систем, одержуємо розв'язки заданої системи, що збігаються з розв'язками системи $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=2,\\ \sqrt[4]{y}=1,\end{cases}$ тобто $\begin{cases}x=16,\\ y=1.\end{cases}$

Запитання для контролю

1. Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь. Наведіть приклади застосування відповідних методів.
2. Поясніть, чому для розв'язування рівнянь
$$\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}-4=0,\quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$$
зручно використати заміну змінної. Укажіть заміну для кожного рівняння.
3. Обґрунтуйте, що при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди одержують рівняння, рівносильне заданому.
4. Поясніть, чому при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені. Як відсіюють сторонні корені?

Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–6).

1. 1) $\sqrt{x-2}=1$; 2) $\sqrt{x-1}=-3$; 3) $\sqrt[3]{x-1}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^2+125}=5$; 5) $\sqrt[4]{2x-9}=3$.

2. 1) $\sqrt{x+1}=x-5$; 2) $\sqrt{3x-2}+x=4$; 3°) $\sqrt[3]{x-x^3}=-x$; 4) $\sqrt[3]{x^3+x}-x=0$.

3. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}=3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15}=5$;
3) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; 4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

4. 1) $\sqrt[3]{x^3-2x+6}=x$; 2) $\sqrt[3]{x-x^3+5}=-x$;
3) $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+10}}=2$; 4) $\sqrt[3]{2+\sqrt{x^2+3x-4}}=2$.

5. 1) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$; 2) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$;
3) $3\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[8]{x+1}=4$; 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x^2-1}=2$.

6*. 1) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

Розв'яжіть систему рівнянь (7–8).

7. 1) $\begin{cases}3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6,\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=7,\\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ 2x-y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=7,\\ \sqrt{x}\sqrt{y}=4.\end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2.\end{cases}$

§ 12 УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

12.1. Узагальнення поняття степеня

Таблиця 20

1. Степінь з натуральним і цілим показниками	
$\boxed{a^1 = a}$	$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}}$ $a \in R, n \in N\ (n \geqslant 2)$
$\boxed{a^0 = 1}$ $a \neq 0$	$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $a \neq 0,\ n \in N$
2. Степінь з дробовим показником	
$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $a \geqslant 0$	$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0, n \in N\ (n \geqslant 2), m \in Z$
3. Властивості степенів	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Пояснення й обґрунтування

1. Вам відомі поняття степенів з натуральним і цілим показниками. Нагадаємо їх означення та властивості.

Якщо n — натуральне число, більше за 1, то для будь-якого дійсного числа a $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}}$, тобто a^n дорівнює добутку n співмножників, кожен з яких дорівнює a.

При $n = 1$ вважають, що $\boxed{a^1 = a}$.

Якщо $a \neq 0$, то $\boxed{a^0 = 1}$ і $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$, де n — натуральне число.

Наприклад, $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Також вам відомі основні властивості степенів:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad a^m : a^n = a^{m-n};\quad (a^m)^n = a^{mn};\quad (ab)^n = a^n b^n;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.}$$

Нагадаємо ще одну корисну властивість

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

Узагальнимо *поняття* степеня для виразів виду $3^{\frac{2}{7}}$; $6^{0,2}$; $5^{-\frac{1}{3}}$ і т. п., тобто *для степенів з раціональними показниками*. Відповідне означення бажано дати так, щоб степені з раціональними показниками мали ті самі властивості, що й степені з цілими показниками.

Наприклад, якщо ми хочемо, щоб виконувалася властивість $(a^p)^q = a^{pq}$, то повинна виконуватися рівність $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$. Але за означенням кореня n-го степеня остання рівність означає, що число $a^{\frac{m}{n}}$ є коренем n-го степеня з числа a^m. Це приводить нас до такого означення.

Степенем числа $a > 0$ з раціональним показником $r=\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне число ($n > 1$), називається число $\sqrt[n]{a^m}$.

Також за означенням приймемо, що при $r > 0$

$$\boxed{0^r = 0}.$$

Наприклад, за означенням степеня з раціональним показником:

$$3^{\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{3^2}=\sqrt[7]{9};\qquad 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5};\qquad 2^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{8}};\qquad 0^{\frac{2}{5}}=0.$$

Зауваження. Значення степеня з раціональним показником $a^{\frac{m}{n}}$ (де $n > 1$) не означають при $a < 0$.

Це пояснюють тим, що раціональне число r можна подати різними способами у вигляді дробу: $r=\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$, де k — будь-яке натуральне число.

При $a > 0$, використовуючи основну властивість кореня і означення степеня з раціональним показником, маємо: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}=a^{\frac{mk}{nk}}$. Отже, при $a > 0$ значення a^r не залежить від форми запису r.

При $a < 0$ ця властивість не зберігається. Наприклад, якщо $r=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, то повинна виконуватися рівність $a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{6}}$. Але при $a = -1$ одержуємо: $a^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$; $a^{\frac{2}{6}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1\neq-1$, тобто при від'ємних значеннях a маємо: $a^{\frac{1}{3}}\neq a^{\frac{2}{6}}$. Через це означення степеня $a^{\frac{m}{n}}$ (m — ціле, n — натуральне, не рівне 1) для від'ємних значень a не вводять.

Покажемо тепер, що для введеного означення степеня з раціональним показником зберігаються всі властивості степенів з цілими показниками (відмінність полягає в тому, що наведені далі властивості є правильними тільки для додатних основ).

Для будь-яких раціональних чисел r і s та будь-яких додатних чисел a і b виконуються рівності:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;
3) $(a^r)^s = a^{rs}$;
4) $(ab)^r = a^r b^r$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Для доведення цих властивостей достатньо скористатися означенням степеня з раціональним показником і доведеними в § 10 властивостями кореня n-го степеня.

● Нехай $r = \frac{m}{n}$ і $s = \frac{p}{q}$, де n і q — натуральні числа (більші за 1), а m і p — цілі.
Тоді при $a > 0$ і $b > 0$ маємо:

1) $a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s}$;

2) $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s = \sqrt[n]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot s} = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}$. ○

Поняття степеня з ірраціональним показником. Опишемо в загальних рисах, як можна означити число a^{α} для ірраціональних α, коли $a > 1$. Наприклад, пояснимо, як можна розуміти значення $2^{\sqrt{3}}$.

Ірраціональне число $\sqrt{3}$ можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу $\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots$. Розглянемо десяткові наближення числа $\sqrt{3}$ з недостачею і надлишком:

$$1<\sqrt{3}<2;$$
$$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8;$$
$$1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74;$$
$$1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733;$$
$$1{,}7320<\sqrt{3}<1{,}7321;$$
$$1{,}73205<\sqrt{3}<1{,}73206;$$
$$1{,}732050<\sqrt{3}<1{,}732051;$$
$$\ldots$$

Будемо вважати, що коли $r<\sqrt{3}<s$ (де r і s — раціональні числа), то значення $2^{\sqrt{3}}$ розміщується між відповідними значеннями 2^r і 2^s, а саме: $2^r<2^{\sqrt{3}}<2^s$. Знайдемо за допомогою калькулятора наближені значення 2^r і 2^s, вибираючи як r і s наближені значення $\sqrt{3}$ з недостачею і надлишком відповідно. Одержуємо співвідношення:

$$2^1<2^{\sqrt{3}}<2^2;$$
$$2^{1{,}7}\approx 3{,}2490096<2^{\sqrt{3}}<2^{1{,}8}\approx 3{,}4822022;$$
$$2^{1{,}73}\approx 3{,}3172782<2^{\sqrt{3}}<2^{1{,}74}\approx 3{,}3403517;$$
$$2^{1{,}732}\approx 3{,}3218801<2^{\sqrt{3}}<2^{1{,}733}\approx 3{,}3241834;$$
$$2^{1{,}7320}\approx 3{,}3218801<2^{\sqrt{3}}<2^{1{,}7321}\approx 3{,}3221104;$$
$$2^{1{,}73205}\approx 3{,}3219952<2^{\sqrt{3}}<2^{1{,}73206}\approx 3{,}3220182;$$
$$2^{1{,}732050}\approx 3{,}3219952<2^{\sqrt{3}}<2^{1{,}732051}\approx 3{,}3219975.$$
$$\ldots$$

Як бачимо, значення 2^r і 2^s наближаються до одного й того самого числа 3,32199... . Це число і вважають степенем $2^{\sqrt{3}}$. Отже, $2^{\sqrt{3}}=3{,}32199\ldots$.

Значення $2^{\sqrt{3}}$, обчислене на калькуляторі, таке: $2^{\sqrt{3}}\approx 3{,}321997$.

Можна довести, що завжди, коли ми вибираємо раціональні числа r, які з недостачею наближаються до ірраціонального числа α, і раціональні числа s, які з надлишком наближаються до цього самого ірраціонального числа α, для будь-якого $a>1$ існує, і притому тільки одне, число y, більше за всі a^r і менше за всі a^s. Це число y за означенням є a^α.

Аналогічно означають і степінь з ірраціональним показником α для $0<a<1$, тільки у випадку, коли $r<\alpha<s$ при $0<a<1$, вважають, що $a^s<a^\alpha<a^r$. Крім того, як і для раціональних показників, за означенням вважають, що $1^\alpha=1$ для будь-якого α і $0^\alpha=0$ для всіх $\alpha>0$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1) $\sqrt[3]{7^5}$; 2) $\sqrt[4]{5^{-3}}$; 3) $\sqrt[7]{a^2}$ при $a \geqslant 0$; 4*) $\sqrt[7]{a^2}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ► $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$; ◁ 2) ► $\sqrt[4]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{4}}$; ◁ 3) ► при $a \geqslant 0$ $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$; ◁ 4) ► $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7]{\lvert a\rvert^2} = \lvert a\rvert^{\frac{2}{7}}$. ◁	За означенням степеня з раціональним показником для $a > 0$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. (1) Для завдання 3 врахуємо, що вираз $a^{\frac{2}{7}}$ означений також і при $a = 0$. У завданні 4 при $a < 0$ ми не маємо права користуватися формулою (1). Але якщо врахувати, що $a^2 = \lvert a\rvert^2$, то для основи $\lvert a\rvert$ формулою (1) уже можна скористатися, оскільки $\lvert a\rvert \geqslant 0$.

Приклад 2 Обчисліть: 1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $128^{-\frac{2}{7}}$; 3*) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ► $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$; ◁ 2) ► $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2} =$ $= 2^{-2} = \frac{1}{4}$; ◁ 3*) ► $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не існує, оскільки степінь $a^{\frac{1}{3}}$ означений тільки при $a \geqslant 0$. ◁	Використовуємо означення степеня з раціональним показником: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де $a > 0$, а при виконанні завдання 3 враховуємо, що вираз $a^{\frac{m}{n}}$ не означено при $a < 0$.

Приклад 3 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$; 2*) $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ► $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} =$	Оскільки задані приклади вже містять вирази $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, то $a \geqslant 0$,

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}; \lhd$$

2*) ▶ $$\frac{x+27}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+3^3}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}+3\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9\right)}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=x^{\frac{1}{3}}+3. \lhd$$

$b \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Тоді в завданні 1 невід'ємні числа a і b можна подати як квадрати: $a=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, $b=\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ і використати формулу різниці квадратів: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, а в завданні 2 подати невід'ємне число x як куб: $x=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$ і використати формулу розкладу суми кубів:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x^2}=1$; 2*) $x^{\frac{2}{3}}=1$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $\sqrt[3]{x^2}=1$. ОДЗ: $x \in R$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. *Відповідь:* ± 1. ◁ 2*) ▶ $x^{\frac{2}{3}}=1$. ОДЗ: $x \geqslant 0$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо $x = 1$. *Відповідь:* 1. ◁	Область допустимих значень рівняння $\sqrt[3]{x^2}=1$ — усі дійсні числа, а рівняння $x^{\frac{2}{3}}=1$ — тільки $x \geqslant 0$. При піднесенні обох частин рівняння до куба одержуємо рівняння, рівносильне заданому на його ОДЗ. Отже, першому рівнянню задовольняють усі знайдені корені, а другому — тільки невід'ємні. (У завданні 1 також ураховано, що $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3=x^2$, а в завданні 2 — що $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3=x^{\frac{2}{3}\cdot 3}=x^2$.)

Запитання для контролю

1. Дайте означення степеня з натуральним показником. Наведіть приклади обчислення таких степенів.
2. Дайте означення степеня з цілим від'ємним показником та з нульовим показником. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях a існують значення виразів a^0 та a^{-n}, де $n \in N$?

3. Дайте означення степеня з раціональним показником $r = \frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, не рівне **1**. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях a існують значення виразу $a^{\frac{m}{n}}$? Укажіть область допустимих значень виразів $a^{\frac{2}{5}}$ і $a^{-\frac{2}{5}}$.
4. Запишіть властивості степенів з раціональними показниками. Наведіть приклади використання цих властивостей.
5*. Обґрунтуйте властивості степенів з раціональними показниками.
6*. Поясніть на прикладі, як можна ввести поняття степеня з ірраціональним показником.

Вправи

1°. Подайте вираз у вигляді кореня з числа:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $3^{-\frac{2}{5}}$; 3) $5^{0,25}$; 4) $4^{-\frac{3}{7}}$; 5) $2^{1,5}$; 6) $7^{-\frac{2}{3}}$.

2. Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1°) $\sqrt[6]{3^5}$; 2°) $\sqrt[5]{4}$; 3°) $\sqrt{7^{-9}}$;

4) $\sqrt[9]{a^{-2}}$ при $a > 0$; 5) $\sqrt[4]{2b}$ при $b \geqslant 0$; 6*) $\sqrt[11]{c^4}$.

3°. Чи має зміст вираз:

1) $(-3)^{\frac{1}{2}}$; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $4^{\frac{2}{7}}$; 4) 0^{-5}?

4. Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $x^{\frac{1}{5}}$; 2) x^{-3}; 3) $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$;

4) $(x+3)^{\frac{3}{7}}$; 5) $(x^2-1)^0$; 6) x^3-5.

5. Знайдіть значення числового виразу:

1) $243^{0,4}$; 2) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{5}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$;

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 81^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$; 6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$;

7) $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3}\right) : 49^{-\frac{1}{2}}$.

6. Розкладіть на множники:

1) $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$; 2) $a - a^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 + 3^{\frac{1}{2}}$; 4) $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

7. **Скоротіть дріб:**

1) $\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; 2) $\frac{p^{\frac{1}{2}}-5}{p-25}$; 3) $\frac{c+c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+d}{c^{\frac{3}{2}}-d^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\frac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$.

Спростіть вираз (8–9).

8. 1) $\left(1+c^{\frac{1}{2}}\right)^2-2c^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 4) $\left(k^{\frac{1}{4}}+l^{\frac{1}{4}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}+l^{\frac{1}{8}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}-l^{\frac{1}{8}}\right)$.

9. 1) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; 2) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\frac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$; 4) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

10. **Розв'яжіть рівняння:**

1) $x^{\frac{3}{5}}=1$; 2) $x^{\frac{1}{7}}=2$; 3) $x^{\frac{2}{5}}=2$; 4) $\sqrt[5]{x^2}=2$.

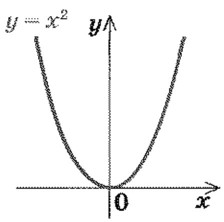
12.2. Степенева функція, її властивості та графік

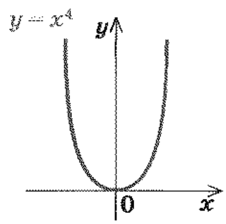
Означення. Функція виду $y = x^\alpha$, де α — будь-яке дійсне число, називається *степеневою функцією*.

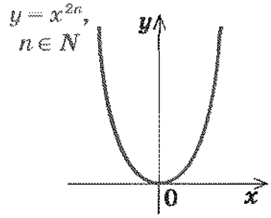
Графіки і властивості

Графік

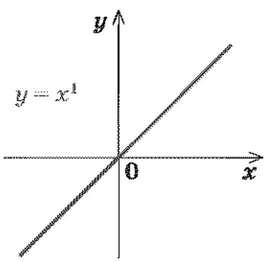
1. $y = x^\alpha$, α — парне натуральне число

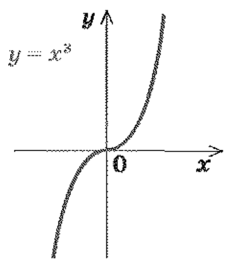


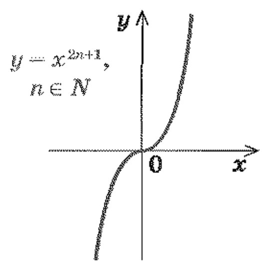




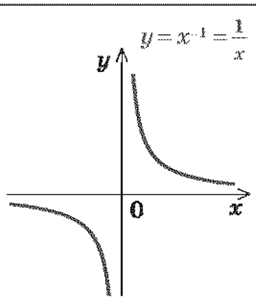
2. $y = x^\alpha$, α — непарне натуральне число

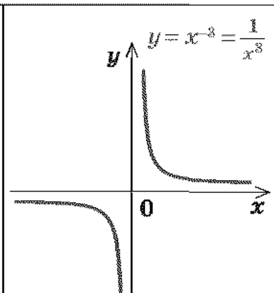


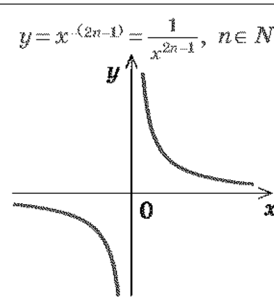




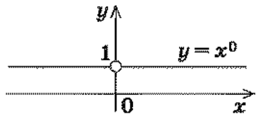
3. $y = x^\alpha$, α — непарне від'ємне число

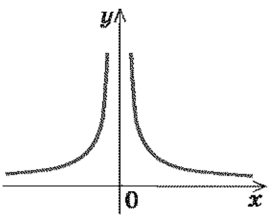
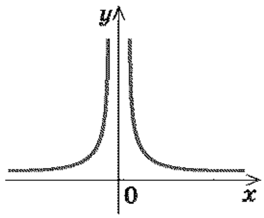
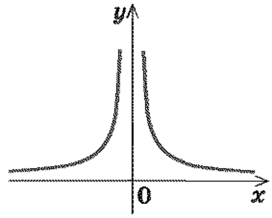
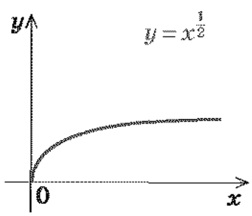
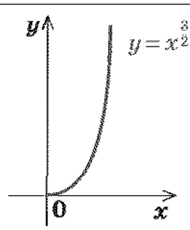
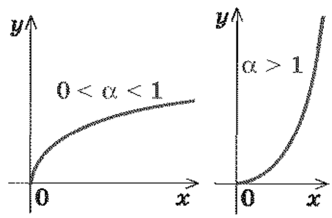
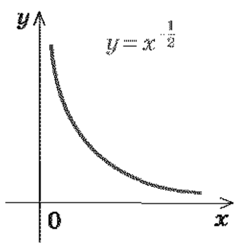
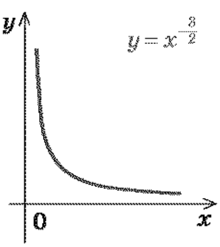
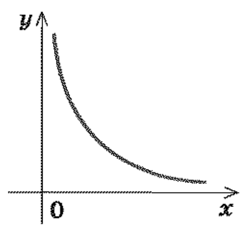






Таблиця 21

	Особливий випадок ($\alpha = 0$)			
	Якщо $\alpha = 0$**, то** $y = x^{\alpha} = x^{0} = 1$ **(при** $x \neq 0$**).**			
	функції $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)			
	Властивості			
	$D(y)$	$E(y)$	парність і непарність	зростання і спадання
	$(y = x^{2n},\ n \in N)$			
	R	$[0;\ +\infty)$	Парна	Спадає на проміжку $(-\infty;\ 0]$, зростає на проміжку $[0;\ +\infty)$
	($y = x$ та $y = x^{2n+1},\ n \in N$)			
	R	R	Непарна	Зростає
	$\left(y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}},\ n \in N\right)$			
	$x \neq 0$	$y \neq 0$	Непарна	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$

<table>
<tr><td colspan="3">Графіки і властивості</td></tr>
<tr><td colspan="3">Графік</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. $y = x^{\alpha}$, α — парне від'ємне число</td></tr>
<tr>
<td>$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
</td>
<td>$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$
</td>
<td>$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in N$
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">5. $y = x^{\alpha}$,</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>$y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — неціле)
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">6. $y = x^{\alpha}$,</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>$y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — неціле)
</td>
</tr>
</table>

Продовження табл. 21

функції $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)			
Властивості			
$D(y)$	$E(y)$	**парність і непарність**	**зростання і спадання**
$\left(y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}},\ n \in N\right)$			
$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	**Парна**	**Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$**
α — **неціле додатне число**			
$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	**Ні парна, ні непарна**	**Зростає**
α — **неціле від'ємне число**			
$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	**Ні парна, ні непарна**	**Спадає**

Пояснення й обґрунтування

Степеневими функціями називають функції виду $y = x^\alpha$, де α — будь-яке дійсне число.

З окремими видами таких функцій ви вже ознайомилися в курсі алгебри 7–9 класів. Це, наприклад, функції $y = x^1 = x$, $y = x^2$, $y = x^3$. При довільному натуральному α графіки і властивості функції $y = x^\alpha$ аналогічні відомим вам графікам і властивостям указаних функцій.

Описуючи властивості степеневих функцій, виділимо ті характеристики функцій, які ми використовували в § 10: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність чи непарність; 4) точки перетину з осями координат; 5) проміжки знакосталості; 6) проміжки зростання і спадання; 7) найбільше та найменше значення функції.

1. **Функція $y = x^\alpha$ (α — парне натуральне число).** Якщо α — парне натуральне число, то функція $y = x^{2n}$, $n \in N$, має властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y = x^2$.

Дійсно, *область визначення* функції $y = x^{2n}$: $D(y) = R$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Функція *парна*: якщо $f(x) = x^{2n}$, то $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$. Отже, графік функції $y = x^{2n}$ симетричний відносно осі Oy.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік функції $y = x^{2n}$ завжди проходить через початок координат.

На проміжку $[0; +\infty)$ *функція зростає.*

● Дійсно, для невід'ємних значень при $x_2 > x_1$ ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$) одержуємо $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, оскільки, як відомо з курсу алгебри 9 класу, при піднесенні обох частин правильної нерівності з невід'ємними членами до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність. ○

На проміжку $(-\infty; 0]$ *функція спадає.*

● Дійсно, для недодатних значень x_1 і x_2 ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$), якщо $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (і тепер $-x_1 \geqslant 0$, $-x_2 \geqslant 0$). Тоді $(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n}$, отже, $x_2^{2n} < x_1^{2n}$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. ○

Для того щоб знайти область значень функції $y = x^{2n}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{2n} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \geqslant 0$ (тоді $x = \pm\sqrt[2n]{a}$) і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції: $y \geqslant 0$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Таким чином, для всіх дійсних значень x значення $y \geqslant 0$. *Найменше значення* функції дорівнює нулю ($y = 0$ при $x = 0$). *Найбільшого значення функція не має.*

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{2n} = 1$.

Ураховуючи властивості функції $y = x^{2n}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 85).

2. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — непарне натуральне число). Якщо α — непарне натуральне число ($\alpha = 2n - 1$, $n \in N$), то властивості функції $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, аналогічні властивостям функції $y = x^3$.

Дійсно, *область визначення* функції $y = x^{2n-1}$, $n \in N$: $D(y) = R$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Функція *непарна*: якщо $f(x) = x^{2n-1}$, то $f(-x) = (-x)^{2n-1} = -x^{2n-1} = -f(x)$. Отже, графік функції симетричний відносно початку координат.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік функції $y = x^{2n-1}$ завжди проходить через початок координат.

На всій області визначення функція зростає.

● Дійсно, при $x_2 > x_1$ одержуємо $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, оскільки при піднесенні обох частин правильної нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність. ○

Для знаходження області значень функції $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{2n-1} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \in R$ (при $n = 1$ одержуємо $x = a$, а при $n \neq 1$, $n \in N$, одержуємо $x = \sqrt[2n-1]{a}$). Отже, область значень заданої функції: $y \in R$, тобто $E(y) = R = (-\infty; +\infty)$.

Тому *найменшого і найбільшого значень функція не має.*

Проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y = x^{2n-1} > 0$,

при $x < 0$ значення $y = x^{2n-1} < 0$.

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{2n-1} = 1$.

Як відомо з курсу алгебри та геометрії, графіком функції $y = x^1 = x$ є пряма, яка проходить через початок координат (рис. 86), а при інших непарних натуральних α функція $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, має графік, аналогічний графіку функції $y = x^3$ (рис. 87).

3. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — непарне від'ємне число). Якщо α — непарне від'ємне число, то функція $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, має властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y = \frac{1}{x}$.

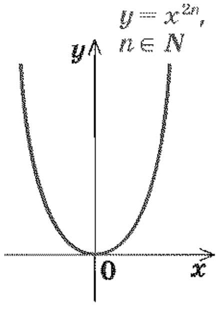


Рис. 85

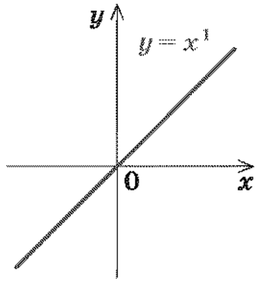
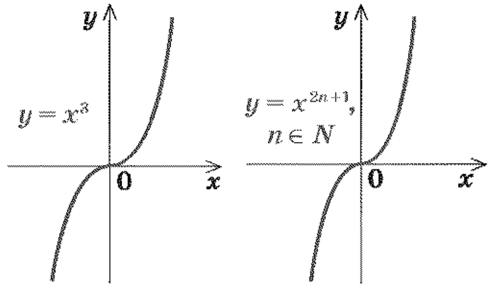


Рис. 86



а *б*

Рис. 87

Дійсно, область визначення функції $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$: $x \neq 0$, тобто

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x, крім $x = 0$.

Функція *непарна*: при $x \neq 0$, якщо $f(x) = x^{-(2n-1)}$, то

$$f(-x) = (-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)} = -f(x).$$

Отже, графік функції симетричний відносно початку координат.

Ураховуючи, що $x \neq 0$ і $y \neq 0$ $\left(y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}} \neq 0\right)$, одержуємо, що *графік функції $y = x^{-(2n-1)}$ не перетинає осі координат.*

На проміжку $(0; +\infty)$ *функція спадає.*

Дійсно, для додатних значень при $x_2 > x_1$ ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) одержуємо $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, але тоді $\frac{1}{x_2^{2n-1}} < \frac{1}{x_1^{2n-1}}$, отже, $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$. ○

На проміжку $(-\infty; 0)$ *функція теж спадає*. Це випливає з того, що її графік симетричний відносно початку координат.

Наведемо також і аналітичне обґрунтування: якщо $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ і $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (і тепер $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Тоді за обґрунтованим вище $(-x_2)^{-(2n-1)} > (-x_1)^{-(2n-1)}$, отже, $-x_2^{-(2n-1)} > -x_1^{-(2n-1)}$. Звідси $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$. ○

Для того щоб знайти *область значень* функції $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{-(2n-1)} = a$, тобто $\frac{1}{x^{2n-1}} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \neq 0$ (тоді $x = \sqrt[2n-1]{\frac{1}{a}}$ при $n \neq 1$ і $x = \frac{1}{a}$ при $n = 1$) і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції: $y \neq 0$, тобто $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Тому найменшого і найбільшого значень функція не має.

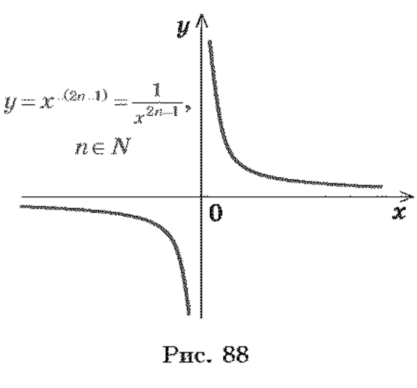


Рис. 88

Проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y = x^{-(2n-1)} > 0$, а при $x < 0$ значення

$$y = x^{-(2n-1)} < 0.$$

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{-(2n-1)} = 1$.

Ураховуючи властивості функції $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 88).

4. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — парне від'ємне число). Якщо α — парне від'ємне число, то функція $y = x^{-2n}$, $n \in N$, має властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y=\frac{1}{x^2}$.

Дійсно, *область визначення* функції $y=x^{-2n}=\frac{1}{x^{2n}}$: $x \neq 0$, тобто

$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x, крім $x = 0$.

Функція *парна*: при $x \neq 0$, якщо $f(x) = x^{-2n}$, то $f(-x) = (-x)^{-2n} = x^{-2n} = f(x)$. Отже, графік функції симетричний відносно осі Oy.

Оскільки при $x \neq 0$ значення $y=x^{-2n}=\frac{1}{x^{2n}}>0$, то *графік функції $y = x^{2n}$ не перетинає осі координат*.

На проміжку $(0;\ +\infty)$ *функція спадає*.

Дійсно, для додатних значень при $x_2 > x_1$ ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) одержуємо $x_2^{2n}>x_1^{2n}$, але тоді $\frac{1}{x_2^{2n}}<\frac{1}{x_1^{2n}}$, отже, $x_2^{-2n}<x_1^{-2n}$. ○

На проміжку $(-\infty;\ 0)$ *функція зростає*.

Це випливає з того, що її графік симетричний відносно осі Oy. Наведемо також і аналітичне обґрунтування: якщо $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ і $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (і тепер $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Тоді за обґрунтованим вище $(-x_2)^{-2n} > (-x_1)^{-2n}$, отже, $x_2^{-2n}<x_1^{-2n}$. ○

Для того щоб знайти область значень функції $y = x^{-2n}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{-2n} = a$, тобто $\frac{1}{x^{2n}}=a$. Воно має розв'язки для всіх $a > 0$ $\left(\text{тоді } x=\pm\sqrt[2n]{\frac{1}{a}}\right)$ і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, *область значень* заданої функції: $y > 0$, тобто $E(y) = (0;\ +\infty)$.

Тому *найменшого і найбільшого значень функція не має*.

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{-2n} = 1$.

Ураховуючи властивості функції $y = x^{-2n}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 89).

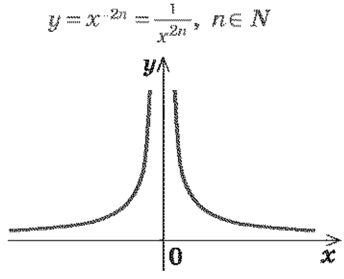


Рис. 89

5. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — неціле додатне число). Якщо α — неціле додатне число, то функція $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — неціле) має *область визначення* $x \geqslant 0$: $D(y) = [0;\ +\infty)$, оскільки значення степеня з додатним нецілим показником означено тільки для невід'ємних значень x.

Тоді область визначення несиметрична відносно точки 0, і функція не може бути *ні парною, ні непарною*.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то *графік функції* $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ *завжди проходить через початок координат.*

При $x > 0$ значення $y = x^\alpha > 0$.

Можна обґрунтувати, що *на всій області визначення функція* $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ *є зростаючою.*

Для того щоб знайти область значень функції $y = x^\alpha$, складемо рівняння $x^\alpha = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \geqslant 0$ $\left(\text{тоді } x = a^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції: $y \geqslant 0$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^\alpha = 1$.

Зображуючи графік функції $y = x^\alpha$ ($\alpha > 0$, α — неціле), слід урахувати, що при $0 < \alpha < 1$ графік має вигляд, аналогічний графіку $y = \sqrt{x}$ (рис. 90)[1], а при $\alpha > 1$ — аналогічний правій вітці графіка $y = x^2$ (рис. 91).

6. Функція $y = x^\alpha$ (α — неціле від'ємне число). Якщо α — неціле від'ємне число, то функція $y = x^\alpha$ ($\alpha < 0$, α — неціле) має область визначення $x > 0$ $(D(y) = (0; +\infty))$, оскільки значення степеня з від'ємним нецілим показником означено тільки для додатних значень x.

Тоді область визначення несиметрична відносно точки 0, і функція не може бути *ні парною, ні непарною.*

Ураховуючи, що при $x > 0$ значення $y = x^\alpha > 0$ (тобто $x \neq 0$ і $y \neq 0$), одержуємо, що *графік функції* $y = x^\alpha$ $(\alpha < 0)$ *не перетинає осі координат.*

На проміжку $(0; +\infty)$ *функція спадає*, тобто для додатних значень при $x_2 > x_1$ $(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$ одержуємо $x_2^\alpha < x_1^\alpha$.

● Доведемо це, наприклад, для випадку, коли α — від'ємне раціональне неціле число $\left(\alpha = -\frac{m}{n}\right.$ — неціле, $m \in N$, $n \in N\Big)$. При додатних значеннях $x_2 > x_1$ $(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$, ураховуючи результати дослідження функції $y = x^\alpha$ при цілому від'ємному α, одержуємо $x_2^{-m} < x_1^{-m}$. Потім, зважаючи на те, що функція $y = \sqrt[n]{t}$ при додатних t є зростаючою, маємо $\sqrt[n]{x_2^{-m}} < \sqrt[n]{x_1^{-m}}$, тоді $x_2^{-\frac{m}{n}} < x_1^{-\frac{m}{n}}$. ○

Можна обґрунтувати, що і в тому випадку, коли α — від'ємне ірраціональне число, функція $y = x^\alpha$ також спадає на всій області визначення (тобто при $x > 0$).

Для того щоб знайти область значень функції $y = x^\alpha$, складемо рівняння $x^\alpha = a$. Воно має розв'язки для всіх $a > 0$ $\left(\text{тоді } x = a^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції.

Отже, область значень заданої функції: $y > 0$, тобто $E(y) = (0; +\infty)$.

[1] Це буде детальніше обґрунтовано в підручнику для 11 класу.

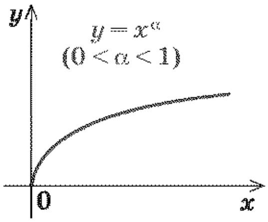


Рис. 90

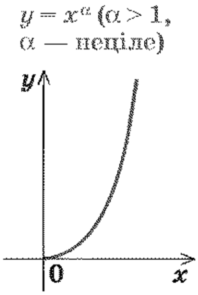


Рис. 91

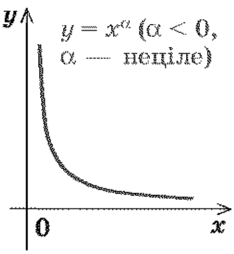


Рис. 92

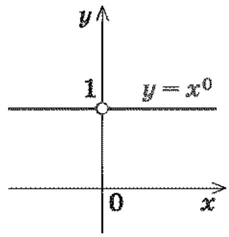


Рис. 93

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^\alpha = 1$.

Ураховуючи властивості функції $y = x^\alpha$ ($\alpha < 0$), одержуємо її графік (рис. 92).

Особливий випадок. Якщо $\alpha = 0$, то функція $y = x^\alpha = x^0 = 1$ при $x \neq 0$ (нагадаємо, що 0^0 — не означено) і її графік — пряма $y = 1$ без точки (0; 1) (рис. 93).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть область визначення функції:

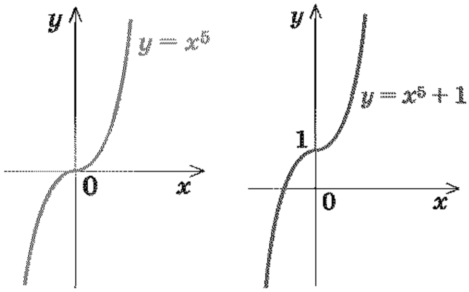
1) $y=(x-3)^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $x - 3 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant 3$, отже, $D(y) = [3; +\infty)$. ◁ 2) ▶ $x + 1 > 0$, тобто $x > -1$, отже, $D(y) = (-1; +\infty)$. ◁	Ураховуємо, що вираз $a^{\frac{1}{3}}$ означений при $a \geqslant 0$, а вираз $a^{-\frac{1}{2}}$ — тільки при $a > 0$.

Приклад 2 Побудуйте графік функції:

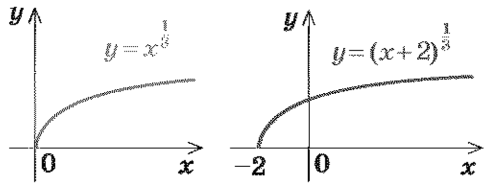
1) $y = x^5 + 1$; 2) $y=(x+2)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ Будуємо графік $y = x^5$ (рис. 94, *а*), а потім паралельно переносимо його вздовж осі Oy на +1 (рис. 94, *б*). ◁ 2) ▶ Будуємо графік $y=x^{\frac{1}{3}}$ (рис. 95, *а*) а потім паралельно переносимо його вздовж осі Ox на –2 (рис. 95, *б*). ◁	Графіки заданих функцій можна отримати із графіків функцій: 1) $y = x^5$, 2) $y=x^{\frac{1}{3}}$ за допомогою паралельного перенесення: 1) на +1 уздовж осі Oy; 2) на –2 вздовж осі Ox.



а *б*

Рис. 94



а *б*

Рис. 95

Запитання для контролю

1. Користуючись графіком відповідної функції, охарактеризуйте властивості функції $y = x^{\alpha}$, якщо: 1) α — парне натуральне число; 2) α — непарне натуральне число; 3) α — непарне від'ємне число; 4) α — парне від'ємне число; 5) α — неціле від'ємне число; 6) α — неціле додатне число.
2*. Обґрунтуйте властивості степеневої функції в кожному з випадків, указаних у завданні 1.

Вправи

1. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = x^7$; 2°) $y = x^{-3}$; 3°) $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$;

4°) $y = x^{-\frac{2}{7}}$; 5) $y = (x^2 - x)^{\frac{5}{3}}$; 6) $y = (x^2 - x + 1)^{-\frac{9}{2}}$.

2. Побудуйте графік функції:

1°) $y = x^4$; 2°) $y = x^7$; 3) $y = x^{-3}$; 4) $y = x^{-4}$; 5) $y = x^{\frac{1}{4}}$;

6) $y = x^{\frac{5}{4}}$; 7) $y = (x+1)^4$; 8*) $y = x^{\frac{1}{5}} - 3$; 9*) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 10*) $y = |x^5 - 1|$.

3. Побудуйте і порівняйте графіки функцій:

1) $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = x^{\frac{1}{4}}$.

4. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; 2) $x^{-\frac{1}{3}} = x^2$; 3) $x^{\frac{5}{2}} = 2 - x$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2x - 1$.

Перевірте підстановкою, що значення x дійсно є коренем рівняння.

5*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 4, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

§ 13 ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

13.1. Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь

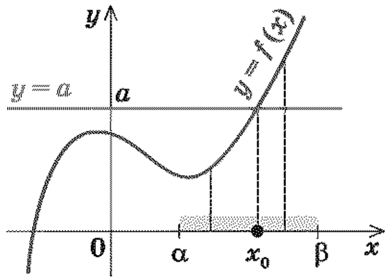
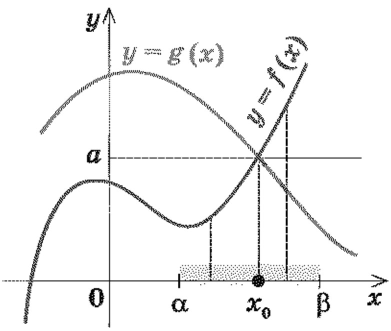
Нагадаємо основні ідеї, які використовують при розв'язуванні рівнянь за допомогою властивостей функцій.

Таблиця 22

<table>
<tr><td colspan="2">1. Скінченна ОДЗ</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення.</td><td>Розв'яжіть рівняння
$\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18.$
▶ ОДЗ: $\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\6-2x\geqslant 0.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x\geqslant 3,\\x\leqslant 3.\end{cases}$
Отже, ОДЗ: $x = 3$.
Перевірка. $x = 3$ — корінь
$\left(\sqrt{0}+18=\sqrt[4]{0}+18; 18=18\right).$
Інших коренів немає, оскільки до ОДЗ входить тільки одне число.
Відповідь: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>$\boxed{f(x)=g(x)}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}f(x)=a,\\g(x)=a\end{cases}$
$\boxed{f(x)\geqslant a,}$
$\boxed{g(x)\leqslant a}$

Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива лише у випадку, якщо $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a.</td><td>Розв'яжіть рівняння
$\sqrt{x^2-5x+6}=4x-x^2-4.$
▶ Запишемо задане рівняння так:
$\sqrt{x^2-5x+6}=-(x^2-4x+4),$
$\sqrt{x^2-5x+6}=-(x-2)^2,$
$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 0,$
$g(x)=-(x-2)^2\leqslant 0.$
Отже, задане рівняння рівносильне системі
$\begin{cases}\sqrt{x^2-5x+6}=0,\\-(x-2)^2=0.\end{cases}$
Із другого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє й першому рівнянню.
Відповідь: 2. ◁</td></tr>
</table>

Продовження табл. 22

<table>
<tr><td colspan="2">3. Використання монотонності функцій</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема розв'язування рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Підбираємо один або декілька коренів рівняння.
2. Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Теореми про корені рівняння</td></tr>
<tr><td>1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.
Приклад
Рівняння $\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}=3$ має єдиний корінь $x = 1$ $\left(\sqrt{1}+2\cdot\sqrt[3]{1}=3,\right.$ тобто $3 = 3$), оскільки функція $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$ зростає (на всій області визначення $x \geqslant 0$) як сума двох зростаючих функцій</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.
Приклад
Рівняння $\sqrt{x}=6-x$ має єдиний корінь $x = 4$ $\left(\sqrt{4}=6-4,\right.$ $2 = 2$), оскільки $f(x)=\sqrt{x}$ зростає (при $x \geqslant 0$), а $g(x) = 6 - x$ спадає</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Використання скінченності ОДЗ для розв'язування ірраціональних рівнянь. Основними способами розв'язування ірраціональних рівнянь, що використовують у курсі алгебри і початків аналізу, є виконання рівносильних перетворень рівнянь або одержання рівнянь-наслідків, які дозволяють звести задане рівняння до раціонального. Але іноді одержане раціональне рівняння виявляється складним для розв'язування. Наприклад, рівняння $\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18$, наведене в пункті 1 таблиці 22, можна звести до раціонального, ізолюючи $\sqrt[4]{6-2x}$ і підносячи обидві частини до четвертого степеня, а потім ізолюючи вираз, який містить $\sqrt{x-3}$, і підносячи обидві частини до квадрата. Але в результаті ми одержуємо повне рівняння шістнадцятого степеня. У таких ситуаціях спробуємо застосувати відомі нам методи розв'язування рівнянь, пов'язані з використанням властивостей функцій. Зокрема, у розглянутому рівнянні ОДЗ визначається умовами $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 6-2x\geqslant 0. \end{cases}$ Звідки одержуємо тільки одне значення $x = 3$, яке входить до ОДЗ. Оскільки будь-який корінь рівняння входить до його ОДЗ, достатньо перевірити, чи є ті числа, що входять до ОДЗ, коренями заданого рівняння. Перевірка показує, що $x = 3$ — корінь. Інших коренів бути не може, оскільки ОДЗ рівняння складається тільки з одного значення $x = 3$.

Зауважимо, що в тому випадку, **коли ОДЗ заданого рівняння — порожня множина (не містить жодного числа)**, ми навіть без перевірки можемо дати відповідь, що **рівняння не має коренів**. Наприклад, якщо потрібно розв'язати рівняння $\sqrt{x-3}=\sqrt[6]{2-x}+5x$, то його ОДЗ задається системою $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ яка не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

2. **Оцінка значень лівої та правої частин рівняння.** Іноді в тих випадках, коли ірраціональне рівняння зводиться до громіздкого раціонального (або зовсім не зводиться до раціонального), доцільно спробувати оцінити значення функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x+1}=1, \tag{1}$$

достатньо знайти його ОДЗ: $x\geqslant 0$ і за допомогою рівносильних перетворень записати його у вигляді $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=1-\sqrt[8]{x+1}$. У лівій частині останнього рівняння стоїть функція $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\geqslant 0$ на всій області визначення, а в правій — функція $g\ (x)=1-\sqrt[8]{x+1}\ \leqslant 0$ при всіх значеннях x з ОДЗ (оскільки при $x\geqslant 0$ $\sqrt[8]{x+1}\geqslant 1$). Тоді рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива тільки в тому випадку, коли вони одночасно дорівнюють нулю. Отже, рівняння (1) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{cases} \text{ тобто системі } \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0, \\ 1-\sqrt[8]{x+1}=0. \end{cases} \tag{2}$$

Розв'яжемо спочатку перше рівняння цієї системи. Урахуємо, що $\sqrt{x} \geqslant 0$ і $\sqrt[4]{x} \geqslant 0$. **Сума двох невід'ємних функцій може дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли кожен з доданків дорівнює нулю.** Отже, рівняння $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0$ рівносильне системі $\begin{cases}\sqrt{x}=0,\\ \sqrt[4]{x}=0,\end{cases}$ яка має єдиний розв'язок $x = 0$. Цей розв'язок задовольняє і друге рівняння системи (2) (дійсно, $1-\sqrt[8]{0+1} = 0$, $0 = 0$), отже, система (2) теж має тільки один розв'язок $x = 0$. Таким чином, і рівняння (1) має єдиний корінь $x = 0$.

3. **Використання монотонності функцій.** Ще одним способом розв'язування тих ірраціональних рівнянь, які зводяться до громіздких раціональних, є використання зростання або спадання відповідних функцій. Найчастіше це здійснюють за такою схемою:

1) *підбираємо один або декілька коренів рівняння;*
2) *доводимо, що інших коренів це рівняння не має.*

Обґрунтування відповідних властивостей наведено в пункті 3.2 розділу 1, а приклади використання цього способу для розв'язування ірраціональних рівнянь — у таблиці 22.

Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–4) та системи рівнянь (5), використовуючи властивості відповідних функцій.

1. 1) $\sqrt[6]{x^2-1}+x^2=\sqrt[4]{2-2x^2}+x+2;$
   2) $2x+\sqrt{x^2-5x+6}=x^2+\sqrt[8]{10x-2x^2-12}-3.$
2. 1) $\sqrt[4]{16+x^2}=2-\sqrt{x^3+x};$ 2) $1+\left|x-\sqrt{x}\right|=\sqrt[6]{1-|x|};$
   3) $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1-x-x^2;$ 4) $\sqrt[4]{x-2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-2}}=2-|x-3|.$
3. 1) $\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x^2-1}+\sqrt[6]{x^3-1}=0;$ 2) $\left|\sqrt{x}-2\right|+\left|\sqrt{y}-5\right|+\sqrt[4]{xy-100}=0.$
4. 1) $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3;$ 2) $\sqrt[4]{x+12}+\sqrt[3]{x-3}=3;$
   3) $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x+2}=6-\sqrt[4]{8x};$ 4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=\dfrac{2}{x}.$
5. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt{y}+\sqrt[3]{y},\\ 2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^3-\sqrt[3]{y}=y^3-\sqrt[3]{x},\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.\end{cases}$

13.2. Приклади використання інших способів розв'язування ірраціональних рівнянь

Якщо, розв'язуючи ірраціональні рівняння, ми використовуємо рівняння-наслідки (як у § 11), то в кінці слід виконувати перевірку одержаних розв'язків. Але в тих випадках, коли ці розв'язки — не раціональні числа, перевірка за допомогою підстановки одержаних значень у початкове рівняння є достатньо складною і громіздкою. Для таких рівнянь доводиться використовувати рівносильні перетворення на кожному кроці розв'язування. При цьому необхідно пам'ятати, що всі рівносильні перетворення рівнянь чи нерівностей виконують на ОДЗ заданого рівняння чи нерівності (пункт 3.1), тому, виконуючи рівносильні перетворення ірраціональних рівнянь, необхідно враховувати ОДЗ заданого рівняння. Також досить часто в цих випадках міркують так: *для всіх коренів заданого рівняння знаки лівої і правої частин рівняння збігаються*, оскільки при підстановці в задане рівняння числа, яке є його коренем, одержують правильну числову рівність. Використовуючи останнє міркування, часто вдається одержати якусь додаткову умову для коренів заданого рівняння і виконувати рівносильні перетворення не на всій ОДЗ даного рівняння, а на якійсь її частині.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1\geqslant 0, \\ x+1\geqslant 0. \end{cases}$ Розв'язок цієї системи: $x\geqslant -\frac{1}{2}$. На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням: $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$, $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2$, $2x+1=1+2\sqrt{x+1}+x+1$, $x-1=2\sqrt{x+1}$. (1) Для всіх коренів рівняння (1) $x-1\geqslant 0$. (2) За цієї умови рівняння (1) рівносильне рівнянням: $(x-1)^2=\left(2\sqrt{x+1}\right)^2$, $x^2-2x+1=4(x+1)$, $x^2-6x-3=0$. Тоді $x=3\pm 2\sqrt{3}$.	Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Ураховуючи, що всі рівносильні перетворення виконуються на ОДЗ заданого рівняння, зафіксуємо його ОДЗ. Переносячи вираз $\left(-\sqrt{x+1}\right)$ із лівої частини рівняння в праву з протилежним знаком, одержуємо рівняння, рівносильне заданому. У рівнянні $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$ обидві частини невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин до квадрата одержуємо рівняння, рівносильне заданому, яке рівносильне рівнянню (1). Для всіх коренів рівняння (1) воно є правильною числовою рівністю. У цій рівності права частина — невід'ємне число $\left(2\sqrt{x+1}\geqslant 0\right)$, тоді і ліва частина є невід'ємним числом, тобто $x-1\geqslant 0$ для всіх коренів.

$x_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ — входить до ОДЗ і задовольняє умові (2), отже, є коренем заданого рівняння; $x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$ — входить до ОДЗ, але не задовольняє умові (2), отже, не є коренем заданого рівняння.
Відповідь: $3+2\sqrt{2}$. ◁

Тоді за умови (2) обидві частини рівняння (1) невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин до квадрата одержуємо рівносильне рівняння. Але після того як знайдено корені цього рівняння, необхідно перевірити не тільки те, чи входять вони до ОДЗ, а й чи задовольняють умові (2). Для такої перевірки достатньо взяти наближені значення коренів $x_1 \approx 6{,}4$ та $x_2 \approx -0{,}4$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+2$.

Коментар

Заміна $\sqrt{x-1}=t$ дає змогу помітити, що кожен вираз, який стоїть під знаком зовнішнього квадратного кореня, є квадратом двочлена.

Застосовуючи формулу $\sqrt{a^2}=|a|$, одержуємо рівняння, що містить знак модуля, для розв'язування якого використовуємо такий *план*:

1) *знайти ОДЗ;*
2) *знайти нулі всіх підмодульних функцій;*
3) *позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;*
4) *знайти розв'язки рівняння в кожному з проміжків.*

Розв'язання

▶ Нехай $\sqrt{x-1}=t$, де $t \geqslant 0$. Тоді $x - 1 = t^2$; $x = t^2 + 1$.

Одержуємо рівняння $\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+1-2t}=t^2+3$,

яке можна записати так: $\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-1)^2}=t^2+3$. Звідси

$$|t-2|+|t-1|=t^2+3. \qquad (1)$$

1) ОДЗ рівняння (1): $t \in \mathbb{R}$, але за змістом завдання це рівняння потрібно розв'язати при $t \geqslant 0$.
2) Нулі підмодульних функцій: $t = 2$ і $t = 1$.
3) Ці нулі розбивають область $t \geqslant 0$ на три проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має постійний знак (рис. 96).

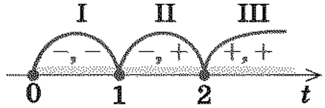


Рис. 96

<u>Проміжок I.</u> При $t \in [0; 1]$ маємо рівняння

$$-(t-2)-(t-1)=t^2+3.$$

Тоді $t^2 + 2t = 0$, $t = 0$ або $t = -2$, але в проміжок $[0; 1]$ входить тільки $t = 0$.

Проміжок II. При $t \in [1; 2]$ маємо рівняння

$-(t-2)+(t-1)=t^2+3$, яке рівносильне рівнянню $t^2=-2$, що не має коренів. Отже, у проміжку $[1; 2]$ коренів немає.

Проміжок III. При $t \in [2; +\infty)$ маємо рівняння

$(t-2)+(t-1)=t^2+3$, з якого одержуємо рівняння $t^2-2t+6=0$, що не має коренів. Отже, у проміжку $[2; +\infty)$ коренів немає.

Об'єднуючи одержані результати, робимо висновок, що рівняння (1) має тільки один корінь $t=0$.

Виконуючи обернену заміну, маємо $\sqrt{x-1}=0$, звідки $x=1$.

Відповідь: 1. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(x-6)^2}-3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)}+2\sqrt[3]{(2x+3)^2}=0.$$

Розв'язання

▶ Оскільки $x=6$ не є коренем заданого рівняння, то при діленні обох частин рівняння на $\sqrt[3]{(x-6)^2}\neq 0$ одержуємо рівносильне рівняння

$$1-3\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}+2\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-6}\right)^2}=0.$$

Після заміни $t=\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}$ маємо рівняння $2t^2-3t+1=0$, корені якого:

$$t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2}.$$

Виконавши обернену заміну, одержуємо:

$$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}=1 \text{ або } \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{2x+3}{x-6}=1 \text{ або } \frac{2x+3}{x-6}=\frac{1}{8},$$

$$x=-9 \text{ або } x=-2.$$

Відповідь: -9; -2. ◁

Коментар

Виконуємо заміну $\sqrt[3]{x-6}=u$, $\sqrt[3]{2x+3}=v$ та одержуємо *рівняння* $u^2-3uv+2v^2=0$, *усі члени якого мають однаковий сумарний степінь*[1] — два. Таке рівняння називають *однорідним* і *розв'язують діленням обох частин на найвищий степінь однієї із змінних.* Розділимо обидві частини, наприклад, на u^2 (тобто на $\sqrt[3]{(x-6)^2}$).

Щоб при діленні на вираз із змінною не загубити корені рівняння, потрібно ті значення змінної, при яких цей вираз дорівнює нулю, розглянути окремо, тобто в цьому прикладі підставити значення $x=6$ в задане рівняння (це можна виконати усно, до розв'язання записати тільки одержаний результат).

Для того щоб здійснити такий план розв'язування, не обов'язково вводити змінні u і v: достатньо помітити, що задане рівняння однорідне, розділити обидві частини на $\sqrt[3]{(x-6)^2}$, а вже потім ввести нову змінну t.

[1] В означенні однорідного рівняння не враховують член 0, який степеня не має.

Запитання для контролю

1. Поясніть, які обмеження доведеться накласти на змінну x, щоб розв'язати рівняння $\sqrt{x-2}=x-6$ за допомогою рівносильних перетворень.
2. Наведіть приклад однорідного ірраціонального рівняння. Складіть план його розв'язування.

Вправи

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння за допомогою рівносильних перетворень:

1) $\sqrt{3x-2}=5-x$; 2) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$;

3) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$.

Розв'яжіть рівняння (2–5).

2. 1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+1$; 2) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

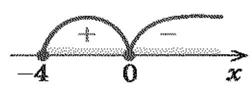
3. 1) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$; 2) $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$.

4. 1) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x^2-3x+2}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

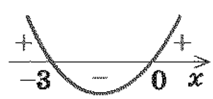
5. 1) $\frac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}$.

§ 14 ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Таблиця 23

Орієнтир	Приклад
1. Метод інтервалів (для нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)	
1) Знайти ОДЗ нерівності. 2) Знайти нулі функції $f(x)$ ($f(x)=0$). 3) Відмітити нулі функції на ОДЗ і знайти знак функції в кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ. 4) Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності	Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+4}>x+2$. ▶ Задана нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{x+4}-x-2>0$. Позначимо $f(x)=\sqrt{x+4}-x-2$. ОДЗ: $x+4\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -4$. Нулі $f(x)$: $\sqrt{x+4}-x-2=0$, $\sqrt{x+4}=x+2$, $x+4=x^2+4x+4$, $x^2+3x=0$, $x_1=0$ — корінь, $x_2=-3$ — сторонній корінь. Відмічаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак функції $f(x)$ у кожному проміжку.  *Відповідь:* $[-4; 0)$. ◁

Продовження табл. 23

2. Рівносильні перетворення	
1) При піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)	Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{x+2}<-1$. ▶ ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$. Задана нерівність рівносильна нерівностям: $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3<(-1)^3$, $x+2<-1$, $x<-3$. *Відповідь:* $(-\infty; -3)$. ◁
2) Якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)	Розв'яжіть нерівність $\sqrt[4]{2x-6}<1$. ▶ ОДЗ: $2x-6 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant 3$. Обидві частини заданої нерівності невід'ємні, отже, вона рівносильна (на її ОДЗ) нерівностям: $\left(\sqrt[4]{2x-6}\right)^4<1^4$, $2x-6<1$, $x<\frac{7}{2}$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо $3 \leqslant x<\frac{7}{2}$. *Відповідь:* $\left[3; \frac{7}{2}\right)$. ◁
3) Якщо на ОДЗ заданої нерівності якась частина нерівності може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то, перш ніж підносити обидві частини нерівності до парного степеня, ці випадки слід розглядати окремо. Наприклад, $\sqrt[2k]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x)>g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x)<0. \end{cases}$ $\sqrt[2k]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g^{2k}(x) \end{cases}$	Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+4}>x+2$. ▶ Задана нерівність рівносильна сукупності систем: $\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2>(x+2)^2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+4 \geqslant 0, \\ x+2<0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2+3x<0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x<-2. \end{cases}$ Розв'язавши нерівність $x^2+3x<0$, маємо $-3<x<0$.  Ураховуючи нерівність $x \geqslant -2$, одержуємо розв'язок першої системи: $-2 \leqslant x<0$. Розв'язок другої системи: $-4 \leqslant x<-2$. Об'єднуючи ці розв'язки, одержуємо відповідь. *Відповідь:* $[-4; 0)$. ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів. Загальну схему розв'язування нерівностей методом інтервалів пояснено в § 4 розділу 1, а приклад застосування методу інтервалів до розв'язування ірраціональних нерівностей наведено в таблиці 23.

2. Рівносильні перетворення ірраціональних нерівностей. Коли для розв'язування ірраціональних нерівностей використовують рівносильні перетворення, то найчастіше за допомогою піднесення обох частин нерівності до одного й того самого степеня задана нерівність зводиться до раціональної нерівності. При цьому потрібно мати на увазі такі властивості.

1) Якщо обидві частини нерівності доводиться підносити до непарного степеня, то скористаємося тим, що *числові нерівності* $A > B$ *і* $A^{2k+1} > B^{2k+1}$ *або одночасно правильні, або одночасно неправильні.* Тоді кожен розв'язок нерівності
$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$
(який перетворює цю нерівність у правильну числову нерівність) буде також і розв'язком нерівності
$$f^{2k+1}(x) > g^{2k+1}(x) \qquad (2)$$
і, навпаки, кожен розв'язок нерівності (2) буде також і розв'язком нерівності (1), тобто нерівності (1) і (2) — рівносильні. Отже, **при піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**
Наприклад,
$$\boxed{\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)}$$

2) Аналогічно, *якщо числа* A *і* B *невід'ємні* ($A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$), *то числові нерівності* $A > B$ *і* $A^{2k} > B^{2k}$ також *або одночасно правильні, або одночасно неправильні.* Повторюючи попередні міркування, маємо: **якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**
Наприклад, розглядаючи нерівність
$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \qquad (3)$$
на її ОДЗ, де $f(x) \geqslant 0$, помічаємо, що для всіх розв'язків нерівності (3) ліва частина невід'ємна (арифметичний корінь $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant 0$) і нерівність (3) може виконуватися тільки за умови
$$g(x) > 0. \qquad (4)$$

Якщо виконується умова (4), то обидві частини нерівності (3) невід'ємні, і при піднесенні до парного степеня $2k$ одержуємо нерівність, рівносильну заданій: $f(x) < g^{2k}(x)$ (звичайно, за умови врахування ОДЗ заданої нерівності та умови (4)). Отже,

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}}$$

3) Якщо за допомогою рівносильних перетворень необхідно розв'язати нерівність

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \qquad (5)$$

на її ОДЗ, де $f(x) \geqslant 0$, то для правої частини цієї нерівності розглянемо два випадки: а) $g(x) < 0$; б) $g(x) \geqslant 0$.

а) При $g(x) < 0$ нерівність (5) виконується для всіх x з ОДЗ заданої нерівності, тобто при $f(x) \geqslant 0$.

б) При $g(x) \geqslant 0$ обидві частини нерівності (5) невід'ємні, і при піднесенні до парного степеня $2k$ одержуємо нерівність, рівносильну заданій:

$$f(x) > g^{2k}(x). \qquad (6)$$

Зауважимо, що для всіх розв'язків нерівності (6) обмеження ОДЗ заданої нерівності $f(x) \geqslant 0$ виконується автоматично; отже, при $g(x) \geqslant 0$ достатньо записати тільки нерівність (6).

Об'єднуючи одержані результати, доходимо висновку, що:

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{або} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}}$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

Коментар

Зведемо нерівність до виду $f(x) > 0$ і розв'яжемо її методом інтервалів.

Для того щоб знайти нулі функції $f(x)$, використаємо рівняння-наслідки. Щоб вилучити сторонні корені, виконаємо перевірку одержаних розв'язків.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} > 0$.
Позначимо $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}$.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1 \geqslant 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 1, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$ тобто $x \geqslant 1$.

2. Нулі функції $f(x)$: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=0$. Тоді:

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1},\ \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2,$$

$$x+3-2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}+x-1=2x-1,\ 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}=3.$$

Підносимо обидві частини останнього рівняння до квадрата:

$$4(x+3)(x-1)=9,\ 4x^2+8x-21=0,$$

$$x_1=\frac{3}{2}=1{,}5 \text{ — корінь, } x_2=-\frac{7}{2} \text{ — сторонній корінь.}$$

3. Розбиваємо ОДЗ точкою 1,5 на два проміжки і знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків (рис. 97).

Відповідь: [1; 1,5). ◁

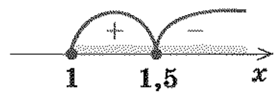


Рис. 97

Приклад 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2$.

I спосіб (метод інтервалів)

Коментар

Зведемо задану нерівність до виду $f(x)>0$ і розв'яжемо її методом інтервалів. Для того щоб знайти ОДЗ заданої нерівності, теж застосуємо метод інтервалів, розв'язуючи нерівність $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$ (ОДЗ: $x\neq 0$; $\frac{x^3+8}{x}=0$ при $x=-2$).

Для знаходження нулів функції $f(x)$ використаємо рівняння-наслідки.

Хоча функція $f(x)$ не має нулів, але й у цьому випадку метод інтервалів також працює. Тільки інтервали знакосталості функції $f(x)$ збігаються з інтервалами, з яких складається її область визначення.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2>0. \qquad (1)$$

Позначимо $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2$.

1. ОДЗ: $\begin{cases}\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$ Розв'яжемо нерівність $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$ методом інтервалів (рис. 98).

Одержуємо: $x\in(-\infty;\ -2]\cup(0;\ +\infty)$.

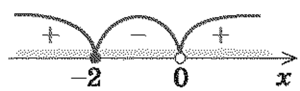


Рис. 98

2. Нулі функції $f(x)$: $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2=0$. Тоді:

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}=x-2,\ \ \frac{x^3+8}{x}=x^2-4x+4,\ \ x^3+8=x^3-4x^2+4x,$$

$4x^2 - 4x + 8 = 0$ — коренів немає ($D < 0$).

3. ОДЗ нерівності (1) розбивається на два проміжки, у яких функція $f(x)$ має знаки, указані на рисунку 99.

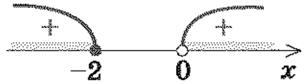


Рис. 99

Відповідь: $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. ◁

<u>II спосіб</u> (рівносильні перетворення)

Коментар

Для розв'язування використаємо рівносильні перетворення:

$$\sqrt[2k]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)>g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)<0. \end{cases}$$

Щоб розв'язати одержану проміжну нерівність $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$, урахуємо умови, за яких цей дріб буде невід'ємним.

У кінці, об'єднуючи одержані розв'язки, отримуємо відповідь.

Розв'язання

▶ $$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ \frac{x^3+8}{x}>(x-2)^2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \frac{x^3+8}{x}\geqslant 0, \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 2, \\ \frac{x^3+8}{x}>x^2-4x+4, \end{cases}$$

$$\text{або } \begin{cases} \frac{x^3+8}{x}\geqslant 0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 2, \\ \frac{4x^2-4x+8}{x}>0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^3+8\geqslant 0 \\ x>0, \\ x<2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^3+8\leqslant 0, \\ x<0, \\ x<2. \end{cases}$$

Ураховуючи, що $4x^2 - 4x + 8 > 0$ при всіх значеннях x ($D < 0$ і $a = 4 > 0$), одержуємо, що остання сукупність трьох систем рівносильна сукупності: $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x\geqslant -2, \\ x>0, \\ x<2, \end{cases}$ або $\begin{cases} x\leqslant -2, \\ x<0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geqslant 2$, або $0 < x < 2$, або $x \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant -2$, або $x > 0$.

Відповідь: $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. ◁

Зауваження. Записуючи наведене розв'язання, знаки рівносильності ($\Leftrightarrow$) можна не ставити, достатньо на початку розв'язання записати: «Виконаємо рівносильні перетворення заданої нерівності».

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{3x+9-4\sqrt{3x+5}}+\sqrt{3x+14-6\sqrt{3x+5}}\leqslant 1. \qquad (1)$$

Коментар

Заміна $\sqrt{3x+5}=t$ дозволяє помітити, що кожен вираз, який стоїть під знаком зовнішнього квадратного кореня, є квадратом двочлена.

Застосовуючи формулу $\sqrt{a^2}=|a|$, одержуємо нерівність, що містить знак модуля, для розв'язування якої використовуємо такий план:

1) *знайти ОДЗ;*

2) *знайти нулі всіх підмодульних функцій;*

3) *відмітити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;*

4) *знайти розв'язки нерівності в кожному з проміжків.*

Розв'язання

▶ Нехай $\sqrt{3x+5}=t$, де $t \geqslant 0$. Тоді $3x + 5 = t^2$, $3x = t^2 - 5$.

Отримуємо нерівність $\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+9-6t}\leqslant 1$, яку можна записати так:

$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}\leqslant 1.$ Одержуємо

$$|t-2|+|t-3|\leqslant 1. \qquad (2)$$

1. ОДЗ нерівності (2): $t \in R$, але за змістом завдання цю нерівність потрібно розв'язати при $t \geqslant 0$.
2. Нулі підмодульних функцій: $t = 2$ і $t = 3$.
3. Ці нулі розбивають область $t \geqslant 0$ на три проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має постійний знак (рис. 100).

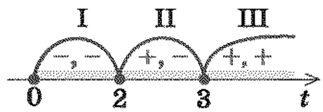


Рис. 100

Проміжок I. При $t \in [0; 2]$ маємо нерівність $-(t-2)-(t-3)\leqslant 1$, з якої одержуємо $t \geqslant 2$, але в проміжок $[0; 2]$ входить тільки $t = 2$.

Проміжок II. При $t \in [2; 3]$ маємо нерівність $(t-2)-(t-3)\leqslant 1$, яка рівносильна нерівності $0\cdot t \leqslant 0$, що виконується при будь-яких значеннях t. Отже, у проміжку $[2; 3]$ розв'язками нерівності будуть усі значення t із цього проміжку ($2 \leqslant t \leqslant 3$).

Проміжок III. При $t \in [3; +\infty)$ маємо нерівність $(t-2)+(t-3)\leqslant 1$, з якої одержуємо $t \leqslant 3$, але в проміжок $[3; +\infty)$ входить тільки значення $t = 3$.

Об'єднуючи одержані результати, робимо висновок, що розв'язками нерівності (2) будуть усі значення t такі, що $2 \leqslant t \leqslant 3$.

Виконуючи обернену заміну, маємо $2\leqslant\sqrt{3x+5}\leqslant 3$, звідки

$$4 \leqslant 3x + 5 \leqslant 9.$$

$$\text{Тоді } -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$. ◁

Запитання для контролю

1. Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних нерівностей.
2. Назвіть основні етапи розв'язування ірраціональної нерівності методом інтервалів.
3. Обґрунтуйте справедливість таких рівносильних перетворень:

   1) $\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$;

   2) $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x); \end{cases}$

   3) $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Вправи

Розв'яжіть нерівність (1–8).

1. 1) $\sqrt{x^2-3x-18} < 4-x$; 2) $\sqrt{x^2-3x} < 5-x$.

2. 1) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2-9$; 2) $(x-1)\sqrt{x^2+1} \leqslant x^2-1$.

3. 1) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \leqslant \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 2) $\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leqslant \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$.

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5} \geqslant 3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15} \geqslant 5$.

5. 1) $\frac{14}{3-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x}+5$; 2) $\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6} > 0$.

6. 1) $\sqrt{\frac{x^3+27}{x}} > x-3$; 2) $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

7*. 1) $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}} \leqslant 2$;

2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} > 1$.

8*. 1) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\sqrt{x}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \leqslant 0$;

2) $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+2\right)\sqrt{x}-\frac{1}{x}\left(\sqrt{10x-2x^2-12}+2\right) \geqslant 0$.

§ 15 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

При розв'язуванні завдань з параметрами, у яких вимагається розв'язати рівняння чи нерівність, можна користуватися таким орієнтиром (§ 9): *будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами розв'язують як звичайні рівняння чи нерівність доти, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Але в тому разі, коли якесь перетворення не можна виконати однозначно, розв'язування необхідно розбити на декілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.*

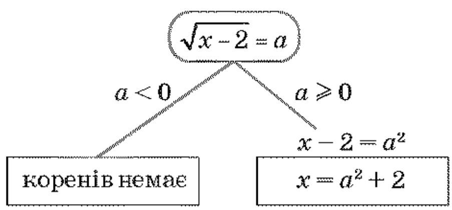
Також на етапі пошуку плану розв'язування рівнянь чи нерівностей з параметрами або міркуючи над самим розв'язанням, часто буває зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який саме момент ми не змогли однозначно виконати потрібні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання і чим відрізняється один випадок від іншого.

Зазначимо, що рівняння та нерівності з параметрами найчастіше розв'язують за допомогою їх рівносильних перетворень, хоча інколи використовують і властивості функцій, метод інтервалів для розв'язування нерівностей та рівняння-наслідки.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2}=a$.

Коментар

Ми не можемо однозначно дати відповідь на запитання, чи є в заданого рівняння корені, і тому вже на першому кроці повинні розбити розв'язання на два випадки: 1) $a < 0$ — коренів немає, 2) $a \geqslant 0$ — корені є (див. схему).



При $a \geqslant 0$ маємо найпростіше ірраціональне рівняння, обидві частини якого невід'ємні. Отже, при піднесенні до квадрата обох його частин одержуємо рівняння, рівносильне заданому. ОДЗ заданого рівняння можна не записувати, її враховано автоматично, бо для всіх коренів одержаного рівняння $x - 2 = a^2 \geqslant 0$.

Розв'язання

▶ 1) При $a < 0$ рівняння не має коренів.

2) При $a \geqslant 0$ $\quad x - 2 = a^2$. Тоді $x = a^2 + 2$.

Відповідь: 1) якщо $a < 0$, то коренів немає;

2) якщо $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 2$. ◁

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3$.

Розв'язання[1]	*Коментар*
▶ $\sqrt{x+a}=3-\sqrt{x-1}$. (1)	Використаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього необхідно врахувати його ОДЗ: $\begin{cases} x+a\geqslant 0, & (7)\\ x-1\geqslant 0. & (8)\end{cases}$

Для всіх коренів рівняння (1):
$$3-\sqrt{x-1}\geqslant 0. \quad (2)$$

Тоді рівняння (1) рівносильне рівнянням:
$$x+a=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2, \quad (3)$$
$$x+a=9-6\sqrt{x-1}+x-1,$$
$$\sqrt{x-1}=\frac{8-a}{6}. \quad (4)$$

Для всіх коренів рівняння (4):
$$\frac{8-a}{6}\geqslant 0. \quad (5)$$

Тоді рівняння (4) рівносильне рівнянню
$$x-1=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2. \quad (6)$$

Отже, $x=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2+1$.

Урахуємо обмеження (2) і (5):
$$3-\sqrt{x-1}=3-\sqrt{\left(\frac{8-a}{6}\right)^2}=3-\left|\frac{8-a}{6}\right|.$$
За умовою (5) $\frac{8-a}{6}\geqslant 0$, тоді $\left|\frac{8-a}{6}\right|=\frac{8-a}{6}$. Отже, умови (2) і (5) дають систему $\begin{cases} 3-\frac{8-a}{6}\geqslant 0,\\ \frac{8-a}{6}\geqslant 0,\end{cases}$ тобто $\begin{cases} a\geqslant -10,\\ a\leqslant 8,\end{cases}$ тоді $-10\leqslant a\leqslant 8$.

Коментар (продовження):

При перенесенні члена заданого рівняння з лівої частини в праву з протилежним знаком одержали рівносильне рівняння (1).

Для всіх коренів рівняння (1) воно є правильною числовою рівністю. Його ліва частина невід'ємна, отже, і права частина має бути невід'ємною. Тоді далі можна розв'язувати рівняння (1) не на всій ОДЗ, а тільки на тій її частині, що задана умовою (2).

За цієї умови обидві частини рівняння (1) невід'ємні, отже, при піднесенні обох його частин до квадрата одержимо рівносильне рівняння (3) (а після рівносильних перетворень — рівняння (4)).

Для всіх коренів рівняння (3) його права частина невід'ємна, отже, і ліва частина буде невід'ємною: $x + a \geqslant 0$. Але тоді умову (7) ОДЗ заданого рівняння враховано автоматично і її можна не записувати до розв'язання.

Також для всіх коренів рівняння (4) його ліва частина невід'ємна, отже, і права частина повинна бути невід'ємною. Тому далі можна розв'язувати рівняння (4) не на всій ОДЗ, а тільки на тій її частині, яка задана умовою (5). Тоді обидві частини рівняння (4) невід'ємні, і після

[1] У записі розв'язання прикладів 2–6 у рамках виділено обмеження, які довелося накласти в процесі рівносильних перетворень заданого рівняння чи нерівності.

Відповідь:

1) при $-10 \leqslant a \leqslant 8$ $x = \left(\frac{8-a}{6}\right)^2 + 1$;

2) при $a < -10$ або $a > 8$ коренів немає. ◁

піднесення обох його частин до квадрата одержимо рівносильне рівняння (6).

Для всіх коренів рівняння (6) його права частина невід'ємна, отже, і ліва частина буде невід'ємною: $x - 1 \geqslant 0$. Тоді й умову (8) ОДЗ заданого рівняння враховано автоматично, і тому ОДЗ можна не записувати до розв'язання.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{a + \sqrt{a + x}} = x$.

Розв'язання	*Коментар*

▶ Для всіх коренів даного рівняння

$$x \geqslant 0 \qquad (1)$$

Тоді задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$a + \sqrt{a + x} = x^2, \qquad (2)$$

$$\sqrt{a + x} = x^2 - a. \qquad (3)$$

Для всіх коренів рівняння (3)

$$x^2 - a \geqslant 0. \qquad (4)$$

Тоді рівняння (3) рівносильне рівнянням:

$$a + x = (x^2 - a)^2, \qquad (5)$$

$$a + x = x^4 - 2ax^2 + a^2. \qquad (6)$$

Розглянемо рівняння (6) як квадратне відносно a:

$$a^2 - (2x^2 + 1)\,a + x^4 - x = 0.$$

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4\,(x^4 - x) =$$
$$= 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Тоді $a = \frac{(2x^2 + 1) \pm (2x + 1)}{2}$.

Отже, $a = x^2 + x + 1$ або $a = x^2 - x$.

Звідси

$$x^2 - a + x + 1 = 0 \qquad (7)$$

або

$$x^2 - a = x. \qquad (8)$$

Ураховуючи умови (1) і (4), одержимо, що $(x^2 - a) + x + 1 \geqslant 1$, отже, рівняння (7) не має коренів.

Як і в прикладі 2, ОДЗ заданого рівняння $\begin{cases} a + \sqrt{a + x} \geqslant 0, \\ a + x \geqslant 0 \end{cases}$ буде врахована автоматично при переході до рівнянь (2) та (5) (для всіх коренів цих рівнянь), отже, її можна не записувати в розв'язанні.

Міркування при виконанні рівносильних перетворень заданого рівняння (до рівнянь (2)–(3)–(5)–(6)) повністю аналогічні міркуванням, наведеним у *Коментарі* до прикладу 2.

Аналізуючи рівняння (6) (яке достатньо важко розв'язати відносно змінної x), користуємося орієнтиром, який умовно можна назвати «Шукай квадратний тричлен», а саме: *спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної* (*чи відносно якоїсь функції*). У даному випадку розглянемо це рівняння як квадратне відносно параметра a (цей спосіб ефективно спрацьовує тільки тоді, коли дискримінант одержаного квадратного тричлена є повним квадратом, як у розглянутому випадку).

Якщо для коренів рівняння (8) виконується умова (1) ($x \geqslant 0$), то автоматично виконується й умова (4) ($x^2 - a \geqslant 0$).

Із рівняння (8) одержимо

$$x^2 - x - a = 0.$$

Це рівняння має корені, якщо $D = 1 + 4a \geqslant 0$, тобто при $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Тоді $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

Для x_1 умова $x \geqslant 0$ виконується, отже, x_1 — корінь заданого рівняння при $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Урахуємо умову $x \geqslant 0$ для x_2:

$$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \geqslant 0, \quad \sqrt{1+4a} \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant 1 + 4a \leqslant 1, \quad -\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0.$$

Відповідь: 1) при $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2};$$

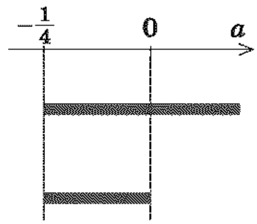
2) при $a > 0$ $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$;

3) при $a < -\frac{1}{4}$ коренів немає. ◁

Перед записом відповіді зручно зобразити на рисунку всі одержані розв'язки і напроти кожного розв'язку відмітити, при яких значеннях параметра цей розв'язок можна використовувати (див. с. 143).

$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$



Із цього рисунку видно, що при $a > 0$ у відповідь потрібно записати тільки одну формулу (x_1), при $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$ — дві формули (x_1 і x_2), а при $a < -\frac{1}{4}$ коренів немає.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $x + 4a > 5\sqrt{ax}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Задана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} ax \geqslant 0, \\ x + 4a > 0, \\ (x+4a)^2 > 25ax. \end{cases}$ (1)	Використаємо рівносильні перетворення. Для цього врахуємо ОДЗ заданої нерівності ($ax \geqslant 0$) і те, що права частина невід'ємна, отже, для всіх розв'язків заданої нерівності її ліва частина повинна бути додатною ($x + 4a > 0$). За цієї умови (на ОДЗ)

$\boxed{\text{При } a = 0}$ одержуємо систему

$$\begin{cases} 0 \cdot x \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 > 0, \end{cases}$$ розв'язком якої є $x > 0$.

$\boxed{\text{При } a > 0}$ одержуємо систему

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'яжемо окремо нерівність

$$x^2 - 17ax + 16a^2 > 0.$$

Оскільки $x^2 - 17ax + 16a^2 = 0$ при $x = a$ та $x = 16a$, то при $a > 0$ одержуємо $x < a$ або $x > 16a$.

Тоді система (2) має розв'язки: $0 \leqslant x < a$ або $x > 16a$.

$\boxed{\text{При } a < 0}$ одержуємо систему

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

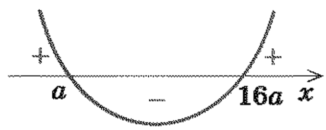
Система (3) розв'язків не має, оскільки при $a < 0$ перша і друга нерівності не мають спільних розв'язків.

Відповідь: при $a = 0$ $x > 0$;
при $a > 0$ $x \in [0; a) \cup (16a; +\infty)$;
при $a < 0$ розв'язків немає. ◁

обидві частини заданої нерівності невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин нерівності до квадрата одержимо рівносильну нерівність. Отримуємо систему (1).

Для розв'язування нерівності $ax \geqslant 0$ необхідно розглянути три випадки: $a = 0$ (ділити на a не можна); $a > 0$ (знак нерівності зберігається при діленні обох її частин на a); $a < 0$ (знак нерівності змінюється).

При $a > 0$ значення $-4a < 0$, тому перші дві нерівності системи (2) мають спільний розв'язок $x \geqslant 0$, а для розв'язування нерівності $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$ можна використати графічну ілюстрацію:



При $a < 0$ значення $-4a > 0$, тому перші дві нерівності системи (3) не мають спільних розв'язків, отже, і вся система (3) не має розв'язків.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-a} > x+1$.

Коментар

Спочатку скористаємося рівносильними перетвореннями:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Якщо в одержані системи параметр а входить лінійно, то в таких випадках іноді буває зручно виразити параметр через змінну, розглянути параметр як функцію від цієї змінної і використати графічну ілюстрацію розв'язування нерівностей (у системі координат xOa).

Зазначимо, що для зображення розв'язків сукупності нерівностей зручно використовувати дві системи координат, у яких осі Ox розташовані на одній прямій, і на кожній виділяти штриховкою відповідні розв'язки.

При різних значеннях a пряма $a = \text{const}$ або не перетинає заштриховані області (при $a \geqslant -\frac{3}{4}$), або перетинає їх по відрізках. Абсциси точок перетину є розв'язками систем (1) і (2), а отже, і розв'язками заданої нерівності.

Розв'язання

Задана нерівність рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x-a > (x+1)^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-a \geqslant 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

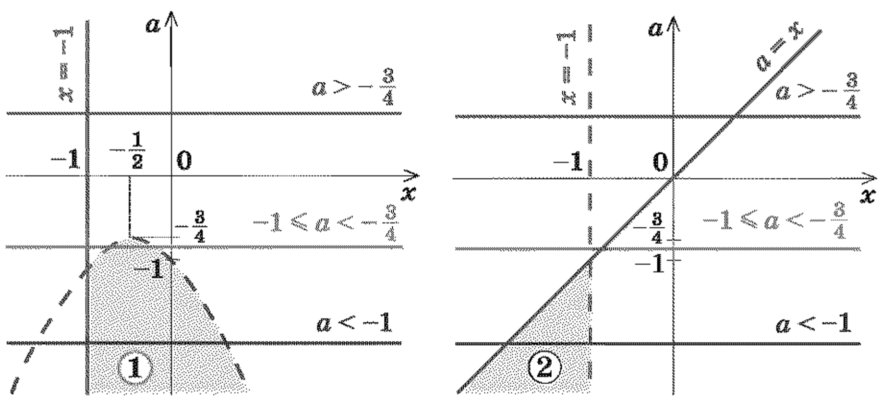
Тоді

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ a < -x^2 - x - 1 \end{cases} \qquad (1)$$

або

$$\begin{cases} a \leqslant x, \\ x < -1. \end{cases} \qquad (2)$$

Зобразимо графічно розв'язки систем нерівностей (1) і (2) у системі координат xOa (на рис. 101, *а*, *б* зафарбовано відповідні області ① і ②).



а *б*

Рис. 101

Бачимо, що $\boxed{\text{при } a \geqslant -\frac{3}{4}}$ розв'язків немає (немає зафарбованих точок); $\boxed{\text{якщо } -1 \leqslant a < -\frac{3}{4},}$ то пряма $a = \text{const}$ перетинає тільки зафарбовану область ①. Причому одержаний інтервал обмежений зліва і справа вітками параболи $a = -x^2 - x - 1$. Але для відповіді нам потрібно записати x через a. Для цього з рівняння $x^2 + x + a + 1 = 0$ знаходимо x:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a - 1}.$$

Як бачимо, $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a} > -\frac{1}{2}$, тобто $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$ — рівняння правої вітки параболи, а $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$ — лівої.

Тоді відповідь у цьому випадку буде такою:

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a};$$

$\boxed{\text{якщо } a < -1,}$ то пряма $a = \text{const}$ перетинає заштриховані області ① і ②. Для області ① інтервал для x зліва обмежений прямою $x = -1$, а справа — правою віткою параболи, тобто $-1 \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$. Для області ② інтервал для x обмежений зліва прямою $x = a$, а справа — прямою $x = -1$, тобто $a \leqslant x < -1$. Об'єднання цих інтервалів можна коротше записати так:

$$a \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}.$$

Відповідь: 1) при $a \geqslant -\frac{3}{4}$ — розв'язків немає;

2) при $-1 \leqslant a < -\frac{3}{4}$ $\quad -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$;

3) при $a < -1$ $\quad a \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$. ◁

Для розв'язування деяких дослідницьких завдань з параметрами можна використати властивості квадратного тричлена і, зокрема, умови розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданих чисел (табл. 16).

Приклад 6. Знайдіть усі значення параметра k, при яких має корені рівняння $x + 2k\sqrt{x+1} - k + 3 = 0$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Заміна $\sqrt{x+1} = t$, де $t \geqslant 0$ (тоді $x = t^2 - 1$). Одержуємо рівняння $t^2 + 2kt - k + 2 = 0$. (1)	Якщо ірраціональне рівняння містить тільки один корінь, то інколи можна звести таке рівняння до раціонального, позначивши цей корінь

Задане рівняння буде мати корені тоді і тільки тоді, коли рівняння (1) буде мати хоча б один невід'ємний корінь ($t \geqslant 0$).

Випадок $t = 0$ дослідимо окремо.
При $t = 0$ з рівняння (1) маємо $k = 2$. Отже, при $k = 2$ рівняння (1) має корінь $t = 0$. Тоді й задане рівняння має корінь $x = -1$, тобто $k = 2$ задовольняє умові задачі.

Позначимо $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$.

Рівняння (1) може мати хоча б один додатний корінь в одному з двох випадків:
1) один корінь додатний і один від'ємний — для цього необхідно й достатньо виконання умови
$$f(0) < 0;$$
2) обидва корені додатні — для цього необхідно й достатньо виконання системи умов:
$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ t_0 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

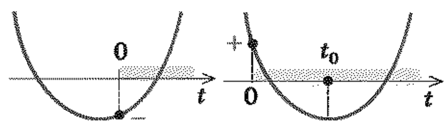
З умови $f(0) < 0$ отримуємо:
$$-k + 2 < 0,$$
тобто $k > 2$.
Система (2) дає:
$$\begin{cases} -k + 2 > 0, \\ 4k^2 - 4(-k + 2) \geqslant 0, \\ -k > 0. \end{cases}$$
Тоді
$$\begin{cases} k < 2, \\ k^2 + k - 2 \geqslant 0, \\ k < 0. \end{cases} \quad \begin{cases} k < 2, \\ k \leqslant -2 \text{ або } k \geqslant 1, \\ k < 0. \end{cases}$$
Отже, $k \leqslant -2$.

Відповідь: $k \leqslant -2$ або $k \geqslant 2$. ◁

новою змінною. Оскільки заміна є рівносильним перетворенням (разом з оберненою заміною), то одержуємо рівняння, рівносильне заданому, і тому замість дослідження заданого рівняння можна досліджувати одержане.

Але при цьому слід ураховувати, що *після заміни змінної інколи змінюється вимога задачі,* зокрема для рівняння (1) вона буде такою: знайти всі значення параметра k, для яких це рівняння має хоча б один невід'ємний корінь (тоді після оберненої заміни ми обов'язково знайдемо корені заданого рівняння). Це можливо в одному з трьох випадків: або один із коренів рівняння (1) дорівнює нулю (цей випадок легко досліджувати підстановкою в рівняння (1) $t = 0$), або рівняння (1) має один додатний і один від'ємний корені, або обидва корені додатні.

Зобразивши відповідні ескізи графіків функції $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$, записуємо необхідні і достатні умови такого розміщення для коренів квадратного тричлена (рисунок або табл. 16).



Для того щоб розв'язати квадратну нерівність $k^2 + k - 2 \geqslant 0$, можна використати графічну ілюстрацію.

У кінці необхідно об'єднати всі одержані результати. Звичайно, для одержання відповіді можна було б розв'язати задане рівняння (так саме, як приклад 2), а потім дати відповідь на запитання задачі, але такий шлях потребує більш громіздких обчислень.

Вправи

1. Розв'язіть рівняння:

1) $\sqrt{x-a}=2$; 2) $\sqrt{x+2a}=a$; 3) $\sqrt{x+6}-m=\sqrt{x-3}$;

4) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

2. Розв'язіть нерівність:

1) $\frac{(x-1)\sqrt{a-x}}{2-x}\geqslant 0$; 2) $x+2a>\sqrt{3ax+4a^2}$; 3) $\sqrt{4x+a}>x$;

4) $\sqrt{x-a}\geqslant 2x+1$; 5) $\sqrt{a^2-x^2}>2-x$.

3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $3\sqrt{x+2}=2x+a$ має корені.

4. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $(\sqrt{x}-a)\left(x-\frac{4}{x}\right)=0$ має тільки один дійсний корінь.

5. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\sqrt{2-ax}+2=x$ має тільки один дійсний корінь.

6. Визначте кількість розв'язків системи $\begin{cases} y=a+\sqrt{x}, \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ залежно від значення параметра a.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

2. Обчисліть:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1{,}5-\sqrt{5}\right)^3}-1$; 2) $\frac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^3\right)^2}+0{,}75$; 4) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot\left(11+2\sqrt{30}\right)$.

Спростіть вираз (3–5).

3. 1) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$; 2) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

3) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

4. 1) $\left(\sqrt{k}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt{k}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$;

2) $\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(2\sqrt{b}\right)^2}{a-b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

3) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\right)\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+1\right)$;

4) $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^3}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^3}}$.

5. 1) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$;

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

3) $\left(\frac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)$;

4) $\left(\frac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{c^2}+\frac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{c^2}\right)^{-2}$.

Розв'яжіть рівняння (6–10):

6. 1) $\left(\sqrt{x^2-7x+10}\right)^2=2x^2-9x+7$; 2) $x^2+\sqrt{x^2-1}-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0$;
   3) $\sqrt{(x+1)(2x+3)}=x+3$; 4) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+3$.
7. 1) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$; 2) $\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-3x-5}=6x+5$;
   3) $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$; 4) $\sqrt{x^2-7x+1}=\sqrt{2x^2-15x+8}$.
8. 1) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$;
   2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{5x+2}$;
   3) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;
   4) $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+18-8\sqrt{x+2}}=1$.
9. 1) $\sqrt[3]{2x-8}+\sqrt[3]{x-8}=2$; 2) $\sqrt[3]{8x+4}+\sqrt[3]{8x-4}=2$;
   3) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5-x}=2$; 4) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.
10. 1) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$; 2) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$;
    3) $\sqrt{2-x^2}=|x|-1$; 4) $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$.

Розв'яжіть систему рівнянь (11–12).

11. 1) $\begin{cases}\sqrt{x+y}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6;\end{cases}$
    3) $\begin{cases}\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3},\\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{4}{\sqrt{y+9}}=\dfrac{31}{20},\\ \dfrac{3}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{2}{\sqrt{y+9}}=\dfrac{7}{20}.\end{cases}$
12. 1) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}}+4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}}=5,\\ x=y+1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{10}{3},\\ xy-2x-2y=2;\end{cases}$
    3) $\begin{cases}\sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 3x+2y=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7.\end{cases}$

Розв'яжіть нерівність (13–21).

13. 1) $\sqrt{3x^2+13}\geqslant 1-2x$; 2) $\sqrt{x^2+x}>1-2x$;
    3) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; 4) $\sqrt{x^2-x-2}<2x+6$.
14. 1) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$; 2) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;
    3) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$; 4) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$.

15. 1) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\leqslant 2$; 2) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-1}}\geqslant 3$;

3) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$; 4) $\sqrt{x+6}>\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+1}$.

16. 1) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{4}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$;

3) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$; 4) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0$.

17. 1) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$; 2) $(x-3)\sqrt{x^2+1}\leqslant x^2-9$;

3) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 4) $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\geqslant\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.

18. 1) $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1$; 2) $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2$;

3) $\sqrt{x+5}<1+\sqrt{-x-3}+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$;

4) $\sqrt{(x-5)(-x+7)}+1>\sqrt{-x+7}-\sqrt{x-5}$.

19. 1) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$; 2) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$;

3) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

20. 1) $\frac{(1-x)\sqrt{1-x}+(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-4x^2+2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}\geqslant 1$; 2) $\frac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-2(x^2-x)\sqrt{x-x^2}}}>1$;

3) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1}\geqslant 0$; 4) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{1-\sqrt{1+x}}\leqslant 0$.

21. 1) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{1}{\sqrt{x}+2}\leqslant\frac{a}{\sqrt{x}}$ $(a>0)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\geqslant\frac{a}{\sqrt{x}}$.

22. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{1-x^2}\geqslant\frac{4}{3}(x-a)$ при $a=0$ і переконайтеся, що множиною її розв'язків є відрізок. При яких значеннях a множиною розв'язків цієї нерівності є відрізок довжиною $\frac{9}{5}$?

23. При яких значеннях параметра a множина розв'язків нерівності $a+\sqrt{x^2+ax}\geqslant x$ не перетинається з проміжком $[-1;\ 0]$?

24. При яких значення параметра a у множині розв'язків нерівності $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$ міститься проміжок $\left[\frac{1}{4};1\right]$?

Розділ 4
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

§ 23. Обернені тригонометричні функції

§ 24. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

§ 25. Розв'язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших

§ 26. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь

§ 27. Найпростіші тригонометричні нерівності

ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

§ 28. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем

§ 29. Тригонометричні рівняння з параметрами

§ 30. Розв'язування тригонометричних нерівностей

В основній частині цього розділу ви зможете ознайомитися з поняттями обернених тригонометричних функцій та їх графіками і властивостями, навчитися розв'язувати тригонометричні рівняння та їх системи і найпростіші тригонометричні нерівності.

У додатковій частині розділу бажаючі зможуть ознайомитися з методами розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь і нерівностей, які пропонують у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання чи державної підсумкової атестації з математики (зокрема, з методами розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами).

Розділ 3
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

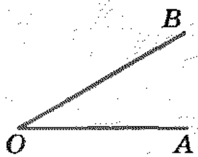
ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

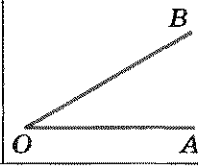
В основній частині цього розділу ви зможете ознайомитися з тригонометричними функціями, які широко використовують як у самій математиці, так і в її застосуваннях, навчитися досліджувати ці функції та будувати їх графіки, розв'язувати різноманітні задачі, спираючись на їх властивості.

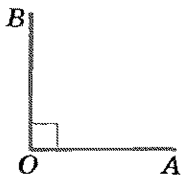
У додатковій частині розділу ви будете мати можливість опанувати додаткові формули тригонометрії, які можуть стати в пригоді під час розв'язування більш складних завдань з тёми, що їх пропонують у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання чи державної підсумкової атестації з математики.

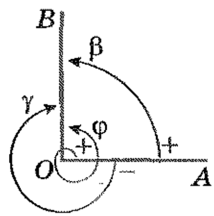
§ 16 РАДІАННА МІРА КУТІВ

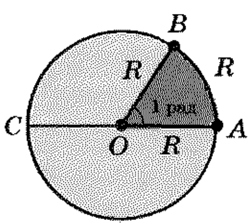
Таблиця 24

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття кута</td></tr>
<tr><td>У геометрії</td><td>У тригонометрії[1]</td></tr>
<tr><td>Кут — геометрична фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки.


∠ AOB утворений променями OA і OB</td><td>Кут — фігура, утворена при повороті променя на площині навколо початкової точки.


∠ AOB утворений при повороті променя OA навколо точки O</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Вимірювання кутів</td></tr>
<tr><td colspan="2">Градусна міра кута ($1^\circ = \frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута)</td></tr>
<tr><td>Кожному куту ставиться у відповідність градусна міра $\alpha \in [0^\circ;\ 180^\circ]$.


$\angle AOB = 90^\circ$</td><td>Кожному куту як фігурі ставиться у відповідність кут повороту, за допомогою якого утворено цей кут.
Кут повороту $\alpha \in (-\infty;\ +\infty)$.


$\angle AOB = \beta = 90^\circ$
$\angle AOB = \gamma = -270^\circ$
$\angle AOB = \varphi =$
$= 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Радіанна міра кута</td></tr>
<tr><td colspan="2">

1 радіан — центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.
$\angle AOB = 1$ рад. Це означає, що $\cup AB = OA = R$
$\angle AOC \doteq 180^\circ = \pi$ (радіан)
$\angle AOC$ — розгорнутий
$1 \text{ радіан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$ | $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радіан</td></tr>
</table>

[1] Походження та зміст терміна «тригонометрія» див. у «Відомостях з історії», наведених після розділу 3.

Пояснення й обґрунтування

1. **Поняття кута.** У курсі геометрії кут означають як геометричну фігуру, утворену двома променями, які виходять з однієї точки. Наприклад, кут AOB, зображений у першому пункті таблиці 24, — це кут, утворений променями OA і OB.

Кут можна розглядати також як результат повороту променя на площині навколо початкової точки. Наприклад, повертаючи промінь OA навколо точки O від початкового положення OA до кінцевого положення OB, теж одержимо кут AOB. Зауважимо, що досягнути кінцевого положення OB можна при повороті променя OA як за годинниковою стрілкою, так і проти неї.

2. **Вимірювання кутів.** Наведені вище різні означення кута приводять до різного розуміння вимірювання кутів.

У курсі геометрії кожному куту відповідає його *градусна міра*, яка може знаходитися тільки в межах від 0° до 180°, і тому, наприклад, для прямого кута AOB (див. пункт 2 табл. 24) його міра записується однозначно: $\angle AOB = 90°$ (нагадаємо, що 1° — це $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута).

При вимірюванні кутів повороту домовилися вважати **напрям повороту проти годинникової стрілки додатним, а за годинниковою стрілкою — від'ємним.**

Тому при вимірюванні кутів, утворених при повороті променя навколо початкової точки, можна одержати як додатні, так і від'ємні значення кутів повороту. Наприклад, якщо кут AOB, у якому промені OA і OB взаємно перпендикулярні, одержано при повороті променя OA на кут 90° проти годинникової стрілки, то значення кута повороту β (див. відповідний рисунок пункті 2 табл. 24) дорівнює $+90°$ (або просто 90°). Якщо той самий кут AOB одержано при повороті променя OA на кут 270° за годинниковою стрілкою (зрозуміло, що повний оберт — це 360°), то значення кута повороту γ дорівнює $-270°$. Той самий кут AOB можна одержати також при повороті променя OA проти годинникової стрілки на 90° і ще на повний оберт; у цьому випадку значення кута повороту φ дорівнює $90° + 360°$, тобто 450° і т. д.

Вибравши як значення кута повороту довільне від'ємне чи додатне число (градусів), ми завжди можемо повернути промінь OA (за годинниковою стрілкою чи проти неї) і одержати відповідний кут AOB. Таким чином, значення кута повороту (у градусах) може набувати всіх дійсних значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Для вимірювання кутів певний кут приймають за одиницю виміру і за її допомогою вимірюють інші кути.

За одиницю виміру можна прийняти будь-який кут.

Нагадаємо, що $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута — це один градус (1°).

У техніці за одиницю виміру кутів приймають повний оберт (зазначимо, що 1 градус — це $\frac{1}{360}$ частина повного оберту).

У мореплавстві за одиницю виміру кутів приймають румб, який дорівнює $\frac{1}{32}$ частині повного оберту.

У математиці та фізиці, крім градусної міри кутів, використовують також *радіанну міру кутів.*

Якщо розглянути деяке коло, то

1 *радіан* — це центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.

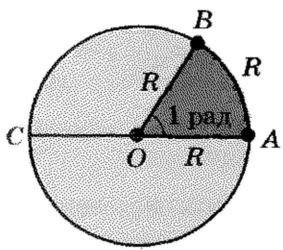


Рис. 102

Отже, якщо кут AOB дорівнює одному радіану (рис. 102), то це означає, що $\cup AB = OA = R$.

Установимо зв'язок між радіанними і градусними мірами кутів.

Центральному розгорнутому куту AOC (рис. 102), який дорівнює 180°, відповідає півколо, тобто дуга, довжина якої дорівнює πR, а одному радіану — дуга довжиною R. Отже, радіанна міра розгорнутого кута AOC дорівнює $\frac{\pi R}{R} = \pi$.

Одержану відповідність між градусною і радіанною мірами кута часто записують так:

180° = π радіан.

Із цієї рівності одержуємо наступні відповідності:

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радіан},} \qquad \boxed{1 \text{ радіан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ}.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Виразіть у радіанній мірі величини кутів: 30°; 45°; 60°; 90°; 270°; 360°.

Оскільки 30° — це $\frac{1}{6}$ частина кута 180°, то з рівності 180° = π (рад) одержуємо, що $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ (рад).

Аналогічно можна обчислити й величини інших кутів.

У загальному випадку враховуємо, що $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радіан, тоді:

$45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ (рад); $60° = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$ (рад); $90° = \frac{\pi}{2}$ (рад);
$270° = \frac{3\pi}{2}$ (рад); $360° = 2\pi$ (рад). ◁

Ураховуючи, що радіанними мірами розглянутих кутів доводиться користуватися досить часто, запишемо одержані результати у вигляді довідкової таблиці.

Таблиця 25

Кут у градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Кут у радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Зауваження. Найчастіше при записі радіанної міри кутів назву одиниці виміру «радіан» (або скорочено *рад*) не пишуть. Наприклад, замість рівності $90° = \frac{\pi}{2}$ радіан пишуть $90° = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2 Виразіть у градусній мірі величини кутів: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 5.

▶ Оскільки $\frac{\pi}{10}$ — це $\frac{1}{10}$ частина кута π, то з рівності $\pi = 180°$ одержуємо, що $\frac{\pi}{10} = 18°$. Аналогічно можна обчислити і величини кутів $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{3\pi}{4}$.

У загальному випадку враховуємо, що 1 радіан $= \frac{180°}{\pi}$, тоді

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 135°$; $5 = 5 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{900°}{\pi} \approx 286°$. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть, як можна означити кут за допомогою повороту променя. Як при такому означенні вимірюють кути?
2. Як ви розумієте такі твердження: «Величина кута дорівнює 450°», «Величина кута дорівнює −225°»? Зобразіть ці кути.
3. Як можна означити кут в 1°?
4. Дайте означення кута в 1 радіан.
5. Чому дорівнює градусна міра кута в π радіан?
6. Поясніть на прикладах, як за радіанною мірою кута знайти його градусну міру і навпаки — за градусною мірою кута знайти його радіанну міру.

Вправи

1°. Зобразіть кут, утворений поворотом променя OA навколо точки O на:

1) $270°$; 2) $-270°$; 3) $720°$; 4) $-90°$;
5) $225°$; 6) $-45°$; 7) $540°$; 8) $-180°$;
9) $360°$; 10) $-60°$.

2°. Чому дорівнюють кути повороту, показані на рисунку 103?

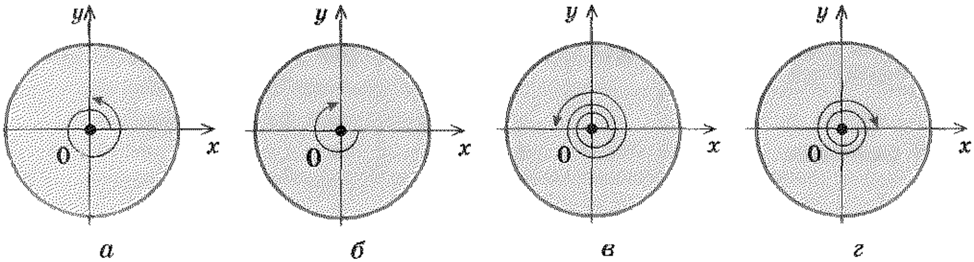


Рис. 103

3. Виразіть у радіанній мірі величини кутів:

1°) $225°$; 2°) $36°$; 3) $100°$;
4) $-240°$; 5) $-22,5°$; 6) $-150°$.

4. Виразіть у градусній мірі величини кутів:

1) 3π; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $-\frac{2\pi}{5}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$;
5) $-\frac{\pi}{18}$; 6) $\frac{11\pi}{6}$; 7) $-\frac{\pi}{8}$; 8) 3.

5. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайдіть радіанні міри кутів:

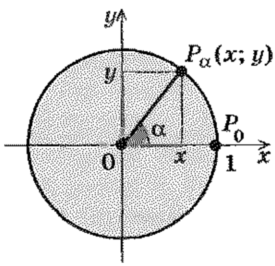
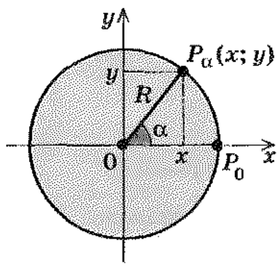
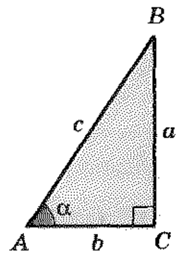
1) $27°$; 2) $132°$; 3) $43°$; 4) $114°$.

6. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайдіть градусні міри кутів:

1) 0,5585; 2) 0,8098; 3) 3,1416; 4) 4,4454.

§ 17 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ КУТА І ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТУ

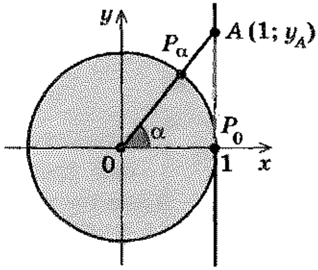
Таблиця 26

1. Означення тригонометричних функцій		
через одиничне коло ($R = 1$)	через довільне коло (R — радіус кола)	через прямокутний трикутник (для гострих кутів)
		
$\boxed{\sin\alpha = y}$ — ордината точки P_α $\boxed{\cos\alpha = x}$ — абсциса точки P_α $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$	$\boxed{\sin\alpha = \frac{y}{R}}$ $\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{R}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}}$ $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}}$	$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$ $\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}}$ $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}}$

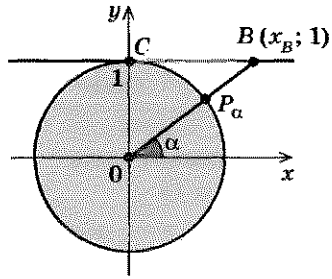
2. Тригонометричні функції числового аргументу
sin (числа α) = sin (кута в α радіан)
cos (числа α) = cos (кута в α радіан)
tg (числа α) = tg (кута в α радіан)
ctg (числа α) = ctg (кута в α радіан)

Продовження табл. 26

3. Лінії тангенсів і котангенсів



AP_0 — лінія тангенсів ($AP_0 \parallel Oy$)
$\operatorname{tg}\alpha = y_A$ — ордината відповідної точки лінії тангенсів



CB — лінія котангенсів ($CB \parallel Ox$)
$\operatorname{ctg}\alpha = x_B$ — абсциса відповідної точки лінії котангенсів

Пояснення й обґрунтування

1. Означення тригонометричних функцій. З курсу геометрії вам відомі означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику. Нагадаємо їх.

Синусом гострого кута α в прямокутному трикутнику називають відношення протилежного катета до гіпотенузи: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (рис. 104).

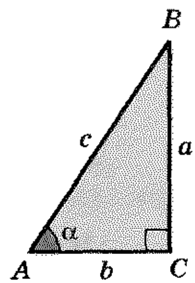


Рис. 104

Косинусом гострого кута α в прямокутному трикутнику називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Тангенсом гострого кута α в прямокутному трикутнику називають відношення протилежного катета до прилеглого: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Котангенсом гострого кута α в прямокутному трикутнику називають відношення прилеглого катета до протилежного: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

У курсі геометрії було обґрунтовано, що синус та косинус гострого кута залежать тільки від величини кута і не залежать від довжин сторін трикутника та його розташування, тобто синус і косинус (а отже, і тангенс, і котангенс) є функціями величини кута, які називають *тригонометричними функціями*.

Також у курсі геометрії з використанням кола з центром у початку координат було введено означення тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180°. Але ці означення можна використати для знаходження тригонометричних функцій довільних кутів. Нагадаємо їх (але тепер будемо розглядати довільні кути α від $-\infty$ до $+\infty$).

Візьмемо коло радіуса R із центром у початку координат. Позначимо точку кола на додатній півосі абсцис через P_0 (рис. 105). Потрібні нам кути будемо утворювати поворотом радіуса OP_0 навколо точки O. Нехай у результаті повороту на кут α навколо точки O радіус OP_0 займе положення OP_α (кажуть, що при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α, а точка P_0 переходить у точку P_α). Нагадаємо, що при $\alpha > 0$ радіус OP_0 повертають проти годинникової стрілки, а при $\alpha < 0$ — за нею.

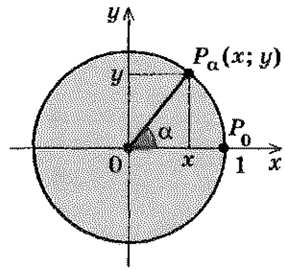


Рис. 105

Нехай точка P_α має координати $(x; y)$. Тоді:

синусом кута α називається відношення ординати точки P_α $(x; y)$ кола до його радіуса:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};$$

косинусом кута α називається відношення абсциси точки P_α $(x; y)$ кола до його радіуса:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R};$$

тангенсом кута α називається відношення ординати точки P_α $(x; y)$ кола до її абсциси: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ (звичайно, при $x \neq 0$);

котангенсом кута α називається відношення абсциси точки P_α $(x; y)$ кола до її ординати: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ (при $y \neq 0$).

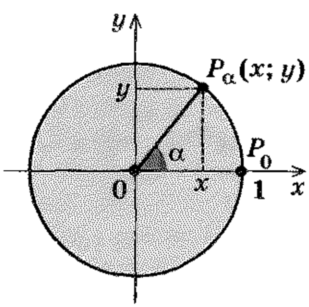


Рис. 106

Як і для тригонометричних функцій гострих кутів, значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ залежать тільки від міри кута α і не залежать від R[1]. Зручно вибрати $R = 1$, що дозволить дещо спростити наведені означення тригонометричних функцій.

Коло радіуса 1 з центром у початку координат будемо називати *одиничним колом*.

Нехай при повороті на кут α точка P_0 $(1; 0)$ переходить у точку P_α $(x; y)$ (тобто при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α) (рис. 106).

[1] Це випливає з того, що два концентричні кола гомотетичні (центр гомотетії — точка O, а коефіцієнт k — відношення радіусів цих кіл), тоді і точки P_α на цих колах теж будуть гомотетичні. Отже, при переході від одного кола до іншого в означеннях тригонометричних функцій чисельник і знаменник відповідного дробу помножаться на k, а значення дробу не зміниться.

Синусом кута α **називається ордината точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола:**

$$\sin\alpha = y.$$

Косинусом кута α **називається абсциса точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола:**

$$\cos\alpha = x.$$

Тангенсом кута α **називається відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її абсциси, тобто відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.**

Отже,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\text{де } \cos\alpha \neq 0).$$

Котангенсом кута α **називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її ординати, тобто відношення $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.**

Отже,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (\text{де } \sin\alpha \neq 0).$$

Приклад Користуючись цими означеннями, знайдемо синус, косинус, тангенс і котангенс кута $\frac{2\pi}{3}$ радіан.

▶ Розглянемо одиничне коло (рис. 107). При повороті на кут $\frac{2\pi}{3}$ радіус OP_0 переходить у радіус $OP_{\frac{2\pi}{3}}$ (а точка P_0 переходить у точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$). Координати точки $P_{\frac{2\pi}{3}}$ можна знайти, використовуючи властивості прямокутного трикутника $OAP_{\frac{2\pi}{3}}$ (з кутами 60° і 30° та гіпотенузою 1): $x = -OA = -\frac{1}{2}$;

$y = AP_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоді: $\sin\frac{2\pi}{3} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = x = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. ◁

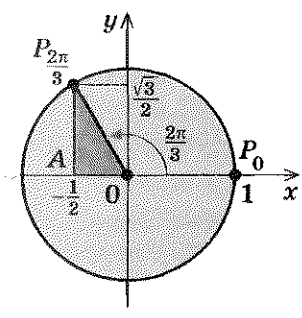


Рис. 107

Аналогічно знаходять значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів, указаних у верхньому рядку таблиці 27.

Зазначимо, що таким чином можна знайти тригонометричні функції тільки деяких кутів. Тригонометричні функції довільного кута зазвичай знаходять за допомогою калькулятора або таблиць.

Таблиця 27

α									
α	градуси	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
ctg α		не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0	не існує

2. Тригонометричні функції числового аргументу. Введені означення дозволяють розглядати не тільки тригонометричні функції кутів, а й тригонометричні функції числових аргументів, якщо розглядати тригонометричні функції числа α як відповідні тригонометричні функції кута в α радіан. Тобто

синус числа α — це синус кута в α радіан;
косинус числа α — це косинус кута в α радіан.

Наприклад, $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\text{ рад}\right)=\sin 30°=\frac{1}{2}$ (див. також пункт 2 табл. 26).

3. Лінії тангенсів і котангенсів. Для розв'язування деяких задач корисно мати уявлення про лінії тангенсів і котангенсів.

Проведемо через точку P_0 одиничного кола пряму AP_0, паралельну осі Oy (рис. 108). Цю пряму називають *лінією тангенсів.*

Нехай α — довільне число (чи кут), для якого $\cos\alpha \neq 0$. Тоді точка P_α не лежить на осі Oy і пряма OP_α перетинає лінію тангенсів у точці A.

Оскільки пряма OP_α проходить через початок координат, то її рівняння $y = kx$. Але ця пряма проходить через точку P_α з координатами ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$), отже, координати точки P_α задовольняють рівнянню прямої $y = kx$, тобто $\sin\alpha = k\cos\alpha$. Звідси

$$k=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

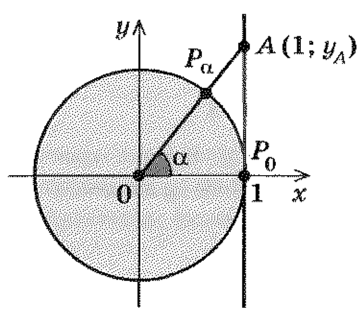


Рис. 108

Таким чином, пряма OP_α має рівняння $y = (\operatorname{tg} \alpha)\, x$.

Пряма AP_0 має рівняння $x = 1$. Щоб знайти ординату точки A, достатньо в рівняння прямої OP_α підставити $x = 1$. Одержуємо $y_A = \operatorname{tg} \alpha$. Отже,

тангенс кута (числа)** α **— це ордината відповідної точки на лінії тангенсів.

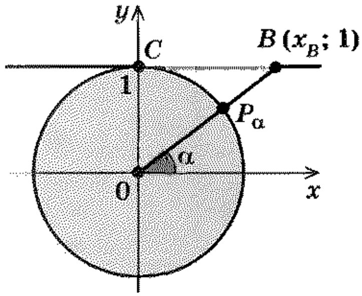


Рис. 109

Аналогічно вводять і поняття *лінії котангенсів*: пряма CB, що проходить через точку C (0; 1) одиничного кола паралельно осі Ox (рис. 109).

Якщо α — довільне число (чи кут), для якого $\sin \alpha \neq 0$ (тобто точка P_α не лежить на осі Ox), то пряма OP_α перетинає лінію котангенсів у деякій точці B $(x_B; 1)$.

Аналогічно попередньому обґрунтовують, що $x_B = \operatorname{ctg} \alpha$. Отже,

котангенс кута (числа)** α **— це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів.

Запитання для контролю

1. Сформулюйте означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику.
2. Сформулюйте означення тригонометричних функцій довільного кута:
   а) використовуючи коло радіуса R із центром у початку координат;
   б) використовуючи одиничне коло.
3. Що мають на увазі, коли говорять про синус, косинус, тангенс і котангенс числа α?

Вправи

1°. Побудуйте на одиничному колі точку P_α, у яку переходить точка P_0 (1; 0) одиничного кола при повороті на кут α. У якій координатній чверті знаходиться точка P_α у завданнях 3–6?

1) $\alpha = 3\pi$; 2) $\alpha = -4\pi$; 3) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 5) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 6) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

2. **Знайдіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ (якщо вони існують) при:**

1) $\alpha = 3\pi$; 2) $\alpha = -4\pi$; 3) $\alpha=-\frac{\pi}{2}$;

4) $\alpha=\frac{5\pi}{2}$; 5*) $\alpha=-\frac{5\pi}{6}$; 6*) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

3*. **Користуючись означенням синуса і косинуса, за допомогою одиничного кола вкажіть знаки $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо:**

1) $\alpha=\frac{6\pi}{5}$; 2) $\alpha=-\frac{\pi}{6}$; 3) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$;

4) $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$; 5) $\alpha=\frac{\pi}{10}$.

4*. **Користуючись лінією тангенсів, укажіть знак $\operatorname{tg}\alpha$, якщо:**

1) $\alpha=\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=\frac{11\pi}{6}$;

4) $\alpha=-\frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha=\frac{9\pi}{4}$.

5*. **Користуючись лінією котангенсів, укажіть знак $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо:**

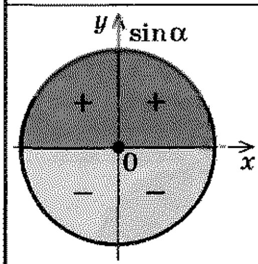
1) $\alpha=-\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=-\frac{11\pi}{6}$;

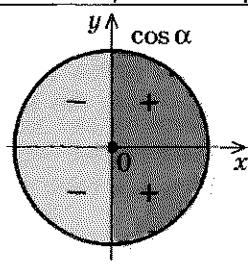
4) $\alpha=\frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha=-\frac{9\pi}{4}$.

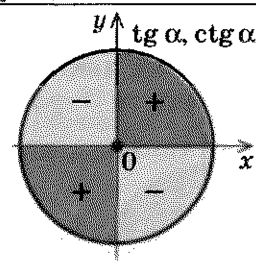
§ 18 ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 28

1. Знаки тригонометричних функцій



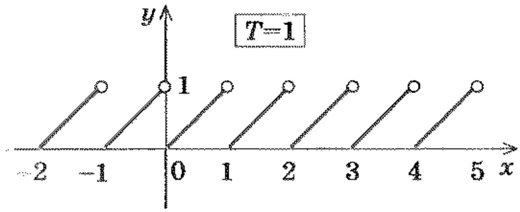




2. Парність і непарність

Косинус — парна функція $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$	*Синус, тангенс і котангенс — непарні функції* $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Продовження табл. 28

<table>
<tr><td colspan="2">3. Періодичність</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функція $f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $(x + T)$ і $(x - T)$ також належать області визначення і виконується рівність
$f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y = \{x\}$ — дробова частина числа x

</td><td>Через проміжки довжиною T (на осі Ox) вигляд графіка періодичної функції повторюється</td></tr>
<tr><td>Якщо T — період функції, то $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, ..., \pm kT$ — також періоди цієї функції ($k \in N$)</td></tr>
<tr><td>$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ Функції $\sin x$ і $\cos x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ мають період $T = 2\pi$</td><td rowspan="2">$T = 2\pi$ — спільний період для всіх функцій: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ Функції $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ мають період $T = \pi$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Знаки тригонометричних функцій легко визначити, виходячи з означення цих функцій.

- Наприклад, $\sin \alpha$ — це ордината відповідної точки P_α одиничного кола. Тоді значення $\sin \alpha$ буде додатним, якщо точка P_α має додатну ординату, а це буде тоді, коли точка P_α знаходиться в I або II координатній чверті (рис. 110). Якщо точка P_α знаходиться в III або IV чверті, то її ордината від'ємна, і тому $\sin \alpha$ теж від'ємний.

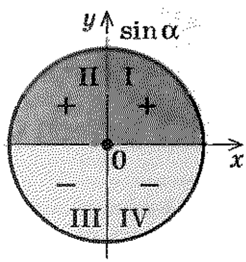


Рис. 110

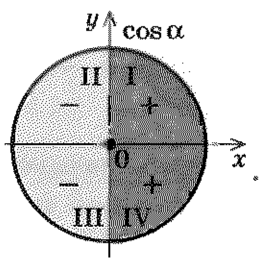


Рис. 111

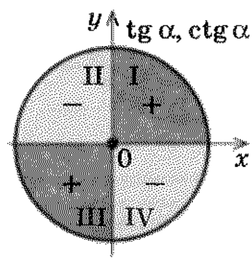


Рис. 112

Аналогічно, ураховуючи, що $\cos \alpha$ — це абсциса відповідної точки P_α, одержуємо, що $\cos \alpha > 0$ в I і IV чвертях (абсциса точки P_α додатна) і $\cos \alpha < 0$ в II і III чвертях (абсциса точки P_α від'ємна) (рис. 111).

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ там, де $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають однакові знаки, тобто в I і III чвертях, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ там, де $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають різні знаки, тобто в II і IV чвертях (рис. 112). ○

2. **Парність і непарність тригонометричних функцій.**

● Щоб дослідити тригонометричні функції на парність і непарність, зазначимо, що на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$ розміщено симетрично відносно осі Ox (рис. 113). Отже, ці точки мають однакові абсциси і протилежні ординати. Тоді $\cos(-\alpha)=x_{P_{-\alpha}}=x_{P_\alpha}=\cos\alpha$,

$\sin(-\alpha)=y_{P_{-\alpha}}=-y_{P_\alpha}=-\sin\alpha$.

Таким чином, **$\cos x$ — парна функція, а $\sin x$ — непарна.**

Тоді $\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Отже, **$\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ — непарні функції.** ○

Парність і непарність тригонометричних функцій можна використовувати для обчислення значень тригонометричних функцій від'ємних кутів (чисел).

Наприклад, ▶ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

3. **Періодичність тригонометричних функцій.** Багато процесів і явищ, що відбуваються в природі і техниці, мають повторюваний характер (наприклад, рух Землі навколо Сонця, рух маховика). Для опису такого роду процесів використовують так звані періодичні функції.

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $(x + T)$ і $(x - T)$ також належать області визначення і виконується рівність

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

● Ураховуючи, що на одиничному колі числам (кутам) α і $\alpha + 2\pi k$, де $k \in Z$, відповідає та сама точка (рис. 114), одержуємо

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha.$$

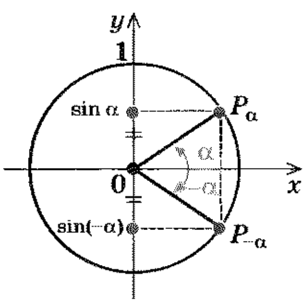


Рис. 113

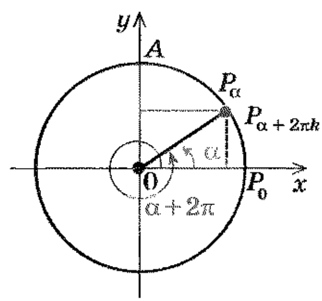


Рис. 114

Тоді $2\pi k$ ($k \neq 0$) є періодом функцій $\sin x$ і $\cos x$.

При $k = 1$ одержуємо, що $T = 2\pi$ — це період функцій $\sin x$ і $\cos x$. Доведемо, що ці функції не можуть мати меншого додатного періоду. Щоб довести, що $T = 2\pi$ — найменший додатний період косинуса, припустимо, що $T > 0$ — період функції $\cos x$. Тоді для будь-якого значення x виконується рівність $\cos(x + T) = \cos x$. Узявши $x = 0$, одержуємо $\cos T = 1$. Але це означає, що на одиничному колі при повороті на кут T точка P_0 знову потрапляє в точку P_0, тобто $T = 2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, будь-який період косинуса повинен бути кратним 2π, а отже,

2π — найменший додатний період косинуса. ○

Щоб обґрунтувати, що $T = 2\pi$ — найменший додатний період функції $\sin x$, достатньо в рівності $\sin(x + T) = \sin x$, яка виконується для будь-яких значень x, узяти $x = \frac{\pi}{2}$. Одержуємо $\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Але це означає, що при повороті на кут $T + \frac{\pi}{2}$ точка P_0 потрапляє в точку A (0; 1) (рис. 114), тобто $T + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, отже, $T = 2\pi k$. Таким чином, будь-який період синуса повинен бути кратним 2π, а отже,

2π — найменший додатний період синуса. ○

Якщо врахувати, що на одиничному колі точки P_α і $P_{\alpha+\pi}$ є діаметрально протилежними, то цим точкам відповідає та сама точка на лінії тангенсів (рис. 115) або на лінії котангенсів (рис. 116).

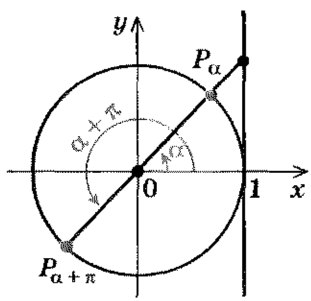


Рис. 115

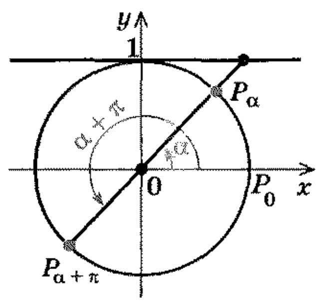


Рис. 116

Тоді $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$, а також $\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha$, тобто періодом функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ є πk ($k \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$).

Найменшим додатним періодом для функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ є $T = \pi$.

Щоб довести це, достатньо в рівності $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$ узяти $x = 0$. Тоді одержуємо $\operatorname{tg} T = 0$. Отже, $T = \pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, будь-який період тангенса повинен бути кратним π, а отже, π — найменший додатний період тангенса. Аналогічно у відповідній рівності для ctg x достатньо взяти $x=\frac{\pi}{2}$. ○

Щоб мати уявлення про поведінку *графіка періодичної функції* $y = f(x)$, згадаємо, що за означенням графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок M координатної площини, які мають координати $(x;\ y) = (x;\ f(x))$. Першу координату для точок графіка вибирають довільно з області визначення функції. Виберемо як першу координату значення $x + T$ (або в узагальненому вигляді — значення $x + kT$ при цілому значенні k) і врахуємо, що для періодичної функції $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ (у загальному випадку — $f(x + kT) = f(x)$). Тоді до графіка функції $y = f(x)$ буде входити також точка M_1 координатної площини з координатами:

$$(x + T;\ y) = (x + T;\ f(x + T)) = (x + T;\ f(x)).$$

Точку $M_1(x + T;\ f(x))$ можна одержати з точки $M(x;\ f(x))$ паралельним перенесенням уздовж осі Ox на T одиниць (рис. 117). У загальному випадку точку $M_2(x + kT;\ f(x))$ можна одержати з точки $M(x;\ f(x))$ паралельним перенесенням уздовж осі Ox на kT одиниць. Отже, через проміжок T вигляд графіка періодичної функції буде повторюватися. Тому для **побудови графіка періодичної функції з періодом T достатньо побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною T** (наприклад, на проміжку $[0;\ T]$), **а потім одержану лінію паралельно перенести праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані kT, де k — будь-яке натуральне число.** ○

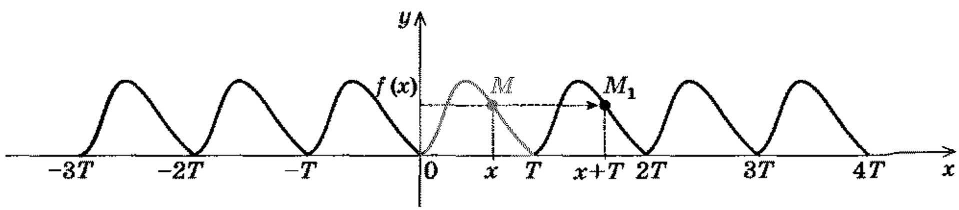


Рис. 117

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Користуючись періодичністю, парністю і непарністю тригонометричних функцій, знайдіть:

1) $\sin\frac{21\pi}{2}$; 2) $\cos(-405°)$; 3) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(-570°)$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $\sin\frac{21\pi}{2} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$	1) Ураховуючи, що значення функції $\sin x$ повторюються

$= \sin\left(5 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$ ◁

через період 2π, виділимо в заданому аргументі число, кратне періоду (тобто 10π), а потім скористаємося рівністю $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$ ($k \in Z$).

2) ▷ $\cos(-405°) = \cos 405° =$

$= \cos(360° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ ◁

2) Спочатку враховуємо парність косинуса: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, а потім його періодичність з періодом $2\pi = 360°$: $\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$.

3) ▷ $\text{tg}\,\frac{16\pi}{3} = \text{tg}\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$ ◁

3) Функція тангенс періодична з періодом π, тому виділяємо в заданому аргументі число, кратне періоду (тобто 5π), а потім використовуємо рівність $\text{tg}(\alpha + \pi k) = \text{tg}\,\alpha$.

4) ▷ $\text{ctg}(-570°) = -\text{ctg}\,570° =$
$= -\text{ctg}(540° + 30°) =$
$= -\text{ctg}(180° \cdot 3 + 30°) =$
$= -\text{ctg}\,30° = -\sqrt{3}.$ ◁

4) Спочатку враховуємо непарність котангенса: $\text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg}\,\alpha$, а потім його періодичність з періодом $\pi = 180°$:
$\text{ctg}(\alpha + 180° \cdot k) = \text{ctg}\,\alpha$.

Приклад 2* Доведіть твердження: **якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y = Af(kx + b)$ також періодична з періодом $\frac{T}{|k|}$** (A, k, b — деякі числа і $k \neq 0$).

Розв'язання

▷ Нехай $\varphi(x) = Af(kx + b)$ і $T_1 = \frac{T}{|k|}$. Тоді

$\varphi(x + T_1) = Af(k(x + T_1) + b) =$

$= Af\left(k\left(x + \frac{T}{|k|}\right) + b\right) = Af(kx \pm T + b) =$

$Af(kx + b \pm T) = Af(kx + b) = \varphi(x)$,

а це й означає, що функція $\varphi(x) = Af(kx + b)$ має період

$$T_1 = \frac{T}{|k|}.$$

Зазначимо, що одержана рівність $\varphi(x + T_1) = \varphi(x)$ при підстановці замість x значення $x - T_1$ перетворюється в рівність $\varphi(x) = \varphi(x - T_1)$. Отже, $\varphi(x - T_1) = \varphi(x + T_1) = \varphi(x)$ і T_1 дійсно є періодом функції $\varphi(x)$. ◁

Коментар

За означенням функція $\varphi(x) = Af(kx + b)$ буде періодичною з періодом $T_1 = \frac{T}{|k|}$, якщо для будь-якого x з області визначення φ значення цієї функції в точках x і $x + T_1$ рівні, тобто $\varphi(x + T_1) = \varphi(x)$. У ході обґрунтування враховано, що вираз $k \cdot \frac{T}{|k|}$ при $k > 0$ дорівнює $k \cdot \frac{T}{k} = T$, а при $k < 0$ дорівнює $k \cdot \frac{T}{-k} = -T$. Також ураховано, що функція $f(x)$ за умовою періодична з періодом T, і тому $f(x_1 \pm T) = f(x_1)$, де $x_1 = kx + b$.

Використаємо твердження, доведене в прикладі 2, для знаходження періодів функцій.

Наприклад,

1) ▶ якщо функція $\sin x$ має період $T = 2\pi$, то функція $\sin 4x$ має період

$$T_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}; \triangleleft$$

2) ▶ якщо функція $\operatorname{tg} x$ має період $T = \pi$, то функція $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ має період

$$T_1 = \frac{T}{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi. \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. а) Назвіть знаки тригонометричних функцій у кожній із координатних чвертей.
   б*) Обґрунтуйте знаки тригонометричних функцій у кожній із координатних чвертей.
2. а) Які з тригонометричних функцій є парними, а які — непарними? Наведіть приклади використання парності і непарності для обчислення значень тригонометричних функцій.
   б*) Обґрунтуйте парність чи непарність відповідних тригонометричних функцій.
3. а) Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади.
   б*) Обґрунтуйте періодичність тригонометричних функцій. Укажіть найменший додатний період для синуса, косинуса, тангенса і котангенса та обґрунтуйте, що в кожному випадку цей період дійсно є найменшим додатним періодом.

Вправи

1. Користуючись періодичністю, парністю і непарністю тригонометричної функції, знайдіть:

1) $\cos\frac{19\pi}{3}$; 2) $\sin(-750°)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{ctg} 945°$;

5) $\sin\frac{25\pi}{4}$; 6) $\cos(-3630°)$; 7) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$; 8) $\operatorname{tg} 600°$.

2*. Серед заданих функцій знайдіть періодичні й укажіть найменший додатний період для кожної з них:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = \sin 2x$; 3) $f(x) = |x|$;
4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$; 5) $f(x) = 3$.

3. Знайдіть найменший додатний період кожної із заданих функцій:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} 5x$; 3) $y = \sin\frac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{ctg} 3x$; 5) $y = \cos\frac{2x}{5}$.

4. На кожному з рисунків 118–121 наведено частину графіка деякої періодичної функції з періодом T. Продовжіть графік на відрізок $[-2T; 3T]$.

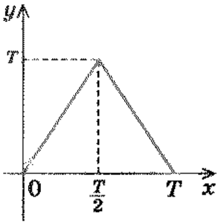


Рис. 118

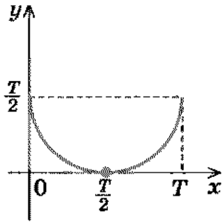


Рис. 119

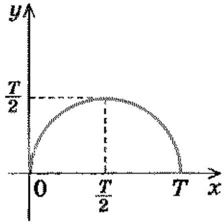


Рис. 120

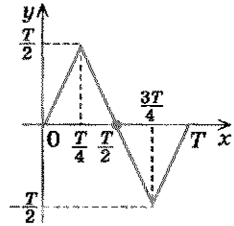


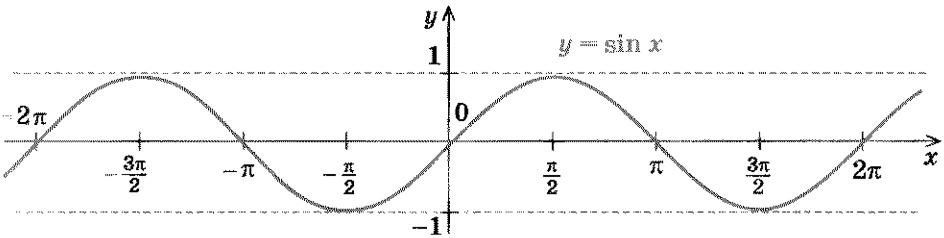
Рис. 121

§ 19 ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА І КОТАНГЕНСА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

19.1. Графік функції $y = \sin x$ та її властивості

Таблиця 29

Графік функції $y = \sin x$ (*синусоїда*)



Властивості функції $y = \sin x$

1. *Область визначення*: $x \in R$ (x — будь-яке дійсне число).

$$\boxed{D(\sin x) = R}$$

2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E(\sin x) = [-1; 1]}$

3. Функція непарна: $\sin(-x) = -\sin x$ (графік симетричний відносно початку координат).

4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = 2\pi}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, \ k \in Z \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin x > 0 \text{ при } x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), \ k \in Z \\ \sin x < 0 \text{ при } x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), \ k \in Z \end{array}}$$

Продовження табл. 29

7.	*Проміжки зростання і спадання:*
	функція sin x зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in Z$, **і спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in Z$**
8.	**Найбільше значення функції дорівнює 1 при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$** **Найменше значення функції дорівнює −1 при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$**

Пояснення й обґрунтування

Характеризуючи властивості тригонометричних функцій, ми будемо виділяти такі їх характеристики: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність чи непарність; 4) періодичність; 5) точки перетину з осями координат; 6) проміжки знакосталості; 7) проміжки зростання і спадання; 8) найбільше і найменше значення функції.

Зауваження. Абсциси точок перетину графіка функції з віссю Ox (тобто ті значення аргументу, при яких функція дорівнює нулю) називають *нулями функції*.

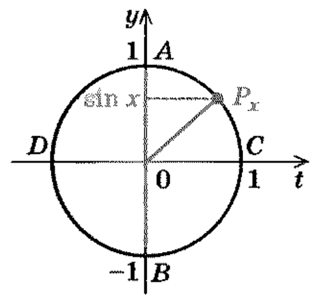


Рис. 122

Нагадаємо, що значення синуса — це ордината відповідної точки одиничного кола (рис. 122). Оскільки ординату можна знайти для будь-якої точки одиничного кола, то *область визначення* функції $y = \sin x$ — усі дійсні числа. Це можна записати так: $\boldsymbol{D(\sin x) = R}$.

Для точок одиничного кола ординати набувають усіх значень від −1 до 1, отже, *область значень* функції $y = \sin x$: $y \in [-1; 1]$. Це можна записати так:

$$E(\sin x) = [-1; 1].$$

Як бачимо, *найбільше значення* функції $\sin x$ дорівнює одиниці. Цього значення функція досягає тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка A, тобто при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$.

Найменше значення функції $\sin x$ дорівнює мінус одиниці, якого вона досягає тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка B, тобто при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$.

Як було показано в § 18, синус — *непарна функція*: $\sin(-x) = -\sin x$, отже, її графік симетричний відносно початку координат.

У § 18 було обґрунтовано також, що синус — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, отже, через проміжки довжиною 2π вигляд графіка функції $\sin x$ повторюється. Тому для того щоб побудувати графік цієї функції, достатньо побудувати її графік на будь-якому проміжку довжиною 2π, а потім одержану лінію паралельно перенести праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані $kT = 2\pi k$, де k — будь-яке натуральне число.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, згадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \sin 0 = 0$, тобто графік функції $y = \sin x$ проходить через початок координат.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\sin x$, тобто ордината відповідної точки одиничного кола, дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола буде точка C або D (рис. 122), тобто при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 18, значення функції синус додатні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола додатна) у I і II координатних чвертях (рис. 123). Отже, $\sin x > 0$ при $x \in (0; \pi)$, а також, ураховуючи період, при всіх $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Значення функції синус від'ємні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола від'ємна) у III і IV чвертях, отже, $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Проміжки зростання і спадання

Ураховуючи періодичність функції $\sin x$ з періодом $T = 2\pi$, достатньо дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 124, *а*), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) ордината відповідної точки одиничного кола збільшується (тобто $\sin x_2 > \sin x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\sin x$ зростає. Ураховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також зростає в кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 124, *б*), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) ордината відповідної точки одиничного кола зменшується (тобто $\sin x_2 < \sin x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\sin x$ спадає. Ураховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також спадає в кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. ○

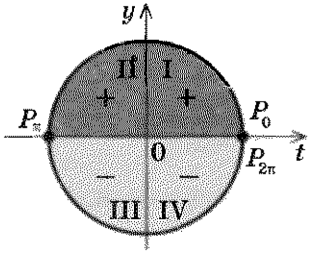


Рис. 123

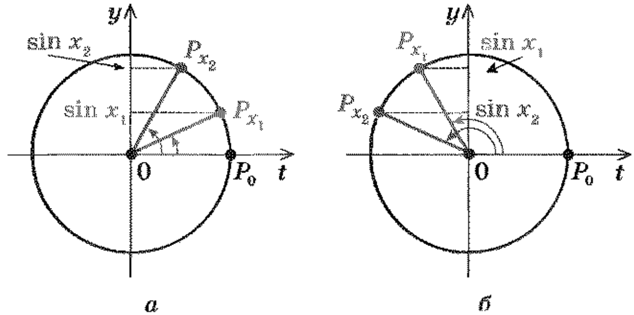


Рис. 124

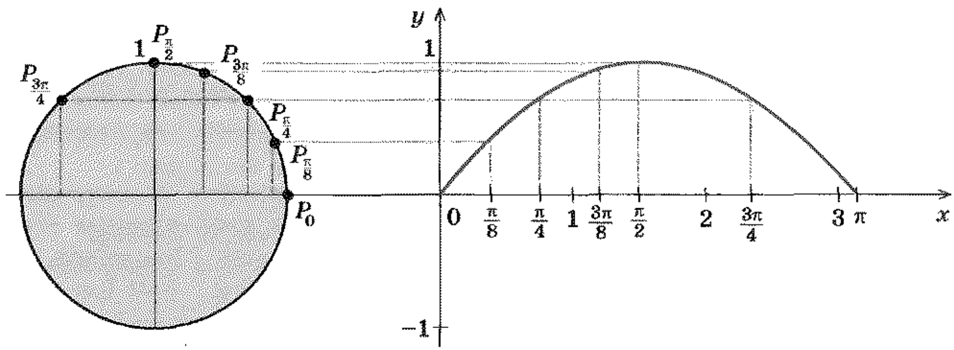


Рис. 125

Проведене дослідження дозволяє обґрунтовано побудувати графік функції $y = \sin x$. Ураховуючи періодичність цієї функції (з періодом 2π), достатньо спочатку побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад на проміжку $[-\pi; \pi]$. Для більш точної побудови точок графіка користуємося тим, що значення синуса — це ордината відповідної точки одиничного кола. На рисунку 125 показано побудову графіка функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$. Ураховуючи непарність функції $\sin x$ (її графік симетричний відносно початку координат), для того щоб побудувати графік на проміжку $[-\pi; 0]$, відображуємо одержану криву симетрично відносно початку координат (рис. 126).

Оскільки ми побудували графік на проміжку довжиною 2π, то, ураховуючи періодичність синуса (з періодом 2π), повторюємо вигляд графіка на кожному проміжку довжиною 2π (тобто переносимо паралельно графік уздовж осі Ox на $2\pi k$, де k — ціле число).

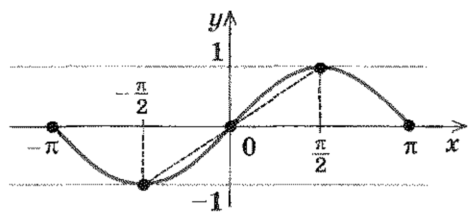


Рис. 126

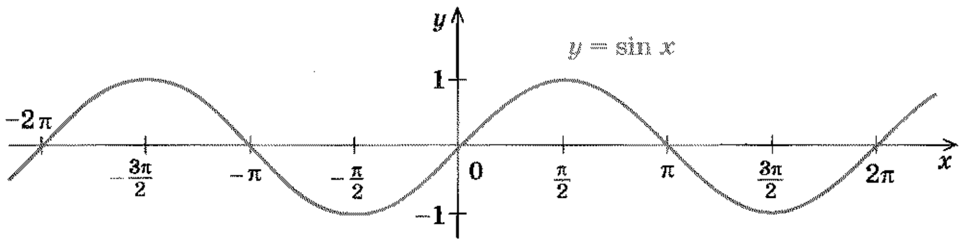


Рис. 127

Одержуємо графік, наведений на рисунку 127, який називають *синусоїдою*.

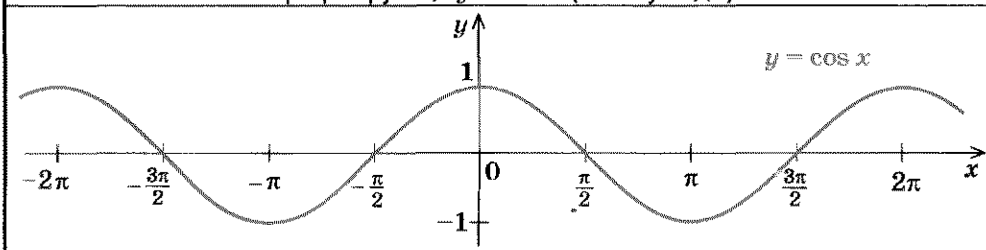
Зауваження. Тригонометричні функції широко застосовують у математиці, фізиці та техниці. Наприклад, багато процесів, таких як коливання струни, маятника, напруги в колі змінного струму тощо, описуються функцією, яку задають формулою $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Такі процеси називають *гармонічними коливаннями*.

Графік функції $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ можна одержати із синусоїди $y = \sin x$ стискуванням або розтягуванням її вздовж координатних осей і паралельним перенесенням уздовж осі Ox. Найчастіше гармонічне коливання є функцією часу t. Тоді його задають формулою $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, де A — амплітуда коливання, ω — кутова частота, φ — початкова фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — період коливання (якщо $A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \geqslant 0$).

19.2. Графік функції $y = \cos x$ та її властивості

Таблиця 30

Графік функції $y = \cos x$ (*косинусоїда*)



Властивості функції $y = \cos x$

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число)

$$\boxed{D(\cos x) = \boldsymbol{R}}$$

2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E(\cos x) = [-1; 1]}$

Продовження табл. 30

3. *Функція парна*: $\cos(-x) = \cos x$ (графік симетричний відносно осі Oy)

4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = 2\pi}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in Z \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$$\boxed{\begin{gathered} \cos x > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \; k \in Z \\ \cos x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \; k \in Z \end{gathered}}$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:

функція $\cos x$ зростає на кожному з проміжків $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ і спадає на кожному з проміжків $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$

8. **Найбільше значення функції дорівнює 1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$**
Найменше значення функції дорівнює -1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$

Пояснення й обґрунтування

Нагадаємо, що значення косинуса — це абсциса відповідної точки одиничного кола (рис. 128). Оскільки абсцису можна знайти для будь-якої точки одиничного кола, то *область визначення* функції $y = \cos x$ — усі дійсні числа. Це можна записати так:

$$D(\cos x) = R.$$

Для точок одиничного кола абсциси набувають усіх значень від -1 до 1, отже, *область значень* функції $y = \cos x$: $y \in [-1; 1]$. Це можна записати так:

$$E(\cos x) = [-1; 1].$$

Як бачимо, *найбільше значення* функції $\cos x$ дорівнює одиниці. Цього значення функція досягає тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка A, тобто при $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Найменше значення функції $\cos x$ дорівнює мінус одиниці. Це значення досягається тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка B, тобто при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

Як було показано в § 18, косинус — *парна функція*: $\cos(-x) = \cos x$, тому її графік симетричний відносно осі Oy.

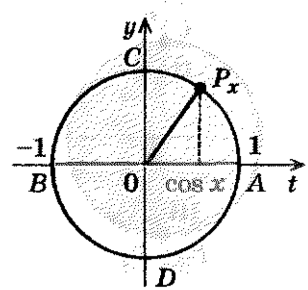


Рис. 128

У § 18 було обґрунтовано також, що косинус — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Отже, через проміжки довжиною 2π вигляд графіка функції $\cos x$ повторюється.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, нагадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \cos 0 = 1$.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\cos x$, тобто абсциса відповідної точки одиничного кола дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола буде точка C або D (рис. 128), тобто при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 18, значення функції косинус додатні (тобто абсциса відповідної точки одиничного кола додатна) в I і IV чвертях (рис. 129). Отже, $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а також, ураховуючи період, при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Значення функції косинус від'ємні (тобто абсциса відповідної точки одиничного кола від'ємна) у II і III чвертях, отже, $\cos x < 0$ при

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Проміжки зростання і спадання

Ураховуючи періодичність функції $\cos x$ ($T = 2\pi$), достатньо дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад на проміжку $[0; 2\pi]$.

Якщо $x \in [0; \pi]$ (рис. 130, *а*), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) абсциса відповідної точки одиничного кола зменшується (тобто $\cos x_2 < \cos x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\cos x$ спадає. Ураховуючи періодичність функції $\cos x$, робимо висновок, що вона також спадає в кожному з проміжків $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$.

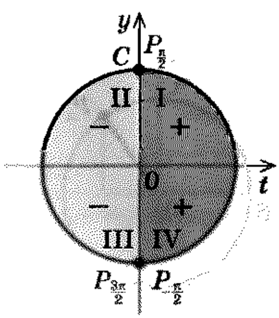


Рис. 129

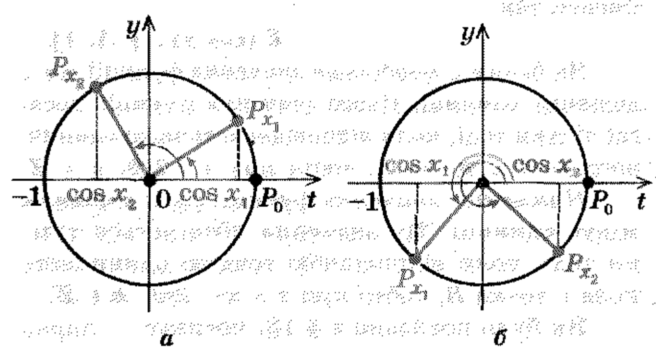


Рис. 130

Якщо $x \in [\pi; 2\pi]$ (рис. 130, *б*), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) абсциса відповідної точки одиничного кола збільшується (тобто $\cos x_2 > \cos x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\cos x$ зростає. Ураховуючи періодичність функції $\cos x$, робимо висновок, що вона зростає також у кожному з проміжків $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$. ○

Проведене дослідження дозволяє побудувати графік функції $y = \cos x$ аналогічно до того, як було побудовано графік функції $y = \sin x$. Але графік функції $y = \cos x$ можна одержати також за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = \sin x$, використовуючи формулу

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x}.$$

● Цю формулу можна обґрунтувати, наприклад, так. Розглянемо одиничне коло (рис. 131) і відмітимо на ньому точки $A = P_x$ і $B = P_{\frac{\pi}{2}+x}$ та абсциси і ординати цих точок. Ураховуючи, що $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, одержуємо, що при повороті прямокутника OC_1AD_1 навколо точки O на кут $\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки він перейде в прямокутник OC_2BD_2. Але тоді $OD_2 = OD_1$ і $OC_2 = OC_1$. Отже, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = y_B = OC_2 = OC_1 = t_A = \cos x$.

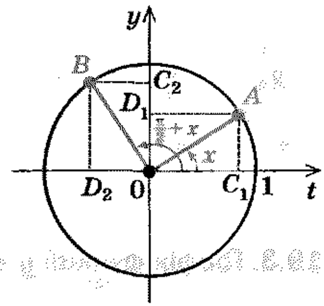


Рис. 131

Зазначимо також формули, які нам знадобляться далі:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = t_B = -OD_2 = -OD_1 = -y_A = -\sin x.$$

Тоді $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x.$

Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{ctg} x}. \ ○$$

Ураховуючи, що $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, графік функції $y = \cos x$ можна одержати із графіка функції $y = \sin x$ його паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 132). Одержуємо графік, який називається *косинусоїдою* (рис. 133).

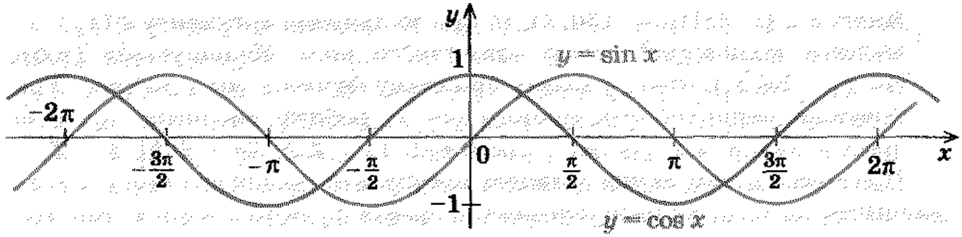


Рис. 132

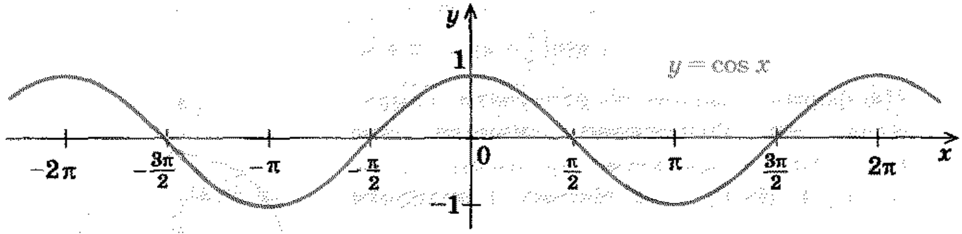
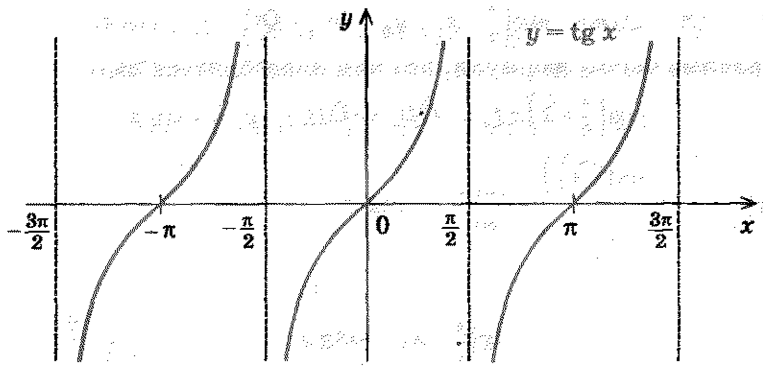


Рис. 133

19.3. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ та її властивості

Таблиця 31

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (*тангенсоїда*)

Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$
1. *Область визначення:* $\boxed{D(\operatorname{tg} x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z}$
2. *Область значень:* $y \in R$. $\boxed{E(\operatorname{tg} x) = R}$

Продовження табл. 31

3. ***Функція непарна***: $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\,x$
(*графік симетричний відносно початку координат*).

4. ***Функція періодична*** з періодом $\boxed{T = \pi}$: $\mathrm{tg}\,(x + \pi) = \mathrm{tg}\,x$.

5. ***Точки перетину з осями координат***: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$

6. ***Проміжки знакосталості***:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z \\ \mathrm{tg}\,x < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right),\ k \in Z \end{array}}$$

7. ***Проміжки зростання і спадання***:

функція tg x зростає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто *на кожному з проміжків* $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

8. ***Найбільшого і найменшого значень*** **функція не має.**

Пояснення й обґрунтування

Нагадаємо, що $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Отже, *областю визначення* тангенса будуть усі значення аргументу, при яких $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Отримуємо $D\,(\mathrm{tg}\,x)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Цей результат можна одержати й геометрично. Значення тангенса — це ордината відповідної точки T_x на лінії тангенсів (рис. 134). Оскільки точки A і B одиничного кола лежать на прямих OA і OB, паралельних лінії тангенсів, ми не зможемо знайти значення тангенса для $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Для всіх інших значень аргументу ми можемо знайти відповідну точку на лінії тангенсів та її ординату — тангенс. Отже, усі значення $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ входять до області визначення функції $y = \mathrm{tg}\,x$.

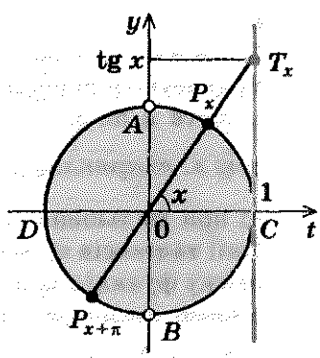


Рис. 134

Для точок одиничного кола (які не збігаються з точками A і B) ординати відповідних точок на лінії тангенсів набувають усіх значень від $-\infty$ до $+\infty$. Таким чином, *область значень* функції $y = \text{tg } x$ — усі дійсні числа, тобто $y \in \boldsymbol{R}$. Це можна записати так: $\boldsymbol{E}$ $(\text{tg } x) = \boldsymbol{R}$. З наведених міркувань випливає також, що *найбільшого* і *найменшого значень* функція $\text{tg } x$ не має.

Як було показано в § 18, тангенс — *непарна* функція: $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$, отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Тангенс — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T = \pi$: $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$ (див. § 18). Тому при побудові графіка цієї функції достатньо побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною π, а потім одержану лінію перенести паралельно праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстань $kT = \pi k$, де k — будь-яке натуральне число.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, нагадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \text{tg } 0 = 0$, тобто графік функції $y = \text{tg } x$ проходить через початок координат.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\text{tg } x$, тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів, дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола буде точка C або D (рис. 134), тобто при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 18, значення функції тангенс додатні (тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів додатна) у I і III координатних чвертях. Отже, $\text{tg } x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а також, ураховуючи період, при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Значення функції тангенс від'ємні (тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів від'ємна) у II і IV чвертях. Отже, $\text{tg } x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки зростання і спадання

Ураховуючи періодичність функції $\text{tg } x$ (період $T = \pi$), достатньо дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною π, наприклад на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 135), то при збільшенні аргументу x $(x_2 > x_1)$ ордината відповідної точки лінії тангенсів збільшується (тобто $\text{tg } x_2 > \text{tg } x_1$). Отже, у цьому проміжку функція $\text{tg } x$ зростає. Ураховуючи періодичність функції $\text{tg } x$, робимо висновок, що вона зростає також у кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

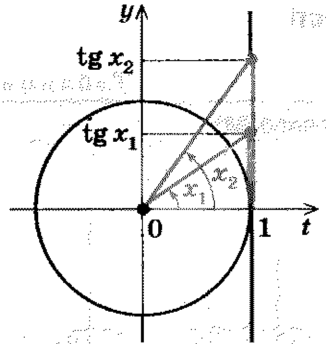


Рис. 135

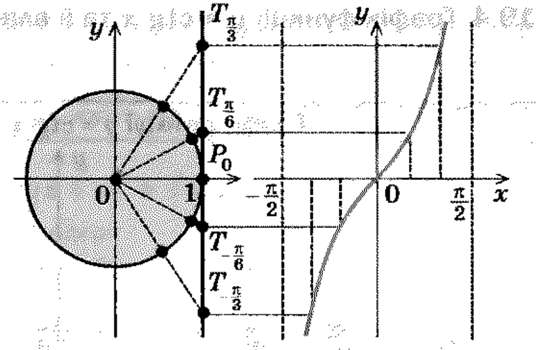


Рис. 136

Проведене дослідження дозволяє обґрунтовано побудувати графік функції $y = \text{tg}\, x$. Ураховуючи періодичність цієї функції (з періодом π), спочатку побудуємо графік на будь-якому проміжку довжиною π, наприклад на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для більш точної побудови точок графіка скористаємося також тим, що значення тангенса — це ордината відповідної точки лінії тангенсів. На рисунку 136 показано побудову графіка функції $y = \text{tg}\, x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Далі, ураховуючи періодичність тангенса (з періодом π), повторюємо вигляд графіка на кожному проміжку довжиною π (тобто переносимо паралельно графік уздовж осі Ox на πk, де k — ціле число).

Одержуємо графік, наведений на рисунку 137, який називають *тангенсоїдою*.

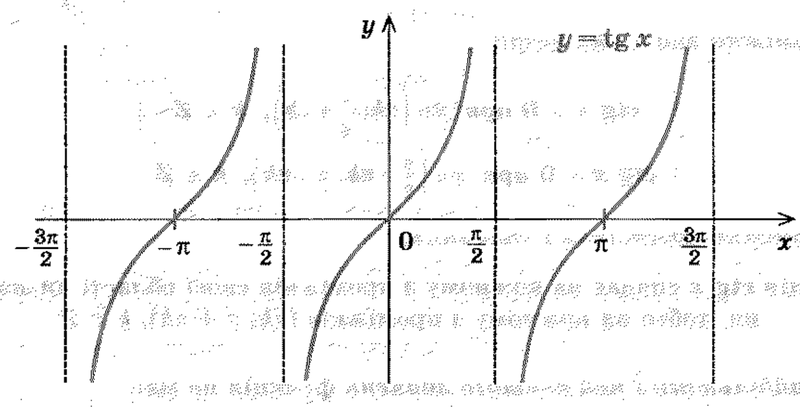
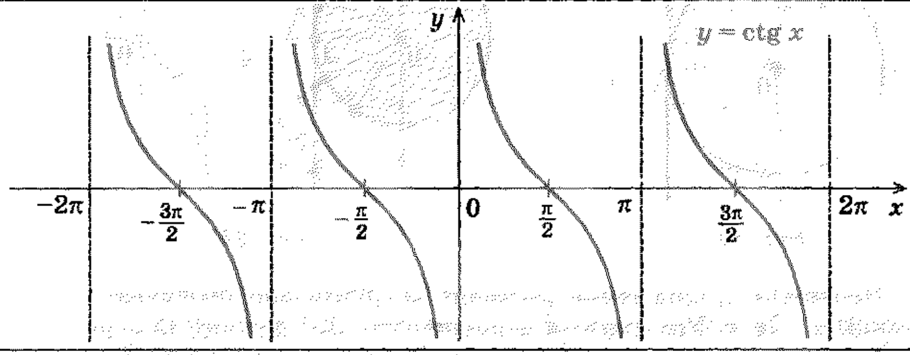


Рис. 137

19.4. Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ та її властивості

Таблиця 32

Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ (*котангенсоїда*)



Властивості функції $y = \mathrm{ctg}\, x$

1. ***Область визначення:*** $\boxed{D(\mathrm{ctg}\, x):\ x \neq \pi k,\ k \in Z}$

2. ***Область значень:*** $y \in R$. $\boxed{E(\mathrm{ctg}\, x) = R}$

3. ***Функція непарна***: $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).

4. ***Функція періодична*** з періодом $\boxed{T = \pi}$: $\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}\, x$.

5. ***Точки перетину з осями координат:*** *Oy* $\boxed{\text{немає}}$, *Ox* $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$

6. ***Проміжки знакосталості:***

$$\mathrm{ctg}\, x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\, x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in Z$$

7. ***Проміжки зростання і спадання:***

функція $\mathrm{ctg}\, x$ спадає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

8. ***Найбільшого і найменшого значень* функція не має.**

Пояснення й обґрунтування

Нагадаємо, що $\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Отже, *областю визначення* котангенса будуть усі значення аргументу, при яких $\sin x \neq 0$, тобто $x \neq \pi k$, $k \in Z$. Таким чином,

$$D\,(\mathrm{ctg}\, x):\ x \neq \pi k,\ k \in Z.$$

Той самий результат можна одержати, використовуючи геометричну ілюстрацію. Значення котангенса — це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів (рис. 138). Оскільки точки A і B одиничного кола лежать на прямих OA і OB, паралельних лінії котангенсів, ми не можемо знайти значення котангенса для $x = \pi k$, $k \in Z$. Для всіх інших значень аргументу ми можемо знайти відповідну точку на лінії котангенсів та її абсцису — котангенс. Таким чином, усі значення $x \neq \pi k$ входять до області визначення функції $y = \mathrm{ctg}\, x$.

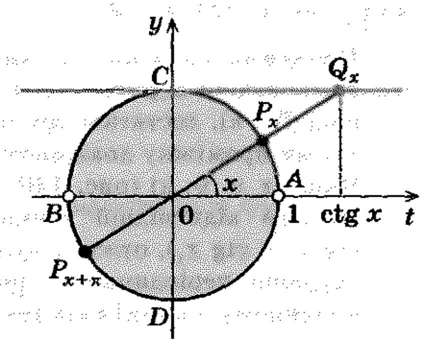


Рис. 138

Для точок одиничного кола (які не збігаються з точками A і B) абсциси відповідних точок на лінії котангенсів набувають усіх значень від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, *область значень* функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ — усі дійсні числа, тобто $y \in R$. Це можна записати так: $E\,(\mathrm{ctg}\, x) = R$. З наведених міркувань випливає також, що *найбільшого і найменшого значень* функція $\mathrm{ctg}\, x$ не має.

Як було показано в § 18, котангенс — *непарна* функція: $\mathrm{ctg}\,(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$, тому її графік симетричний відносно початку координат.

Також у § 18 було обґрунтовано, що котангенс — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T = \pi$: $\mathrm{ctg}\,(x + \pi) = \mathrm{ctg}\, x$, тому через проміжки довжиною π вигляд графіка функції $\mathrm{ctg}\, x$ повторюється.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, нагадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Оскільки $\mathrm{ctg}\, 0$ не існує, то графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ не перетинає вісь Oy.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\mathrm{ctg}\, x$, тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів, дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола буде точка C або D, тобто при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 18, значення функції котангенс додатні (тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів додатна) у I і III чвертях (рис. 139). Тоді ctg $x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ураховуючи період, отримуємо, що ctg $x > 0$ при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Значення функції котангенс від'ємні (тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів від'ємна) у II і IV чвертях, отже, ctg $x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Проміжки зростання і спадання

Ураховуючи періодичність функції ctg x (найменший додатний період $T = \pi$), достатньо дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною π, наприклад на проміжку $(0; \pi)$.

Якщо $x \in (0; \pi)$ (рис. 140), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) абсциса відповідної точки лінії котангенсів зменшується (тобто ctg $x_2 <$ ctg x_1), отже, у цьому проміжку функція ctg x спадає. Ураховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також спадає в кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

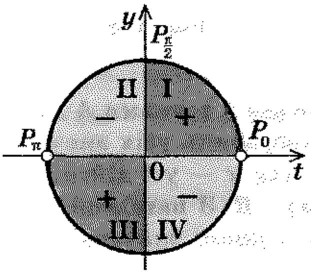


Рис. 139

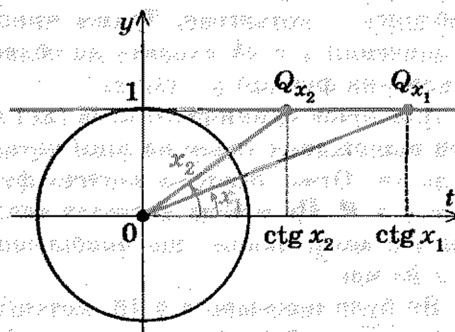


Рис. 140

Проведене дослідження дозволяє побудувати графік функції $y =$ ctg x аналогічно до того, як було побудовано графік функції $y =$ tg x. Але графік функції $y =$ ctg x можна одержати також за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y =$ tg x. За формулою, наведеною вище, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$, тобто $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Тому графік функції $y =$ ctg x можна одержати з графіка функції $y =$ tg x паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ і симетричним відображенням одержаного графіка відносно осі Ox. Отримуємо графік, який називають ***котангенсоїдою*** (рис. 141).

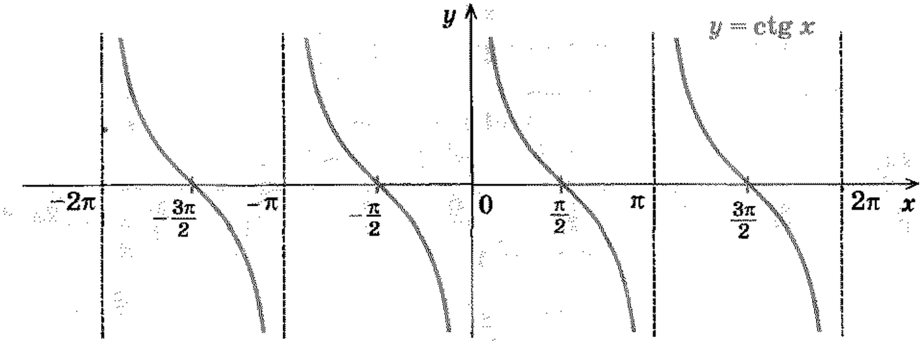


Рис. 141

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 **Побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції і проміжки знакосталості:**

1) $y = 2\sin x$; 2) $y = \sin 2x$.

Коментар

Графіки всіх заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень (табл. 6) графіка функції $f(x) = \sin x$. Отже, графіком кожної із цих функцій буде синусоїда, одержана:

1) $y = 2\sin x = 2f(x)$ розтягуванням графіка $y = \sin x$ удвічі вздовж осі Oy;

2) $y = \sin 2x = f(2x)$ стискуванням графіка $y = \sin x$ удвічі вздовж осі Ox.

Нулі функції — це абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.

Щоб записати проміжки знакосталості функції, зазначимо, що функція $y = 2\sin x$ періодична з періодом $T = 2\pi$, а функція $y = \sin 2x$ періодична з періодом $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Тому для кожної функції достатньо з'ясувати на одному періоді, де значення функції додатні (графік розташований вище осі Ox) і де від'ємні (графік розташований нижче осі Ox), а потім одержані проміжки повторити через період.

Розв'язання

1) ▶ Графік функції $y = 2\sin x$ одержуємо із графіка функції $y = \sin x$ розтягуванням його вдвічі вздовж осі Oy (рис. 142).

Нулі функції: $x = \pi k$, $k \in Z$.

Проміжки знакосталості:

$$2\sin x > 0 \text{ при } x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k),\ k \in Z;$$

$$2\sin x < 0 \text{ при } x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z. \triangleleft$$

2) ▶ Графік функції $y = \sin 2x$ одержуємо із графіка функції $y = \sin x$ стискуванням його вдвічі вздовж осі Ox (рис. 143).

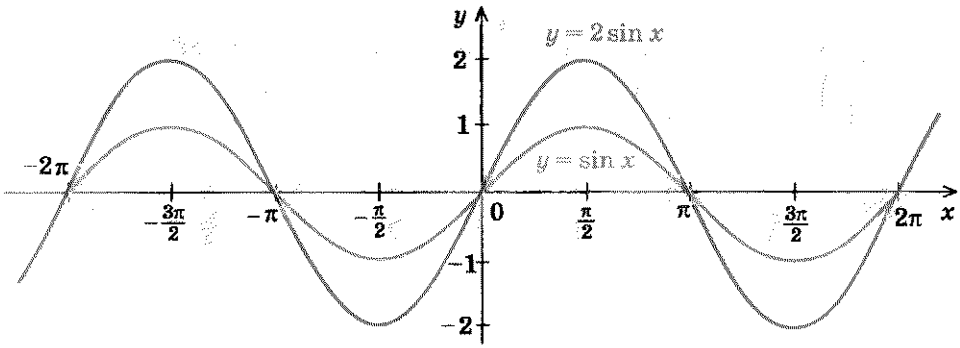


Рис. 142

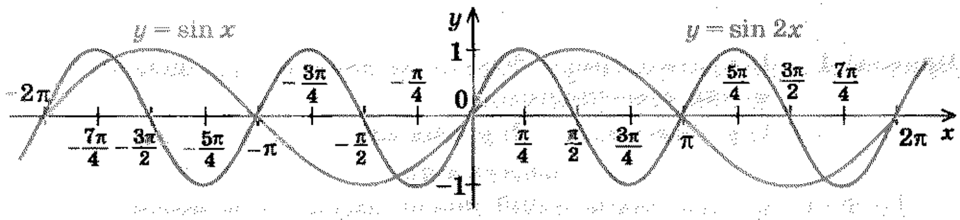


Рис. 143

Нулі функції: $x=\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Проміжки знакосталості: $\sin 2x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$;

$\sin 2x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi+\pi k\right)$, $k \in Z$. ◁

Приклад 2 **Розташуйте в порядку зростання числа:**
$\sin 1{,}9$; $\sin 3$; $\sin(-1)$; $\sin(-1{,}5)$.

Коментар

Для того щоб розмістити задані числа в порядку їх зростання, з'ясуємо, які з них додатні, а які — від'ємні, а потім порівняємо між собою окремо додатні числа і окремо від'ємні, користуючись відомими проміжками зростання і спадання функції $\sin x$.

Розв'язання

▶ Числа $\sin 1{,}9$ і $\sin 3$ — додатні (точки $P_{1,9}$ і P_3 знаходяться в II чверті), а числа $\sin(-1)$ і $\sin(-1{,}5)$ — від'ємні (P_{-1} і $P_{-1,5}$ знаходяться в IV чверті).

Ураховуючи, що $\frac{\pi}{2}<1{,}9<\pi$, $\frac{\pi}{2}<3<\pi$ і що функція $\sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, з нерівності $1{,}9 < 3$ одержуємо $\sin 1{,}9 > \sin 3$.

Також $-\frac{\pi}{2}<-1<0$, $-\frac{\pi}{2}<-1{,}5<0$. Функція $\sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ зростає. Ураховуючи, що $-1 > -1{,}5$, одержуємо $\sin(-1) > \sin(-1{,}5)$.

Отже, у порядку зростання ці числа розташовуються так:

$$\sin(-1{,}5);\ \sin(-1);\ \sin 3;\ \sin 1{,}9.\ \triangleleft$$

Зауваження. Для порівняння заданих чисел можна також зобразити точки $P_{1,9}$, P_3, P_{-1}, $P_{-1,5}$ на одиничному колі і порівняти відповідні ординати (виконайте таке розв'язання самостійно).

Приклад 3 Побудуйте графік функції: 1) $y=|\sin x|$; 2) $y=\sin|x|$.

Коментар

Графіки заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $f(x)=\sin x$. Згадаємо відповідні перетворення:

1) $y=|\sin x|=|f(x)|$ — вище осі Ox (і на самій осі) графік $y=\sin x$ залишається без зміни, нижче осі Ox — симетрично відображується відносно осі Ox;

2) $y=\sin|x|=f(|x|)$ — праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік $y=\sin x$ залишають без зміни і ту саму частину графіка відображують симетрично відносно осі Oy.

Розв'язання

▶ Спочатку побудуємо графік функції $y=f(x)=\sin x$ (рис. 144):

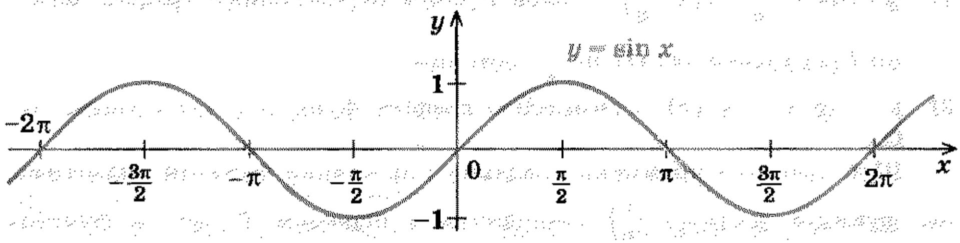


Рис. 144

1) Далі будуємо графік функції $y=|\sin x|=|f(x)|$ (рис. 145).

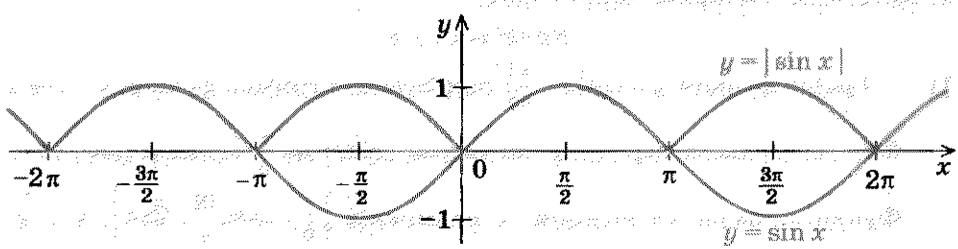


Рис. 145

2) Будуємо графік функції $y = \sin|x| = f(|x|)$ (рис. 146). ◁

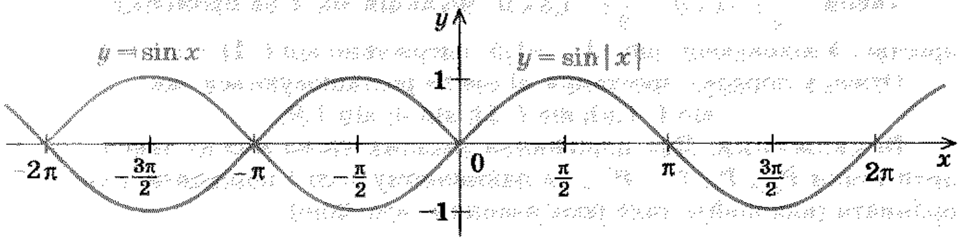


Рис. 146

Приклад 4 Побудуйте графік функції та вкажіть проміжки її спадання і зростання:

1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = -\mathrm{tg}\, x$.

Коментар

Графіки заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіків функцій:

1) $f(x) = \cos x$;

2) $\varphi(x) = \mathrm{tg}\, x$.

Тоді одержуємо графіки:

1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ — паралельним перенесенням графіка функції $f(x)$ уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{6}$ одиниць;

2) $y = -\mathrm{tg}\, x = -\varphi(x)$ — симетрією графіка функції $\varphi(x)$ відносно осі Ox.

Щоб записати проміжки спадання і зростання функцій, відмітимо, що функція $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ періодична з періодом $T = 2\pi$, а функція $y = -\mathrm{tg}\, x$ періодична з періодом $T = \pi$. Тому для кожної функції досить з'ясувати на одному періоді, де вона спадає і де зростає, а потім одержані проміжки повторити через період.

Розв'язання

1) ▷ Графік функції $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ одержуємо із графіка функції $y = \cos x$ його паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{6}$ одиниць (рис. 147).

Функція спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$, і зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. ◁

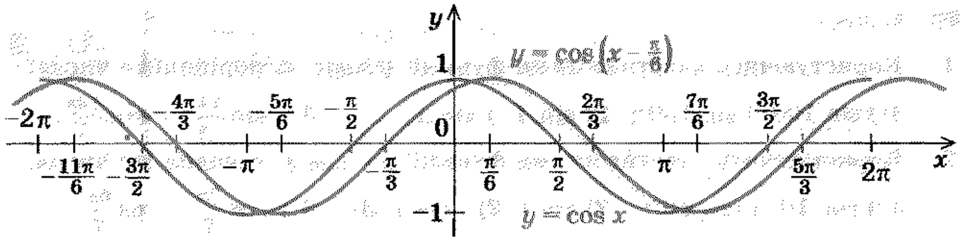


Рис. 147

2) ▶ Графік функції $y = -\mathrm{tg}\ x$ одержуємо симетричним відображенням графіка функції $y = \mathrm{tg}\ x$ відносно осі Ox (рис. 148).

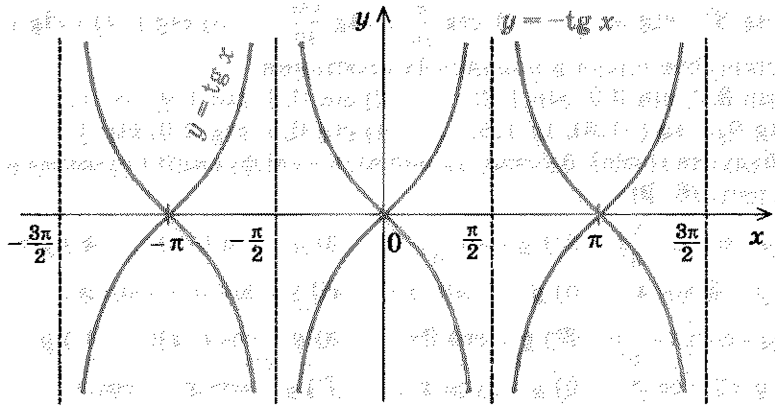


Рис. 148

Функція спадає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Запитання для контролю

1. а) Побудуйте графік функції $y = \sin x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функці.
   б*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \sin x$.
2. а) Побудуйте графік функції $y = \cos x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   б*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \cos x$.
3. а) Побудуйте графік функції $y = \mathrm{tg}\ x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   б*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \mathrm{tg}\ x$.
4. а) Побудуйте графік функції $y = \mathrm{ctg}\ x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   б*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \mathrm{ctg}\ x$.

Вправи

1. Користуючись властивостями функції $y = \sin x$, порівняйте числа:

1°) $\sin 100°$ і $\sin 130°$; 2) $\sin 1°$ і $\sin 1$; 3°) $\sin\frac{21\pi}{5}$ і $\sin\frac{12\pi}{5}$.

2. Користуючись властивостями функції $y = \cos x$, порівняйте числа:

1°) $\cos 10°$ і $\cos 40°$; 2) $\cos(-2)$ і $\cos(-3)$; 3°) $\cos\frac{3\pi}{7}$ і $\cos\frac{6\pi}{7}$.

3. Користуючись властивостями функції $y = \text{tg}\, x$, порівняйте числа:

1°) $\text{tg}\, 15°$ і $\text{tg}\, 140°$; 2°) $\text{tg}\frac{2\pi}{9}$ і $\text{tg}\frac{10\pi}{9}$; 3) $\text{tg}(-1{,}2\pi)$ і $\text{tg}(-0{,}1\pi)$.

4. Користуючись властивостями функції $y = \text{ctg}\, x$, порівняйте числа:

1) $\text{ctg}\, 3°$ і $\text{ctg}\, 5°$; 2) $\text{ctg}\frac{\pi}{10}$ і $\text{ctg}\frac{13\pi}{10}$; 3) $\text{ctg}(-1)$ і $\text{ctg}(-1{,}2)$.

5. Розташуйте числа в порядку їх зростання:
1) $\sin 3{,}3$, $\sin 3{,}9$, $\sin 1{,}2$; 2) $\cos 0{,}3$, $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$;
3) $\text{tg}\, 0{,}7$, $\text{tg}(-1{,}3)$, $\text{tg}\, 1{,}5$; 4) $\text{ctg}\, 0{,}5$, $\text{ctg}\, 2{,}9$, $\text{ctg}\, 1{,}1$.

Побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції і проміжки знакосталості **(6–9)**.

6. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2°) $y = \sin\frac{x}{3}$; 3) $y = \sin(-x)$; 4°) $y = -\sin x$;

5°) $y = 3\sin x$; 6) $y = -|\sin x|$; 7*) $y = \sin x + |\sin x|$.

7. 1) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2°) $y = \cos 3x$; 3) $y = \cos(-x)$; 4°) $y = -\cos x$;

5°) $y = 2\cos x$; 6) $y = |\cos x|$; 7*) $y = \cos x - |\cos x|$.

8. 1) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \text{tg}\, 2x$; 3) $y = \text{tg}(-x)$;

4) $y = \text{tg}\,|x|$; 5) $y = |\text{tg}\, x|$.

9. 1) $y = \text{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \text{ctg}(-x)$; 3) $y = -\text{ctg}\, x$; 4) $y = 3\,\text{ctg}\, x$.

Побудуйте графік функції та вкажіть проміжки зростання і спадання функції **(10–13)**.

10. 1°) $y = \sin 3x$; 2°) $y = 3\sin x$;

3°) $y = \sin x + 1$; 4*) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

11. 1°) $y = \cos\frac{x}{2}$; 2°) $y = \cos x - 1$;

3) $y = \cos|x|$; 4*) $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

12. 1) $y = \text{tg}\, 4x$; 2) $y = \text{tg}\, x + 3$; 3) $y = -2\,\text{tg}\, x$; 4*) $y = \text{tg}\, x + |\text{tg}\, x|$.

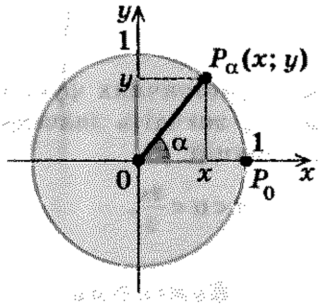
13. 1) $y = \text{ctg}\frac{x}{3}$; 2) $y = -2\text{ctg}\, x$;

3) $y = |\text{ctg}\, x|$; 4*) $y = \text{ctg}\, x + \text{ctg}\,|x|$.

§ 20 СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТУ

Таблиця 33

$x^2 + y^2 = 1$



$\cos\alpha = x$
$\sin\alpha = y$

Основна тригонометрична тотожність

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Пояснення й обґрунтування

● На рисунку в таблиці 33 зображене одиничне коло, тобто коло радіуса 1 з центром у початку координат. Рівняння цього кола: $x^2 + y^2 = 1$.

Нехай при повороті на кут α точка P_0 (1; 0) одиничного кола переходить у точку P_α $(x; y)$ (тобто при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α). Нагадаємо, що синусом α називають ординату точки P_α $(x; y)$ одиничного кола, тобто $\sin\alpha = y$, а косинусом α — абсцису цієї точки, тобто $\cos\alpha = x$. Координати точки P_α задовольняють рівнянню кола, тоді $y^2 + x^2 = 1$, отже,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \ \bigcirc$$

Це співвідношення називають *основною тригонометричною тотожністю*.

Нагадаємо також, що:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\text{де } \cos\alpha \neq 0);\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\sin\alpha \neq 0).$$

Тоді $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1\ (\sin\alpha \neq 0 \text{ і } \cos\alpha \neq 0).$$

За допомогою цих співвідношень і основної тригонометричної тотожності одержуємо:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ тобто}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad(\cos\alpha\neq 0).$$

Аналогічно отримуємо: $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, тобто

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\quad(\sin\alpha\neq 0).$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знаючи значення однієї з тригонометричних функцій та інтервал, у якому знаходиться α, знайдіть значення інших трьох тригонометричних функцій:

1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $90° < \alpha < 180°$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання

1) ▶ З рівності $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ одержуємо: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Звідси $\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$. Оскільки $90°<\alpha<180°$, то $\cos\alpha<0$, а отже, $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$.

Тоді $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$,

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{3}{4}. \triangleleft$$

2) ▶ З рівності $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ отримуємо $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=3$. Підставляємо в рівність $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ значення $\operatorname{tg}\alpha$ і одержуємо $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Звідси $\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$.

Оскільки $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$, тоді $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Коментар

1) Рівність $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ пов'язує $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу. Наприклад, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Тоді $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Ураховуючи, у якій чверті знаходиться α, ми можемо визначити знак, який потрібно взяти в правій частині формули (це знак косинуса в II чверті).

Знаючи $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, знаходимо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Зазначимо, що після знаходження $\operatorname{tg}\alpha$ значення $\operatorname{ctg}\alpha$ можна також знайти із співвідношення $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$.

2) Рівність $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ пов'язує $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу як обернену величину.

Рівність $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ пов'язує $\operatorname{tg}\alpha$ та $\cos\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу.

$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}. \triangleleft$$

Наприклад, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Тоді $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. Знаючи, у якій чверті знаходиться α, ми можемо визначити знак, який потрібно взяти в правій частині формули (це знак косинуса в III чверті). Щоб знайти $\sin\alpha$, можна скористатися співвідношенням

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha.$$

Приклад 2 Спростіть вираз $\frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Розв'язання

$$\blacktriangleright\ \frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha. \triangleleft$$

Коментар

Для того щоб перетворити чисельник даного виразу, з основної тригонометричної тотожності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ знаходимо: $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. Потім використовуємо означення тангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і спрощуємо одержаний дріб.

Приклад 3 Спростіть вираз $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$.

Коментар

Для перетворення тригонометричних виразів поряд із тригонометричними формулами використовують також алгебраїчні формули і, зокрема, формули скороченого множення. Так, вираз $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ можна розглядати як різницю квадратів: $(\sin^2\alpha)^2 - (\cos^2\alpha)^2$. Тоді його можна розкласти на множники (як добуток суми і різниці $\sin^2\alpha$ та $\cos^2\alpha$), а після цього вже використати основну тригонометричну тотожність: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Розв'язання

$$\blacktriangleright\ \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$$
$$= 1\cdot(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha. \triangleleft$$

Приклад 4* Спростіть вираз $\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}$ при $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Коментар

Спочатку використаємо означення тангенса і котангенса: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, а після перетворення знаменника дробу — основну тригонометричну тотожність: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Далі спрощуємо одержаний дріб. Потім ураховуємо, що $\sqrt{a^2}=|a|$. Щоб розкрити знак модуля, знаходимо знак косинуса в заданому проміжку і враховуємо, що при $a<0$ значення $|a|=-a$.

Розв'язання

$$\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}=\sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}}=\sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}}=\sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}}=$$

$$=\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha,$$ оскільки в II чверті $\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ $\cos\alpha<0$. ◁

Приклад 5 Доведіть тотожність $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}=2$.

Коментар

Доведемо, що ліва частина рівності дорівнює правій. Для цього в знаменнику використаємо формулу $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а в чисельнику піднесемо вираз у дужках до квадрата і застосуємо формулу $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Нагадаємо, що *тотожністю називається рівність, правильна при всіх допустимих значеннях букв, які входять до неї.* Тому задана рівність є тотожністю тільки за умови $\operatorname{tg}\alpha\neq0$ і $\cos\alpha\neq0$.

Розв'язання

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2.$$

$2=2$. Отже, задана рівність є тотожністю. ◁

Зауваження. При доведенні тотожностей найчастіше використовують такі способи:

1) за допомогою тотожних перетворень доводять, що одна частина рівності дорівнює іншій;
2) розглядають різницю лівої і правої частин тотожності і доводять, що ця різниця дорівнює нулю (цей спосіб використовують у тих випадках, коли планується перетворювати обидві частини тотожності).

Запитання для контролю

1. Запишіть співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.
2*. Доведіть співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.

Вправи

1. Чи існує число α, яке одночасно задовольняє умови:

1°) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$;
2°) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$;
3°) $\sin\alpha = 0{,}7$, $\cos\alpha = 0{,}3$;
4°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{3}$;
5°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{4}$;
6) $\operatorname{tg}\alpha=2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=2-\sqrt{3}$?

2. Знаючи значення однієї з тригонометричних функцій та інтервал, у якому міститься α, обчисліть значення інших трьох тригонометричних функцій:

1°) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;
2°) $\cos\alpha = -0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}2$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3. Спростіть вираз:

1°) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;
2°) $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$;
3°) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;
4°) $\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
5) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;
6) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;
7) $\frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$;
8) $\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$;
9*) $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$;
10*) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ при $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

4. Доведіть тотожність:

1°) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\operatorname{tg}^2\alpha$;
2°) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-1=\operatorname{ctg}^2\alpha$;
3°) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;
4) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha$;
5) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;
6) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}$;
7) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
8) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$;

9*) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$; 10*) $\frac{1-\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha} = 2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$.

5*. 1) Відомо, що $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Знайдіть $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

2) Відомо, що $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 2$. Знайдіть: а) $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$; б) $\mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha$.

§ 21 ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА ЇХ НАСЛІДКИ

21.1. Формули додавання

Таблиця 34

1. Косинус різниці і суми	
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	
2. Синус суми і різниці	
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$	
3. Тангенс суми і різниці	
$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$	$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

Пояснення й обґрунтування

1. Косинус різниці і суми

Щоб одержати формулу для $\cos(\alpha - \beta)$, спочатку розглянемо випадок, коли α і β знаходяться в проміжку $[0; \pi]$ і $\alpha > \beta$. На одиничному колі позначимо точки P_α і P_β та зобразимо вектори $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ (рис. 149). Ці вектори мають ті самі координати, що й точки P_α і P_β, тобто:

$$\overline{OP_\alpha}(\cos\alpha; \sin\alpha), \quad \overline{OP_\beta}(\cos\beta; \sin\beta).$$

Довжини (модулі) цих векторів дорівнюють одиниці: $\left|\overline{OP_\alpha}\right| = 1$, $\left|\overline{OP_\beta}\right| = 1$, а кут між ними дорівнює $\alpha - \beta$ (тобто $\angle P_\alpha O P_\beta = \alpha - \beta$).

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ двома способами:

1) як суму добутків однойменних координат:

$$\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

2) як добуток довжин (модулів) векторів на косинус кута між ними:
$\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = |\overline{OP_\alpha}| \cdot |\overline{OP_\beta}| \cdot \cos\angle P_\alpha O P_\beta = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$.

Отже,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \quad (1)$$

Одержану формулу називають *формулою косинуса різниці*. Словесно її можна сформулювати так:

косинус різниці двох кутів (чисел) дорівнює добутку косинуса першого кута (числа) на косинус другого плюс добуток синуса першого на синус другого.

Щоб обґрунтувати цю формулу в загальному випадку, нагадаємо, що за означенням кут між векторами ($\angle P_\alpha O P_\beta$) може бути тільки в межах від 0 до π, тому при $\alpha > \beta$ кут між векторами $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ може дорівнювати $\alpha - \beta$ (рис. 149), або може дорівнювати $2\pi - (\alpha - \beta)$ (рис. 150), або може відрізнятися від цих значень на ціле число обертів (тобто на $2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$).

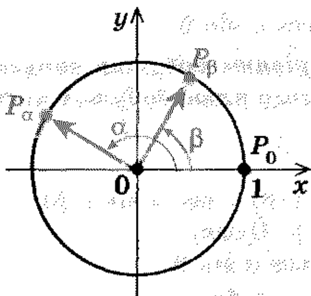


Рис. 149

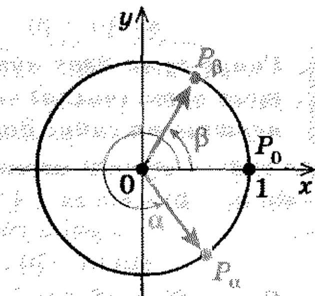


Рис. 150

Ураховуючи періодичність (з періодом 2π) та парність функції косинус, одержуємо, що в будь-якому випадку $\cos\angle P_\alpha O P_\beta = \cos(\alpha - \beta)$, отже, наведене обґрунтування залишається правильним для будь-яких значень α і β.

За допомогою формули (1) легко вивести *формулу косинуса суми:*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Отже,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \quad (2)$$

Косинус суми двох кутів (чисел) дорівнює добутку косинуса першого кута (числа) на косинус другого мінус добуток синуса першого на синус другого. ○

2. Синус суми і різниці

Виведемо тепер формули синуса суми і синуса різниці.

Спочатку за формулою (1) одержимо два корисні співвідношення, а саме:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\varphi+\sin\frac{\pi}{2}\sin\varphi=0\cdot\cos\varphi+1\cdot\sin\varphi=\sin\varphi.$$

Запишемо одержану формулу справа наліво:

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right). \qquad (3)$$

Якщо підставити у формулу (3) $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, маємо

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \qquad (4)$$

Використовуючи формули (3), (1) і (4), одержуємо:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$ Отже,

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}. \qquad (5)$$

Синус суми двох кутів (чисел) дорівнює добутку синуса першого кута (числа) на косинус другого плюс добуток косинуса першого на синус другого.

Для синуса різниці маємо:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$ Отже,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Синус різниці двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута (числа) на косинус другого мінус добуток косинуса першого на синус другого. ○

3. Тангенс суми і різниці

За допомогою формул додавання для синуса (5) і косинуса (2) легко одержати формули додавання для тангенса чи котангенса. Наприклад,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник останнього дробу на добуток $\cos\alpha$ $\cos\beta$ (звичайно, за умови, що $\cos\alpha\neq0$ і $\cos\beta\neq0$) та одержимо:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$ Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}.$$

Для тангенса різниці маємо:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$ Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}\ \bigcirc$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 **Обчисліть: 1) sin 15°; 2) cos 15°; 3) tg 15°.**

Розв'язання

1) ▶ $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=$
$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=$
$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}.$ ◁

2) ▶ $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=$
$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=$
$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}.$ ◁

3) ▶ $\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)=$

$$=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt3}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt3}{3}}=\frac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}=$$

$$=\frac{\left(3-\sqrt3\right)^2}{\left(3+\sqrt3\right)\left(3-\sqrt3\right)}=\frac{12-6\sqrt3}{6}=2-\sqrt3.$$ ◁

Коментар

Подамо 15° як різницю:
$15^\circ=45^\circ-30^\circ$,
а значення тригонометричних функцій кутів 45° і 30° ми знаємо. Тому, записавши синус 15° як синус різниці, одержимо значення sin 15°. Аналогічно знайдемо cos 15° і tg 15°.

Зауважимо, що для знаходження tg 15° можна було б використати також формулу $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

У завданні 3 в одержаному виразі $\frac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}$ зручно позбутися ірраціональності в знаменнику дробу, що значно спрощує відповідь.

Приклад 2 Спростіть вираз $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

Коментар

У чисельнику і знаменнику дробу використаємо формули косинуса суми і косинуса різниці та зведемо подібні члени.

Розв'язання

▶ $$\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=1.$$ ◁

Приклад 3 Знайдіть значення виразу $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \sin 23°$.

Розв'язання

▶ $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \cos 23° =$

$$= \cos(37° + 23°) = \cos 60° = \frac{1}{2}. \triangleleft$$

Коментар

Використаємо формулу косинуса суми справа наліво:
$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$.

Приклад 4 Доведіть тотожність:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Коментар

Для того щоб обґрунтувати ці тотожності, доведемо, що їхні праві частини дорівнюють лівим, використовуючи формули синуса суми і синуса різниці:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

Розв'язання

1) ▶ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
$= \sin\alpha + \cos\alpha; \triangleleft$

2) ▶ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
$= \sin\alpha - \cos\beta. \triangleleft$

Запитання для контролю

1. Запишіть формули додавання: а) косинус суми і косинус різниці; б) синус суми і синус різниці; в) тангенс суми і тангенс різниці.
2*. Доведіть формули додавання: а) косинус суми і косинус різниці; б) синус суми і синус різниці; в) тангенс суми і тангенс різниці.

Вправи

1. Обчисліть:
1) $\sin 13° \cos 17° + \cos 13° \sin 17°$; 2) $\sin 16° \cos 29° + \sin 29° \cos 16°$;
3) $\sin 78° \cos 18° - \sin 18° \cos 78°$; 4) $\sin 63° \cos 33° - \sin 33° \cos 63°$;
5) $\cos 66° \cos 6° + \sin 66° \sin 6°$; 6) $\cos 71° \cos 26° + \sin 71° \sin 26°$;
7) $\cos 20° \cos 25° - \sin 20° \sin 25°$; 8) $\cos 18° \cos 12° - \sin 18° \sin 12°$;
9) $\frac{\operatorname{tg} 10° + \operatorname{tg} 35°}{1 - \operatorname{tg} 10° \operatorname{tg} 35°}$; 10) $\frac{\operatorname{tg} 73° - \operatorname{tg} 13°}{1 + \operatorname{tg} 73° \operatorname{tg} 13°}$; 11) $\frac{1 + \operatorname{tg} 67° \operatorname{tg} 7°}{\operatorname{tg} 67° - \operatorname{tg} 7°}$.

2. **Спростіть:**

1°) $\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \cos 5\alpha \sin 3\alpha$;

2) $\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha$;

3) $\sin(\alpha - \beta)\cos\alpha + \cos(\alpha - \beta)\sin\beta$;

4) $\cos\alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin(\alpha + \beta)$;

5°) $\dfrac{\cos 7\alpha \cos 4\alpha + \sin 7\alpha \sin 4\alpha}{\sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha}$; 6°) $\dfrac{\sin 8\alpha \cos 2\alpha - \cos 8\alpha \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos 4\alpha - \sin 2\alpha \sin 4\alpha}$;

7°) $\dfrac{\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$; 8°) $\dfrac{\operatorname{tg} 7\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 7\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$;

9) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}$; 10) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta}$.

3. **За допомогою формул додавання обчисліть:**

1) $\sin 75°$; 2) $\cos 75°$; 3) $\operatorname{tg} 75°$;

4) $\sin 105°$; 5) $\cos 105°$; 6) $\operatorname{tg} 105°$.

4. **Доведіть тотожність:**

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;

2) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha$.

5) $\sin(30° - \alpha) - \cos(60° - \alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$;

6) $\sin(30° - \alpha) + \sin(30° + \alpha) = \cos\alpha$;

7*) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha - 1$;

8*) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\alpha = 1 + \operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$;

9*) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60° + \alpha)}{2\sin(60° + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

10*) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45° + \alpha)}{2\sin(45° + \alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

21.2. Формули подвійного аргументу

Таблиця 35

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Пояснення й обґрунтування

Щоб одержати формули подвійного аргументу, достатньо у формулах додавання

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

взяти $\beta = \alpha$. Одержимо тотожності:

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \text{ тобто}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$
$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \text{ тобто}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \text{тобто}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \bigcirc$$

Із формули $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, користуючись основною тригонометричною тотожністю $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, можна одержати формули, які дозволяють виразити $\cos 2\alpha$ тільки через $\sin\alpha$ або тільки через $\cos\alpha$.

Дійсно, з основної тригонометричної тотожності одержуємо

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha, \ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha. \text{ Тоді}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1, \text{ тобто}$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \qquad (1)$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \text{ тобто}$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha. \bigcirc \qquad (2)$$

Із формул (1) і (2) можна одержати наслідки, які корисно запам'ятати:

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \qquad \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Ці формули називають *формулами зниження степеня.*

Якщо в останніх формулах позначити $2\alpha = x$, тобто $\alpha = \frac{x}{2}$, то можна записати такі формули:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \qquad 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}. \qquad (3)$$

Зазначимо, що формули синуса і косинуса подвійного аргументу справедливі для будь-яких значень аргументу, тоді як формула тангенса подвійного аргументу справедлива тільки для тих значень аргументу α, для яких означено $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}2\alpha$, тобто тільки при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ і $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in Z$.

Зазначимо також, що, як завжди, одержані формули можна використовувати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, замість виразу $2\sin 3\alpha\cos 3\alpha$ можна записати $\sin(2\cdot 3\alpha) = \sin 6\alpha$, а замість виразу $\cos^2 1{,}5\alpha - \sin^2 1{,}5\alpha$ записати $\cos 3\alpha$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть: 1) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 15°\cos 15°$.

Розв'язання

1) ► $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◄

2) ► $\sin 15°\cos 15° = \frac{1}{2}\cdot 2\sin 15°\cos 15° = \frac{1}{2}\sin(2\cdot 15°) = \frac{1}{2}\sin 30° = \frac{1}{4}$. ◄

Коментар

У першому завданні достатньо «впізнати» праву частину формули косинуса подвійного аргументу і записати результат. У другому завданні слід звернути увагу на те, що заданий вираз відрізняється від правої частини формули синуса подвійного аргументу тільки відсутністю двійки. Тому, якщо цей вираз помножити і поділити на 2, то він не зміниться, але тепер за формулою одержуємо:

$$2\sin 15°\cos 15° = \sin(2\cdot 15°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2 Доведіть тотожність $\frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

Коментар

Доведемо, що ліва частина тотожності дорівнює правій. Зазначимо, що в чисельнику дробу знаходиться вираз, який можна безпосередньо перетворити за формулою (3). Але застосування цієї формули зменшує аргумент удвічі: $1 + \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha$. Бажано і в знаменнику дробу перейти до того самого аргументу 2α, який з'явився в чисельнику. Для цього розглянемо $\sin 4\alpha$ як синус подвійного аргументу (відносно аргументу 2α): $\sin 4\alpha = \sin(2 \cdot 2\alpha) = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$.

Розв'язання

$$\blacktriangleright\ \frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{2\cos^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.\ \triangleleft$$

Приклад 3*. Скоротіть дріб $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Коментар

Перетворюючи тригонометричні вирази, слід пам'ятати не тільки тригонометричні, але й алгебраїчні формули. Зокрема, якщо використати в знаменнику дробу формулу косинуса подвійного аргументу: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, одержуємо вираз, який є різницею квадратів $\cos\alpha$ та $\sin\alpha$. Його можна розкласти на множники як добуток суми та різниці цих виразів. З огляду на вираз, одержаний у знаменнику, у чисельнику розглянемо вираз $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ як подвоєний добуток $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$. Тоді для отримання квадрата суми цих виразів нам потрібна ще сума $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, але за основною тригонометричною тотожністю цю суму дає одиниця, яка стоїть у чисельнику.

Розв'язання

$$\blacktriangleright\ \frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.\ \triangleleft$$

Приклад 4 Знаючи, що $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ і що $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Розв'язання

$\blacktriangleright$ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$, тобто $\sin^2\alpha = \frac{16}{25}$. Отже, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ або $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Ураховуючи, що $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, одержуємо $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Тоді:

Коментар

Щоб знайти значення $\sin 2\alpha$ за формулою синуса подвійного аргументу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, потрібно, крім заданого значення $\cos\alpha$, мати ще й значення $\sin\alpha$, яке легко знайти, використовуючи основну тригонометричну тотожність:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$$

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$$= 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{5} = -\frac{24}{25}; \triangleleft$$

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}; \triangleleft$$

3) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}; \triangleleft$

4) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{7}{24}. \triangleleft$

Нагадаємо, що для знаходження $\sin\alpha$ слід також урахувати знак синуса в заданому проміжку (за умовою α знаходиться в IV чверті, де синус від'ємний).

Зазначимо, що $\cos 2\alpha$ можна також знайти за формулою

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

не обчислюючи $\sin\alpha$, а $\operatorname{ctg} 2\alpha$ — за формулою $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$, підставивши знайдене значення $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Запитання для контролю

1. Запишіть формули синуса, косинуса і тангенса подвійного аргументу.
2*. Доведіть формули синуса, косинуса і тангенса подвійного аргументу.

Вправи

1°. Обчисліть:

1) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; 2) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 3) $(\cos 15° + \sin 15°)^2$;

4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$; 5) $\frac{2\operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$; 6) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

Доведіть тотожність (2–3).

2°. 1) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x$; 2) $\sin 5x\cos 5x = \frac{1}{2}\sin 10x$;

3) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$; 4) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$.

3. 1) $\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha} = \cos\alpha\cos 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 4\alpha}{4\cos\alpha} = \sin\alpha\cos 2\alpha$;

3) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$;

5) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

4. Спростіть вираз:

1°) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha$; 2°) $\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$;

3) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$; 4*) $\frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$.

5. Знаючи, що $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ і що $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

6. Знаючи, що $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ і що $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

7. Знаючи, що $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ і що $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

8. Знаючи, що $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$ і що $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

9*. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\frac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$.

10*. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\cos 2\alpha - |\cos\alpha|$.

11. Побудуйте графік функції:

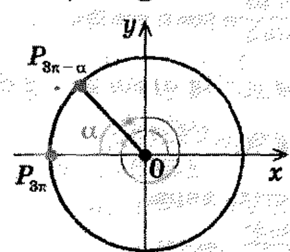
1) $y=\sin x\cos x$; 2) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$; 3*) $y=\operatorname{tg} x\sin 2x$.

12. Доведіть формулу $\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

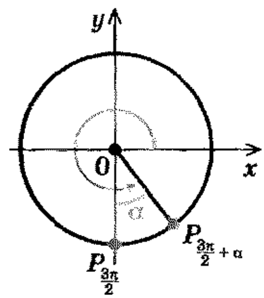
21.3. Формули зведення

Таблиця 36

Формулами зведення називають формули, за допомогою яких тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi\pm\alpha$ і $(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k\in Z)$ зводять до тригонометричних функцій від аргументу α.

Орієнтир	Приклади
1. Якщо до числа α додається число $k\pi$, $k\in Z$ (тобто число, яке зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції не змінюється, а якщо додається число $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (тобто число, яке зображується на вертикальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції змінюється на відповідну	**1.** Спростіть за формулами зведення $\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)$. ▶ $\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. ◁  К о м е н т а р. Назва заданої функції не змінюється, оскільки 3π зображується на

Продовження табл. 36

(синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс і котангенс на тангенс).	горизонтальному діаметрі (зліва) одиничного кола (рис. 1). Якщо α — гострий кут, то кут $(3\pi - \alpha)$ знаходиться в II чверті, де тангенс від'ємний, тому в правій частині формули взято знак «–».
2. Знак одержаного виразу визначається знаком початкового виразу, якщо умовно вважати кут α гострим.	**2.** Спростіть $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$. ▶ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$. ◁  **Коментар.** Назва заданої функції змінюється, оскільки $\frac{3\pi}{2}$ зображується на вертикальному діаметрі (внизу) одиничного кола (рис. 2). Якщо α — гострий кут, то кут $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ знаходиться в IV чверті, де косинус додатний, тому в правій частині формули взято знак «+».

Пояснення й обґрунтування

- **Формули додавання дозволяють обґрунтувати формули зведення, за якими тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi \pm \alpha$ і $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k \in Z)$ зводять до тригонометричних функцій від аргументу α.**

Розглянемо декілька прикладів.

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cos\alpha-\sin\pi\sin\alpha=(-1)\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(6\pi-\alpha)=\frac{\cos(6\pi-\alpha)}{\sin(6\pi-\alpha)}=\frac{\cos 6\pi\cos\alpha+\sin 6\pi\sin\alpha}{\sin 6\pi\cos\alpha-\cos 6\pi\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

(звичайно, в останньому випадку той самий результат можна одержати, використовуючи періодичність і непарність функції котангенса); як було показано на с. 280, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$;

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{7\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{7\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для аналізу одержаних результатів складемо таку таблицю.

Таблиця 37

Вид аргументу	Одержана формула	Зміна назви заданої функції	Координатна чверть (якщо умовно вважати кут α гострим)	Знак заданої функції у відповідній чверті
$k\pi\pm\alpha$ ($k\in Z$)	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\operatorname{ctg}(6\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$	немає немає немає	II III IV	+ – –
$(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ($k\in Z$)	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	є	I	+
	$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$	є	IV	+
	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$	є	IV	–

Аналогічно можна обґрунтувати, що в усіх випадках тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi\pm\alpha$ і $(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ($k\in Z$) можна зводити до тригонометричних функцій від аргументу α за таким алгоритмом:

якщо до числа α додається число kα, k ∈ Z (тобто число, яке зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції не змінюється, а якщо додається число $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (тобто число, яке зображується на вертикальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції змінюється на відповідну (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс і котангенс на тангенс). Знак одержаного виразу визначається знаком початкового виразу, якщо умовно вважати кут α гострим.

У таблиці 38 наведено *основні формули зведення*. Усі інші випадки може бути зведено до них за допомогою використання періодичності відповідних тригонометричних функцій.

Таблиця 38

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Зазначимо, що за формулами зведення $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$. Якщо останні формули записати справа наліво, то одержимо корисні співвідношення, які часто називають *формулами доповняльних аргументів* (аргументи α і $\frac{\pi}{2}-\alpha$ доповнюють один одного до $\frac{\pi}{2}$):

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Наприклад, $\sin 60^\circ=\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 30^\circ$;
$\cos 89^\circ=\sin(90^\circ-89^\circ)=\sin 1^\circ$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\cos 210^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ◁ 2) ▶ $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=-1$. ◁	Подамо задані аргументи так, щоб можна було використати формули зведення (тобто виділимо в аргументі частини, які зображаються на горизонтальному або вертикальному діаметрі одиничного кола).

Наприклад, $210° = 180° + 30°$. Звичайно, можна було подати цей аргумент ще й так: $210° = 270° - 60°$ і теж використати формули зведення.

Приклад 2* Доведіть тотожність

$$\frac{\cos(3\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos 2\alpha.$$

Коментар

Доведемо, що ліва частина тотожності дорівнює правій. Спочатку використаємо формули зведення, а потім спростимо одержані вирази за допомогою формул: $\mathrm{tg}\ \alpha\cdot\mathrm{ctg}\ \alpha = 1$ і $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$. При спрощенні виразів $\cos(3\pi-\alpha)$ і $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)$ можна застосувати як безпосередньо формули зведення, так і періодичність відповідних функцій. Наприклад, ураховуючи, що періодом функції $\cos x$ є 2π, одержуємо:

$$\cos(3\pi-\alpha) = \cos(2\pi+\pi-\alpha) = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha.$$

Розв'язання

▶ $$\frac{\cos(3\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{(-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{(-\mathrm{ctg}\,\alpha)\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}-(-\sin\alpha)^2=$$

$$=\frac{-\cos^2\alpha}{-1}-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.$$ ◁

Запитання для контролю

1. Проілюструйте на прикладах використання формул зведення. Поясніть одержаний результат.
2*. Доведіть декілька формул зведення.

Вправи

1. Обчисліть за допомогою формул зведення:
   1) $\sin 240°$; 2) $\mathrm{tg}\ 300°$; 3) $\cos 330°$; 4) $\mathrm{ctg}\ 315°$;
   5) $\cos\frac{4\pi}{3}$; 6) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 7) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6}$; 8) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.
2. Обчисліть:
   1) $\cos 8°\cos 37° - \cos 82°\cos 53°$; 2) $\sin 68°\sin 38° - \sin 52°\cos 112°$.
3. Спростіть вираз:
   1°) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; 2°) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}$; 3°) $\dfrac{\sin(3\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-2\alpha)}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{(\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha))^2-1}$; 5*) $\operatorname{tg}1°\cdot\operatorname{tg}2°\cdot\operatorname{tg}3°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}87°\cdot\operatorname{tg}88°\cdot\operatorname{tg}89°$.

4. Доведіть тотожність:

1°) $2\sin(90°+\alpha)\sin(180°+\alpha)=-\sin 2\alpha$; 2°) $\operatorname{ctg}20°\cdot\operatorname{ctg}70°=1$;

3) $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$; 4*) $\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

21.4. Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій та формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Таблиця 39

1. Формули суми і різниці тригонометричних функцій

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

2. Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

Пояснення й обґрунтування

1. Формули суми і різниці тригонометричних функцій.

- За формулами додавання:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Додаючи почленно ці рівності, одержуємо:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y. \qquad (1)$$

Якщо позначити:

$$x + y = \alpha, \qquad (2)$$

$$x - y = \beta, \qquad (3)$$

то, додаючи і віднімаючи рівності (2) і (3), маємо: $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Тоді з формули (1) одержуємо формулу *перетворення суми синусів у добуток*:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad (4)$$

Словесно її можна сформулювати так:

Сума синусів двох аргументів дорівнює подвоєному добутку синуса півсуми цих аргументів на косинус їх піврізниці.

Якщо замінити у формулі (4) β на $(-\beta)$ і врахувати непарність синуса: $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, то одержимо формулу:

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Різниця синусів двох аргументів дорівнює подвоєному добутку синуса піврізниці цих аргументів на косинус їх півсуми.

Аналогічно, додаючи почленно рівності

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \qquad (5)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \qquad (6)$$

одержуємо:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y, \qquad (7)$$

і, виконуючи заміни (2) і (3), маємо:

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Сума косинусів двох аргументів дорівнює подвоєному добутку косинуса півсуми цих аргументів на косинус їх піврізниці.

Якщо відняти від рівності (5) рівність (6), то одержимо:

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y. \qquad (8)$$

Тоді

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Різниця косинусів двох аргументів дорівнює: мінус подвоєний добуток синуса півсуми цих аргументів на синус їх піврізниці.

Для того щоб обґрунтувати формули перетворення суми (різниці) тангенсів, достатньо використати означення тангенса і формули додавання:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}. \qquad (9)$$

Якщо у формулі (9) замінити β на $(-\beta)$ і врахувати непарність тангенса ($\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$) і парність косинуса ($\cos(-\beta)=\cos\beta$), то одержуємо:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}. \qquad (10)$$

Зазначимо, що формули (9) і (10) справедливі тільки тоді, коли $\cos\alpha\neq 0$ і $\cos\beta\neq 0$. ○

2. Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

Зазначимо, що в процесі обґрунтування формул перетворення суми та різниці синусів і косинусів у добуток ми фактично отримали і формули перетворення добутків тригонометричних функцій у суму. Дійсно, якщо поділити обидві частини рівності (1) на 2 і записати одержану рівність справа наліво, маємо:

$$\boxed{\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))}. \qquad (11)$$

Аналогічно з формули (7) одержуємо:

$$\boxed{\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))}, \qquad (12)$$

а з формули (8) (після ділення на -2) маємо:

$$\boxed{\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))}. \qquad (13)$$

Замінюючи у формулах (11–13) значення x на α, y на β, одержуємо той запис цих формул, який наведено в таблиці 39. ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Перетворіть задану суму чи різницю в добуток і, якщо можливо, спростіть:

1) $\sin 75°+\sin 15°$; 2*) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$.

Коментар

1) У першому завданні можна безпосередньо застосувати формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, а потім використати табличні значення $\sin 45°$ і $\cos 30°$.

2) Якщо вираз $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$ розглянути як різницю квадратів, то його можна розкласти на множники, а потім до кожного з одержаних виразів застосувати формули перетворення різниці чи суми косинусів у добуток. Для подальшого спрощення одержаного виразу використовуємо формулу синуса подвійного аргументу, а саме:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin(\alpha+\beta) \text{ і } 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin(\alpha-\beta).$$

Розв'язання

1) ▷ $\sin 75°+\sin 15°=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=2\sin 45°\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

2) ▷ $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta). \triangleleft$$

Приклад 2 Перетворіть у добуток $\sin\alpha+\cos\beta$.

Коментар

Ми вміємо перетворювати в добуток суму синусів або косинусів. Для переходу до таких виразів достатньо згадати, що $\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ $\left(\text{або } \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$.

Розв'язання

▷ $$\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2}=$$

$$=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \triangleleft$$

Приклад 3 Спростіть вираз $\frac{(\sin 8\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 8\alpha)}{1-\cos 6\alpha}$.

Коментар

Для того щоб спростити заданий дріб, можна спробувати скоротити його. Для цього подамо чисельник і знаменник у вигляді добутків, які містять однакові вирази. У чисельнику використаємо формули перетворення різниці синусів і косинусів у добуток (а також непарність синуса: $\sin(-3\alpha)=-\sin 3\alpha$), а в знаменнику скористаємося формулою $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

Розв'язання

▷ $$\frac{(\sin 8\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 8\alpha)}{1-\cos 6\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha\cos 5\alpha\cdot(-2)\sin 5\alpha\sin(-3\alpha)}{2\sin^2 3\alpha}=$$

$$=2\cos 5\alpha\sin 5\alpha=\sin 10\alpha. \triangleleft$$

Приклад 4* Доведіть тотожність $4\sin 70^\circ - \dfrac{1}{\sin 10^\circ} = -2.$

Коментар

Доведемо, що ліва частина тотожності дорівнює правій. Після приведення до спільного знаменника перетворимо добуток синусів на різницю косинусів, а потім урахуємо, що $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, а $\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$ (оскільки $80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$).

Розв'язання

$$4\sin 70^\circ - \frac{1}{\sin 10^\circ} = \frac{4\sin 70^\circ \sin 10^\circ - 1}{\sin 10^\circ} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ) - 1}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{2} - 2\cos 80^\circ - 1}{\sin 10^\circ} = \frac{-2\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{-2\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = -2. \triangleleft$$

Приклад 5* Доведіть, якщо A, B, C — кути трикутника, то

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Коментар

Для кутів трикутника $A + B + C = \pi$. Тоді $C = \pi - (A + B)$ і за формулами зведення $\sin(\pi - (A + B)) = \sin(A + B)$. Після перетворення суми синусів $\sin A + \sin B$ у добуток помічаємо, що аргумент $(A + B)$ удвічі більший за аргумент $\frac{A+B}{2}$. Це дозволяє записати $\sin(A + B)$ за формулою синуса подвійного аргументу і в одержаній сумі винести за дужки $2\sin\frac{A+B}{2}$, а потім перетворити в дужках суму косинусів у добуток. Потім треба врахувати, що $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ і використати формули зведення.

Розв'язання

Ураховуючи, що для кутів трикутника $C = \pi - (A + B)$, одержуємо

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(\pi - (A + B)) =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi - C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}. \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Запишіть формули перетворення суми і різниці синусів або суми і різниці косинусів у добуток. Наведіть приклади використання цих формул.
2. Запишіть формули перетворення суми і різниці тангенсів. Наведіть приклади використання цих формул.
3*. Доведіть формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток.
4. Наведіть приклади використання формул:

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y));$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)).$$

5*. Доведіть формули, наведені в запитанні 4.

Вправи

1. Перетворіть суму (або різницю) тригонометричних функцій у добуток і спростіть:

1°) $\cos 152° + \cos 28°$; 2°) $\cos 48° - \cos 12°$;

3) $\cos 20° - \sin 20°$; 4) $\dfrac{\sin 25°+\sin 15°}{\sin 25°-\sin 15°}$;

5*) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 6*) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;

7*) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

2. Доведіть тотожність:

1°) $\dfrac{\sin 75°+\sin 15°}{\cos 75°-\cos 15°}=-\sqrt{3}$; 2°) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

3) $\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 10\alpha}{\sin 8\alpha}=2\sin 2\alpha$; 4) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$;

5) $\dfrac{(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)}{1-\cos 8\alpha}=\sin 4\alpha$; 6*) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha-\sin\beta}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

7*) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}=\operatorname{ctg} 2\alpha$.

3. Перетворіть у суму:

1) $\cos 45°\cos 15°$; 2) $\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{5\pi}{24}$; 3) $\sin 20°\sin 10°$; 4) $\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

4. Обчисліть:

1) $2\cos 20°\cdot\cos 40° - \cos 20°$; 2*) $4\sin 10°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°$.

5*. Доведіть, що при $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ виконується рівність:

1) $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

6. Доведіть формули:

1) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

§ 22 ДОДАТКОВІ ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРІЇ

22.1. Формули потрійного та половинного аргументів. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу

Таблиця 40

1. Формули потрійного аргументу	
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \in Z$	$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$
2. Формули пониження степеня	
$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
3. Формули половинного аргументу	
(Знак перед коренем вибирають залежно від знака тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.)	
$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$
$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in Z$	$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$

4. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу
$\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z$ $\qquad$ $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z$
$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z$
$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z$

Пояснення й обґрунтування

1. Формули потрійного аргументу. Використовуючи формули додавання, формули подвійного аргументу, основну тригонометричну тотожність і формулу $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, одержуємо такі формули:

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+$$
$$+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.\ \text{Отже,}$$

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}.$$

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha=$$
$$=(2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha-$$
$$-2(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.\ \text{Отже,}$$

$$\boxed{\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\dfrac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.\ \text{Отже,}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}3\alpha}=\frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}=\frac{1-\dfrac{3}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\dfrac{3}{\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^3\alpha}}=\frac{(\operatorname{ctg}^2\alpha-3)\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}.\ \text{Отже,}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Зауваження. Функції $\sin 3\alpha$ і $\cos 3\alpha$ існують при будь-яких значеннях α, а $\operatorname{tg} 3\alpha$ існує тільки тоді, коли $3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$, тобто $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, отже, $\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Аналогічно $\operatorname{ctg} 3\alpha$ існує тільки тоді, коли $3\alpha \neq \pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$. Тоді $\alpha \neq \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Формули пониження степеня. З формул $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ та $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ одержуємо формули пониження степеня:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \qquad (1)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \qquad (2)$$

3. Формули половинного аргументу. Якщо у формулах (1) і (2) замість α взяти аргумент $\frac{\alpha}{2}$, то одержимо:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}. \qquad (4)$$

З формул (3) і (4) одержуємо формули половинного аргументу для синуса і косинуса:

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}}, \qquad (5)$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}}. \qquad (6)$$

У цих формулах знак перед коренем вибирають залежно від знака тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.

Якщо почленно розділити формули (5) і (6) та врахувати, що $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, то одержуємо:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}}, \qquad (7)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}}. \qquad (8)$$

У формулах (7) і (8) знак перед коренем також вибирають залежно від знака тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.

Зазначимо, що формули (5) і (6) можна використовувати при будь-яких значеннях α, а формули (7) і (8) тільки тоді, коли існують значення $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ та $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ відповідно. Отже, формулу (7) можна використовувати, якщо $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, тобто $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а формулу (8) — якщо $\frac{\alpha}{2} \neq \pi k$, тобто $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Зауважимо, що для тангенса і котангенса половинного аргументу можна одержати формули, які не містять квадратних коренів. Наприклад,

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (9)$$

Дійсно, ураховуючи, що аргумент α вдвічі більший за аргумент $\frac{\alpha}{2}$, маємо: $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $1 + \cos\alpha \neq 0$. Тобто формулу (9) можна використовувати при $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Аналогічно обґрунтовують формулу

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}. \qquad (10)$$

$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha \neq 0$, тобто формулу (10) можна використовувати при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ураховуючи, що $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, одержуємо формули:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}}, \qquad \boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}}.$$

4. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. Щоб одержати відповідні формули для $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, запишемо кожен із цих виразів за формулами подвійного аргументу і поділимо на $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$. Потім, щоб перейти до тангенсів, поділимо чисельник і знаменник одержаного дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (звичайно, за умови, що $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$).

$$\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+1}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$ Отже,

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z}. \qquad (11)$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$ Отже,

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z}. \qquad (12)$$

Якщо почленно поділити рівності (11) і (12), то одержимо формули:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z}, \qquad (13)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z}.$$

Зауважимо, що формулу (13) можна одержати і за формулою тангенса подвійного аргументу, оскільки $\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть, не користуючись таблицями і калькулятором:
1) sin 15°; 2) cos 15°; 3) tg 15°.

Розв'язання

1) ► $\sin 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; ◄

Коментар

Оскільки аргумент 15° становить половину від аргументу 30°, а косинус 30° нам відомий, то можна знайти шукані значення за формулами половинного аргументу. Ураховуючи,

2) ▶ $\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; ◁

3) ▶ $\operatorname{tg} 15° = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$. ◁

що аргумент 15° знаходиться в I чверті (де значення всіх тригонометричних функцій додатні), у формулах (5) і (6) перед знаком квадратного кореня вибираємо знак «+». Для того щоб знайти тангенс 15°, можна застосувати будь-яку з формул: (7), (9) або (10), але зручніше використати формули (9) або (10), запис яких не містить квадратних коренів. Після того як знайдено значення sin 15° і cos 15°, можна також скористатися формулою

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}.$$

Зауваження. Записи відповідей для sin 15° і cos 15° можна дещо спростити, виділяючи під знаком зовнішнього квадратного кореня квадрат двочлена. Щоб подати, наприклад, $2-\sqrt{3}$ у вигляді квадрата двочлена, помножимо і поділимо цей вираз на 2 (та розглянемо вираз $2\sqrt{3}$ як подвоєний добуток чисел $\sqrt{3}$ і 1). Одержуємо:

$$2-\sqrt{3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}, \quad 2+\sqrt{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}.$$

Тоді $\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Виконуючи аналогічні перетворення, маємо $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Запитання для контролю

1. Запишіть формули потрійного та половинного аргументів і формули вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. Проілюструйте на прикладах застосування цих формул.
2. Обґрунтуйте формули потрійного та половинного аргументів і формули вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу.

Вправи

1. Обчисліть, не користуючись таблицями і калькулятором:
   1) sin 22°30′; 2) cos 22°30′; 3) tg 22°30′.

2. Знайдіть $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо:

1) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3. Обчисліть $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ і $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$.

4. Обчисліть $\cos\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

5. Обчисліть $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

6. Обчисліть $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

7. Обчисліть $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

8. Ураховуючи, що $\sin 36° = \cos 54°$, обчисліть $\sin 18°$.

22.2. Формула перетворення виразу $a\sin\alpha + b\cos\alpha$

Таблиця 41

$$\boxed{a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)},$$

де аргумент φ визначається із співвідношень

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Пояснення й обґрунтування

- Спочатку доведемо таке твердження: *якщо для чисел m і n виконується співвідношення $m^2 + n^2 = 1$, то одне із цих чисел можна вважати синусом, а друге — косинусом деякого аргументу φ.*

Розглянемо точку M координатної площини з координатами $M(m; n)$. Координати точки M задовольняють рівнянню одиничного кола: $x^2 + y^2 = 1$ (оскільки за умовою $m^2 + n^2 = 1$). Отже, точка M знаходиться на одиничному колі, і її абсциса є косинусом кута φ, який утворює радіус OM з додатним напрямком осі Ox, а ордината — синусом цього кута φ. Тобто $m = \cos\varphi$, $n = \sin\varphi$.

Якщо взяти $m = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $n = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то $m^2 + n^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$.

Тоді для деякого кута φ $m = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, $n = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

Тепер ми можемо довести формулу $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$.

Для цього доведемо, що права частина цієї формули дорівнює лівій.

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\alpha\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\alpha\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=a\sin\alpha+b\cos\alpha,$$

що й потрібно було довести. Отже,

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

де аргумент φ визначається із співвідношень:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\ \bigcirc$$

Зауваження. В одержаній формулі аргумент φ визначають з точністю до 2π, але найчастіше вибирають те значення, яке найменше за модулем.

Наприклад, для виразу $\sin\alpha+\cos\alpha$ маємо $a=1$, $b=1$. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, аргумент φ знаходиться в I чверті, тому як значення φ можна вибрати $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Тоді

$$\boxed{\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть найбільше та найменше значення виразу $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

Розв'язання	*Коментар*
За формулою $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$ одержуємо $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. Ураховуючи, що $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $[-1;\ 1]$, маємо, що $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $[-2;\ 2]$. Отже, найбільше значення заданого виразу дорівнює 2, а найменше — (-2). ◁	Вираз $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$ можна перетворити за формулою $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$. Тут $a=\sqrt{3}$, $b=-1$, тоді $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4}=2$. Отже, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{1}{2}$. Тоді аргумент φ знаходиться в IV чверті, і як значення φ можна

вибрати, наприклад, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. *Також слід ураховувати, що для того щоб знайти найбільше та найменше значення виразу, потрібно не тільки оцінити значення виразу* за допомогою нестрогих нерівностей $\left(-2\leqslant 2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2\right)$, а й впевнитися, що знак рівності в цих нерівностях досягається.

Приклад 2 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

Коментар

Вираз $\sin x + \cos x$ можна записати у вигляді $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Тоді графік заданої функції можна побудувати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = \sin x$.

Розв'язання

▶ $y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Графік заданої функції одержуємо із графіка функції $y=\sin x$ (рис. 151) розтягуванням у 2 рази вздовж осі Oy і паралельним перенесенням отриманого графіка вздовж осі Ox на $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. ◁

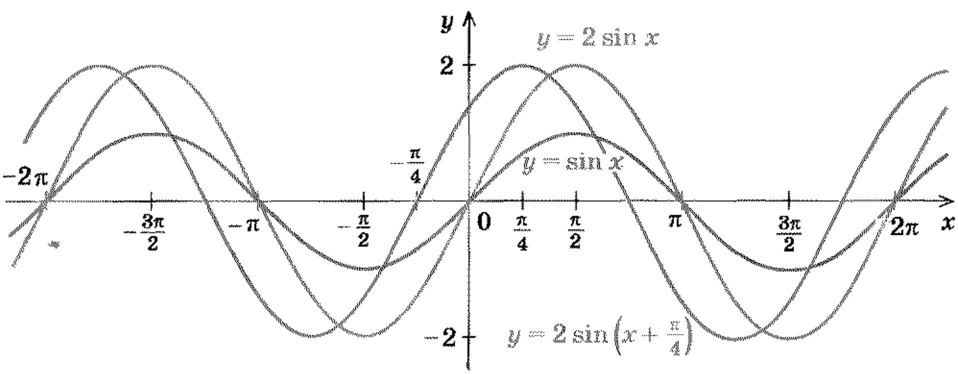


Рис. 151

Запитання для контролю

1. Запишіть формулу перетворення виразу $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ на вираз вигляду $c \sin (x + \varphi)$. Проілюструйте на прикладі застосування цієї формули.
2. Обґрунтуйте формулу перетворення виразу $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ на вираз вигляду $c \sin (x + \varphi)$.

Вправи

1. Знайдіть найбільше та найменше значення виразу:
   1) $\sin \alpha + \cos \alpha$; 2) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$;
   3) $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$; 4) $\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{6}\cos\alpha$.
2. Побудуйте графік функції:
   1) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$; 2) $y = \sin 2x - \cos 2x$;
   3) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$; 4) $y = \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$.
3. Знайдіть область значень функції:
   1) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$; 2) $y = 5 \sin 3x - 12 \cos 3x$;
   3) $y = \sin 7x - \cos 7x$; 4) $y = 8 \sin\frac{x}{3} + 15 \cos\frac{x}{3}$.
4. Чи існують такі значення x, при яких виконується рівність:
   1) $3 \sin x - 4 \cos x = 6$; 2) $5 \sin 2x + 12 \cos 2x = 15$;
   3) $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = \sqrt{5}$; 4) $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 1{,}5$?

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 3

Спростіть вираз (1–2).

1. 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$;
   2) $\sqrt{\sin^2\beta(1+\operatorname{ctg}\beta)+\cos^2\beta(1+\operatorname{tg}\beta)}$;
   3) $(3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha)^2$;
   4) $\dfrac{\cos\beta \operatorname{tg}\beta}{\sin^2\beta} - \operatorname{ctg}\beta\cos\beta$.

2. 1) $2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} - \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;
   3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\beta)\cos(\pi-\beta)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{16\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{11\pi}{9}\cos 2\pi}$.

Доведіть тотожність (3–4).

1) $\dfrac{\text{tg}(\alpha+\beta)-\text{tg}\,\alpha-\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}(\alpha+\beta)}=\text{tg}\,\beta;$ 2) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\text{tg}\,\alpha;$

3) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\text{ctg}\,\alpha;$ 4) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}=-\text{ctg}\,2\alpha.$

1) $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}}=\cos\dfrac{\alpha}{4}$ при $\pi<\alpha<2\pi;$

2) $\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ при $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2};$

3) $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}=-\cos\dfrac{\alpha}{2}$ при $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi;$

4) $\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\alpha}}=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)$ при $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi.$

Доведіть рівність:

1) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8};$ 2) $\text{tg}\,20^\circ-4\sin 20^\circ\cdot\sin 50^\circ=-2\sin 20^\circ;$

3) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}=4\sin 70^\circ=2;$ 4) $\cos 20^\circ+2\sin 55^\circ-\sqrt{2}\sin 65^\circ=1.$

Доведіть, що правильна нерівність:

1) $\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x\geqslant 2$, якщо $0<x<\dfrac{\pi}{2};$

2) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\alpha}{4}\right)}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\leqslant 2\sqrt{3};$

3) $(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi+\cos\varphi)(1+\sin\varphi-\cos\varphi)(\sin\varphi+\cos\varphi-1)\leqslant 1;$

4) $2\sin 4\alpha\sin 2\alpha+\cos 6\alpha\geqslant -1.$

Обчисліть:

1) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$, якщо $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3};$

2) $\dfrac{1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$, якщо $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}=m;$

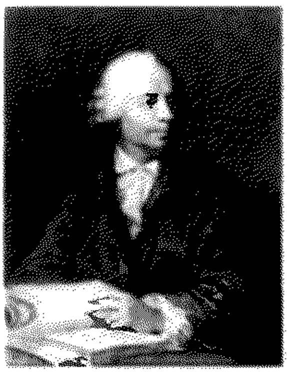
3) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha\,\text{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{2};$

4) $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, якщо $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{2}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}.$

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Слово «тригонометрія» вперше зустрічається (1505 р.) у назві книжки німецького теолога і математика Питискуса. Походження цього слова грецьке: «тригонон» — трикутник, «метріо» — міра. Іншими словами, тригонометрія — наука про вимірювання трикутників. Багато понять і фактів, які тепер відносять до тригонометрії, були відомі ще дві тисячі років тому. Фактично різні відношення відрізків трикутника і кола (власне кажучи, і тригонометричні функції) застосували вже в III ст. до н. е. у своїх працях великі математики Стародавньої Греції — Евклід і Архімед.

Довгий час тригонометрія розвивалася як частина геометрії, тобто факти, які ми тепер формулюємо в термінах тригонометричних функцій, формулювали та доводили за допомогою геометричних понять і тверджень. Мабуть, найбільші стимули для розвитку тригонометрії виникали у зв'язку з розв'язуванням задач астрономії, що становило великий практичний інтерес (наприклад, для визначення місцезнаходження судна, передбачення затемнень тощо).



Леонард Ейлер (1707–1783)

Сучасного вигляду тригонометрії надав великий математик XVIII ст. Л. Ейлер, швейцарець за походженням, який довго працював у Росії і був членом Петербурзької академії наук. Саме Ейлер перший увів відомі означення тригонометричних функцій, почав розглядати функції довільного кута, вивів формули зведення. Після Ейлера тригонометрія набула форми числення: різні факти почали доводити формальним застосуванням формул тригонометрії, доведення стали набагато компактнішими.

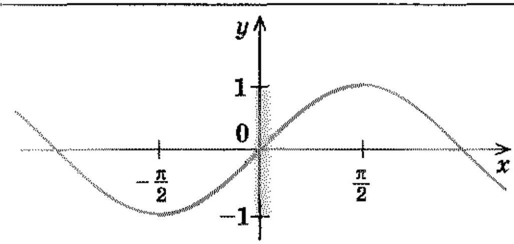
Розділ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

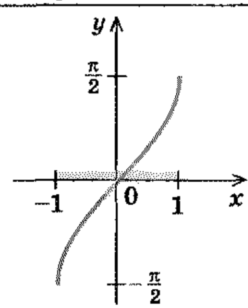
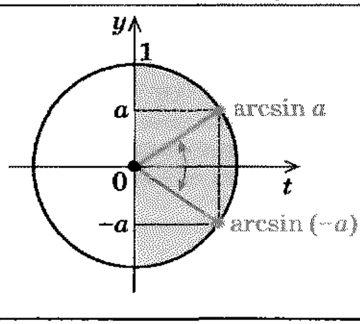
§ 23 ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Для одержання обернених тригонометричних функцій для кожної тригонометричної функції виділяють проміжок, на якому вона зростає (або спадає). Для позначення обернених тригонометричних функцій перед відповідною функцією ставиться буквосполучення «arc» (читається: «арк»).

23.1. Функція $y = \arcsin x$

Таблиця 42

<table>
<tr><td colspan="2">1. Графік</td></tr>
<tr><td>$y = \sin x$</td><td>$y = \arcsin x$</td></tr>
<tr><td>

На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sin x зростає.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Значення arcsin a ($|a| \leqslant 1$)</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>arcsin a — це таке число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.
$\arcsin a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin\varphi = a \end{cases}$</td><td>$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Непарність функції $y = \arcsin x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. **Графік функції $y = \arcsin x$.** Функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і набуває всіх значень від -1 до 1. Отже, на цьому проміжку функція $y = \sin x$ має обернену функцію (див. § 2, п. 2.4), яку позначають $y = \arcsin x$, з областю визначення $[-1; 1]$ і областю значень $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функція $y = \arcsin x$ теж зростає, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \sin x$ (на заданому проміжку) симетричним відображенням відносно прямої $y = x$ (рис. 152).

2. **Значення $\arcsin a$.** За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\sin \varphi = a$, то $\arcsin a = \varphi$, причому $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $|a| \leqslant 1$. Отже, запис $\arcsin a = \varphi$ $(|a| \leqslant 1)$ означає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \varphi = a$, тобто

> ***$\arcsin a$ — це таке число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.***

Наприклад, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Аналогічно $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. **Непарність функції $y = \arcsin x$.** Для знаходження арксинусів від'ємних чисел можна користуватися також непарністю функції $\arcsin x$, тобто формулою $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Це випливає з того, що графік функції $y = \arcsin x$ (рис. 152) симетричний відносно початку координат, а точки a і $(-a)$ на осі Oy (рис. 153)

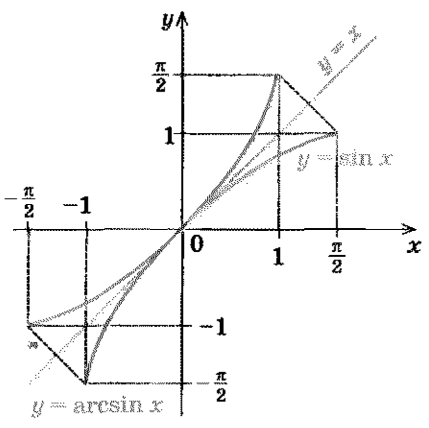


Рис. 152

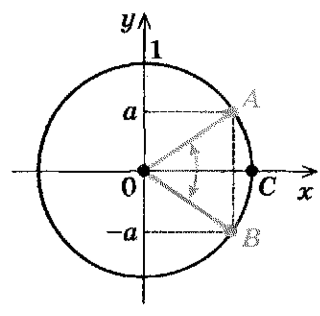


Рис. 153

симетричні відносно осі Ox. Тоді відповідні точки A і B на одиничному колі (у проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) теж будуть симетричними відносно осі Ox. Отже, $\angle COA = \angle COB$. Але $\arcsin a = \angle COA$, $\arcsin(-a) = -\angle COB$ (рисунок 153 наведено для випадку $a > 0$). Одержуємо

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}.$$ ○

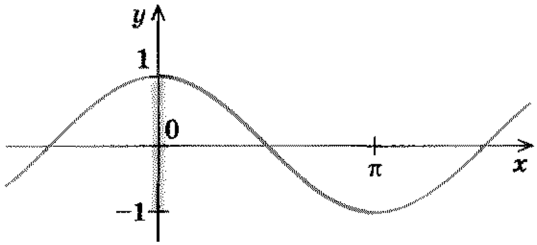
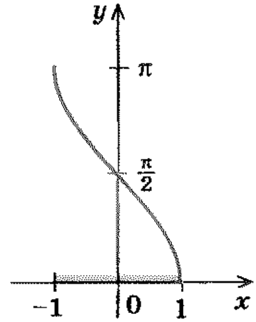
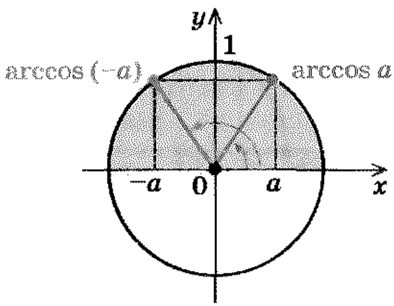
Наприклад, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Приклад. Знайдіть: 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ► Нехай $\arcsin\frac{1}{3} = \varphi$. Тоді за означенням арксинуса одержуємо, що $\sin\varphi = \frac{1}{3}$. Отже, $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. ◁	1) Оскільки запис $\varphi = \arcsin a$ ($\lvert a \rvert \leqslant 1$) означає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = a$, то завжди виконується рівність $\boxed{\sin(\arcsin a) = a, \lvert a \rvert \leqslant 1}$. Проте цю формулу можна не запам'ятовувати: достатньо позначити вираз у дужках через φ і використати означення арксинуса.
2) ► Нехай $\arcsin\frac{3}{5} = \varphi$. За означенням арксинуса одержуємо, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. Ураховуючи, що $\cos\varphi \geqslant 0$, маємо: $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Отже, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \cos\varphi = \frac{4}{5}$. ◁	2) Якщо позначити вираз у дужках через φ, то за вимогою задачі потрібно знайти $\cos\varphi$. Використавши означення арксинуса, одержуємо стандартну задачу: знаючи синус кута, знайти його косинус, якщо кут знаходиться в проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. Оскільки $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то в цьому проміжку $\cos\varphi \geqslant 0$, а отже, $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$.

23.2. Функція $y = \arccos x$

Таблиця 43

1. Графік	
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
 На проміжку $[0; \pi]$ $\cos x$ спадає	
2. Значення $\arccos a$ ($\lvert a \rvert \leqslant 1$)	
Орієнтир	Приклад
$\arccos a$ — це таке число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a. $$\arccos a = \varphi, \text{ якщо } \begin{cases} \varphi \in [0; \pi], \\ \cos \varphi = a \end{cases}$$	$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$ і $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Формула для $\arccos(-a)$	
	$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$$

Пояснення й обґрунтування

1. **Графік функції $y = \arccos x$.** Функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ і набуває всіх значень від 1 до −1. Отже, на цьому проміжку

функція $y = \cos x$ має обернену функцію, яку позначають $y = \arccos x$, з областю визначення $[-1; 1]$ і областю значень $[0; \pi]$. Функція $y = \arccos x$ теж спадає, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \cos x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення його відносно прямої $y = x$ (рис. 154).

2. Значення arccos *a*. За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\cos \varphi = a$, то $\arccos a = \varphi$, причому $\varphi \in [0; \pi]$ і $|a| \leqslant 1$. Отже, запис $\arccos a = \varphi$ $(|a| \leqslant 1)$ означає, що $\varphi \in [0; \pi]$ і $\cos \varphi = a$, тобто

> **arccos *a* — *це таке число з проміжку* [0; π], *косинус якого дорівнює a*.**

Наприклад, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$ і $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

Аналогічно $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6}\in[0;\pi]$ і $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Формула для arccos (−*a*). Для знаходження арккосинусів від'ємних чисел можна також користуватися формулою $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Це випливає з того, що точки a і $(-a)$ на осі Ox (рис. 155) є симетричними відносно осі Oy. Тоді і відповідні точки A і B на одиничному колі (у проміжку $[0; \pi]$) теж будуть симетричними відносно осі Oy. Таким чином, $\angle COA = \angle DOB$, а отже, $\angle COB = \pi - \angle DOB = \pi - \angle COA$. Але $\arccos a = \angle COA$, $\arccos(-a) = \angle COB = \pi - \angle COA$. Одержуємо

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}.$$

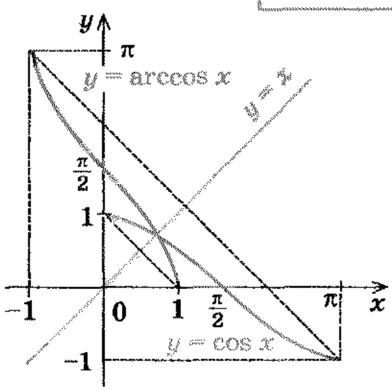


Рис. 154

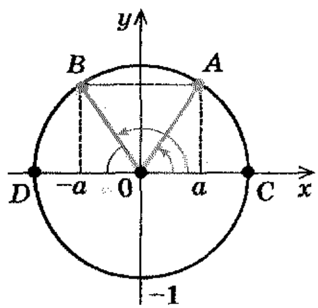


Рис. 155

Наприклад, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

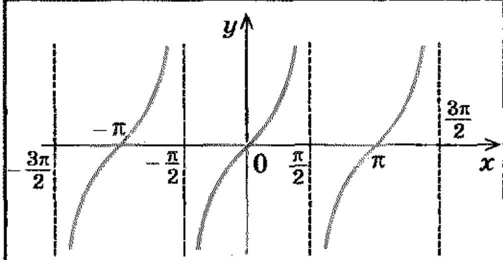
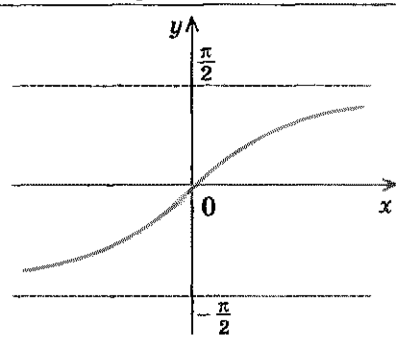
Зазначимо, що рівність $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ означає, що функція $y = \arccos x$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад. Знайдіть $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

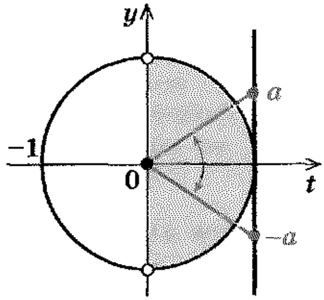
Розв'язання	*Коментар*
Нехай $\arccos\frac{2}{3}=\varphi$, тоді за означенням арккосинуса одержуємо, що $\cos\varphi=\frac{2}{3}$. Отже, $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$. ◁	Оскільки запис $\varphi=\arccos a$ ($\lvert a\rvert\leqslant 1$) означає, що $\varphi\in[0;\pi]$ і $\cos\varphi=a$, то завжди виконується рівність $\boxed{\cos(\arccos a)=a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.}$ Проте цю формулу можна не запам'ятовувати: достатньо позначити вираз у дужках через φ і використати означення арккосинуса.

23.3. Функція $y = \operatorname{arctg} x$

Таблиця 44

1. Графік	
$y=\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{arctg} x$
 На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} x$ зростає.	
2. Значення $\operatorname{arctg} a$	
Орієнтир	Приклад
$\operatorname{arctg} a$ — це таке число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a. $\operatorname{arctg} a=\varphi$, якщо $\begin{cases}\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ \operatorname{tg}\varphi=\alpha\end{cases}$	$\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Продовження табл. 44

<table>
<tr><th colspan="2">3. Непарність функції $y = \operatorname{arctg} x$</th></tr>
<tr><td></td><td>$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$. Функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, на цьому проміжку функція $y = \operatorname{tg} x$ має обернену функцію, яку позначають $y = \operatorname{arctg} x$, з областю визначення $(-\infty; +\infty)$ і множиною значень $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функція $y = \operatorname{arctg} x$ теж зростає, її графік можна одержати з графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення відносно прямої $y = x$ (рис. 156).

2. Значення $\operatorname{arctg} a$. За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\operatorname{tg} \varphi = a$, то $\operatorname{arctg} a = \varphi$, причому $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, запис $\operatorname{arctg} a = \varphi$ означає, що $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} \varphi = a$, тобто

> ***$\operatorname{arctg} a$ — це таке число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.***

Наприклад, $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Аналогічно $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

3. Непарність функції $y = \operatorname{arctg} x$. Для знаходження арктангенсів від'ємних чисел можна користуватися також непарністю функції $\operatorname{arctg} x$, тобто застосовувати формулу $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

● Це випливає з того, що графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 156) симетричний відносно початку координат, а точки a і $(-a)$ на лінії тангенсів є симетричними відносно осі Ox (рис. 157). Тоді і відповідні точки A та B на одиничному колі (у проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) теж будуть симетричними відносно осі Ox. Отже, $\angle COA = \angle COB$. Але $\operatorname{arctg} a = \angle COA$, $\operatorname{arctg}(-a) = -\angle COB$. Одержуємо

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}. \ \bigcirc$$

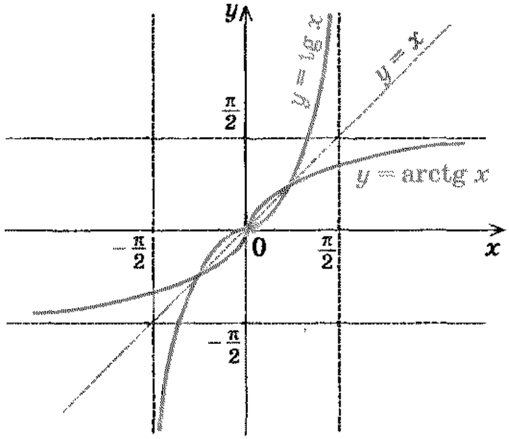


Рис. 156

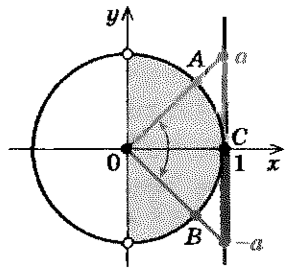


Рис. 157

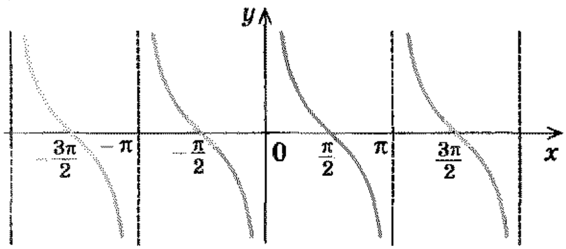
Наприклад, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

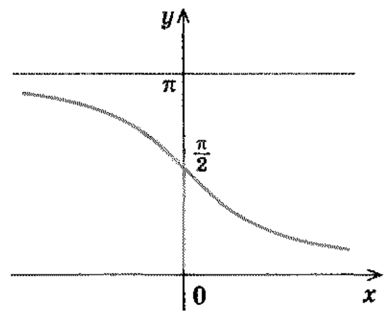
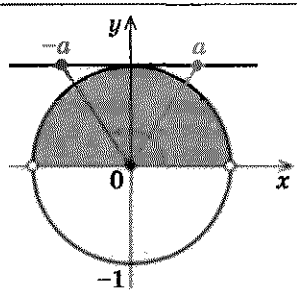
Приклад. Знайдіть $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$.

Розв'язання	*Коментар*
Нехай $\operatorname{arctg} 4 = \varphi$, тоді за означенням арктангенса одержуємо, що $\operatorname{tg}\varphi = 4$. Отже, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4) = 4$. $\triangleleft$	Оскільки запис $\varphi = \operatorname{arctg} a$ означає, що $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\varphi = a$, то завжди виконується рівність $\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a}$. Проте цю формулу можна не запам'ятовувати: *достатньо позначити вираз у дужках через φ і використати означення арктангенса.*

23.4. Функція $y = \text{arcctg } x$

Таблиця 45

<table>
<tr><td colspan="2">1. Графік</td></tr>
<tr><td>$y = \text{ctg } x$</td><td>$y = \text{arcctg } x$</td></tr>
<tr><td>

На проміжку $(0; \pi)$ $\text{ctg } x$ спадає.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Значення arcctg a</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>arcctg a — це таке число з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a.
$$\text{arcctg } a = \varphi, \text{ якщо } \begin{cases} \varphi \in (0; \pi), \\ \text{ctg } \varphi = a \end{cases}$$</td><td>$\text{arcctg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки
$\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\text{ctg } \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Формула для arcctg $(-a)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\boxed{\text{arcctg } (-a) = \pi - \text{arcctg } a}$$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. **Графік функції $y = \text{arcctg } x$.** Функція $y = \text{ctg } x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$ і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, на цьому проміжку функція $y = \text{ctg } x$ має обернену функцію, яку позначають $y = \text{arcctg } x$, з областю визначення $(-\infty; +\infty)$ і областю значень $(0; \pi)$. Функція $y = \text{arcctg } x$ теж спадає, її графік можна одержати з графіка функції

$y = \mathrm{ctg}\ x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення його відносно прямої $y = x$ (рис. 158).

2. Значення arcctg *a*. За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\mathrm{ctg}\ \varphi = a$, то $\mathrm{arcctg}\ a = \varphi$, причому $\varphi \in (0; \pi)$. Отже, запис **$\mathrm{arcctg}\ a = \varphi$** означає, що $\varphi \in (0; \pi)$ і $\mathrm{ctg}\ \varphi = a$, тобто

arcctg a — це таке число з проміжку (0; π), котангенс якого дорівнює a.

Наприклад, $\mathrm{arcctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$ і $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} = 1$.

Аналогічно $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, оскільки $\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi)$ і $\mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Формула для arcctg (−*a*). Для знаходження арккотангенсів від'ємних чисел можна користуватися також формулою $\mathrm{arcctg}\ (-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\ a$.

Це випливає з того, що точки a і $(-a)$ на лінії котангенсів (рис. 159) є симетричними відносно осі Oy. Тоді відповідні точки A і B на одиничному колі (у проміжку $(0; \pi)$) теж будуть симетричними відносно осі Oy. Таким чином, $\angle COA = \angle DOB$, а отже, $\angle COB = \pi - \angle DOB = \pi - \angle COA$. Але $\mathrm{arcctg}\ a = \angle COA$, $\mathrm{arcctg}\ (-a) = \angle COB = \pi - \angle COA$.

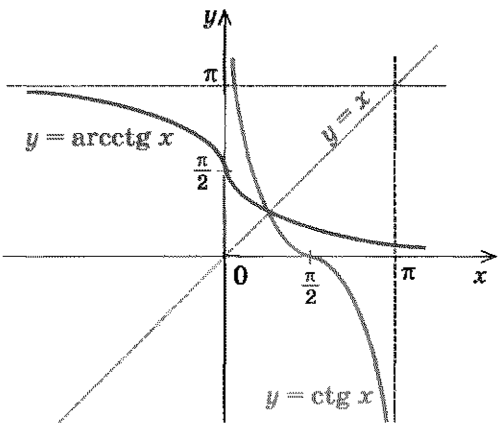


Рис. 158

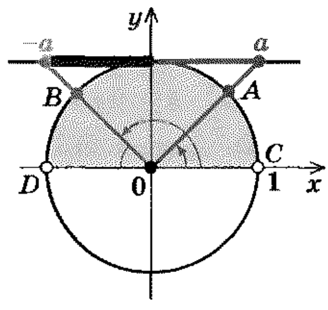


Рис. 159

Одержуємо

$$\boxed{\mathrm{arcctg}\ (-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\ a}.$$

Наприклад, $\mathrm{arcctg}\,(-1) = \pi - \mathrm{arcctg}\,1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Зазначимо, що рівність $\mathrm{arcctg}\ (-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\ a$ означає, що функція $y = \mathrm{arcctg}\ x$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад 1 Знайдіть ctg (arcctg 7).

Розв'язання	*Коментар*
Нехай arcctg 7 = φ. Тоді за означенням арккотангенса одержуємо, що ctg φ = 7. Отже, ctg (arcctg 7) = 7. ◁	Оскільки запис φ = arcctg *a* означає, що φ ∈ (0; π) і ctg φ = *a*, то завжди виконується рівність $\boxed{\text{ctg}\,(\text{arcctg}\, a) = a}$. Проте цю формулу можна не запам'ятовувати: *достатньо позначити вираз у дужках через φ і використати означення арккотангенса.*

Приклад 2* Доведіть, що $\text{arctg}\, a + \text{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання

Нехай $\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\, a$.

1) Оскільки arcctg *a* ∈ (0; π), то $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Якщо arcctg *a* = β, то ctg β = *a* і $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Тоді

$$\text{tg}\,\varphi = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \text{ctg}\,\beta = a.$$

За означенням арктангенса одержуємо arctg *a* = φ.

Отже, $\text{arctg}\, a = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\, a$, а це й означає, що

$$\text{arctg}\, a + \text{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2}. \ ◁$$

Коментар

Запишемо задану рівність у вигляді $\text{arctg}\, a = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\, a$. Якщо позначити $\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\, a$, то для доведення рівності arctg *a* = φ за означенням арктангенса достатньо довести, що:

1) $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і 2) tg φ = *a*.

При доведенні слід також урахувати означення арккотангенса: якщо

arcctg *a* = β,

то β ∈ (0; π) і ctg β = *a*.

Запитання для контролю

1. Поясніть, яке число позначають вирази: а) arcsin *a*; б) arccos *a*; в) arctg *a*; г) arcctg *a*. При яких значеннях *a* існують ці вирази? Проілюструйте пояснення прикладами.
2. Поясніть, як можна одержати графіки обернених тригонометричних функцій.

3*. Зобразіть графіки обернених тригонометричних функцій, укажіть і обґрунтуйте їх найпростіші властивості (область визначення, множина значень, зростання чи спадання, парність, непарність):
а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$; в) $y = \mathrm{arctg}\, x$; г) $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

4. Обґрунтуйте формули:
а) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$; б) $\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$;
в) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$; г) $\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$.

Вправи

Обчисліть (1–9).

1°. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arcsin(-1)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2°. 1) $\mathrm{arctg}\, 0$; 2) $\mathrm{arctg}\, 1$; 3) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

3°. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arccos(-1)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4°. 1) $\mathrm{arcctg}\, 0$; 2) $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\mathrm{arcctg}\sqrt{3}$; 4) $\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

5. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{2}{7}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$; 3*) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$; 4*) $\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

6. 1) $\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, 7)$; 2*) $\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{3}\right)$; 3*) $\sin(\mathrm{arctg}\, 3)$; 4*) $\cos\left(\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right)$.

7. 1) $\cos\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$; 2*) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 3*) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; 4*) $\mathrm{ctg}\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$.

8. 1) $\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arcctg}\sqrt{7}\right)$; 2*) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arcctg}\frac{2}{3}\right)$; 3*) $\sin(\mathrm{arcctg}\, 5)$; 4*) $\cos\left(\mathrm{arcctg}\frac{3}{4}\right)$.

9*. 1) $\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 7)$; 3) $\arccos\left(\cos\frac{21\pi}{5}\right)$; 4) $\arccos(\cos 8)$;
5) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{6\pi}{5}\right)$; 6) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, 4)$; 7) $\mathrm{arcctg}\left(\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{9}\right)$; 8) $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, 10)$.

10*. Доведіть, що $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ при $|a| \leqslant 1$.

§ 24 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НАЙПРОСТІШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

До найпростіших тригонометричних рівнянь належать рівняння
$\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

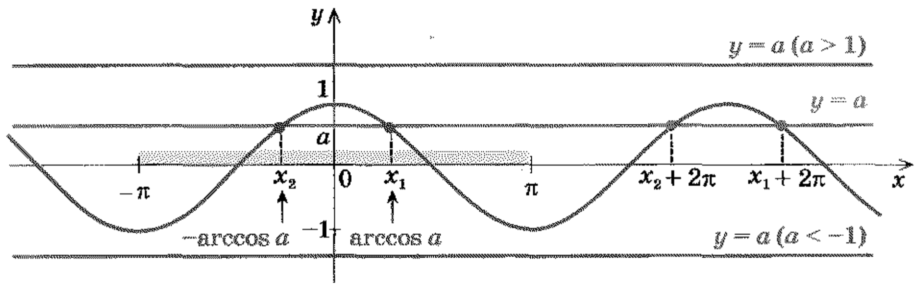
Щоб міркування із знаходження коренів цих рівнянь були більш наочними, скористаємося графіками відповідних функцій.

24.1. Рівняння $\cos x = a$

Таблиця 46

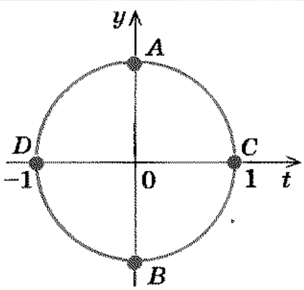
1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\cos x = a$

Графічна ілюстрація



Розв'язки	Приклади
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$ → **Коренів немає** $\lvert a\rvert \leqslant 1$ → $\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$	1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. ◁ 2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}$. **Коренів немає, оскільки $\sqrt{3} > 1$.** ◁

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$



$\cos x = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$\cos x = 1$ $\quad x = 2\pi k,\ k \in Z$

$\cos x = -1$ $\quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Пояснення й обґрунтування

1. **Розв'язки рівняння $\cos x = a$.** При $|a| > 1$ рівняння не має коренів, оскільки $|\cos x| \leqslant 1$ для будь-якого x (пряма $y = a$ на рисунку до пункту 1 таблиці 46 при $a > 1$ або при $a < -1$ не перетинає графік функції $y = \cos x$).

Нехай $|a| \leqslant 1$. Тоді пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = \cos x$. На проміжку $[0; \pi]$ функція $y = \cos x$ спадає від 1 до -1, тому рівняння $\cos x = a$ має тільки один корінь $x_1 = \arccos a$ на цьому проміжку (рисунок до пункту 1 таблиці 46).

Косинус — парна функція, тому на проміжку $[-\pi; 0]$ рівняння $\cos x = a$ теж має тільки один корінь — число, протилежне до x_1, тобто $x_2 = -\arccos a$.

Отже, на проміжку $[-\pi; \pi]$ (довжиною 2π) рівняння $\cos x = a$ при $|a| \leqslant 1$ має тільки корені $x = \pm\arccos a$.

Ураховуючи, що функція $y = \cos x$ періодична з періодом 2π, а отже, усі інші корені відрізняються від знайдених на $2\pi n$ ($n \in Z$), одержуємо таку формулу коренів рівняння $\cos x = a$ при $|a| \leqslant 1$:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}. \tag{1}$$

2. **Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$.**

- Корисно пам'ятати спеціальні записи розв'язків рівняння $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$, які можна легко одержати, використовуючи як орієнтир одиничне коло.

Ураховуючи, що косинус дорівнює абсцисі відповідної точки одиничного кола, одержуємо, що $\cos x = 0$, якщо відповідною точкою одиничного кола є точка A або точка B (рисунок до пункту 2 таблиці 46). Тоді

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Аналогічно $\cos x = 1$ тоді і тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка C, отже, $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Також $\cos x = -1$ тоді і тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка D, отже, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання	*Коментар*
► $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z,$ $x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$	Оскільки $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, то задане рівняння виду $\cos x = a$ має корені, які можна знайти за формулою (1).

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

Відповідь: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$ ◁

Для обчислення $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ можна скористатися формулою:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Тоді

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\cos x = \sqrt{2}.$

Розв'язання

▶ Оскільки $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то коренів немає.

Відповідь: коренів немає. ◁

Коментар

Оскільки $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то задане рівняння не має коренів (тобто формулу (1) не можна використовувати).

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\cos 4x = \frac{1}{3}.$

Розв'язання

▶ $4x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z,$

$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Відповідь: $\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$ ◁

Коментар

Оскільки $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, то можна скористатися формулою (1).

Ураховуючи, що $\arccos\frac{1}{3}$ не є табличним значенням, для одержання відповіді достатньо, після того як знайдено $4x$ за формулою (1), обидві частини останнього рівняння розділити на 4.

Зауваження. Якщо за умовою завдання потрібно знайти наближене значення коренів заданого рівняння в якомусь проміжку, то за допомогою калькулятора знаходимо $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} \approx 0{,}31$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, записуємо наближене значення коренів у вигляді $x \approx \pm 0{,}31 + 1{,}57n,\ n \in Z$, обчислюємо наближене значення коренів при $n = 0, \pm 1, \pm 2...$ та обираємо корені, що входять до заданого проміжку.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

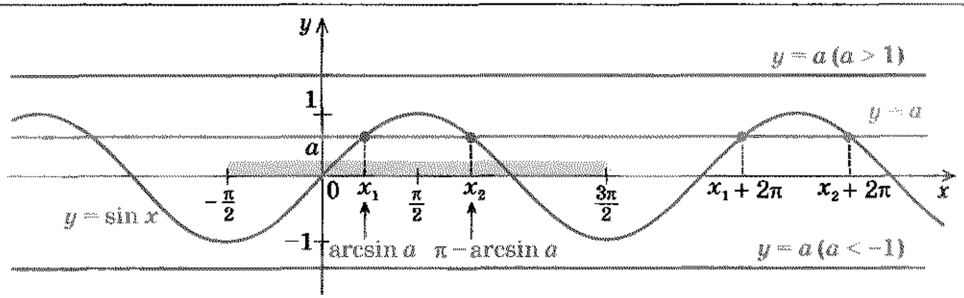
Розв'язання	***Коментар***
▶ $2x-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n,\ n\in Z,$ $2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,$ $x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z.$ *Відповідь:* $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z.$ ◁	Оскільки $\left\lvert\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rvert<1$, то можна скористатися формулою (1), щоб знайти значення виразу $2x-\frac{\pi}{3}$, який стоїть під знаком косинуса. Після цього з одержаного лінійного рівняння знаходимо x.

24.2. Рівняння $\sin x = a$

Таблиця 47

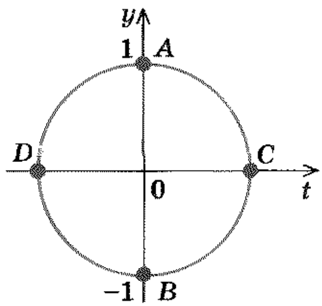
1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\sin x = a$

Графічна ілюстрація



Розв'язки	Приклади
$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a\rvert>1$ → $\boxed{\text{Коренів немає}}$ $\lvert a\rvert\leqslant 1$ → $\boxed{x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z}$	1. ▶ $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z.$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$ ◁ 2. ▶ $\sin x=\sqrt{3}$. Коренів немає, оскільки $\sqrt{3}>1$. ◁

Продовження табл. 47

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\sin x = a$	
	$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in Z$ $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язки рівняння $\sin x = a$. При $|a| > 1$ рівняння не має коренів, оскільки $|\sin x| \leqslant 1$ для будь-якого x (пряма $y = a$ на рисунку 160 при $a > 1$ або при $a < -1$ не перетинає графік функції $y = \sin x$).

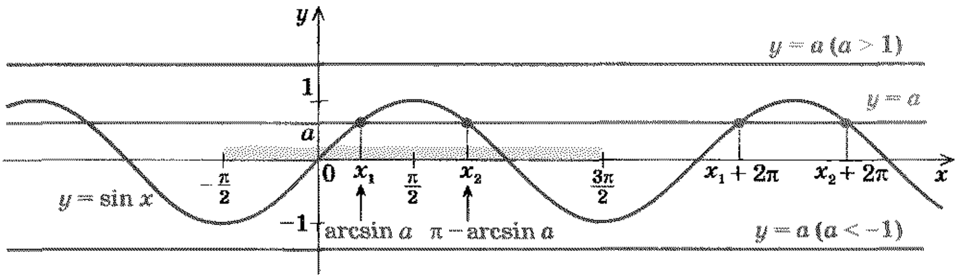


Рис. 160

Нехай $|a| \leqslant 1$. Тоді пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = \sin x$. На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $y = \sin x$ зростає від -1 до 1, тому рівняння $\sin x = a$ має тільки один корінь $x_1 = \arcsin a$ на цьому проміжку (рис. 160) (і для цього кореня $\sin x = a$).

На проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функція $y = \sin x$ спадає від 1 до -1, тому рівняння $\sin x = a$ має на цьому проміжку теж тільки один корінь $x_2 = \pi - \arcsin a$ (рис. 160). Для перевірки правильності запису значення другого кореня x_2 зазначимо, що $x_2 = \pi - x_1$. Тоді $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$, тобто x_2 — корінь рівняння $\sin x = a$.

Отже, на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (довжиною 2π) рівняння $\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$ має корені $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$.

Оскільки функція $y = \sin x$ періодична з періодом 2π, усі інші корені відрізняються від знайдених на $2\pi k$ ($k \in Z$). Отже, одержуємо такі формули коренів рівняння $\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$:

$$x = \arcsin a + 2\pi k; \qquad (1)$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (2)$$

Усі значення коренів рівняння $\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$, які дають формули (1) і (2), можна записати за допомогою однієї формули

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}. \qquad (3)$$

Дійсно, з формули (3) при парному $n = 2k$ одержуємо: $x = \arcsin a + 2\pi k$ — формулу (1), а при непарному $n = 2k + 1$ — формулу $x = -\arcsin a + \pi(2k + 1) = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, тобто формулу (2).

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\sin x = a$.

Корисно пам'ятати спеціальні записи розв'язків при $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$, які можна легко одержати, використовуючи як орієнтир одиничне коло (рис. 161).

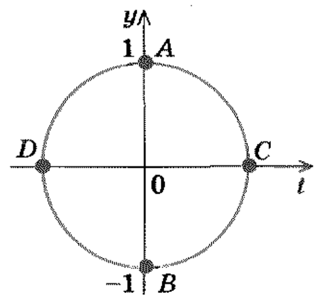


Рис. 161

Ураховуючи, що синус дорівнює ординаті відповідної точки одиничного кола, одержуємо, що $\sin x = 0$, якщо відповідною точкою одиничного кола є точка C або точка D. Тоді

$$x = \pi k,\ k \in Z.$$

Аналогічно $\sin x = 1$ тоді і тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка A, отже, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Також $\sin x = -1$ тоді і тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка B, отже, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання	*Коментар*
► $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z.$ $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$ *Відповідь:* $(-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$ ◁	Оскільки $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$, то задане рівняння виду $\sin x = a$ має корені, які можна знайти за формулою (3). Для обчислення $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ можна скористатися формулою $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Тоді

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}.$$

З а у в а ж е н н я. Відповідь до прикладу 1 часто записують у вигляді $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$, але такий запис не є обов'язковим.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sin x=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Оскільки $\left\|\frac{\pi}{2}\right\|>1$, то коренів немає. *Відповідь:* коренів немає. ◁	Оскільки $\left\|\frac{\pi}{2}\right\|>1$, то задане рівняння не має коренів (тобто формулою (3) не можна скористатися).

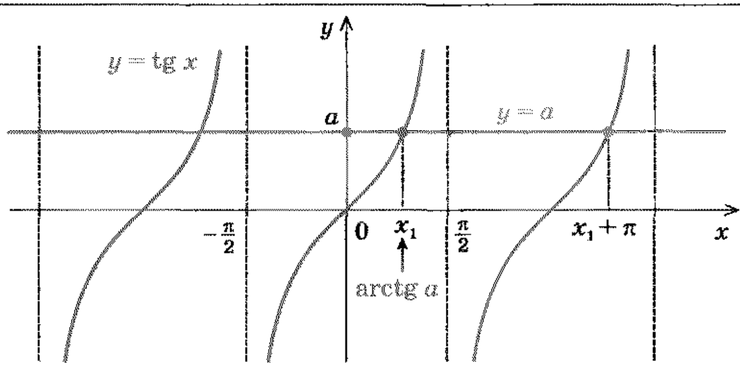
Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $2x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$, $2x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. *Відповідь:* $(-1)^n\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. ◁	Оскільки $\left\|\frac{1}{2}\right\|<1$, то можна скористатися формулою (3) для знаходження значення виразу $2x+\frac{\pi}{4}$, а потім з одержаного лінійного рівняння знайти змінну x.

24.3. Рівняння tg $x=a$ і ctg $x=a$

Таблиця 48

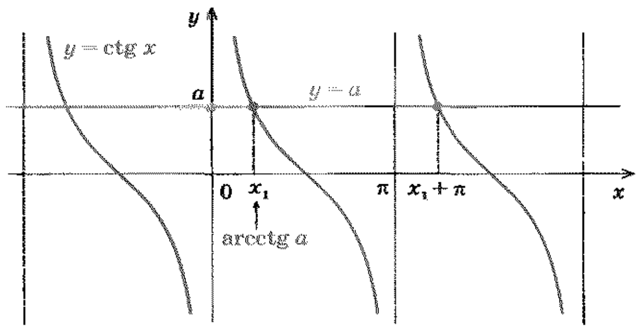
1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння tg $x=a$



Продовження табл. 48

Формула	Приклад
$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{tg}\, x = a \\ x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$ Окремий випадок $\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{tg}\, x = 0 \\ x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$	▷ $\mathrm{tg}\, x = 1.$ $x = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

2. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\mathrm{ctg}\, x = a$



Формула	Приклад
$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{ctg}\, x = a \\ x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$ Окремий випадок $\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{ctg}\, x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$	▷ $\mathrm{ctg}\, x = 7.$ $x = \mathrm{arcctg}\, 7 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язки рівнянь $\mathrm{tg}\, x = a$ і $\mathrm{ctg}\, x = a$.

● Розглянемо рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = \mathrm{tg}\, x$ зростає (від $-\infty$ до $+\infty$), тому рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$ при будь-якому значенні a має тільки один корінь $x_1 = \mathrm{arctg}\, a$ на цьому проміжку (рисунок до пункту 1 таблиці 48).

З урахуванням того, що функція $y = \mathrm{tg}\, x$ періодична з періодом π і всі інші корені відрізняються від знайденого на πn ($n \in \boldsymbol{Z}$), одержуємо таку формулу коренів рівняння

$\mathrm{tg}\, x = a$:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z}. \qquad (1)$$

При $a = 0$ arctg $0 = 0$, отже, рівняння $\operatorname{tg} x = 0$ має корені $x = \pi n$, $n \in Z$. ○

Розглянемо рівняння ctg $x = a$. На проміжку $(0; \pi)$ функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає (від $+\infty$ до $-\infty$), тому рівняння ctg $x = a$ при будь-якому значенні a має тільки один корінь $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ на цьому проміжку (рисунок до пункту 2 таблиці 48).

Ураховуючи, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ періодична з періодом π і всі інші корені відрізняються від знайденого на πn ($n \in Z$), одержуємо таку формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$:

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z}. \qquad (2)$$

При $a = 0$ $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, отже, рівняння $\operatorname{ctg} x = 0$ має корені $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$ $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$ *Відповідь:* $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. ◁	Рівняння tg $x = a$ має розв'язки при будь-якому значенні a, отже, завжди можна скористатися формулою (1): $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$ Для знаходження $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ можна використати формулу $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Тоді $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in Z,$ $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$ *Відповідь:* $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$. ◁	Спочатку за формулою (1) знайдемо значення виразу $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$, а потім з одержаного лінійного рівняння — значення змінної x.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\text{ctg}\, x = 5$.

Розв'язання

▶ $x = \text{arcctg}\, 5 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Відповідь: $\text{arcctg}\, 5 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Коментар

Рівняння $\text{ctg}\, x = a$ має розв'язки при будь-якому значенні a, отже, завжди можна скористатися формулою (2):

$$x = \text{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ураховуючи, що arcctg 5 не є табличним значенням (див. табл. 26, наведену в § 17), одержана формула дає кінцеву відповідь.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $\text{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Розв'язання

▶ $3x + \frac{\pi}{6} = \text{arcctg}\,(-1) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z},$

$3x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + \pi n,$

$x = \frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$

Відповідь: $\frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Коментар

Спочатку за формулою (2) знайдемо значення виразу $3x + \frac{\pi}{6}$, а потім з одержаного лінійного рівняння — значення змінної x.

Для того щоб знайти arcctg (−1), можна скористатися формулою

$$\text{arcctg}\,(-a) = \pi - \text{arcctg}\, a.$$

Тоді

$$\text{arcctg}\,(-1) = \pi - \text{arcctg}\, 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Запитання для контролю

1. Які рівняння називають найпростішими тригонометричними?
2. Назвіть формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь. У яких випадках не можна знайти корені найпростішого тригонометричного рівняння за цими формулами?
3. Виведіть формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.
4*. Обґрунтуйте формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь для окремих випадків (для $\sin x = a$ і $\cos x = a$ випадки $a = 0;\ 1;\ -1$, для $\text{tg}\, x = a$ і $\text{ctg}\, x = a$ випадок $a = 0$).

Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–11).

1°. 1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x=\sqrt{3}$; 3) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 4) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2°. 1) $\sin x=\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{1}{2}$; 4) $\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3°. 1) $\operatorname{tg} x=1$; 2) $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{tg} x=-1$; 4) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$.

4°. 1) $\operatorname{ctg} x=1$; 2) $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x=-1$; 4) $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$.

5. 1) $\sin x=-0{,}6$; 2) $\cos x=0{,}3$; 3) $\operatorname{tg} x=-3{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} x=2{,}5$.

6. 1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$; 2) $\sin 4x=0$; 3) $\operatorname{tg} 3x=1$; 4) $\operatorname{tg} 4x=3$.

7. 1) $\sin\left(-\frac{t}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{t}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{7}=1$.

8°. 1) $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$; 3) $\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$; 4) $\cos 4x=0$.

9. 1) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}(-4x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right)=1$.

10. 1) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3$;

3) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; 4) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$.

11. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$;

3) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$.

Знайдіть корені рівняння на заданому проміжку (12–13).

12*. 1) $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0,\ 2\pi]$; 2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi,\ \pi]$;

3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi,\ 3\pi]$; 4) $\operatorname{ctg} 4x=-1$, $[0,\ \pi]$.

13*. 1) $\sin 3x=-\frac{1}{2}$, $[-4,\ 4]$; 2) $\sin\frac{x}{2}=0$, $[-12,\ 18]$;

3) $\cos x=1$, $[-6,\ 16]$; 4) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1,\ 7]$.

§ 25 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ВІДРІЗНЯЮТЬСЯ ВІД НАЙПРОСТІШИХ

Як правило, розв'язування тригонометричних рівнянь зводиться до розв'язування найпростіших рівнянь за допомогою перетворень тригонометричних виразів, розкладання на множники та заміни змінних.

25.1. Заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

Слід пам'ятати загальний орієнтир, коли заміну змінних можна виконувати без перетворення заданих тригонометричних виразів.

> ***Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді, то відповідний вираз зі змінною зручно позначити однією буквою (новою змінною).***

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Розв'язання

Нехай $\sin x = t$, тоді одержуємо: $2t^2 - 7t + 3 = 0$. Звідси

$$t_1 = 3;\ t_2 = \frac{1}{2}.$$

1. При $t = 3$ маємо $\sin x = 3$ — рівняння не має коренів, оскільки $|3| > 1$.
2. При $t = \frac{1}{2}$ маємо $\sin x = \frac{1}{2}$, тоді $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Коментар

Аналізуючи вигляд цього рівняння, помічаємо, що до нього входить тільки одна тригонометрична функція — $\sin x$. Отже, зручно ввести нову змінну $\sin x = t$.

Після того як квадратне рівняння розв'язане, необхідно виконати обернену заміну і розв'язати одержані найпростіші тригонометричні рівняння.

Зауваження. Записуючи розв'язання прикладу 1, можна при введенні заміни $\sin x = t$ урахувати, що $|\sin x| \leqslant 1$, і записати обмеження $|t| \leqslant 1$, а далі зазначити, що один із коренів $t = 3$ не задовольняє умові $|t| \leqslant 1$, і після цього обернену заміну виконувати тільки для $t = \frac{1}{2}$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x = 0$.

Коментар

До заданого рівняння змінна входить тільки у вигляді $\operatorname{tg} 2x$. Отже, зручно ввести нову змінну $\operatorname{tg} 2x = t$. Після виконання оберненої заміни і розв'язування одержаних найпростіших тригонометричних рівнянь слід записати до відповіді всі одержані корені.

Розв'язання

▶ Нехай $\operatorname{tg} 2x = t$. Тоді одержуємо $t^3 - t = 0$. Звідси $t\,(t^2 - 1) = 0$, тобто $t = 0$ або $t^2 - 1 = 0$. З останнього рівняння маємо $t^2 = 1$, звідси $t = 1$ або $t = -1$.

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = 0$ маємо $\operatorname{tg} 2x = 0$, тоді $2x = \pi n$, $n \in Z$. Отже, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.
2. При $t = 1$ маємо $\operatorname{tg} 2x = 1$, тоді $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi m$, $2x = \frac{\pi}{4} + \pi m$. Отже,
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z.$$
3. При $t = -1$ маємо $\operatorname{tg} 2x = -1$, тоді $2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. Отже,
$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. ◁

Шукаючи план розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь, можна скористатися таким орієнтиром.

1. *Пробуємо звести всі тригонометричні функції* ***до одного аргументу.***
2. *Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести* ***до однієї функції.***
3. *Якщо до одного аргументу вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо звести рівняння* ***до однорідного.***
4. *В інших випадках* ***переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток*** *або використовуємо* ***спеціальні прийоми розв'язування.***

25.2. Розв'язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції (з однаковим аргументом)

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Використовуючи формулу косинуса подвійного аргументу та основну тригонометричну тотожність, одержуємо:	Усі тригонометричні функції зводимо до одного аргументу x, використовуючи формулу $\cos^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,$$
$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,$$
$$-2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

Заміна $\sin x = t$ дає рівняння
$$-2t^2 - 5t - 2 = 0.$$

Тоді $2t^2 + 5t + 2 = 0$, $t_1 = -2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = -2$ маємо $\sin x = -2$ — коренів немає, оскільки $|2| > 1$.
2. При $t = -\frac{1}{2}$ маємо $\sin x = -\frac{1}{2}$. Тоді
$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,$$
$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\; n \in \mathbf{Z}$. ◁

Потім усі тригонометричні вирази зводимо до однієї функції $\sin x$ (ураховуємо, що $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$).

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді — $\sin x$, отже, зручно виконати заміну $\sin x = t$.

Зазначимо, що для розв'язування заданого прикладу можна було також використати формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, що дозволить за один крок звести всі тригонометричні вирази і до одного аргументу і до однієї функції.

Зауваження. При бажанні відповідь можна записати у вигляді $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\; n \in \mathbf{Z}$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$.

Розв'язання	*Коментар*

▶ $\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$. Заміна: $\operatorname{tg} x = t$.

Маємо рівняння $t + \frac{2}{t} = 3$.

При $t \neq 0$ отримуємо рівносильне рівняння
$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = 1$ маємо $\operatorname{tg} x = 1$, тоді
$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$
2. При $t = 2$ маємо $\operatorname{tg} x = 2$, тоді
$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m, \; m \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\; n \in \mathbf{Z}$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\; m \in \mathbf{Z}$. ◁

Усі аргументи вже однакові (x), тому зводимо всі тригонометричні вирази до однієї функції — $\operatorname{tg} x$ (ураховуємо, що $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

В одержане рівняння змінна входить в одному й тому самому вигляді $\operatorname{tg} x$, отже, зручно виконати заміну $\operatorname{tg} x = t$.

25.3. Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричного рівняння до однорідного

Розглянемо рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$. (1)

Для пошуку плану розв'язування цього рівняння (але не для його розв'язування) виконаємо заміни: $\sin x = u$, $\cos x = v$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$u^2 - uv - 2v^2 = 0. \quad (2)$$

Усі одночлени, які стоять у лівій частині цього рівняння, мають степені 2 (нагадаємо, що степінь одночлена uv теж дорівнює 2). У цьому випадку рівняння (2) (і відповідно рівняння (1)) називають однорідним, і для розпізнавання таких рівнянь та їх розв'язування можна використовувати такий орієнтир.

***Якщо всі члени рівняння**, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), **мають однаковий сумарний степінь**[1], **то рівняння називається однорідним**. Розв'язують однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї зі змінних.*

Зауваження. Дотримуючись цього орієнтира, доводиться ділити обидві частини рівняння на вираз зі змінною. При цьому можна втратити корені (якщо коренями є ті числа, при яких дільник дорівнює нулю). Щоб уникнути цього, необхідно окремо розглянути випадок, коли вираз, на який ми збираємося ділити обидві частини рівняння, дорівнює нулю, і лише після цього виконувати ділення на вираз, що не дорівнює нулю.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Розв'язання	*Коментар*
При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos^2 x \neq 0$. Одержуємо $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$, тобто $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0$. Тоді $\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$. *Заміна* $\mathrm{tg}\, x = t$ дає рівняння $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.	Задане рівняння однорідне, оскільки всі його члени мають однаковий сумарний степінь 2. Його можна розв'язати діленням обох частин на $\sin^2 x$ або на $\cos^2 x$. Якщо ми будемо ділити на $\cos^2 x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos x = 0$ розглянемо окремо. Підставляючи $\cos x = 0$ в задане рівняння, одержуємо $\sin x = 0$. Але одночасно $\sin x$ і $\cos x$ не можуть дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Таким чином, значення

[1] Звичайно, якщо рівняння має вигляд $f = 0$, ідеться тільки про степінь членів многочлена f, оскільки нуль-многочлен (тобто 0) степеня не має.

Виконуємо обернену заміну:

1) При $t = -1$ маємо $\operatorname{tg} x = -1$, тоді
$$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

2) При $t = 2$ маємо $\operatorname{tg} x = 2$, тоді
$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;
$\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

змінної x, для яких $\cos x = 0$, не є коренями заданого рівняння. А при $\cos x \neq 0$ можна розділити обидві частини заданого рівняння на $\cos^2 x \neq 0$ і одержати рівносильне рівняння (та врахувати при цьому, що
$$\left.\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x\right).$$

В одержане рівняння змінна входить в одному й тому самому вигляді $\operatorname{tg} x$, тому зручно виконати заміну $\operatorname{tg} x = t$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x = 5 \cos 3x$.

Розв'язання

При $\cos 3x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos 3x \neq 0$. Одержуємо

$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 5$, тобто $\operatorname{tg} 3x = 5$. Тоді
$$3x = \operatorname{arctg} 5 + \pi m,$$
$$x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi m}{3},\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi m}{3},\ m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Коментар

Задане рівняння однорідне, оскільки всі його члени мають однаковий степінь 1. Його можна розв'язати діленням обох частин на $\sin 3x$ або на $\cos 3x$.

Якщо ми будемо ділити на $\cos 3x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos 3x = 0$ розглянемо окремо.

Підставляючи $\cos 3x = 0$ в задане рівняння, одержуємо $\sin 3x = 0$. Проте одночасно $\sin 3x$ і $\cos 3x$ не можуть дорівнювати нулю. Отже, при $\cos 3x = 0$ рівняння не має коренів. А при $\cos 3x \neq 0$ можна розділити обидві частини заданого рівняння на $\cos 3x \neq 0$ і одержати рівняння, рівносильне заданому (і врахувати при цьому, що
$$\left.\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \operatorname{tg} 3x\right).$$

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $6\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x = 2$.

Розв'язання

Використовуючи формулу синуса подвійного аргументу, маємо

Коментар

Спочатку зведемо всі тригонометричні функції до одного аргументу x,

$6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2.$ (1)
Запишемо це рівняння так:
$6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2\cdot 1$
і врахуємо, що $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Тоді
$$6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x).$$
Звідси
$$4\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0. \quad (2)$$

При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos^2 x \neq 0$. Одержуємо
$$4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0,$$
$$4\,\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{tg}\, x - 3 = 0. \quad (3)$$

Заміна: $\mathrm{tg}\, x = t$. Отримуємо рівняння
$$4t^2 + t - 3 = 0,$$
$$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{3}{4}.$$

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = -1$ маємо $\mathrm{tg}\, x = -1$, тоді
$$x = \mathrm{arctg}\,(-1) + \pi n,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$
2. При $t = \frac{3}{4}$ маємо $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{4}$, тоді
$$x = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $\mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$. ◁

використовуючи формулу
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

У лівій частині одержаного рівняння (1) *стоїть однорідний вираз другого степеня, а в правій частині — число 2. Якщо домножити 2 на 1, а одиницю розписати за основною тригонометричною тотожністю* $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, *то в лівій і правій частинах одержаного рівняння всі вирази будуть другого степеня, тобто одержимо однорідне рівняння* (2), яке можна розв'язати діленням обох частин або на $\sin^2 x$, або на $\cos^2 x$.

Якщо ділити на $\cos^2 x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos^2 x = 0$ слід розглянути окремо.

Підставляючи $\cos x = 0$ у рівняння (2), одержуємо $\sin x = 0$. Але одночасно $\sin x$ і $\cos x$ не можуть дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Отже, при $\cos x = 0$ рівняння (2) не має коренів. А при $\cos x \neq 0$ можна розділити обидві частини цього рівняння на $\cos^2 x \neq 0$ (і врахувати при цьому, що
$$\left.\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\, x\right).$$

В одержане рівняння (3) змінна входить в одному й тому самому вигляді $\mathrm{tg}\, x$, через це зручно виконати заміну $\mathrm{tg}\, x = t$.

25.4. Розв'язування тригонометричних рівнянь виду $f(x) = 0$ за допомогою розкладання на множники

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sin 7x = \sin 5x$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $\sin 7x - \sin 5x = 0$, тоді $2\sin\frac{7x-5x}{2}\cos\frac{7x+5x}{2} = 0,$	У цьому рівнянні достатньо важко всі тригонометричні функції звести до одного аргументу.

$$2 \sin x \cos 6x = 0.$$

Одержуємо:

$$\sin x = 0 \text{ або } \cos 6x = 0.$$

Розв'язуючи останні найпростіші тригонометричні рівняння, маємо:

$$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ або } 6x = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$$\text{тобто } x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6},\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: πn, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}$, $m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

У такому випадку слід скористатися четвертим пунктом орієнтира, наведеного в п. 25.1: *перенести всі члени рівняння в один бік і спробувати одержати добуток, що дорівнює нулю.*

Для цього застосуємо формулу перетворення різниці синусів у добуток:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Але у разі якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один із співмножників дорівнює нулю, а інші співмножники мають зміст. У даному випадку всі задані й одержані вирази мають зміст на всій множині дійсних чисел.

У кінці враховуємо, що задане рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\sin x = 0$ або $\cos 6x = 0$, і через те у відповіді мають бути записані всі корені кожного з цих рівнянь.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sin x + \sin 3x = \sin 4x$.

Розв'язання

▶ $$2 \sin \frac{x + 3x}{2} \cos \frac{x - 3x}{2} - \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos x - \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$2 \sin 2x (\cos x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x = 0 \text{ або } \cos x - \cos 2x = 0.$$

З першого з цих рівнянь:

$$2x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Друге рівняння перетворимо так:

$$-2 \sin \frac{x + 2x}{2} \sin \frac{x - 2x}{2} = 0,$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Коментар

Зразу скористаємося четвертим пунктом орієнтира, наведеного в п. 25.1: *переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю.*

Для цього застосуємо формулу перетворення суми синусів, яка стоїть у лівій частині рівняння, на добуток:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

(і врахуємо, що $\cos(-x) = \cos x$).

Для того щоб винести який-небудь вираз за дужки і одержати

Звідси $\sin\frac{3x}{2}=0$ або $\sin\frac{x}{2}=0$.

З цих рівнянь одержуємо:

$\frac{3x}{2}=\pi m,\ m\in Z$, або $\frac{x}{2}=\pi k,\ k\in Z$.

$x=\frac{2\pi m}{3}$ або $x=2\pi k,\ k\in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$;

$\frac{2\pi m}{3},\ m\in Z$;

$2\pi k,\ k\in Z$. ◁

добуток, достатньо записати $\sin 4x$ як синус подвійного аргументу (тоді за дужки можна винести $\sin 2x$).

Якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один із співмножників дорівнює нулю.

У другому з одержаних рівнянь перетворимо різницю косинусів на добуток. У кінці враховуємо, що всі задані і одержані вирази існують на всій множині дійсних чисел. Отже, задане рівняння на цій множині рівносильне сукупності рівнянь:

$$\sin 2x=0 \text{ або } \sin\frac{3x}{2}=0 \text{ або}$$

$$\sin\frac{x}{2}=0,$$

і тому до відповіді потрібно записати всі корені кожного з цих рівнянь.

Зауваження. Запис відповіді можна скоротити. Так, якщо зобразити всі знайдені розв'язки на одиничному колі, то побачимо, що розв'язок $x=2\pi k$ дає ті самі точки, що й формула $x=\frac{\pi n}{2}$ при n, кратному 4 ($n=4k$), або формула $x=\frac{2}{3}\pi m$ при m, кратному 3 ($m=3k$). Таким чином, формула $x=2\pi k$ не дає нових розв'язків порівняно з формулами $x=\frac{\pi n}{2}$ або $x=\frac{2}{3}\pi m$, і тому відповідь може бути записана у вигляді тільки двох останніх формул. Але таке скорочення відповіді не є обов'язковим.

25.5. Відбір коренів тригонометричних рівнянь

Якщо при розв'язуванні тригонометричних рівнянь необхідно відбирати корені, то найчастіше це роблять так:

знаходять (бажано найменший) спільний період усіх тригонометричних функцій, що входять у запис рівняння (звичайно, якщо цей спільний період існує); **потім на цьому періоді відбирають корені (відкидають сторонні), а ті, що залишаються, періодично продовжують.**

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\sin 4x \operatorname{tg} x = 0$. (1)

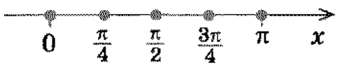
I спосіб розв'язування

Розв'язання

$\sin 4x = 0$ або $\operatorname{tg} x = 0$.

Тоді $4x = \pi n$ (тобто $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$) або $x = \pi k$, $k \in Z$.

Функція $y = \sin 4x$ має період $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а функція $y = \operatorname{tg} x$ — період $T_2 = \pi$. Тоді $T = \pi$ є спільним періодом для обох функцій. Позначимо всі одержані корені на одному періоді, наприклад на проміжку $[0; \pi]$:



При $x = \frac{\pi}{2}$ значення $\operatorname{tg} x$ не існує, отже, $x = \frac{\pi}{2}$ не є коренем заданого рівняння.

При значеннях 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, π одержуємо рівність $0 = 0$. Отже, ці значення є коренями рівняння (1).
Тоді розв'язками заданого рівняння будуть такі:

$$x = \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь: πk; $\frac{\pi}{4} + \pi k$;

$\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Коментар

Якщо число x є коренем рівняння (1), то при цьому значенні x рівність (1) перетворюється на правильну числову рівність. Добуток двох чисел може дорівнювати нулю тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю. Отже, кожен корінь рівняння (1) буде коренем сукупності рівнянь $\sin 4x = 0$ або $\operatorname{tg} x = 0$.

Замінивши рівняння (1) на цю сукупність, ми не втратимо корені заданого рівняння, але можемо одержати сторонні для нього корені, наприклад такі, при яких перший множник дорівнює нулю, а другий не існує.

Щоб відкинути такі значення, виконаємо перевірку одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння на одному періоді — проміжку довжиною π.

На цьому періоді відбираємо корені (відкидаємо сторонні), а ті, що залишаються, періодично повторюємо (тобто додаємо до одержаних коренів πk, $k \in Z$).

З а у в а ж е н н я. При розв'язуванні рівняння (1) ми не стежили за рівносильністю виконаних перетворень, але виконували такі перетворення, які не приводили до втрати коренів. Інакше кажучи, ми користувалися рівняннями-наслідками (*якщо всі корені першого рівняння є коренями* *другого рівняння, то друге рівняння називається наслідком першого)*[1]. У цьому випадку ми могли отримати сторонні для заданого рівняння корені (тобто ті корені останнього рівняння, які не є коренями заданого). Щоб цього не сталося, треба користуватися таким орієнтиром.

Якщо при розв'язуванні рівняння застосовують рівняння-наслідки, то перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є обов'язковою складовою частиною розв'язування.

Якщо для розв'язування цього самого рівняння **(1)** ми будемо використовувати рівносильні перетворення, то відбір коренів буде здійснено дещо інакше: зокрема, доведеться врахувати *ОДЗ рівняння*, тобто спільну область визначення для всіх функцій, які входять до запису рівняння.

<u>II спосіб розв'язування рівняння $\sin 4x \operatorname{tg} x = 0$.</u>

Розв'язання	***Коментар***

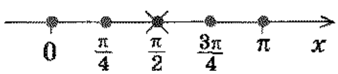
ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

$\sin 4x = 0$ або $\operatorname{tg} x = 0$.

Тоді $4x = \pi n$, тобто $x = \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$,

або $x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Функція $y = \sin 4x$ має період $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а функція $y = \operatorname{tg} x$ — період $T_2 = \pi$. Тоді $T = \pi$ є спільним періодом для обох функцій. Позначимо всі одержані корені на одному періоді, наприклад на проміжку $[0; \pi]$, і на цьому ж проміжку позначимо обмеження ОДЗ:



Відповідь: $\pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◁

Усі рівносильні перетворення рівнянь виконують на їх області допустимих значень (ОДЗ), тому потрібно врахувати ОДЗ.

Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю, а другий множник має зміст. На ОДЗ обидва множники мають зміст, тому на ОДЗ задане рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\sin 4x = 0$ або $\operatorname{tg} x = 0$.

Ті корені сукупності, які входять до ОДЗ, достатньо відібрати на одному періоді — проміжку довжиною π, а потім одержані розв'язки періодично повторити.

Значення $x = \frac{\pi}{2}$ не входить до ОДЗ, отже, воно не є коренем заданого рівняння.

Значення $0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$ входять до ОДЗ, отже, ці значення є коренями заданого рівняння.

[1] Докладніше про рівняння-наслідки див. у п. 3.1.

Запитання для контролю

1. Які способи використовують при розв'язуванні тригонометричних рівнянь? Наведіть приклади.
2. Яку заміну змінних можна виконати при розв'язуванні рівняння $8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$? Яке рівняння одержимо після заміни?
3. а) Поясніть, чому рівняння $3\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$ є однорідним.
   б*) Як можна розв'язати це однорідне рівняння?
4. Як можна виконати відбір коренів тригонометричного рівняння? Проілюструйте відбір коренів тригонометричного рівняння на прикладі.

Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–20).

1. 1°) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; 2) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$;
3°) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$; 4) $2\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$.

2. 1°) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; 2) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$;
3°) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$; 4) $2\cos^2\frac{x}{3} + 3\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$.

3. 1°) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; 2) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$;
3°) $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$; 4) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

4. 1°) $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$; 2) $\mathrm{ctg}^2 2x - 6\,\mathrm{ctg}\, 2x + 5 = 0$;
3°) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$; 4) $7\,\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2} + 2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 5$.

5. 1) $3\cos 2x = 7\sin x$; 2) $2\cos 2x = 7\cos x$.

6. 1) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;
2) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$;
3) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;
4) $3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

7. 1) $\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos x$; 2) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = 1$;
3) $5\cos x + 12\sin x = 13$; 4) $3\cos x - 2\sin 2x = 0$.

8. 1) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}$;
3) $\cos 2x = 2\frac{1}{3}\sin x$; 4) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

9. 1) $\cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$;
3) $3\cos^2 x = 4\sin x\cos x - \sin^2 x$; 4) $4\cos^2 x - 7\sin 2x = 2$.

10. 1) $\frac{5}{3\cos x + 4} = 2$; 2) $\frac{5}{3\sin x + 4} = 2$; 3) $\frac{2}{3\sqrt{2}\sin x - 1} = 1$; 4) $\frac{2}{3\sqrt{2}\cos x - 1} = 1$.

11. 1) $\frac{3}{5\operatorname{tg}x+8}=1$; 2) $\frac{3}{5\operatorname{ctg}x+8}=1$; 3) $\frac{4}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+5}=\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}x+5}=\frac{1}{4}$.

12. 1) $\frac{2\sin x+7}{1{,}5\sin x+3}=2$; 2) $\frac{2\cos x+7}{1{,}5\cos x+3}=2$;

3) $\frac{6}{\operatorname{tg}x+2}=3-\operatorname{tg}x$; 4) $\frac{6}{\operatorname{ctg}x+2}=3-\operatorname{ctg}x$.

13. 1) $\frac{15}{\sin x+1}=11-2\sin x$; 2) $\frac{15}{\cos x+1}=11-2\cos x$;

3) $\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}=2\operatorname{ctg}x-1$; 4) $\frac{10}{\operatorname{tg}x+2}=3-\operatorname{ctg}x$.

14. 1) $\sin x+\sin 3x=0$; 2) $\sin 5x-\sin x=0$;

3) $\cos 2x-\cos 6x=0$; 4) $\cos 4x+\cos 2x=0$.

15*. 1) $|\sin x|=|\cos x|$; 2) $|\sin 2x|=|\sqrt{3}\cos 2x|$.

16*. 1) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{6}-2x\right)=0$; 2) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{47\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$.

17*. 1) $\sin^2 x-5\cos x=\sin x\cos x-5\sin x$;

2) $\cos^2 x-7\sin x+\sin x\cos x=7\cos x$.

18. 1) $\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2\cos^2 x=0$;

2) $\sin^2 3x+3\cos^2 3x-4\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=0$;

3) $\sin^2 x+2\sin(\pi-x)\cos x-3\cos^2(2\pi-x)=0$;

4) $\sin^2(2\pi-3x)+5\sin(\pi-3x)\cos 3x+4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)=0$.

19. 1) $3\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=2$;

2) $2\cos^2\frac{x}{2}-3\sin\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\cos\left(2\pi-\frac{x}{2}\right)+7\sin^2\frac{x}{2}=3$;

3) $4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin(\pi+x)+3\cos^2(\pi+x)=3$;

4) $3\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(\pi+x)+2\sin^2(x-\pi)=2$.

20. 1) $2\sin^2(\pi+x)-5\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2=0$;

2) $2\cos^2 x+5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4=0$;

3) $2\cos^2 x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1=0$;

4) $5-5\sin 3(\pi-x)=\cos^2(\pi-3x)$.

§ 26 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Системи тригонометричних рівнянь розв'язують за допомогою тих самих методів, що й алгебраїчні системи, зокрема це виключення невідомих і заміна змінних. Виключити невідомі можна за допомогою одного з двох прийомів: з одного рівняння виразити якесь невідоме (або функцію від нього) і підставити його в інші або перетворити задані рівняння і потім скласти з них комбінації, у яких число невідомих зменшується.

Приклад 1 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \cos x+\sin y=1. \end{cases}$

▷ З першого рівняння знаходимо $y=\frac{\pi}{2}-x$ і підставляємо в друге. Одержуємо $\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$, тобто $\cos x + \cos x = 1$, $2\cos x = 1$, $\cos x=\frac{1}{2}$. Отже,

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

1) Якщо $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, то $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{\pi}{6}-2\pi n$.

2) Якщо $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, то $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{5\pi}{6}-2\pi n$.

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. ◁

З а у в а ж е н н я. Якби для знаходження значення y ми не розглянули формулу (1) окремо зі знаком «+» і знаком «–», то разом з правильними розв'язками одержали б і сторонні розв'язки заданої системи.

Дійсно, у такому випадку маємо $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \\ y=\frac{\pi}{2}-\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Тоді, наприклад, при $n = 0$ одержуємо $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{2}-\left(\pm\frac{\pi}{3}\right), \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{6} \text{ або } y=\frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

Отже, крім розв'язків, які ввійшли до відповіді, ми маємо ще дві пари значень:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{5\pi}{6}, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Але ці пари значень x і y не є розв'язками заданої системи, оскільки вони не задовольняють першому рівнянню.

Тому слід запам'ятати:

коли розв'язок рівняння $\cos x = a$ доводиться використовувати для подальших перетворень, то зручно записувати його у вигляді двох формул: окремо зі знаком «+» і окремо зі знаком «−».

Приклад 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$

Виконаємо почленно додавання і віднімання цих рівнянь. Одержимо рівносильну систему

$$\begin{cases} \cos(x-y)=1, \\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x-y=2\pi k, k \in Z, \\ x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Подамо останню систему у вигляді сукупності двох систем, записуючи розв'язки другого рівняння окремо зі знаком «+» і окремо зі знаком «−»:

$$\begin{cases} x-y=2\pi k, k \in Z, \\ x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-y=2\pi k, k \in Z, \\ x+y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Почленно додаючи і віднімаючи рівняння цих систем, знаходимо x і y:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k, \\ y=\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k, \\ y=-\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$,

$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$. ◁

Зауваження. До запису відповіді ввійшли два параметри n і k, що незалежно один від одного «пробігають» множину цілих чисел. Якщо спробувати при розв'язуванні заданої системи скористатися лише одним параметром, наприклад n, то це спричинить втрату розв'язків. Отже, у кожному випадку, *коли система тригонометричних рівнянь зводиться до системи, що складається з елементарних тригонометричних рівнянь* (тобто з рівнянь виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\text{tg}\, x = a$, $\text{ctg}\, x = a$), *при розв'язуванні кожного з цих рівнянь необхідно використовувати свій цілочисловий параметр.*

Запитання для контролю

1. Які методи використовують для розв'язування систем тригонометричних рівнянь?
2. Поясніть, у якому випадку при формальному розв'язуванні системи $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=\frac{1}{2}\end{cases}$ ми можемо втратити частину розв'язків, а в якому випадку — одержати сторонні розв'язки. Розв'яжіть цю систему.

Вправи

Розв'яжіть систему рівнянь (1–8).

1°. 1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ x+y=\pi;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=1,\\ x+y=2\pi.\end{cases}$

2°. 1) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1,\\ x+y=\frac{\pi}{4};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x-\cos y=\frac{1}{2},\\ x-y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

3°. 1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=0{,}5,\\ \sin x\cdot\sin y=-0{,}5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=-0{,}5,\\ \cos x\cdot\cos y=-0{,}5.\end{cases}$

4. 1) $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{6}.\end{cases}$

5. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y=0{,}75,\\ \sin x\sin y=0{,}25;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=0{,}75,\\ \sin y\cos x=0{,}25.\end{cases}$

6. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{1}{2},\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\sin y-\cos x\cos y=-1,\\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

7*. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y=\sin^2 y,\\ \sin x\sin y=\cos^2 y;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=\sin^2 y,\\ \cos x\sin y=\cos^2 y.\end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y=1,\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\cos x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=1,\\ \cos^2 x+\sin^2 y=\sin x.\end{cases}$

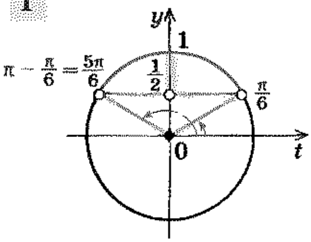
§ 27 НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

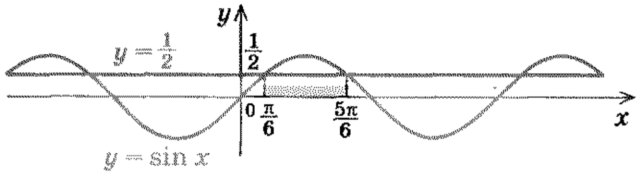
Таблиця 49

Приклади розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

за допомогою одиничного кола	за допомогою графіків

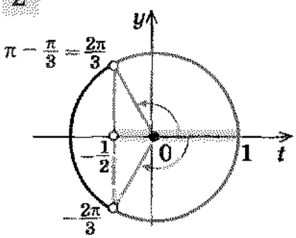
1

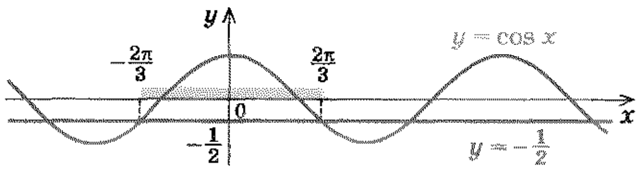




$$\sin x > \frac{1}{2} \qquad \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$$

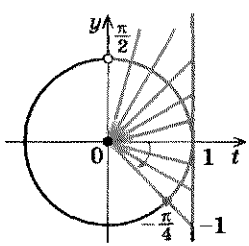
2

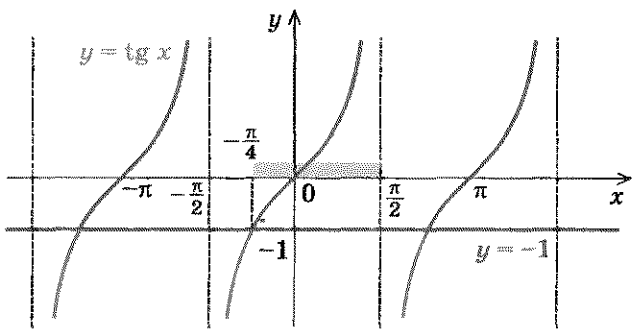




$$\cos x > -\frac{1}{2} \qquad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$$

3

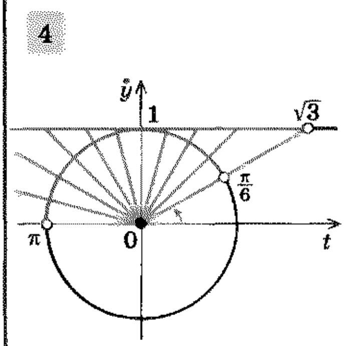


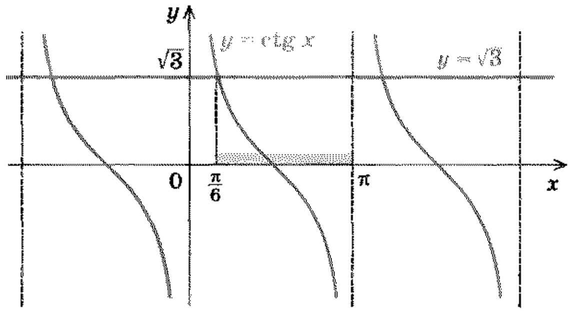


$$\operatorname{tg} x \geqslant -1 \qquad -\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$$

Продовження табл. 49

4





$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ $\qquad \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z$

Пояснення й обґрунтування

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей. Найпростішими тригонометричними нерівностями вважають нерівності виду $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{ctg} x > a$ (на місці знака «>» може стояти будь-який із знаків нерівності: «<, ⩾, ⩽»).

Щоб міркування щодо знаходження розв'язків цих нерівностей були більш наочними, використовують одиничне коло або графіки відповідних функцій, як це показано в таблиці 49.

Приклад 1 Пояснимо більш детально розв'язання нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$, наведене в пункті 1 таблиці 49, з використанням одиничного кола (рис. 162).

► Оскільки $\sin x$ — це ордината відповідної точки P_x одиничного кола, то при всіх значеннях x, які задовольняють заданій нерівності, точка P_x має ординату, більшу за $\frac{1}{2}$. Усі такі точки на одиничному колі лежать вище за пряму $y = \frac{1}{2}$ (вони зображені на рисунку рожевою дугою $P_{x_1}P_{x_2}$ без крайніх точок, оскільки в крайніх точках $\sin x = \frac{1}{2}$, а не більший за $\frac{1}{2}$). Якщо, записуючи відповідь, рухатися проти годинникової стрілки, то точка P_{x_1} буде початком дуги $P_{x_1}P_{x_2}$, а точка P_{x_2} — її кінцем. Спочатку

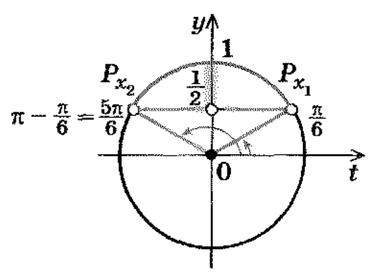


Рис. 162

запишемо відповідь на одному періоді (нагадаємо, що для синуса період дорівнює 2π). Для точок P_x виділеної дуги $x_1 < x < x_2$. Оскільки точка P_{x_1} розташована в правій півплощині, то можна взяти $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Тоді $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Таким чином, на одному періоді розв'язками заданої нерівності є: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Через період 2π значення синуса повторюються, отже, усі інші розв'язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв'язків чисел виду $2\pi k$, де $k \in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. ◁

Для розв'язування нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$ можна скористатися також графіками функцій $y = \sin x$ та $y = \frac{1}{2}$ (рис. 163).

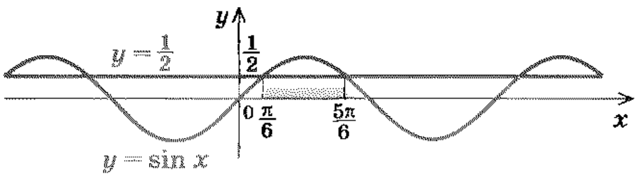


Рис. 163

▶ Розв'язками нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$ будуть ті і тільки ті значення x, для яких відповідні точки графіка функції $y = \sin x$ розташовані вище прямої $y = \frac{1}{2}$ (на рисунку 165 відповідні частини графіка функції виділено рожевими лініями). Щоб знайти абсциси точок перетину цих графіків, достатньо розв'язати рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ $\left(x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z\right)$ і, ураховуючи періодичність функції $\sin x$ ($T = 2\pi$), записати розв'язок заданої нерівності на одному періоді. На відрізку довжиною 2π можна взяти, наприклад, такі абсциси точок перетину графіків функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (усі інші абсциси точок перетину відрізняються від них на $2\pi k$). Тоді на одному періоді розв'язками заданої нерівності є: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ (абсциси виділених точок графіка $y = \sin x$). Усі інші розв'язки заданої нерівності одержують додаванням до знайдених розв'язків чисел виду $2\pi k$, де $k \in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. ◁

Аналогічно можна одержати і розв'язки інших видів найпростіших нерівностей, наведених у таблиці 49.

Приклад 2 Розв'яжіть нерівність $\cos x > -\frac{1}{2}$.

▶ Оскільки $\cos x$ — це абсциса відповідної точки P_x одиничного кола, то при всіх значеннях x, які задовольняють заданій нерівності, точка P_x має абсцису, більшу за $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Усі такі точки на одиничному колі (рис. 164) лежать праворуч від прямої $t = -\frac{1}{2}$ (вони зображені на рисунку рожевою дугою $P_{x_1}P_{x_2}$ без крайніх точок, оскільки в крайніх точках $\cos x = -\frac{1}{2}$, а не більший за $-\frac{1}{2}$). Якщо, записуючи відповідь, рухатися проти годинникової стрілки, то точка P_{x_1} буде початком дуги $P_{x_1}P_{x_2}$, а точка P_{x_2} — її кінцем. Спочатку запишемо відповідь на одному періоді (нагадаємо, що для косинуса він дорівнює 2π). Для точок P_x виділеної дуги $x_1 < x < x_2$. Оскільки точка P_{x_2} знаходиться у верхній півплощині, то можна взяти $x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Ураховуючи симетричність точок P_{x_2} і P_{x_1} відносно осі t, одержуємо $x_1 = -x_2 = -\frac{2\pi}{3}$. Таким чином, на одному періоді розв'язками заданої нерівності є: $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. Через період 2π значення косинуса повторюються. Отже, усі інші розв'язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв'язків чисел виду $2\pi k$, де $k \in Z$.

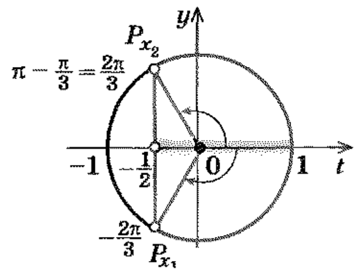


Рис. 164

Одержуємо *відповідь:*

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \triangleleft$$

Міркування при використанні графічної ілюстрації для розв'язування нерівності $\cos x > -\frac{1}{2}$ повністю аналогічні наведеним вище міркуванням по розв'язуванню нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$.

Приклад 3 Розв'яжіть нерівність $\mathrm{tg}\, x \geqslant -1$.

▶ Період тангенса дорівнює π. Тому спочатку знайдемо розв'язки цієї нерівності на проміжку довжиною π, наприклад на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а потім використаємо періодичність тангенса. Для виділення тих точок

P_x правого півкола, значення x яких задовольняють заданій нерівності, скористаємося лінією тангенсів (рис. 165). Спочатку виділимо на лінії тангенсів значення тангенсів, більші або рівні -1 (на рисунку вони виділені рожевим променем), а потім для кожної точки лінії тангенсів знайдемо відповідну точку P_x на правому півколі (для цього достатньо з'єднати центр кола з виділеною точкою на лінії тангенсів і взяти точку перетину проведеного відрізка з колом). Множина відповідних точок P_x одиничного кола виділена на рисунку рожевою дугою $P_{x_1}P_{\frac{\pi}{2}}$ (зверніть увагу: точка P_{x_1} належить розглянутій множині, а точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ — ні). Оскільки точка P_{x_1} розташована в правій півплощині, то можна взяти $x_1 = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Отже, на одному періоді розв'язками заданої нерівності є $-\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Через період π значення тангенса повторюються. Тому всі інші розв'язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв'язків чисел виду πk, де $k \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◁

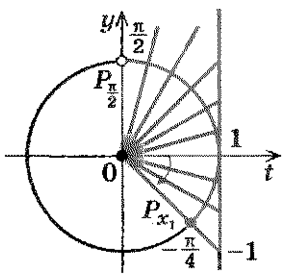


Рис. 165

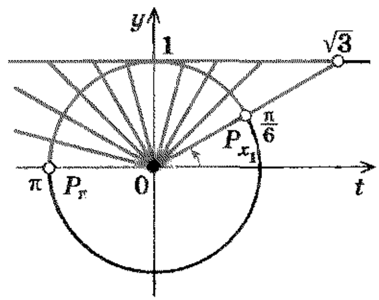


Рис. 166

Зауважимо, що при розв'язуванні заданої нерівності з використанням графіків достатньо, як і в попередніх випадках, на одному періоді, наприклад на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, записати абсциси, для яких відповідні точки графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ розташовані вище прямої $y = -1$ або на самій прямій. (На рисунку до пункту 3 таблиці 49 відповідні частини графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ виділено рожевими лініями.)

Приклад 4 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$.

▶ *Період котангенса дорівнює π. Тому спочатку знайдемо розв'язки цієї нерівності на проміжку довжиною π, наприклад на проміжку $(0; \pi)$, а потім скористаємося періодичністю котангенса.*

Для виділення тих точок P_x верхнього півкола, значення x яких задовольняють заданій нерівності, скористаємося лінією котангенсів (рис. 166). Спочатку виділимо на лінії котангенсів значення котангенсів, менші за $\sqrt{3}$ (на рисунку 166 їх виділено рожевим променем), а потім для кожної точки лінії котангенсів знайдемо відповідну точку P_x на верхньому півколі (для цього достатньо з'єднати центр кола з виділеною точкою на лінії котангенсів і взяти точку перетину проведеного відрізка з колом). Множина відповідних точок P_x одиничного кола позначена на рисунку 166 рожевою дугою $P_{x_1}P_{\pi}$. Оскільки точка P_{x_1} розташована у верхній півплощині, то можна взяти $x_1 = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$. Таким чином, на одному періоді розв'язками заданої нерівності є $\frac{\pi}{6} < x < \pi$. Через період π значення котангенса повторюються. Отже, усі інші розв'язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв'язків чисел виду πk, де $k \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◁

Аналогічно попереднім випадкам, для того щоб розв'язати нерівність $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ з використанням графіків, достатньо на одному періоді, наприклад на проміжку $(0; \pi)$, записати абсциси, для яких відповідні точки графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ розташовані нижче прямої $y = \sqrt{3}$. (На рисунку до пункту 4 таблиці 49 відповідні частини графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ виділено синіми лініями.)

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності за допомогою: а) одиничного кола; б) графіка відповідної функції.
2. Чи завжди мають розв'язки нерівності: 1) $\sin x < a$; 2) $\sin x > a$; 3) $\cos x < a$; 4) $\cos x > a$; 5) $\operatorname{tg} x < a$; 6) $\operatorname{tg} x > a$; 7) $\operatorname{ctg} x < a$; 8) $\operatorname{ctg} x > a$? Чи можуть бути розв'язками якихось із цих нерівностей усі дійсні числа? Наведіть приклади.

Вправи

Розв'яжіть нерівність (1–14).

1. 1) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x < -2$; 4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 1) $\cos x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x \leqslant 3$; 4) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 1) $\operatorname{tg} x < -1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$.

4. 1) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$; 3) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \geqslant -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 5x < 1$.

6. 1) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 3$;

3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$; 4) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$.

7. 1) $\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x - \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x\cos 5x \leqslant \frac{1}{4}$; 3) $\sin x + \cos x < 1$.

8. 1) $\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| < \frac{1}{2}$; 2) $|\operatorname{tg} x| > 1$.

§ 28 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІЛЬШ СКЛАДНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Іноді доводиться розв'язувати тригонометричні рівняння, до яких входить лише сума або різниця синуса і косинуса одного й того самого аргументу та їх добуток. У такому випадку доцільно цю суму (або різницю) позначити новою змінною.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x$.

Коментар

Якщо в заданому рівнянні звести всі тригонометричні функції до одного аргументу x, то одержимо рівняння (1) (див. розв'язання), до якого входять лише сума синуса і косинуса одного й того самого аргументу x та їх добуток. Для розв'язування цього рівняння введемо нову змінну $\sin x + \cos x = y$. Щоб одержати добуток $\sin x \cos x$, достатньо піднести до квадрата обидві частини рівності, яку одержали після заміни змінної, і врахувати, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Виконуючи обернену заміну, зручно врахувати, що $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання

► Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$3(\sin x + \cos x) = 4\sin x \cdot \cos x. \qquad (1)$$

Якщо позначити $\sin x + \cos x = y$, то $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = y^2$. Тоді $\sin x\cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$. Підставляючи ці значення в рівняння (1), одержуємо

$$3y = 2y^2 - 2 = 0, \quad 2y^2 - 3y - 2 = 0, \quad y_1 = 2 \text{ або } y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $\sin x + \cos x = 2$ або $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$.

Тоді $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$ або $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$. Одержуємо

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ (коренів немає, оскільки $\sqrt{2}>1$) або $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Звідси $x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\pi n$, де $n\in Z$. Тоді

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\pi n.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\pi n$, де $n\in Z$. ◁

Зауваження. При піднесенні обох частин рівняння до квадрата можна одержати сторонні корені (див. таблицю 9). Але *піднесення обох частин рівності заміни до квадрата є рівносильним перетворенням.* Дійсно, у цьому випадку ліва і права частини рівності мають однакові знаки, і тоді $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$. Якщо обидві частини рівності $a=b$ додатні, то для додатних значень t функція $y=t^2$ зростає і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу. Отже, при $a>0$, $b>0$ з рівності $a=b$ випливає рівність $a^2=b^2$ і, навпаки, з рівності $a^2=b^2$ випливає рівність $a=b$, що й гарантує рівносильність виконаного перетворення для додатних a і b. Аналогічно для $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$ використовуємо те, що для від'ємних значень t функція $y=t^2$ спадає і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу.

Для розв'язування деяких тригонометричних рівнянь можна застосовувати властивості функцій (відповідні загальні підходи до розв'язування було розглянуто в п. 3.2), зокрема, оцінку значень лівої і правої частин рівняння.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}=2$.

▶ Оцінимо область значень функції $f(x)=\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}$.

Оскільки $|\cos 6x|\leqslant 1$ і $\left|\sin\frac{5x}{2}\right|\leqslant 1$, то $|f(x)|\leqslant 2$, тобто $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$.

З'ясуємо, чи існують такі значення x, при яких функція $f(x)$ може набувати найбільшого значення 2. Якщо $\cos 6x$ буде менший від 1, то, для того щоб сума $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}$ дорівнювала 2, необхідно, щоб значення $\sin\frac{5x}{2}$ було більшим від 1, що неможливо. Аналогічно, якщо припустити, що $\sin\frac{5x}{2}$ менший від 1, то, для того щоб сума $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}$ дорівнювала 2, необхідно, щоб значення $\cos 6x$ було більшим від 1, що неможливо. Таким чином, рівність у даному рівнянні можлива тоді і тільки тоді, коли $\cos 6x$ і $\sin\frac{5x}{2}$ дорівнюють 1. Тому задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\cos 6x = 1;\\ \sin\frac{5x}{2} = 1.\end{cases} \text{ Звідси } \begin{cases}6x = 2\pi k, k\in \mathbf{Z};\\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in \mathbf{Z}.\end{cases} \text{ Тоді } \begin{cases}x = \frac{\pi k}{3},\\ x = \frac{\pi + 4\pi n}{5}.\end{cases}$$

Прирівнюючи праві частини цих рівностей, одержуємо

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi + 4\pi n}{5}. \text{ Звідси } k = \frac{3+12n}{5}.$$

Оскільки k і n — цілі числа, то спробуємо підставити в праву частину останньої рівності замість n цілі числа і знайти, для яких значень n за цією формулою k також буде цілим числом. При $n = 1$ одержуємо $k = 3$. У випадку, коли коефіцієнт 12 при змінній n у чисельнику дробу і знаменник 5 — взаємно прості числа, повторення подільності націло буде тільки через знаменник, тобто через 5. Тому останнє рівняння має розв'язки в цілих числах вигляду $n = 1 + 5m$, $m \in \mathbf{Z}$. Підставляючи значення n в один із розв'язків системи, одержуємо $x = \pi + 4\pi m$. Ці значення і є розв'язками останньої системи, а отже, і розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x = \pi + 4\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2}|\sin x + \cos x| = 2 + \sin^6 8x$.

Коментар

Перетворимо ліву частину даного рівняння за формулою $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ і оцінимо область значень функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння. Розв'язуючи одержану систему двох рівнянь з однією змінною, можна дещо спростити викладки і розв'язати лише одне рівняння системи, а для іншого перевірити, чи задовольняють йому одержані розв'язки.

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2 + \sin^6 8x. \qquad (1)$$

Позначимо: $f(x) = 2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, $g(x) = 2 + \sin^6 8x$. Оскільки $0 \leqslant \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$, то $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Проте $0 \leqslant \sin^6 8x \leqslant 1$, тому $2 \leqslant g(x) \leqslant 3$.

Ліва частина рівняння (1) менша або дорівнює 2, а права частина більша або дорівнює 2. Рівність між ними можлива тоді і тільки тоді, коли ліва і права частини рівняння дорівнюють 2, тобто дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=2, \\ 2+\sin^6 8x=2. \end{cases}$$

З першого рівняння системи маємо $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm 1$, звідки $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$. Тоді

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n.$$

Перевіримо, чи задовольняють знайдені значення другому рівнянню системи. Якщо $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, то $8x = 2\pi + 8\pi n$, тоді $\sin 8x = 0$ і тому $2 + \sin^6 8x = 2$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Іноді для того, щоб розв'язати тригонометричні рівняння, доводиться застосовувати тригонометричні формули, які призводять до звуження ОДЗ заданого рівняння. Такі перетворення можуть приводити до втрати коренів рівняння. Щоб цього не сталося, слід користуватися таким орієнтиром:

якщо для розв'язування рівнянь (чи нерівностей) доводиться виконувати перетворення, що звужують ОДЗ початкового рівняння (чи нерівності), то ті значення, на які звужується ОДЗ, потрібно розглядати окремо.

У таблиці 50 указано тригонометричні *формули, які можуть приводити до звуження ОДЗ,* та відповідні значення змінної, які слід перевіряти при використанні цих формул.

Таблиця 50

Формула (використовують зліва направо)	Значення змінної, які треба перевірити окремо, якщо вони входять до ОДЗ початкового рівняння
$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\operatorname{tg}(x\pm\alpha)=\frac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\alpha}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in \mathbf{Z}\right)$ $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Продовження табл. 50

Формула (використовують зліва направо)	Значення змінної, які треба перевірити окремо, якщо вони входять до ОДЗ початкового рівняння
$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ $\operatorname{ctg}(x \pm \alpha) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} \alpha \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} x} \ (\alpha \neq \pi n, n \in Z)$ $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$	$x = \pi k,\ k \in Z$
$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$
$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$	$x = 2\pi k,\ k \in Z$
$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ $\quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ $\quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Щоб упевнитися, що наведені формули приводять до звуження ОДЗ, достатньо порівняти області допустимих значень їх лівих і правих частин.

Наприклад, розглянемо формулу $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

ОДЗ лівої частини: $x \neq \pi n,\ n \in Z$. Щоб знайти ОДЗ правої частини формули, ураховуємо, що знаменник дробу не дорівнює нулю: $\operatorname{tg} x \neq 0$, отже, $x \neq \pi n,\ n \in Z$, а також умову існування тангенса: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$. Тобто ОДЗ правої частини задано системою обмежень $\begin{cases} x \neq \pi n, n \in Z; \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$ Порівнюючи ОДЗ лівої і правої частин розглянутої формули, бачимо, що ОДЗ правої частини містить додаткове обмеження $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. Отже, при переході за цією формулою від її лівої частини до правої відбувається звуження ОДЗ (відкидаються саме ті значення, які вказано в таблиці: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$). Щоб не загубити корені заданого рівняння, використовуючи формулу $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, потрібно розглянути окремо (звичайно, тільки в тому випадку, коли воно входить до ОДЗ заданого рівняння).

Наведемо приклад використання вказаного орієнтира.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \qquad (1)$$

Коментар

Якщо скористатися першими двома формулами таблиці 50, то ми зведемо всі тригонометричні вирази в цьому рівнянні й до одного аргументу, і до однієї функції — $\operatorname{tg} x$. Але при використанні зазначених формул відбувається звуження ОДЗ на значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Через це можна втратити корені рівняння, якщо числа такого виду входили в ОДЗ початкового рівняння і є його коренями. Щоб цього не сталося, розіб'ємо розв'язування на дві частини.

1. Підставляємо ті значення змінної, на які звужується ОДЗ, у рівняння (1). При обчисленнях ураховуємо періодичність функцій і формули зведення.
2. При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (на ОДЗ рівняння (1)) використання формул $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ і $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$ приводить до рівняння (2) (див. розв'язання), яке рівносильне заданому (на тій частині ОДЗ, де $\left.x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, бо ці формули зберігають правильну рівність як при переході від рівності (1) до рівності (2), так і при оберненому переході від рівності (2) до рівності (1). Заміна змінної (і обернена заміна) також приводить до рівняння, рівносильного заданому (на зазначеній частині ОДЗ початкового рівняння).

Зауважимо, що ОДЗ рівняння (2) відрізняється від ОДЗ рівняння (1) лише тим, що до неї не входять значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, які входять до ОДЗ рівняння (1). Оскільки ці «погані» значення ми врахували в процесі розв'язування, то ОДЗ рівняння (1) можна в явному вигляді не фіксувати (як у наведеному розв'язанні). У відповіді записуємо всі корені, які було одержано в першій і другій частинах розв'язання.

Розв'язання

1. ▶ Якщо $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$, то з даного рівняння одержуємо

$\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k+\frac{\pi}{4}\right)=1$, тобто $0^2-(-1)=1$ — правильна рівність.

Отже, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$, — корені рівняння (1).

2. Якщо $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, одержуємо

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}-\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{1-\mathrm{tg}\,x}=1. \qquad (2)$$

Заміна $\mathrm{tg}\,x=1$ приводить до рівняння $\frac{1}{t^2}-\frac{t+1}{1-t}=1$, яке при $t \neq 0$ і $t \neq 1$ рівносильне рівнянню $2t^2+t-1=0$. Тоді $t_1=-1$, $t_2=\frac{1}{2}$.

Обернена заміна дає: $\mathrm{tg}\,x=-1$ або $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{2}$, тобто

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z, \text{ або } x=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi m,\ m \in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$; $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\pi m$, $m \in Z$. ◁

Деякі тригонометричні рівняння вдається розв'язати, використовуючи такий орієнтир, який умовно можна назвати «Шукай квадратний тричлен», інакше кажучи,

спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції).

Приклад 5 Розв'яжіть рівняння $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Розглянемо рівняння як квадратне відносно x: $$x^2-\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot x+1=0.$$ Це рівняння може мати корені тоді і тільки тоді, коли його дискримінант буде невід'ємним: $D=4\sin^2\frac{\pi x}{2}-4 \geqslant 0$. Тоді $\sin^2\frac{\pi x}{2} \geqslant 1$.	Можна застосувати декілька підходів до розв'язування заданого рівняння: 1) розглянути задане рівняння як квадратне відносно змінної x і врахувати, що воно може мати корені тоді і тільки тоді, коли його дискримінант буде невід'ємним; 2) якщо в лівій частині рівняння виділити повний квадрат

Але $\sin^2\frac{\pi x}{2}$ не може бути більшим за 1. Отже, $\sin^2\frac{\pi x}{2}=1$, тобто $\sin\frac{\pi x}{2}=1$ або $\sin\frac{\pi x}{2}=-1$. Підставляючи ці значення в задане рівняння, одержуємо, що воно рівносильне сукупності систем:

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=1,\\ x^2-2x+1=0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=-1,\\ x^2+2x+1=0.\end{cases}$$

З другого рівняння першої системи маємо $x = 1$, що задовольняє і першому рівнянню системи. Таким чином, $x = 1$ — розв'язок першої системи, а отже, і розв'язок заданого рівняння. Аналогічно одержуємо $x = -1$ — розв'язок другої системи, а отже, і розв'язок заданого рівняння.

Відповідь: 1; −1. ◁

$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2$, то одержимо рівняння

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+\left(1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)=0.$$

Урахуємо, що завжди

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\geqslant 0 \text{ і } 1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 0.$$

А ***сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю.***

Також можна останнє рівняння записати у такому вигляді:

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\pi x}{2}-1$$

і оцінити ліву і праву частини цього рівняння.

(Виконайте розв'язування, запропоновані в пункті 2, самостійно.)

При розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь не завжди вдається виконувати тільки рівносильні перетворення рівнянь системи: іноді доводиться користуватися рівняннями-наслідками. У таких випадках можуть виникати сторонні розв'язки, тому одержані розв'язки необхідно перевіряти. Причому можна перевіряти як значення змінних, одержаних у кінці розв'язування, так і значення тригонометричних функцій, одержаних при розв'язуванні. Якщо всі тригонометричні функції, що входять до запису системи, по кожній із змінних мають спільний період, то достатньо виконати перевірку для всіх значень змінних з одного періоду (для кожної змінної).

Приклад 6 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y.\end{cases}$

Коментар

Якщо з першого рівняння системи виразити $\sin x$, а з другого — $\cos x$, то можна піднести обидві частини кожного рівняння до квадрата і після почленного додавання одержаних рівнянь використати тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. У результаті одержимо рівняння з однією змінною y, яке легко зводиться до однієї тригонометричної функції.

Але при піднесенні обох частин рівняння до квадрата одержуємо рівняння-наслідок. Отже, серед одержаних розв'язків можуть бути і сторонні розв'язки для заданої системи, які доведеться відсіювати перевіркою.

Для перевірки враховуємо, що всі функції відносно змінної x, які входять до запису системи (тобто $\sin x$ і $\cos x$), мають спільний період 2π. Аналогічно всі функції відносно змінної y ($\sin y$ і $\cos y$) теж мають спільний період 2π. Таким чином, перевірку розв'язків достатньо виконати для всіх пар чисел $(x; y)$, де $x \in [0; 2\pi]$, $y \in [0; 2\pi]$ (можна взяти і інші проміжки довжиною 2π). Корисно також урахувати, що всі розв'язки, одержані внаслідок підстановки в одне з рівнянь системи, автоматично задовольняють цьому рівнянню, а отже, перевірку цих розв'язків достатньо виконати тільки для другого рівняння системи.

Для кожної змінної всі одержані розв'язки потрібно повторити через період.

Розв'язання

Задана система рівносильна системі $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin y, & (1) \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos y. & (2) \end{cases}$

Піднесемо обидві частини кожного рівняння системи до квадрата і почленно додамо одержані рівняння. Отримуємо рівняння-наслідок

$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 y + \frac{3}{2}\cos^2 y$. Тоді $2 = \sin^2 y + 3\cos^2 y$,

$2 = 1 - \cos^2 y + 3\cos^2 y$, тобто $\cos^2 y = \frac{1}{2}$. Отже, $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ або $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Підставляючи одержані значення в рівняння (2), маємо

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \cos y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$ (3) або $\begin{cases} y = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in Z. \end{cases}$ (4)

Відносно кожної зі змінних x і y усі функції, які входять до запису заданої системи, мають період 2π, тому перевірку достатньо виконати для всіх пар чисел $(x; y)$, де $x \in [0; 2\pi]$, $y \in [0; 2\pi]$.

Для системи (3) це пари чисел: $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right)$,

а для системи (4) це пари чисел: $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

Розв'язками заданої системи є тільки пари чисел:

$$\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{4}\right),\ \left(\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right),\ \left(\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{4}\right).$$

Відповідь одержимо, повторюючи наведені розв'язки через період (для кожної змінної).

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ \left(\frac{11\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right),$

$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ \left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ n,\ k\in \mathbb{Z}.$ ◁

Розв'язуючи рівняння з оберненими тригонометричними функціями, корисно пам'ятати, що при $|a|\leqslant 1$

$$\boxed{\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}}.$$

і для довільних значень a

$$\boxed{\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}}.$$

Також при розв'язуванні рівнянь з оберненими тригонометричними функціями часто буває зручно від обох частин рівняння взяти якусь тригонометричну функцію і скористатися означенням відповідних обернених тригонометричних функцій.

Приклад 7 Розв'яжіть рівняння $2\arcsin x=\arcsin\frac{10}{13}x.$

Коментар

Якщо взяти від обох частин заданого рівняння функцію синус, то одержимо рівняння-наслідок: якщо числа рівні, то і синуси будуть рівними, але якщо синуси двох чисел рівні, то це ще не означає, що числа обов'язково будуть рівними. Правильна рівність буде зберігатися при прямих перетвореннях, але не обов'язково буде зберігатися при обернених перетвореннях. Отже, у кінці необхідно виконати перевірку одержаних розв'язків.

Якщо позначити $\arcsin x=\alpha$, то за означенням арксинуса $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\alpha=x$. Щоб знайти $\cos\alpha$ ураховуємо, що при $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ значення $\cos\alpha\geqslant 0$, отже, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Перевіряючи одержані розв'язки, у тих випадках, коли знайдені числа не є коренями заданого рівняння, іноді зручно порівняти одержані розв'язки з табличними значеннями. Наприклад, $\frac{12}{13}\approx 0{,}9$ більше за $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7$. Ураховуючи зростання функції $y=\arcsin t$, одержуємо, що $\arcsin\frac{12}{13}>\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання

▶ Якщо позначити $\arcsin x = \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, і $\arcsin \frac{10}{13}x = \beta$, де $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то задане рівняння матиме вигляд

$$2\alpha = \beta. \qquad (1)$$

Візьмемо від обох частин рівняння (1) функцію синус і одержимо

$$\sin 2\alpha = \sin \beta,$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin \beta. \qquad (2)$$

За означенням арксинуса $\sin \alpha = x$, $\sin \beta = \frac{10}{13}x$. Ураховуючи, що $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, одержуємо $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$.

Тоді рівняння (2) матиме вигляд $2x\sqrt{1-x^2} = \frac{10}{13}x$. Звідси

$$x\left(2\sqrt{1-x^2} - \frac{10}{13}\right) = 0.$$

Отже, $x = 0$ або $\sqrt{1-x^2} = \frac{5}{13}$, тобто $1 - x^2 = \frac{25}{169}$, $x^2 = \frac{144}{169}$, $x = \pm\frac{12}{13}$.

Перевірка.

1) $x = 0$ — корінь $\left(2\arcsin 0 = \arcsin\left(\frac{10}{13} \cdot 0\right); 0 = 0\right)$,

2) $x = \pm\frac{12}{13}$ — сторонні корені. Дійсно, для $x = \frac{12}{13}$ маємо $2\arcsin\frac{12}{13} \neq \arcsin\frac{120}{169}$ (оскільки $\frac{12}{13} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $2\arcsin\frac{12}{13} > 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а $\arcsin\frac{120}{169} < \frac{\pi}{2}$). Аналогічно при $x = -\frac{12}{13}$ маємо $2\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) < -\frac{\pi}{2}$, і рівність теж не може виконуватися.

Відповідь: 0. ◁

Зауваження. Для того щоб розв'язати рівняння $2\arcsin x = \arcsin\frac{10}{13}x$, можна було б використати не тільки рівняння-наслідки, а й рівносильні перетворення рівнянь. Але в цьому випадку доведеться врахувати ОДЗ заданого рівняння:

$$\begin{cases} |x| \leq 1, \\ \left|\frac{10}{13}x\right| \leq 1, \end{cases} \qquad (3)$$

а також те, що для всіх коренів рівняння його права частина $\left(\arcsin\frac{10}{13}x\right)$ знаходиться в проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (за означенням арксинуса). Отже, і ліва частина рівняння повинна знаходитися в цьому самому проміжку. Таким чином, для всіх коренів заданого рівняння виконується умова: $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, тобто

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

У проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $\sin t$ є зростаючою, тоді при виконанні умови (4) (звичайно, на ОДЗ (3)), якщо від обох частин заданого рівняння взяти синус, то одержимо рівносильне йому рівняння (тобто задане рівняння рівносильне рівнянню (2) за умов (3) і (4)). Виконуючи міркування і перетворення, наведені вище в розв'язанні прикладу 7, одержуємо $x = 0$ або $x = \pm\frac{12}{13}$. Усі знайдені корені входять до ОДЗ (задовольняють умові (3)), але умові (4) задовольняє тільки $x = 0$, отже, коренем заданого рівняння є тільки $x = 0$.

Запитання для контролю

1. Поясніть, як можна розв'язати рівняння $\cos x = 1 + x^2$ за допомогою оцінки значень лівої і правої частин рівняння. Розв'яжіть це рівняння.
2. Поясніть, як можна розв'язувати тригонометричні рівняння, до запису яких входять лише сума або різниця синуса і косинуса одного й того самого аргументу та їх добуток. Наведіть приклад такого рівняння.
3. Наведіть приклад тригонометричної формули, застосування якої може привести до звуження ОДЗ заданого рівняння і до втрати його коренів. Поясніть, чому відбувається звуження ОДЗ. Як потрібно використовувати такі формули, щоб не втратити корені заданого рівняння? Поясніть це на прикладі рівняння $2\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–5).

1. 1) $\sin x - \cos x = \sin 2x - \frac{1}{2}$; 2) $\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 0{,}5\sin 2x$.
2. 1) $\sin 7x + \cos 12x = 2$; 2) $\sin 2x \sin 6x = 1$;
   3) $\cos \pi x + \sin \frac{5\pi x}{2} = -2$; 4) $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$;
   5) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 5\operatorname{tg}^2 5x + 5\operatorname{ctg}^2 5x = 12$.
3. 1) $5\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg} x - 5$; 2) $\sin 2x + \operatorname{tg} 2x = -\frac{8}{3}\operatorname{ctg} x$.

4. 1) $9x^2 - 6x \cos 6\pi x + 1 = 0$;
2) $4x^2 - 4x \sin(xy) + 1 = 0$ (знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівнянню).

5. 1) $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$; 2) $9(\arccos 2x)^2 - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0$;
3) $2\arcsin x + 3\arccos x = \pi$; 4) $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi^2}{16}$;
5) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$; 6) $\arcsin x = 2\operatorname{arctg} x$.

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x = -\sqrt{3}\sin y, \\ \sqrt{3}\cos x = \cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos 2x + 2\cos y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4\sin(3x + 2y) + \sin x = 0, \\ 4\sin(2x + 3y) + \sin y = 0. \end{cases}$

§ 29 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

29.1. Розв'язування рівнянь з параметрами

Якщо крім змінної та числових коефіцієнтів до запису тригонометричного рівняння входять також буквені коефіцієнти — параметри, то, розв'язуючи ці рівняння, можна користуватися таким орієнтиром (див. § 9).

> ***Будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайне рівняння чи нерівність доти, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.***

На етапі пошуку плану розв'язування рівняння чи нерівності з параметрами або в ході міркувань, пов'язаних із самим розв'язуванням як таким, часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами. За цими схемами легко простежити, у який саме момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання і чим відрізняється один випадок від іншого. Щоб на таких схемах (чи в записах громіздких розв'язань) не втратити якусь відповідь, доцільно поміщати остаточні відповіді в прямокутні рамки.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $2\cos x - a = 0$.

Розв'язання

$\cos x = \frac{a}{2}$

- $\left|\frac{a}{2}\right| > 1$: коренів немає
- $\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 1$: $x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

Відповідь:

1) якщо $\left|\frac{a}{2}\right| > 1$ (тобто $|a| > 2$), то коренів немає;
2) якщо $\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 1$ (тобто $|a| \leqslant 2$), то $x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. ◁

Коментар

Наявність параметра a не заважає нам однозначно виразити $\cos x$ із заданого рівняння.

Рівняння $\cos t = b$ при $|b| > 1$ не має коренів, а при $|b| \leqslant 1$ корені рівняння можна записати за відомою формулою (див. табл. 46). Отже, для рівняння $\cos x = \frac{a}{2}$ не можна однозначно записати розв'язки, і тому, починаючи з цього моменту, необхідно розглядати два випадки розв'язання.

Остаточну відповідь можна записувати з використанням знака модуля, а можна обмеження для параметра a подати без модуля і записати *відповідь* так:

1) якщо $a < -2$ або $a > 2$, то коренів немає;
2) якщо $-2 \leqslant a \leqslant 2$,
$x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sin 2x = 4a\cos x$.

Розв'язання

► $2\sin x\cos x - 4a\cos x = 0$,

$2\cos x(\sin x - 2a) = 0$. (1)

Тоді $\cos x = 0$ або $\sin x - 2a = 0$.

Звідси $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z,}$

або $\sin x = 2a$.

$\sin x = 2a$

- $|2a| > 1$: коренів немає
- $|2a| \leqslant 1$: $x = (-1)^n \arcsin(2a) + \pi n$, $n \in Z$

Коментар

Спочатку зведемо всі тригонометричні функції до одного аргументу x, використовуючи формулу

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Якщо перенести всі члени рівняння в ліву частину, то можна винести за дужки спільний множник $2\cos x$.

Оскільки обидва множники мають зміст при будь-яких значеннях змінної x, то рівняння (1) рівносильне сукупності $\cos x = 0$ або $\sin x - 2a = 0$, тобто сукупності

Відповідь:
(див. у кінці зауваження). ◁

$\cos x = 0$ або $\sin x = 2a$.

Для рівняння $\cos x = 0$ ми можемо записати корені при будь-яких значеннях a (у цьому рівнянні параметра a немає), а у рівнянні $\sin x = 2a$ все залежить від правої частини: якщо $|2a| > 1$, то коренів немає, а якщо $|2a| \leqslant 1$, то корені є. Отже, доводиться розбивати розв'язування цього рівняння на два випадки.

Зауваження. Для запису одержаних відповідей (вони на схемах розміщені в прямокутних рамках) доцільно уточнити, при яких значеннях a виконуються обмеження $|2a| \leqslant 1$ та $|2a| > 1$. Для цього розв'язуємо відповідні нерівності:

якщо $|2a| \leqslant 1$, тоді $-1 \leqslant 2a \leqslant 1$, тобто $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$;

якщо $|2a| > 1$, тоді $2a < -1$ або $2a > 1$, тобто $a < -\frac{1}{2}$ або $a > \frac{1}{2}$.

Щоб полегшити запис відповіді *у складних або громіздких випадках, зобразимо вісь параметра (a) і відмітимо на ній усі особливі значення параметра, які з'явилися в процесі розв'язування* (рис. 167). *Під віссю параметра (лівіше від неї) випишемо всі одержані розв'язки (крім «коренів немає») і напроти кожної відповіді відмітимо, при яких значеннях параметра цю відповідь можна використовувати. Після цього записуємо відповідь для кожного з особливих значень параметра і для кожного з одержаних проміжків осі параметра.*

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$

2. $x = (-1)^n \arcsin(2a) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

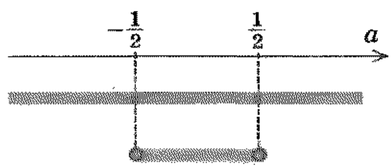


Рис. 167

Із цієї схеми добре видно, що при $a < -\frac{1}{2}$ або $a > \frac{1}{2}$ у відповідь потрібно записати тільки одну формулу, а при $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ — дві формули.

Відповідь: 1) якщо $a < -\frac{1}{2}$ або $a > \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$;

2) якщо $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$, $x = (-1)^n \arcsin(2a) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння

$$\operatorname{tg} 2x = a \operatorname{ctg} x. \quad (1)$$

Коментар

Для розв'язування рівняння (1) використаємо рівносильні перетворення. Тоді ми обов'язково повинні врахувати ОДЗ заданого рівняння. Для цього записуємо умови існування тангенса та котангенса і розв'язуємо відповідні обмеження. Ми можемо звести всі тригонометричні функції до одного аргументу x, використовуючи формулу тангенса подвійного аргументу, а потім звести всі вирази до однієї функції $\operatorname{tg} x$, використовуючи формулу $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Але використання вказаних формул приводить до звуження ОДЗ (табл. 50), і, щоб не втратити корені заданого рівняння, ті значення, на які звужується ОДЗ $\left(x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, потрібно розглянути окремо.

При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ зводимо всі тригонометричні вирази до однієї функції і виконуємо рівносильні перетворення одержаного рівняння

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{a}{\operatorname{tg} x}. \quad (2)$$

На ОДЗ рівняння (1) знаменники дробів у рівнянні (2) не дорівнюють нулю. Отже, після множення обох частин рівняння на вирази, що стоять у знаменниках, одержуємо рівняння $(2 + a)\operatorname{tg}^2 x = a$, рівносильне рівнянню (2) на ОДЗ рівняння (1).

1) Якщо $2 + a = 0$, тобто $a = -2$, то одержуємо рівняння $0 \cdot \operatorname{tg}^2 x = -2$, яке не має коренів.

2) Якщо $2 + a \neq 0$, тобто $a \neq -2$, то одержуємо $\operatorname{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}$.

Щоб розв'язати це рівняння, потрібно знати знак виразу, який стоїть у правій частині, оскільки $\operatorname{tg}^2 x$ не може бути від'ємним. Розглянемо для правої частини три випадки: вона менша від нуля, дорівнює нулю, більша за нуль. Тобто подальші міркування проведемо за схемою.

Звичайно, для кожного випадку потрібно уточнити, при яких значеннях a виконується відповідне обмеження, і для кожного одержаного розв'язку потрібно перевірити, входить він до ОДЗ заданого рівняння чи ні.

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}}$$

$$\frac{a}{a+2} < 0 \qquad \frac{a}{a+2} = 0 \qquad \frac{a}{a+2} > 0$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x \neq \pi m, m \in Z, \end{cases}$ тоді $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x \neq \pi m, m \in Z. \end{cases}$

I. При $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, з рівняння (1) одержуємо $\operatorname{tg}(\pi + 2\pi k) = a \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, тобто $0 = a \cdot 0$ — рівність, правильну при будь-яких значеннях a. Отже, при всіх значеннях параметра a задане рівняння має корені

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.}$$

II. При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ одержуємо рівняння (2): $\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{a}{\operatorname{tg} x}$, яке на ОДЗ рівносильне рівнянню $2\operatorname{tg}^2 x = a - a\operatorname{tg}^2 x$. Звідси

$$(2 + a)\operatorname{tg}^2 x = a. \quad (3)$$

1) Якщо $a = -2$, то коренів немає.

2) Якщо $a \neq -2$, то рівняння (3) рівносильне рівнянню

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}. \quad (4)$$

а) Якщо $\frac{a}{a+2} < 0$, то коренів немає.

Розв'язавши нерівність $\frac{a}{a+2} < 0$ методом інтервалів (рис. 168), одержуємо $-2 < a < 0$.

Отже, при $-2 < a < 0$ $\boxed{\text{коренів немає}}$.

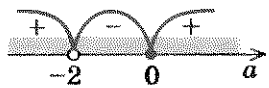


Рис. 168

б) Якщо $\frac{a}{a+2} = 0$ (тобто $a = 0$), одержуємо рівняння $\operatorname{tg} x = 0$, яке має корені $x = \pi k$, $k \in Z$. Але ці корені не входять до ОДЗ заданого рівняння. Отже, і при $a = 0$ $\boxed{\text{коренів немає}}$.

в) Якщо $\frac{a}{a+2} > 0$ (тобто $a < -2$ або $a > 0$), то з рівняння (4) одержуємо $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}$. Звідси $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l$, $l \in Z$.

З'ясуємо, при яких значеннях a одержані корені рівняння (4) не входять до ОДЗ. Для цього достатньо в рівняння (4) замість аргументу x підставити «заборонені» значення. Ураховуючи, що функції, які входять до запису заданого рівняння (1), мають спільний період $T = \pi$ ($\operatorname{tg} 2x$ має період $T_1 = \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{ctg} x$ має період $T_2 = \pi$), достатньо підставити ці значення тільки на одному періоді, наприклад, на проміжку $[0; \pi]$. У цьому проміжку до ОДЗ не входять такі значення: 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; π. При $x = 0$ або

$x = \pi$ з рівняння (4) одержуємо рівність $\frac{a}{a+2} = 0$, тобто $a = 0$. Випадок $a = 0$ ми вже дослідили (коренів немає). При $x = \frac{\pi}{4}$ або $x = \frac{3\pi}{4}$ з рівняння (4) одержуємо $\frac{a}{a+2} = 1$. Але при жодному значенні a ця рівність не може виконуватися. Отже, при всіх значеннях $a < -2$ або $a > 0$ одержані розв'язки $\boxed{x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in Z}$, входять до ОДЗ початкового рівняння.

Зобразимо одержані відповіді (рис. 169).

1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

2) $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in Z$

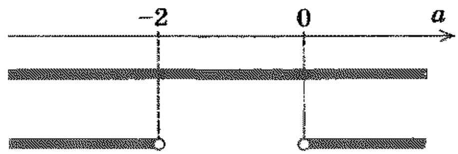


Рис. 169

Відповідь: 1) якщо $-2 \leqslant a \leqslant 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

2) якщо $a < -2$ або $a > 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$,

$x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in Z$. ◁

29.2. Дослідницькі задачі з параметрами

Крім завдань з параметрами, у яких вимагається «розв'язати рівняння або нерівність», часто пропонуються дослідницькі завдання з параметрами. Такі завдання іноді вдається розв'язати за допомогою безпосередніх обчислень: розв'язати задане рівняння або нерівність і після цього дати відповідь на запитання задачі. Проте досить часто дослідницькі завдання не вдається розв'язати безпосередніми обчисленнями (або такі обчислення є дуже громіздкими), і тому доводиться спочатку обґрунтувати якусь властивість заданого рівняння або нерівності, а потім, користуючись цією властивістю, уже давати відповідь на запитання задачі.

Розглянемо деякі з таких властивостей. Наприклад, беручи до уваги парність функцій, що входять до запису заданого рівняння, використовують такий орієнтир.

Якщо в рівнянні $f(x) = 0$ функція $f(x)$ є парною або непарною, то разом з будь-яким коренем α ми можемо вказати ще один корінь цього рівняння $(-\alpha)$.

Приклад 1 Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння

$$a^2 \cos^2 x - x^2 - a = 0 \qquad (1)$$

має єдиний корінь.

Розв'язання

▶ Функція $f(x) = a^2 \cos^2 x - x^2 - a$ є парною ($D(f) = R$, $f(-x) = f(x)$). Якщо $x = \alpha$ — корінь рівняння (1), то $x = -\alpha$ теж є коренем цього рівняння. Тому єдиний корінь у заданого рівняння може бути тільки тоді, коли $\alpha = -\alpha$, тобто $\alpha = 0$. Отже, єдиним коренем заданого рівняння може бути тільки $x = 0$.

Якщо $x = 0$, то з рівняння (1) одержуємо $a^2 - a = 0$, тобто $a(a - 1) = 0$. Звідси $a = 0$ або $a = 1$. При $a = 0$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^2 = 0$, яке має єдиний корінь $x = 0$. Отже, $a = 0$ задовольняє умові задачі.

При $a = 1$ маємо рівняння $\cos^2 x - x^2 - 1 = 0$, тобто

$$\cos^2 x = 1 + x^2. \qquad (2)$$

Оскільки $\cos^2 x \leqslant 1$, а $1 + x^2 \geqslant 1$, то рівняння (2) рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

З другого рівняння системи одержуємо $x = 0$, що задовольняє і першому рівнянню, тобто ця система, а отже, і рівняння (2) має єдиний розв'язок — $x = 0$. Таким чином, $a = 1$ також задовольняє умові задачі.

Відповідь: $a = 0$, $a = 1$. ◁

Коментар

Помічаємо, що в лівій частині заданого рівняння стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир, наведений вище. Дійсно, якщо $x = \alpha$ — корінь рівняння $f(x) = 0$, то $f(\alpha) = 0$ — правильна числова рівність. Ураховуючи парність функції $f(x)$, маємо $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Отже, $x = -\alpha$ теж корінь рівняння $f(x) = 0$. Єдиний корінь у цього рівняння може бути тільки тоді, коли корені α і $-\alpha$ збігаються. Тоді $x = \alpha = -\alpha = 0$.

З'ясуємо, чи існують такі значення параметра a, при яких $x = 0$ є коренем рівняння (1). (Це $a = 0$ і $a = 1$.)

Оскільки значення $a = 0$ і $a = 1$ ми одержали з умови, що $x = 0$ — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях a задане рівняння матиме єдиний корінь.

Для розв'язування рівняння (2) оцінимо його ліву і праву частини:

$$f(x) = \cos^2 x, \; g(x) = 1 + x^2.$$

$$\underbrace{\cos^2 x}_{\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 1}} = \underbrace{1 + x^2}_{\boxed{g(x) \geqslant 1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язати деякі дослідницькі задачі з параметрами допомагає використання такого орієнтира.

Якщо в умові задачі з параметрами йдеться про те, що розв'язками заданого рівняння чи нерівності є всі значення змінної з деякої множини, то іноді корисно підставити конкретні значення змінної із заданої множини і одержати деякі обмеження на параметр.

Приклад 2 Знайдіть усі пари чисел (a, b), для яких коренями рівняння

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 \qquad (1)$$

будуть усі дійсні числа.

Розв'язання

Якщо коренями заданого рівняння є всі дійсні числа, то коренем буде і число нуль.

При $x = 0$ одержуємо $b^2 = \cos b^2 - 1$, тоді

$$1 + b^2 = \cos b^2. \qquad (2)$$

Ураховуючи, що $1 + b^2 \geqslant 1$, а $\cos b^2 \leqslant 1$, одержуємо, що рівняння (2) рівносильне системі

$$\begin{cases} 1+b^2=1, \\ \cos b^2=1. \end{cases}$$

З першого рівняння системи одержуємо $b = 0$, що задовольняє і другому рівнянню, тобто ця система, а отже, і рівняння (2) мають єдиний розв'язок $b = 0$.

Таким чином, умова задачі може виконуватися тільки при $b = 0$.

При $b = 0$ рівняння (1) перетворюється на рівняння

$$a(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1. \qquad (3)$$

Але за умовою коренями рівняння (1), а отже, і рівняння (3) повинні бути всі дійсні числа, тому коренем буде і число 2π. При $x = 2\pi$ одержуємо $0 = \cos(2\pi a) - 1$, тоді $\cos(2\pi a) = 1$, тобто $2\pi a = 2\pi k$, $k \in Z$. Отже, $a = k$, $k \in Z$ (таким чином, a — ціле число).

Якщо коренями рівняння (3) є всі дійсні числа, то коренем буде і число $\frac{\pi}{2}$.

При $x = \frac{\pi}{2}$ одержуємо

$$-a = \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right) - 1.$$

Коментар

Ми не в змозі розв'язати задане рівняння (але його і не вимагають розв'язати), тому скористаємося тим, що за умовою його коренями будуть усі дійсні числа, і підставимо замість змінної x якісь конкретні значення.

Для підстановки найчастіше вибирають такі з них, які дозволяють перетворити якийсь вираз на нуль. Так, при $x = 0$ вираз у перших дужках дорівнює нулю. Розв'язуючи одержане рівняння (2) відносно b, отримуємо єдиний розв'язок $b = 0$.

Якщо $b \neq 0$, то рівність (1) не може бути правильною при $x = 0$, тобто $x = 0$ не буде коренем заданого рівняння, а отже, при цих значеннях b рівняння (1) не може мати коренями всі дійсні числа.

Спробуємо ще раз перетворити вираз у перших дужках на нуль, використовуючи те, що число 2π є періодом функції $\cos x$, отже, через 2π значення в перших дужках буде повторюватися (підставляємо $x = 2\pi$).

Потім спробуємо перетворити на нуль $\cos x$ (підставляємо $x = \frac{\pi}{2}$).

При цілому a значення $\frac{\pi}{2}a$ на одиничному колі зображуються на кінцях горизонтального та вертикального діаметрів, отже, значення $\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ можуть бути тільки такими: 1, -1 і 0.

Оскільки $\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ при цілих значеннях a набуває тільки значень 1; 0; −1, то a може набувати тільки значень 0; 1; 2.

Якщо $a = 0$ (і $b = 0$), то рівняння (1) має вигляд $0\ (\cos\ x - 1) = \cos\ 0 - 1$, тобто $0\ (\cos\ x - 1) = 0$, і його коренями є всі дійсні числа. Отже, пара чисел $(a,\ b) = (0;\ 0)$ задовольняє умові задачі.

Якщо $a = 1$ (і $b = 0$), то рівняння (1) має вигляд $\cos\ x - 1 = \cos\ x - 1$, і його коренями є всі дійсні числа. Отже, пара чисел $(a,\ b) = (1;\ 0)$ задовольняє умові задачі.

Якщо $a = 2$ (і $b = 0$), то рівняння (1) має вигляд $2\ (\cos\ x - 1) = \cos\ 2x - 1$. Коренями цього рівняння не можуть бути всі дійсні числа, оскільки коренем не є $x = \pi$ (при підстановці одержуємо неправильну рівність $-4 = 0$). Отже, пара чисел $(a,\ b) = (2;\ 0)$ не задовольняє умові задачі.

Відповідь: (0; 0), (1; 0). ◁

Оскільки значення a і b ми отримали при підстановці в задане рівняння тільки трьох значень x, то необхідно перевірити, чи будуть усі дійсні числа при цих значеннях a і b коренями заданого рівняння, тобто перевірити, чи буде рівняння (1) перетворюватися на правильну рівність при всіх дійсних значеннях x. У випадку, коли $a = 2$ і $b = 0$, одержуємо, що $\cos\ 2x = 2\ \cos\ x - 1$. Якби ця рівність була правильною при всіх значеннях x, то це була б ще одна формула косинуса подвійного аргументу. Але такої формули немає, отже, можна вказати якесь значення x, при якому ця рівність не виконується.

Приклад 3 Знайдіть усі значення параметра a, для яких рівняння

$$\cos\ 2x + a\ \sin\ x - 9 = 0 \qquad (1)$$

має корені.

Коментар

Спочатку виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння: зведемо до одного аргументу і до однієї функції, а потім виконаємо заміну $\sin\ x = t$. Слід враховувати, що *після заміни змінної іноді змінюється вимога задачі*, зокрема, для рівняння (2) вона буде такою: знайти всі значення параметра a, для яких це рівняння має хоча б один корінь у проміжку $[-1;1]$ (тоді після оберненої заміни ми знайдемо корені рівняння $\sin\ x = t$, а отже, і корені рівняння (1)). Це можливо в одному з трьох випадків: або обидва корені рівняння (2) містяться в цьому проміжку або тільки один з коренів рівняння (2) міститься в проміжку $[-1;1]$, а другий — праворуч або ліворуч від цього проміжку. Зобразивши відповідні ескізи графіків функції $f\ (t) = 2t^2 - at + 8$ (рис. 170), за наведеним орієнтиром (або за таблицею 16) записуємо відповідні необхідні і достатні умови розміщення коренів (3)–(5). При цьому враховуємо, що у випадках, коли $f(-1) = 0$ або $f(1) = 0$, умова задачі теж виконується.

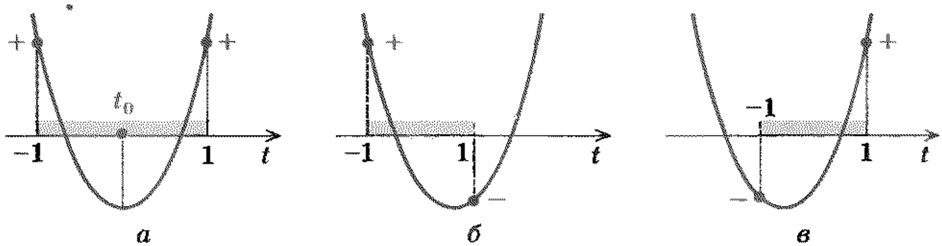


Рис. 170

У кінці необхідно об'єднати всі отримані результати.

Зазначимо, що для одержання відповіді можна розв'язати рівняння (2): $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 64}}{4}$, а потім розв'язати сукупність нерівностей: $-1 \leqslant t_1 \leqslant 1$, $-1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, але нерівності з коренями розв'язувати досить складно.

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$1 - 2\sin^2 x + a\sin x - 9 = 0,$$

$2\sin^2 x - a\sin x + 8 = 0$. Заміна $\sin x = t$ дає рівняння

$$2t^2 - at + 8 = 0. \qquad (2)$$

Рівняння (1) матиме корені тоді і тільки тоді, коли рівняння (2) матиме хоча б один корінь у проміжку $[-1;1]$.

1) Для того щоб обидва корені квадратного тричлена $f(t) = 2t^2 - at + 8$ містилися в цьому проміжку, достатньо виконання умов

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0, \\ D \geqslant 0, \\ -1 \leqslant t_0 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Для того щоб один корінь $f(t)$ містився в проміжку $[-1;\ 1]$, а другий — праворуч від 1 (або в точці 1), досить виконання умов

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ f(1) \leqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

3) Для того щоб один корінь $f(t)$ містився в проміжку $[-1;\ 1]$, а другий — ліворуч від −1 (або в точці −1), досить виконання умов

$$\begin{cases} f(-1) \leqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Розв'язуємо сукупність систем нерівностей (3)–(5):

$$\begin{cases} 10+a \geqslant 0, \\ 10-a \geqslant 0, \\ a^2-64 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant \frac{a}{4} \leqslant 1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 10+a \geqslant 0, \\ 10-a \leqslant 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 10+a \leqslant 0, \\ 10-a \geqslant 0. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} a \geqslant -10, \\ a \leqslant 10, \\ a \leqslant -8 \text{ або } a \geqslant 8, \\ -4 \leqslant a \leqslant 4 \end{cases}$ або $\begin{cases} a \geqslant -10, \\ a \geqslant 10 \end{cases}$ або $\begin{cases} a \leqslant -10, \\ a \leqslant 10. \end{cases}$

Перша система не має розв'язків, а з інших одержуємо

$$a \geqslant 10 \text{ або } a \leqslant -10.$$

Відповідь: $a \in (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$. ◁

Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–2).

1. 1) $a \sin x = 1$; 2) $a \sin 2x = \cos x$; 3) $a \operatorname{tg} x = \sin x$; 4) $\operatorname{ctg} x = a \cos x$.
2. 1) $\cos 2x + 2 \sin x + a - 1 = 0$; 2) $\sin 3x - \sin 2x = a \sin x$; 3) $\frac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx} = 0$; 4) $a \sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}$.
3. Знайдіть усі значення параметра, при яких рівняння має корені:
   1) $2 \sin x + 4 \cos x = a$; 2) $3 \sin x - 4 \cos x = b$;
   3) $a \cos 2x - \sin x = 0$; 4) $\cos 2x + a \cos x = 0$;
   5) $\arcsin^2 x + (3a - 3) \arcsin x + (a - 2)(5 - 4a) = 0$.
4. При яких значеннях параметра a рівняння
   $$\cos^2 2x + (a - 3) \cos 2x = 0$$
   має на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ рівно чотири корені?
5. Знайдіть усі пари чисел (a, b), для яких коренями рівняння
   $$a(\cos 3x - 1) + b^2 - 2b = \cos(3ax + (b - 1)^2) - 2$$
   будуть усі дійсні числа.
6. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння
   $$(4a + 2) \sin x + 2a \cos x + a + 1 = 0$$
   має точно один корінь, який належить відрізку $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.
7. Розв'яжіть нерівність:
   1) $2 \sin x > a$; 2) $(5a - 7) \cos x < a + 5$;
   3) $a \sin^2 x + 2 \cos x - a + 1 > 0$; 4) $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geqslant a$.

8. При яких значеннях параметра a задана нерівність виконується при всіх значеннях x?

1) $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x \geqslant 0$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x > 3a \sin x \cos x$.

9. При яких значеннях параметра a задані рівняння рівносильні?

1) $\sin x + \frac{1}{2} = 0$ і $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{a}{2}\right) = 0$;

2) $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ і $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{a-2}{2}\right) = 0$;

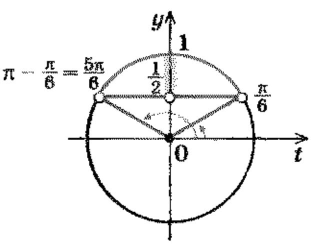
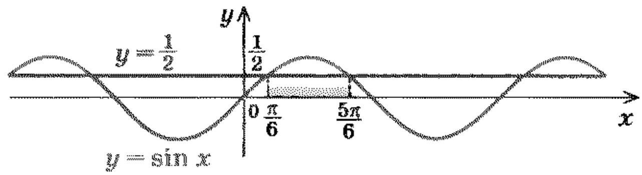
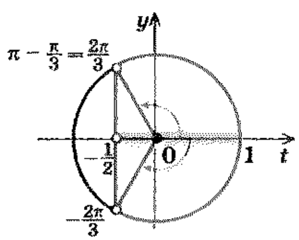
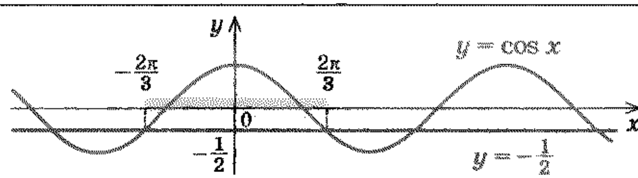
3) $\sin 2x + a = \sin x + 2a \cos x$ і $2 \cos 2x + a^2 = 5a \cos x - 2$.

10. Розв'яжіть систему:

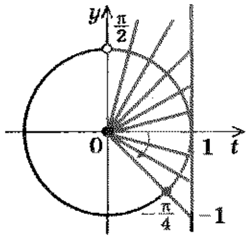
1) $\begin{cases} \cos x \cos y = a^2, \\ \sin x \sin y = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \sqrt{a}, \\ \sin y \cos x = 1. \end{cases}$

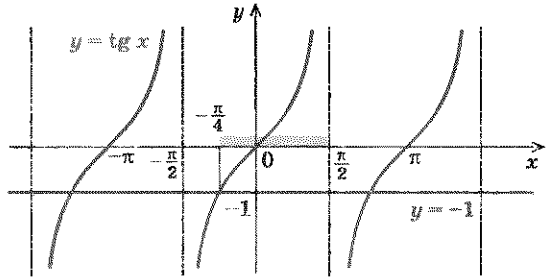
§ 30 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 51

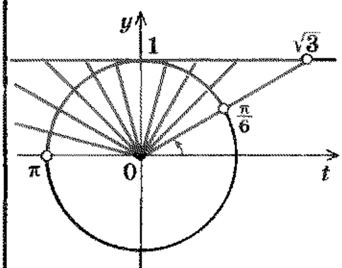
Приклади розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей	
за допомогою одиничного кола	за допомогою графіків
	 $\sin x > \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$
	 $\cos x > -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

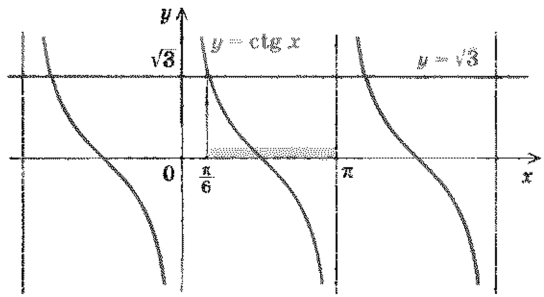
Продовження табл. 51





$$\operatorname{tg} x \geqslant -1 \qquad -\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z$$





$$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3} \qquad \frac{\pi}{6}+\pi k < x < \pi+\pi k,\ k \in Z$$

2. Способи розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей

а) **Використання рівносильних перетворень**, зокрема ***зведення до алгебраїчної нерівності за схемою:*** **1)** ***до одного аргументу***; **2)** ***до однієї функції***; **3)** ***заміна змінної*** **(аналогічно до схеми розв'язування тригонометричних рівнянь, наведеної в п. 25.1)** ***і наступне розв'язування одержаних найпростіших тригонометричних нерівностей.***

б) **Використання методу інтервалів** **(після зведення нерівності до вигляду $f(x) \geqslant 0$) за схемою:**

1) Знайти ОДЗ нерівності.

2) Знайти спільний період (якщо він існує) для всіх функцій, що входять до запису нерівності, тобто **період функції $f(x)$.**

3) Знайти нулі функції: $f(x) = 0$.

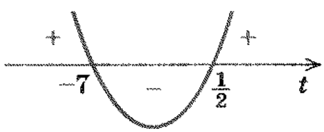
4) Позначити нулі функції на ОДЗ усередині одного періоду та знайти знак функції $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (усередині одного періоду).

5) Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності і період функції $f(x)$.

Пояснення й обґрунтування

Способи розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей проілюструємо на прикладах (приклади і пояснення розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей наведено в § 27).

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $\frac{5}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x<\cos 2x$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)<\cos 2x$. Тоді $2\cos^2 2x+13\cos 2x-7>0$. Заміна $\cos 2x=t$ дає нерівність $2t^2+13t-7>0$, розв'язки якої (див. рисунок): $t<-7$ або $t>\frac{1}{2}$  Обернена заміна дає: $\cos 2x<-7$ (розв'язків немає) або $\cos 2x>\frac{1}{2}$. Тоді $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$. Отже, $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. ◁	Використаємо рівносильні перетворення заданої нерівності. Для цього зведемо її до алгебраїчної за схемою, аналогічною до схеми розв'язування тригонометричних рівнянь: 1) до одного аргументу ($2x$); 2) до однієї функції ($\cos 2x$); 3) заміна змінної ($\cos 2x=t$). Після оберненої заміни розв'яжемо одержані найпростіші тригонометричні нерівності.

Розв'язуючи більш складні тригонометричні нерівності, можна також використати *метод інтервалів*, трохи змінивши його. Необхідність корекції відомої схеми розв'язування нерівностей $f(x) \gtrless 0$ методом інтервалів (табл. 11 § 4) пов'язана з тим, що у випадку, коли функція $f(x)$ — тригонометрична, вона, як правило, має нескінченну множину коренів (які одержують при цілих значеннях параметра). Тому, якщо намагатися позначити корені на ОДЗ, доведеться позначити їх нескінченну множину, що неможливо. Уникнути цього можна, якщо знайти період функції $f(x)$ (якщо він існує) і розглянути знак функції на кожному проміжку всередині одного періоду.

Таким чином, метод інтервалів для розв'язування тригонометричних нерівностей $f(x) \gtrless 0$ може застосовуватися за схемою:

1. **Знайти ОДЗ нерівності.**
2. **Знайти період функції $f(x)$** (якщо він існує).
3. **Знайти нулі функції ($f(x) = 0$).**
4. **Позначити нулі на ОДЗ всередині одного періоду та знайти знак функції у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ** (усередині одного періоду).
5. **Записати відповідь** (ураховуючи знак заданої нерівності і період функції f (x)).

Приклад 2 Розв'яжіть нерівність $\cos 2x \leqslant \cos 3x - \cos 4x$.

► Розв'яжемо дану нерівність методом інтервалів. Для цього зведемо її до вигляду $f(x) \leqslant 0$:

$$\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x \leqslant 0.$$

1. ОДЗ: x — будь-яке дійсне число.
2. Як ми знаємо, період функції $\cos x$ дорівнює 2π. Тоді період функції $\cos 2x$ буде $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, період функції $\cos 3x$ — $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ і період функції $\cos 4x$ — $T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

На відрізку довжиною 2π періоди T_1, T_2, T_3 вміщуються ціле число разів. Тоді 2π буде спільним періодом для всіх цих трьох функцій, і тому 2π є періодом функції

$$f(x) = \cos 2x + \cos 4x - \cos 3x.$$

3. Знайдемо нулі цієї функції: $\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x = 0$.
Тоді $2 \cos 3x \cos x - \cos 3x = 0$, $\cos 3x (2 \cos x - 1) = 0$.
Звідси $\cos 3x = 0$ або $2 \cos x - 1 = 0$. Розв'язуючи останні рівняння, одержуємо $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$, або $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.
4. Позначимо всі нулі на періоді довжиною 2π, наприклад, на відрізку від 0 до 2π і одержимо 9 проміжків (рис. 171).

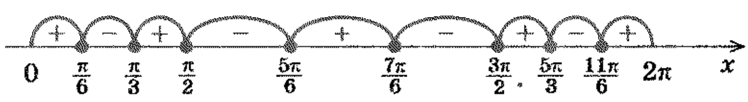


Рис. 171

Знаходимо знаки функції $f(x)$ на кожному з проміжків. Для цього зручно записати функцію $f(x)$ у вигляді добутку: $f(x) = \cos 3x (2 \cos x - 1)$.

Відповідь (записуємо з урахуванням періоду):

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right],$$

$k \in Z$. ◁

Зауваження. При розв'язуванні тригонометричних нерівностей методом інтервалів часто доводиться знаходити знак функції у великій кількості проміжків. Для того щоб зменшити обсяг роботи, можна запропонувати такий спосіб: стежити за тим, через який нуль ми проходимо при переході з одного інтервалу до іншого і чи змінюється знак даної функції в цьому нулі.

У випадку, коли функція $f(x)$, що стоїть у лівій частині нерівності, записана у вигляді добутку $\varphi(x) \cdot g(x)$, необхідно звертати увагу на те, що знак добутку не зміниться, якщо одночасно обидва множники (функції $\varphi(x)$ і $g(x)$) змінюють знаки на протилежні.

Практично для використання цієї властивості у випадку, якщо ліва частина нерівності записана як добуток кількох функцій, нулі кожного множника позначають на проміжку різним кольором (так, як це зроблено на рисунку 174), або, якщо множників лише два, нулі першого множника позначають під віссю, а нулі другого — над віссю.

Якщо у функцій-множників немає однакових нулів, то знак функції $f(x)$ змінюється автоматично при переході через кожний нуль (за умови, що тільки одна з функцій-множників змінює знак при переході через цей нуль). У цьому випадку для знаходження всіх знаків функції $f(x)$ на періоді достатньо знайти її знак лише в одному проміжку, а в інших розставити знаки, чергуючи їх. Якщо ж у функцій-множників є однакові нулі, то при переході через такий нуль знак добутку може не змінюватися, і це враховують, розставляючи знаки.

Запитання для контролю

1. Якими способами можна розв'язувати тригонометричні нерівності, що відрізняються від найпростіших? Наведіть приклади.

Вправи

1. 1) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > \sqrt{3}$; 2) $\sin 4x - \cos 4x \operatorname{ctg} 2x < \sqrt{3}$.
2. 1) $\sin x > \cos^2 x$; 2) $\cos^2 x - \sin^2 x > \sin 2x$.
3. 1) $\cos 2x + 5 \cos x + 3 \geqslant 0$; 2) $\sin x < \cos x$.
4. 1) $\cos 2x + \cos 6x > 1 + \cos 8x$; 2) $\sin x \sin 7x > \sin 3x \sin 5x$.
5. 1) $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$; 2) $\sin x > \sqrt{1 - \sin 2x}$.
6. 1) $\sin 9x - \sin 5x + 2 \sin^2 x < 2 \sin 2x + 1 - \cos 2x$;
   2) $2 \sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.
7. Знайдіть розв'язки нерівності $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, які задовольняють умові $|x| < \pi$.

8. Знайдіть значення x на відрізку $0 \leqslant x \leqslant \pi$, які задовольняють нерівності

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

9. Розв'яжіть нерівність:
1) $\sin 4x > a(\sin 3x - \sin x)$; 2) $a(\cos x - \sin x)^2 + b\cos^2 x \geqslant 0$.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 4

Розв'яжіть рівняння (1–8).

1. 1) $\sin^2 x - 4\sin x = 5$; 2) $\cos^2 x + 5\cos x = 6$;
3) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$; 4) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

2. 1) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 0$; 2) $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$;
3) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$; 4) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

3. 1) $1 + \cos x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$; 2) $1 - \cos x - 2\sin\frac{x}{2} = 0$;
3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$; 4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

4. 1) $\cos^2 x - 3\cos x\sin x + 1 = 0$; 2) $\sin^2 x + 3\cos x\sin x + 1 = 0$;
3) $2 + \cos^2 x = 2\sin x$; 4) $3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$.

5. 1) $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$; 2) $(1 - \cos 4x)\cos 2x = \sin^2 2x$;
3) $5\sin^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4$; 4) $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7$.

6. 1) $1 - \cos x - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} = 0$; 2) $1 + \cos x + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0$;
3) $\cos^2 4x + 3\sin^2 2x - 1 = 0$; 4) $\cos^2 4x + 3\cos^2 2x - 1 = 0$.

7. 1) $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)$; 2) $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
3) $1 - \cos 4x = \sin 2x$; 4) $1 + \cos 4x = \cos 2x$.

8. 1) $1 - \cos(\pi + x) - \sin\frac{3\pi + x}{2} = 0$; 2) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + 5\sin(\pi - x) + 3 = 0$;
3) $2\cos^2(2\pi + x) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2$; 4) $5\sin^2(1{,}5\pi - x) + 2\sin^2(\pi - x) = 2$.

Знайдіть розв'язки рівняння (9–10).

9. 1) $\sin x + \cos x = 1$ на інтервалі $(-2\pi; 0)$;
2) $\sin x - \cos x = 1$ на інтервалі $(0; 2\pi)$;
3) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$ на проміжку $[0; 90°]$;
4) $-\sin^2 x + \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$ на проміжку $[180°; 270°]$.

10. 1) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$ на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}$ на проміжку $[\pi; 2\pi]$;

3) $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$ на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $4 \cos x \cos 2x \sin 3x = \sin 2x$ на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'яжіть рівняння (11–26).

11. 1) $\sin 6x - 2 \sin 2x = 0$; 2) $\cos 6x + 2 \cos 2x = 0$;

3) $\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x=\sin^2\frac{x}{2}-\cos x$; 4) $\sin^2 x + \sin 3x = \cos^2 x + \sin x$.

12. 1) $4 \cos^2 x - \sin 2x = 1$;

2) $3\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=2$;

3) $\sin^2 x + 14 \sin x \cos x = 15 \cos^2 x$;

4) $\cos^2 x - 12 \cos x \sin x = 13 \sin^2 x$.

13. 1) $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin x-\sin 3x}{1-\cos x}=0$;

3) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$; 4) $\frac{3\cos^2 x-4\cos x}{1+\sin x}=0$.

14. 1) $\frac{\cos x+\cos 3x}{1+\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin x-\sin 3x}{1+\cos x}=0$;

3) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$; 4) $\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}=0$.

15. 1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$; 2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$;

3) $\sin^2 x = \sin^2 3x$; 4) $\cos^2 x = \cos^2 3x$.

16. 1) $\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\cos 2x}=\operatorname{tg} 2x$; 2) $\frac{\cos 2x-\sin 4x}{\sin 2x}=\operatorname{ctg} 2x$;

3) $\sqrt{1+\cos x}=\sin x$; 4) $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$.

17. 1) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$; 4) $\cos 5x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-9x\right)-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

18. 1) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

3) $5 \sin 2x - 11 (\sin x + \cos x) + 7 = 0$;

4) $\sin 2z + 5 (\sin z + \cos z) + 1 = 0$.

19. 1) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0$;

2) $\cos^3 z \cos 3z + \sin^3 z \sin 3z = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

3) $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{8}$;

4) $8 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0$.

20. 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$; 2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

3) $\cos 3x = 1 - \sqrt{3} \sin 3x$; 4) $3 \sin x + 5 \cos x = 4$.

21. 1) $\sqrt{1 + 4 \sin x \cos x} = \cos x - \sin x$; 2) $\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 4x} + \frac{5}{2} = 0$; 4) $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 2 = 0$.

22. 1) $\arcsin(x + 2{,}5) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{6}$;

3) $(x^2 - 4) \arcsin x = 0$; 4) $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \arccos x = 0$.

23. 1) $\arccos(\sin x) = \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2}$;

3) $\arcsin(3 - 2x) = -\frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$.

24. 1) $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$; 2) $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi^2}{16}$;

3) $3 \arcsin x - \pi = 0$; 4) $4 \operatorname{arctg} x - 6\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \pi$.

25. 1) $(\arcsin x)^2 - 4 \arcsin x = 0$; 2) $(\arccos x)^2 - 5 \arccos x = 0$;

3) $\operatorname{arctg}(1 + x) + \operatorname{arctg}(1 - x) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin(1 - x) - 2 \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

26. 1) $\sqrt{\operatorname{tg} x} = -2 \sin x$; 2) $\sqrt{-\operatorname{tg} x} = \sqrt{2} \cos x$;

3) $\sqrt{\cos x} = -\sin x$; 4) $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{2} \sin x$.

27. Знайдіть усі значення x та y, що задовольняють рівнянню:

1) $12 \sin x + 5 \cos x = 2y^2 - 8y + 21$; 2) $3 \cos x - 4 \sin x = 2y^2 - 4y + 7$;

3) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$; 4) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2y^2 - 4y + 3$.

Розв'яжіть нерівність (28–36).

28. 1) $\cos^2 x > \frac{1}{4}$; 2) $\sin^2 x < \frac{1}{4}$;

3) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 > 0$; 4) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 \geqslant 0$.

29. 1) $\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{\cos x-1}>0;$ 2) $\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sin x-1}>0;$

3) $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x>\frac{5}{8};$ 4) $\cos^3 x\sin 3x+\cos 3x\sin^3 x<\frac{3}{8}.$

30. 1) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}>\frac{1}{2};$ 2) $\sin^6 x+\cos^6 x>\frac{5}{8};$

3) $\sin x+\sqrt{3}\cos x>1;$ 4) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x>1.$

31. 1) $\operatorname{tg}^2 x+(2-\sqrt{3})\operatorname{tg} x-2\sqrt{3}<0;$ 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+\sqrt{3}>0;$

3) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x\geqslant 0;$ 4) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x\leqslant 0.$

32. 1) $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 3x<-1;$ 2) $\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} 3x>-1;$

3) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x\leqslant 0;$

4) $2\cos^2 x+(2\sqrt{3}-1)\cos x\sin x-\sqrt{3}\sin^2 x\geqslant 0.$

33. 1) $\frac{\sin 3x\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}\leqslant 0;$ 2) $\cos x\cos 2x\cos 3x\leqslant 0;$

3) $(3\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x-2-\sqrt{3})(2\sin 2x-1)\geqslant 0;$

4) $\cos 2x+2\sin 2x\geqslant 2\sqrt{2}\cos x;$

34. 1) $3\sin 2x-1>\sin x+\cos x;$ 2) $\cos 2x\leqslant\sqrt{2}(\cos x-\sin x);$

3) $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}<0;$ 4) $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}\geqslant\frac{1}{\sin 3x}.$

35. 1) $2\arccos x>\arcsin x;$ 2) $2\arcsin x>\arccos x;$

3) $2(\arcsin x)^2-3\arcsin x+1>0;$

4) $(\arccos x)^2-6\arccos x+8<0.$

36. 1) $\sin(2x+10^\circ)+\sin(x+10^\circ)-\sin x<0;$

2) $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0;$

3) $(\operatorname{arctg} x)^3+(\operatorname{arcctg} x)^3>\frac{\pi^3}{32};$

4) $\operatorname{arctg}(3x^2-3x+1)<\operatorname{arcctg}(3x^2-3x+1).$

37. Знайдіть множину значень функції:

1) $y=\frac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0{,}125}(\cos x-\sin x)\right);$

2) $y=\frac{9}{\pi}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right).$

38. Знайдіть множину значень функції $y=\sin 2x$, якщо:

1) $x\in[\operatorname{arctg} 0{,}5;\ \operatorname{arctg} 3];$ 2) $x\in\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3};\ \operatorname{arctg} 2\right];$

3) $x\in\left[\arccos 0{,}8;\ \frac{5\pi}{12}\right];$ 4) $x\in\left[\arccos\frac{5}{13};\ \frac{5\pi}{12}\right].$

39. Розв'яжіть рівняння:
1) $7 \operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 1$; 2) $\sin 2x + 1 = \sin^2 x + 6 \operatorname{ctg} x$.

40. При яких значеннях a вираз $2 + \cos x (5 \cos x + a \sin x)$ дорівнюватиме одиниці хоча б при одному значенні x?

41. При яких значеннях a вираз $3 + \sin x (2 \sin x + a \cos x)$ дорівнюватиме -1 хоча б при одному значенні x?

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Видатні математики з України

У кожному періоді історії математики були свої видатні вчені, які мали різні долі. Одні зажили слави і безсмертя ще за життя, іншим судилося пройти складні шляхи і розділити трагічну долю свого народу. У цьому розділі пропонуються короткі бібліографічні розповіді про математиків з України, які зробили значний внесок у світову та європейську науку.

Михайло Васильович Остроградський

М. В. Остроградський (1801–1862)

Багато теорем і формул Остроградського ввійшли до різних математичних курсів. Добре відомі математикам усього світу метод інтегрування Остроградського, правило Остроградського, формула Остроградського тощо.

Народився М. В. Остроградський у селі Пашенна Кобеляцького повіту Полтавської губернії (тепер це Козельщинський район Полтавської області) в родині дрібного поміщика. З діда-прадіда Остроградські належали до козацької старшини, а сам рід, за легендою, походив від знаменитих волинських державників і просвітителів князів Острозьких; звідси і прізвище — Остроградські. Михайло Остроградський навчався спочатку в Полтавській гімназії, а потім — у щойно відкритому тоді Харківському університеті. Після закінчення університету Остроградський у 1822 р. їде до Парижа, де слухає лекції таких корифеїв математичної науки, як Лаплас, Пуассон, Ампер, Фур'є, Штурм, Коші та ін. У 1826 р. Оґюстен Коші в одній зі своїх праць дуже схвально відгукнувся про успіхи молодого Остроградського, що цінувалося тоді більше за будь-який диплом. Тож коли невдовзі Остроградський переїхав до Петербурга, за ним прибула і слава першого математика Росії.

За свою майже 40-річну наукову діяльність Михайло Васильович написав близько 50 наукових праць, присвячених найрізноманітнішим розділам математики і механіки; був обраний членом-кореспондентом Паризької академії наук, академіком багатьох академій, почесним членом університетів та багато яких наукових товариств. Поховали його в рідному селі. У Полтавському педагогічномуінституті відкрито музей М. В. Остроградського. 200-річчя від дня народження видатного українського математика було внесено до календаря пам'ятних дат ЮНЕСКО.

Георгій Феодосійович Вороний

Г. Ф. Вороний (1868–1908)

Г. Ф. Вороний був визнаний фахівцями як один із найяскравіших талантів у галузі теорії чисел на межі XIX–XX ст., хоча за своє життя встиг надрукувати всього дванадцять статей. Але яких! Вони дали поштовх для розвитку кількох нових напрямків в аналітичній теорії чисел, алгебраїчній теорії чисел, геометрії чисел, які нині активно розвиваються в багатьох країнах.

Народився Г. Вороний у с. Журавка Полтавської губернії (тепер — Варвинського району Чернігівської області). Його дід замолоду чумакував, потім займався селянською справою, батько закінчив Київський університет, а Георгій — Петербурзький. Працював Г. Ф. Вороний професором Варшавського університету, а також Варшавського політехнічного інституту.

Одному зі своїх друзів він говорив: «...Лише моїй дружині відомо, що математика для мене — життя, все».

Михайло Пилипович Кравчук

М. П. Кравчук (1892–1942)

Автор понад 180 робіт, серед яких 10 книг із різних розділів математики. Ці наукові праці увійшли до скарбниці світової науки. На сторінках наукових досліджень використовуються многочлени Кравчука, моменти Кравчука, осцилятори Кравчука.

Михайло Пилипович Кравчук — математик великого масштабу. Його ім'я добре відоме у світовій математичній науці. Світ не знав лише, що він — українець. Довго не знали про цю надзвичайно талановиту людину і його земляки. Адже ім'я М. Кравчука було занесено до списку «ворогів народу», а сам він, повний енергії і творчих задумів, був засланий на Колиму і пішов з життя у неповних п'ятдесят років. Лише 1992 року, після довгих років забуття, наукова громадськість України та світу широко відзначила 100-річчя від дня народження видатного вченого. Його ім'я було занесено по лінії ЮНЕСКО до Міжнародного календаря визначних наукових діячів.

Народився М. П. Кравчук 1892 р. у селі Човниці на Волині в сім'ї інженера-землеміра. Початкову освіту він здобув удома. У 1910 р. Михайло Кравчук закінчив гімназію із золотою медаллю та вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету університету Св. Володимира в Києві, а після його закінчення залишився в ньому працювати.

Михайло Пилипович був людиною неабиякої ерудиції та культури. Академік М. П. Кравчук брав найактивнішу участь у творенні української наукової термінології. Він належав до тих учених, чиї праці відкривають нові шляхи в розвитку науки та передбачають напрямки її розвитку в майбутньому.

«Моя любов — Україна і математика» — ці слова Михайла Пилиповича Кравчука викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника, який установлено у 2003 р. перед корпусом музею Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Мирон Онуфрійович Зарицький


М. О. Зарицький
(1889–1961)

Наукові інтереси М. О. Зарицького охоплюють, головним чином, теорію множин з алгеброю логіки та теорію функцій дійсної змінної.

Народився Мирон Зарицький на Тернопільщині в родині сільського священика. Закінчивши університет, учителював у гімназіях, брав участь у роботі Наукового товариства ім. Т. Шевченка, був обраний його дійсним членом.

Працював також у Львівському університеті, Львівському політехнічному інституті, Ужгородському університеті. Педагог він був неперевершений. Тут варто згадати слова відомого математика С. Банаха, сказані про М. О. Зарицького: «Я не знаю більше нікого, хто б так логічно та лаконічно викладав математичний аналіз». Мирон Онуфрійович був обізнаний з природничими науками, світовою літературою, філософією. На науку дивився передусім як на правду і красу, що підносить людину на вищий щабель її духовного розвитку. Недаремно професора М. О. Зарицького називали «поетом формул».

Володимир Йосипович Левицький

В. Й. Левицький
(1872–1956)

«Основоположник математичної культури нашого народу» — так сказав про Володимира Левицького академік* Михайло Кравчук. І мав на це всі підстави. Саме професор В. Й. Левицький першим написав справжню фахову статтю з математики українською мовою, був незмінним редактором першого українського наукового часопису з природничих наук, першим згуртував навколо себе математиків-українців для наукової роботи. Великою заслугою В. Левицького було те, що він зібрав і впорядкував матеріали з української математичної термінології. Він займався також геометрією, алгеброю, диференціальними рівняннями, теорією аналітичних функцій та історією математики.

Народився Володимир Левицький у Тернополі в старовинній родині священика. Навчався у Львівському університеті, був членом математично-природничо-лікарської секції Наукового товариства ім. Т. Г. Шевченка.

Працював у Львівському університеті, де йому було присвоєно звання професора. Володимир Йосипович Левицький написав близько 100 науково-популярних статей. Майже вся наукова і громадська робота В. Й. Левицького проходила в Науковому товаристві ім. Т. Шевченка.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Таблиця 1

1. Системи рівнянь	
Поняття системи та її розв'язків	Приклади
Якщо ставиться завдання знайти всі спільні розв'язки двох (або більше) рівнянь з однією або кількома змінними, то кажуть, що потрібно розв'язати систему рівнянь. Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою. ***Розв'язком системи*** **називається таке значення змінної або такий впорядкований набір значень змінних (якщо змінних декілька), що задовольняє всім рівнянням системи.** ***Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.*** **Якщо система не має розв'язку, то її називають несумісною.**	$\begin{cases} x-y=4, \\ 2x+y=11 \end{cases}$ **— система двох рівнянь з двома змінними.** **Пара чисел (5; 1), тобто** $\begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ **— розв'язок системи.** $\begin{cases} x^2-y+z=0, \\ xy+xz+yz=19, \\ x+y-z=2 \end{cases}$ **— система трьох рівнянь з трьома змінними.** **Трійка чисел (1; 4; 3), тобто** $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=3 \end{cases}$ **— один з розв'язків системи.**
2. Рівносильність систем рівнянь	
Дві системи рівнянь називаються ***рівносильними на деякій множині,*** **якщо на цій множині вони мають однакові розв'язки (тобто кожний розв'язок першої системи на цій множині є розв'язком другої і, навпаки, кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої).** **Якщо змінити порядок запису рівнянь даної системи, то одержимо систему, рівносильну даній.** **Якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне йому рівняння, то одержимо систему, рівносильну даній.**	***Областю допустимих значень*** **(ОДЗ)** ***системи*** **називається спільна область визначення всіх функцій, що входять до запису цієї системи.** **Усі рівносильні перетворення систем виконуються на ОДЗ початкової системи.**

Продовження табл. 1

3. Основні способи розв'язування систем рівнянь
Спосіб підстановки
Виражаємо з одного рівняння системи одну змінну через іншу (чи через інші) і підставляємо одержаний вираз замість відповідної змінної у всі інші рівняння системи (потім розв'язуємо одержане рівняння чи систему і підставляємо результат у вираз для першої змінної).
Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$ *Розв'язання.* З першого рівняння системи $y = 2x - 3$. Підставляємо в друге рівняння системи і одержуємо $x + 2x - 3 = 3$. Звідси $x = 2$. Тоді $y = 2x - 3 = 1$. *Відповідь:* (2; 1).
Спосіб додавання
Якщо перше рівняння системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і другого рівняння, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а всі інші рівняння залишити без зміни), то одержимо систему, рівносильну даній.
Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 5x - 3y = 9, & \mid \cdot 2 \\ 3x + 2y = 13. & \mid \cdot 3 \end{cases}$ *Розв'язання.* Помножимо обидві частини першого рівняння системи на 2, а другого — на 3 (щоб одержати як коефіцієнти при змінній y протилежні числа) і почленно додамо одержані рівняння. З одержаного рівняння знаходимо значення x, підставляємо результат у будь-яке рівняння системи і знаходимо значення y. $\begin{cases} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{cases} \mid +$ $19x = 57,$ $x = 3.$ Тоді $3 \cdot 3 + 2y = 13$, $2y = 4$, $y = 2$. *Відповідь:* (3; 2).

Продовження табл. 1

4. Графічне розв'язування систем рівнянь з двома змінними

Виконуємо рівносильні перетворення заданої системи так, щоб зручно було будувати графіки всіх рівнянь, що входять до системи. Потім будуємо відповідні графіки і знаходимо координати точок перетину побудованих ліній — ці координати і є розв'язками системи.

Приклади

1. Розв'язати графічно систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна системі $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Графіком кожного з рівнянь системи є пряма.

Для побудови прямої досить побудувати дві її точки.

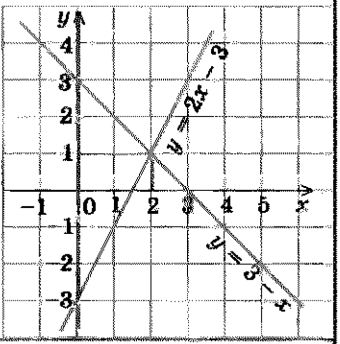
Наприклад, для

$y = 2x - 3$:

x	0	1
y	-3	-1

$y = 3 - x$:

x	0	1
y	3	2

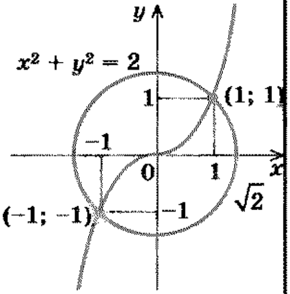


Графіки перетинаються в єдиній точці M (2; 1). Отже, пара чисел (2; 1) — єдиний розв'язок заданої системи.

Відповідь: (2; 1).

2. Розв'язати графічно систему $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна системі $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$



Графік першого рівняння — коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат, а графік другого — кубічна парабола $y = x^3$.

Ці два графіки перетинаються у двох точках з координатами (−1; −1) і (1; 1).

Відповідь: (−1; −1), (1; 1) — розв'язок системи.

Знаходження області визначення функції

Таблиця 2

Вид функції		Обмеження, які враховують при знаходженні області визначення функції	
1	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	*Знаменник дробу не дорівнює нулю*
2	$y=\sqrt[2k]{f(x)}$ $(k\in N)$	$f(x)\geqslant 0$	*Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз*
3	$y=\operatorname{tg}(f(x))$	$f(x)\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$ $(k\in Z)$	*Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює* $\frac{\pi}{2}+\pi k$ (k — *ціле*)
4	$y=\operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x)\neq\pi k,$ $k\in Z$	*Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює* πk (k — *ціле*)
5	$y=\arcsin(f(x))$	$\lvert f(x)\rvert\leqslant 1,$ тобто $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$	*Під знаками арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці*
6	$y=\arccos(f(x))$		
7	$y=x^{\alpha}$		
	а) α — *натуральне*	x — будь-яке число	
	б) α — *ціле від'ємне або нуль*	$x\neq 0$	
	в) α — *додатне не ціле число*	$x\geqslant 0$	
	г) α — *від'ємне неціле число*	$x>0$	

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1. **Пункт 1.1.** **13.** 34. **14.** 80 %. **Пункт 1.2.** **5.** 1) $-1\frac{2}{3}$; 1; 2) -1; 2; 3) 0; ± 2; 4; 4) $-5,5$; $-0,5$; $\pm 2,5$. **6.** 1) $[3; 4]$; 2) $(-\infty;-4)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; 3) $(-\infty; -0,5] \cup [1,5; +\infty)$; 4) $(-5,5; -3,5) \cup (0;2)$. § 2. **Пункт 2.1.** **1.** 1) 2,5; -2; $3\frac{1}{3}$; $a+\frac{1}{a}$; 2) -3; -2; 1; b^2-3; 3) 1; 2; 0; $\sqrt{m+1}$. **2.** 1) R; 2) $[-3; +\infty)$; 3) $x \neq -1$; 4) R; 5) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 6) R; 7) $[1; 5]$; 8) $[-3; 0) \cup (0; +\infty)$; 9) $[-3; 3) \cup (3; +\infty)$; 10) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [1; +\infty)$; 11) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$; 12) R. **3.** 1) $\{5\}$; 2) R; 3) $[0; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$; 5) R; 6) $[-5; +\infty)$; 7) $[3; +\infty)$. **4.** а) $D(f) = [-3; 5]$; $E(f) = [-3; 2]$; зростає: $[-2; 3]$; спадає: $[-3; -2]$ і $[3; 5]$; $f(1) = 0$; б) $D(f) = [0; 6]$; $E(f) = [0; 4]$; зростає: $[0; 2]$ і $[5; 6]$; спадає: $[2; 5]$; $f(1) = 2$. **10.** 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) зростаюча; 4) спадна. **11.** 2) 4. **Пункт 2.2.** **1.** 3) парна; 4) непарна; 5) парна і непарна; 6) непарна. **2.** 1) $k > 0$, $b > 0$; 2) $k < 0$, $b < 0$; 3) $k > 0$, $b < 0$. **6.** 1) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$; 2) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; 3) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$; 4) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$. **Пункт 2.4.** 1) $y=\frac{1}{3}x+2$, $D = R$, $E = R$; 2) $y=-\frac{1}{3}x-2$, $D = R$, $E = R$; 3) $y=\frac{2}{x}$, D: $x \neq 0$, E: $y \neq 0$; 4) $y=-\frac{1}{x}$, D: $x \neq 0$, E: $y \neq 0$; 5) $y = x^2$, $D = [0; +\infty)$, $E = [0; +\infty)$. **3.** 1) $y=2\sqrt{x}$, 2) $y=-2\sqrt{x}$, 3) $y=\sqrt{x}+2$, 4) $y=-\sqrt{x+2}$. § 3. **Пункт 3.1.** **2.** 1) а) Так; б) так; 2) а) так; б) ні. **6.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні. **7.** 1) $3\frac{2}{3}$; 2) -4; 3) -4; 4) -3; $\frac{2}{3}$. **8.** 1) Коренів немає; 2) 2; 3) $-\sqrt{2}$; 4) коренів немає. **9.** 1) $x \neq 1,5$ (умова для коренів); 2) $x \geqslant 0$. **11.** 1) 7; 2) 0; 4,5; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **Пункт 3.2.** **1.** 1) 2; 2) 3; 3) (1; 0). **2.** 1) 0; 2) 0; 3) -1; 4) 0,5. **3.** 1) 3; 2) $(-2; 5)$; 3) $(3; 1)$; 4) коренів немає; 5) $(2; 1)$; 6) $(-1; 2; -3)$. **4.** 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) 6; 5) 2; 6) 1. **5.** 1) $(-5; -5)$; $(2; 2)$; 2) $(-2; -2)$; 3) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $(-2; -2)$. § 4. **1.** 1) $(-\infty; -2] \cup (1; 2] \cup (4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2) \cup (3; 8)$; 3) $(4; 5]$; 4) $[-10; -2) \cup (4; +\infty)$. **2.** 1) $[-2; -1] \cup [1; 2]$; 2) $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup (0; 3]$; 4) $(-6; 2)$. **3.** 1) $(-2; 2) \cup [4; +\infty)$; 2) $(-2; -1)$ або 1; 3) $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$; 4) $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$. § 7. **Пункт 7.1.** **1.** 1) $a = 4$, $b = 5$, $c = 0$, $d = 1$; 2) $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 2$.

2. $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. **5.** $a = 1$, $b = 2$. **6.** $a = \frac{6}{11}$, $b = -\frac{10}{11}$. **<u>Пункт 7.2.</u>** **1.** 1) $3x^2 + x + 4$; 2) $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$; 3) $x^3 - 2x^2 + 4x - 2$. **2.** 1) $Q(x) = 4x^2 - 6x - 1$, $R(x) = 12x + 3$; 2) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$, $R(x) = 20x + 21$. **3.** 1) $a = -18$, $b = -35$; 2) $a = -8$, $b = 20$; 3) $a = -1$, $b = -2$. **4.** 1) $Q(x) = x + 6$, $R(x) = 12x + 12$; 2) $Q(x) = x$, $R(x) = -20x - 30$. **<u>Пункт 7.3.</u>** **1.** 1) -101. **2.** $a = -3$. **3.** $x + 3$. **4.** $a = -1$, $b = 1$. **5.** 8; $5\frac{2}{3}$. **7.** $-2x^3 + 8x^2 + 14x - 20$. **8.** $a = -2$. **9.** 3. **10.** $2x^3 - 10x^2 + 6x + 18$. **11.** $a = 3$, $b = 9$. **12.** $x^2 + 5x + 1 = 0$. **13.** $x^2 - 5x + 2 = 0$. **14.** $x^2 - 30x + 9 = 0$. **<u>Пункт 7.4.</u>** **1.** 1) $Q(x) = x^2 + 2x + 1$, $R(x) = 0$; 2) $Q(x) = 5x^2 - x + 20$, $R(x) = 96$; 3) $Q(x) = x^2 - 18x + 64$, $R(x) = -168$. **2.** 1) Так; 2) так. **3.** 1) $2x^2 - 5x - 3$; 2) $2x^2 - 11x + 5$. **<u>Пункт 7.5.</u>** **1.** 1) 1; 2) -3; 2; 3) -4; 4) -2; 1. **2.** 1) 1; 2) $-0,5$; 3) ± 1; $-\frac{2}{3}$; 4) -1; $\frac{2}{3}$. **3.** 1) $(2x + 1)(x + 1)(x - 2)$; 2) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)$; 3) $(x - 1)^3 \times (x + 1)$; 4) $(x - 1)^2 (x + 5)(x - 5)$. **4.** 1) 1; $-1 \pm \sqrt{3}$; 2) -2; -1; 3; 3) $-0,5$; 1; 4) 0,5; $1 \pm \sqrt{2}$. *Вказівка.* Спочатку знайти раціональний корінь ($x = \alpha$) многочлена і розділити многочлен на $x - \alpha$. **5.** 1) $(x^2 + 3x - 2)(x^2 - 2x + 3)$; 2) $(x^2 + 3x - 1)(x^2 - 7x + 2)$. **6.** 1) $\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}\right)$; 2) $\left((1 + \sqrt{2})x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left((\sqrt{2} - 1)x^2 - \sqrt{2} - 1\right)$; 3) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2})$. **§ 8.** **1.** 1) $-\frac{2}{3}$; 4; 2) 0,5; 3,5; 3) -1; 2; 3; 6. **2.** 1) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-0,8; 2)$; 3) $(-3; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(-2; 2\frac{2}{3}\right)$. **3.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) -1; -3. **4.** 1) $[1; 3]$; 2) -8; 12; 3) $[-5; 8]$. **5.** 1) Розв'язків немає; 2) $[2; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (8; +\infty)$. **6.** 1) $[1; 2]$; 2) $-2\frac{1}{3}$; 3. **7.** 1) -3; 5; 2) $[-1; 4]$. **8.** 1) $-\frac{2}{3}$; 0,5; 2; 2) $-2 - \sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **9.** 1) 0; ± 2; 4; 2) -2; 1; 3; 6. **10.** 1) $(-1; 5)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{41}}{2}\right) \cup (-1; 2) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$. **11.** 1) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 2) $[1; 3]$. **12.** 1) $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5) \cup (-3; 3) \cup (5; +\infty)$. **13.** 1) $[-6; -2] \cup [4; 8]$; 2) $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$. **14.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$. **15.** 1) $\left[-3 - \sqrt{5}; -4\right) \cup (-2; 0]$; 2) $\left[-1 - 2\sqrt{2}; -3\right) \cup (1; 3]$.

Додаткові вправи до розділу 1. **2.** 1) 8; 2) 6. **3.** 1) 8. **9.** 1) 0,25.

Розділ 2

§ 10. **2.** 1) -2; 2) 0,5; 3) -1; 4) 2; 5) 5; 6) 3. **3.** 1) 20; 2) 10; 3) 6; 4) $3\sqrt[5]{16}$. **4.** 1) 3; 2) 10; 3) -2; 4) 5. **5.** 1) -2; 2) 3; 3) -5; 4) 2. **6.** 1) 77; 2) 6; 3) 15; 4) 5. **7.** 1) 108; 2) 200; 3) 0,9; 4) $1\frac{1}{3}$. **9.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[3; +\infty)$; 3) $[-2; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$.

10. 1) $\frac{3\sqrt[7]{64}}{2}$; 2) $\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$ при $a = 9$; $\frac{\sqrt{a}-3}{a-9}$ при $0 \leqslant a < 9$ або $a > 9$; вираз невизначений при $a < 0$; 4) $\frac{1}{3}$ при $x = 1$; $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ при $x \neq 1$. **11.** 1) $a^2b\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $ab^3\sqrt[4]{a^3b}$; 3) $-3ab^4\sqrt[3]{a^2b^2}$; 4) $2ab^2\sqrt[6]{2a^3b^5}$. **12.** 1) $|ab^3|\sqrt{|b|}$; 2) $ab\sqrt[7]{a^2b}$; 3) $2a^2b\sqrt[6]{b}$; 4) $a^2|b|\sqrt[3]{ab}$. **13.** 1) $\sqrt[3]{7a^3}$; 2) $-\sqrt[4]{ab^5}$; 3) $\sqrt[7]{5a^7b^7}$; 4) $\sqrt[6]{a^7b}$. **14.** 1) $\sqrt[4]{7a^4}$ при $a \geqslant 0$; $-\sqrt[4]{7a^4}$ при $a < 0$; 2) $\sqrt[7]{a^{22}b}$; 3) $\sqrt[6]{2ab^7}$; 4) $\sqrt[8]{-3b^{11}}$. **15.** 1) $-a$; 2) a; 3) 0; 4) 0. **16.** 1) $2|a|b^2\sqrt[4]{2}$; 2) ab^2c; 3) $\sqrt[20]{|a|^{17}}$; 4) $\sqrt[60]{2}\cdot\sqrt[12]{3}\cdot\sqrt[30]{|a|^{11}}$. **17.** 1) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$; 2) $\sqrt[4]{y}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt{a}}$; 4) $-\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$ при $x \geqslant 0, y > 0$; $\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$ при $x \leqslant 0$, $y < 0$. **18.** 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\pm\sqrt[6]{3}$; 3) $-\sqrt[5]{5}$; 4) коренів немає; 5) ± 2; 6) -4. **§ 11.** **1.** 1) 3; 2) коренів немає; 3) -26; 4) 0; 5) 45. **2.** 1) 8; 2) 2. **3.** 1) 2; 2) 10; 3) 4; 4) 7. **4.** 1) 3; 2) -5; 3) -11; 4) -8; 5. **5.** 1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) $\pm\sqrt{2}$. **6.** 1) 1; 2; 10; 2) -1. **7.** 1) (8; 0); 2) (4; 1); 3) (4; 1); 4) (16; 1). **8.** 1) (27; 1), (1; 27); 2) розв'язків немає; 3) $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right)$; 4) (0,5; 1,5). **§ 12.** **<u>Пункт 12.1.</u>** **1.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{1}{64}}$; 5) $\sqrt{8}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$. **2.** 1) $3^{\frac{5}{6}}$; 2) $4^{\frac{1}{5}}$; 3) $7^{-\frac{9}{2}}$; 4) $a^{-\frac{2}{9}}$; 5) $(2b)^{\frac{1}{4}}$; 6) $|c|^{\frac{4}{11}}$. **3.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **4.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 6) R. **5.** 1) 9; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 32; 4) $\frac{9}{625}$; 5) 8,2; 6) 6,75; 7) 3,25. **7.** 1) $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}+5}$; 3) $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}}$; 4) $m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}$. **8.** 1) $1 + c$; 2) $x + y$; 3) $x - 1$; 4) $k^{\frac{1}{2}}-l^{\frac{1}{2}}$. **9.** 1) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+4}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 3) $z^{\frac{1}{3}}-2$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. **10.** 1) 1; 2) 128; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $\pm 4\sqrt{2}$. **<u>Пункт 12.2.</u>** **1.** 1) R; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 6) R. **§ 13.** **<u>Пункт 13.1.</u>** **1.** 1) -1; 2) 3. **2.** 1) 0; 2) 0; 3) коренів немає; 4) 3. **3.** 1) 1; 2) (4; 25). **4.** 1) 8; 2) 4; 3) 2; 4) 1, -1. **5.** 1) (16; 16); 2) (4; 4). **<u>Пункт 13.2.</u>** **1.** 1) $\frac{13-\sqrt{61}}{2}$; 2) -3; 1; 3) 4; 4) 4. **2.** 1) 1; 2) [5; 8]. **3.** 1) $1\frac{2}{7}$; 2) $2-2\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **4.** 1) $\frac{15+3\sqrt{5}}{10}$; 2) -1. **5.** 1) 32; 2) 64. **§ 14.** **1.** 1) $(-\infty; -3]$; 2) $(-\infty; 0] \cup \left[3; 3\frac{4}{7}\right)$. **2.** 1) $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$. 2) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. **3.** 1) -2; $[-1; 3]$; 2) -3; $(-0,5; 1]$. **4.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[10; +\infty)$.

5. 1) $[3-2\sqrt{2};9)$; 2) [0; 4) ∪ (9; +∞). **6.** 1) (−∞; −3] ∪ (0; +∞); 2) (−∞; −2) ∪ (0; 1) ∪ ∪ (1; +∞). **7.** 1) [2; 5,2]; 2) [1; 5) ∪ (10; +∞). **8.** 1) Розв'язків немає; 2) 2; 3. *Вказівка.* Знайти ОДЗ нерівності і врахувати, що вона містить тільки два числа. § 15. **1.** 1) При $a \in R$ $x = a + 4$; 2) при $a \geqslant 0$ $x = a^2 - 2a$; при $a < 0$ коренів немає; 3) при $m \leqslant 0$ або $m > 3$ коренів немає; при $0 < m \leqslant 3$ $x=\frac{m^4-6m^2+81}{4m^2}$; 4) при $a = 0$ $x = 0$; при $a \geqslant 1$ $x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$; при $a < 0$ або $0 < a < 1$ коренів немає. **2.** 1) При $a \leqslant 1$ $x = a$; при $1 < a < 2$ $x \in [1; a]$; при $a = 2$ $x \in [1; 2)$; при $a > 2$ $x = a$ або $x \in [1; 2)$; 2) при $a < 0$ розв'язків немає; при $a = 0$ $x \in (0; +\infty)$; при $a > 0$ $x\in\left[-\frac{4}{3}a;-a\right)\cup(0;+\infty)$; 3) при $a \leqslant -4$ розв'язків немає; при $-4 < a \leqslant 0$ $x\in\left(2-\sqrt{4+a};2+\sqrt{4+a}\right)$; при $a > 2$ $x\in\left[-\frac{a}{4};2+\sqrt{4+a}\right)$; при $a\leqslant-\frac{1}{2}$ $x\in\left[a;\frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; при $-\frac{1}{2}<a<-\frac{7}{16}$ $x\in\left[\frac{-3-\sqrt{-7-16a}}{8};\frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; при $a=-\frac{7}{16}$ $x=-\frac{3}{8}$; при $a>-\frac{7}{16}$ розв'язків немає; 5) при $a < -2$ або $a > 2$ $x\in\left(\frac{2-\sqrt{2a^2-4}}{2};|a|\right)$; при $-2\leqslant a<-\sqrt{2}$ або $\sqrt{2}<a\leqslant2$ $x\in\left(\frac{2-\sqrt{2a^2-4}}{2};\frac{2+\sqrt{2a^2-4}}{2}\right)$; при $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ розв'язків немає. **3.** $a \leqslant 5{,}125$. **4.** $a < 0$, $a=\sqrt{2}$. **5.** $a \leqslant 1$. **6.** При $a \leqslant 1$ один розв'язок; при $a > 1$ розв'язків немає.

Додаткові вправи до розділу 2. **1.** 1) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$; 3) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$; 4) $\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}$. **2.** 1) 0; 2) 1; 3) $\sqrt{2}-0{,}75$; 4) 1. **3.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$; 2) 1; 3) $x - 1$; 4) $\frac{1-c}{\sqrt{c}}$. **4.** 2) $\frac{1}{8b}$; 3) $-2\sqrt[4]{x}$. **5.** 1) $x + 1$; 2) $ab^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$; 3) $3y^{\frac{1}{2}}$. **6.** 1) коренів немає; 3) −2; 3; 4) 3. **7.** 1) 2; 3) 2; 4) 7. **8.** 1) $-\frac{1}{11}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) [5; 10]; 4) [7; 14]. **9.** 1) 8; 2) 0,5; 3) −3; 6; 13; 4) 1; 2; 10. **10.** 1) 8; $\frac{56\pm12\sqrt{21}}{7}$; 2) 1; 1,5; 4) коренів немає. **11.** 1) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4};\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$; 2) (0; 1); 3) розв'язків немає; 4) розв'язків немає. **12.** 1) $(t + 1; t)$, $t \in Z$; 2) (5; 4); (−0,5; −0,4); 3) $\left(1+\sqrt{5};\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$; 4) (2; 3); $\left(4\frac{1}{3};-1\frac{2}{3}\right)$. **13.** 1) [−2; +∞); 2) [0; +∞); 3) [0; 3]; 4) (−2; −1].

14. 1) $(-\infty;-2]\cup\left[-1;\frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$; 2) $(-2;-1]\cup\left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$; 3) $(-\infty;\ 0{,}75]\cup\cup\ (4;\ 7)$; 4) $[-3;\ 1)$. **15.** 1) $[1;\ 2]$; 2) $[4;\ 20]$; 3) $\left[2;2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$; 4) $\left[2;\frac{\sqrt{146}-7}{2}\right)$. **16.** 1) $[-2;\ 0)\cup$ $\cup\ (0;\ 1{,}6)$; 2) $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)\cup\left(0;\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$; 3) -1; $[2;\ +\infty)$; 4) -2; 1; $[3;\ +\infty)$. **17.** 1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $\left(-\infty;-1\frac{1}{3}\right]\cup[3;+\infty)$; 3) $[-1;\ 3]$; 2; 4) -3; $[-2;\ 4]$. **18.** 1) $\left[-1-2\sqrt{13};-5\right)\cup\left(1;-1+2\sqrt{13}\right]$; 2) $(-\infty;0)\cup[1;2]$; 3) $\left[-5;-4+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$; 4) $\left(6-2\sqrt{\sqrt{5}-2};7\right]$. **19.** 1) $[2{,}5;\ 3]$; 2) $[1;\ 1{,}5]$; 3) $\left(5\frac{2}{3};+\infty\right)$. **20.** 1) $\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{5}};1\right)$; 2) $(0;\ 0{,}5)$; 3) $(-0{,}75;\ 1)$; 4) $[-1;\ 0)$. **21.** 1) $(0;4)\cup\left[\frac{8+4a^2+8\sqrt{a^2+1}}{a^2};+\infty\right)$; 2) при $a<2$ $x\in\left(0;\frac{a}{a-2}\right]\cup(1;+\infty)$; при $a=2$ $x\in(1;\ +\infty)$; при $a>2$ $x\in\left(1;\frac{a}{a-2}\right]$. **22.** $-1{,}25<a\leqslant 1$ або $a\geqslant 1{,}25$. **23.** $a<-3$ або $a>1$. **24.** $a<-1$.

Розділ 3

§ 16. **3.** 1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) $\frac{5\pi}{9}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{8}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$. **4.** 1) 540°; 2) 135°; 3) -72°; 4) 210°; 5) -10°; 6) 330°; 7) $-22{,}5^\circ$; 8) $\frac{540^\circ}{\pi}$. § 17. **1.** 3) III; 4) III; 5) III; 6) IV. § 18. **1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) -1; 8) $\sqrt{3}$. **2.** 2) $T=\pi$; 4) $T=\frac{\pi}{3}$; 5) T — будь-яке дійсне число, крім 0. Найменшого додатного числа не існує. **3.** 1) π (πk, $k\neq 0$, $k\in Z$); 2) $\frac{\pi}{5}\left(\frac{\pi k}{5},k\neq 0,k\in Z\right)$; 3) 6π ($6\pi k$, $k\neq 0$, $k\in Z$); 4) $\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi k}{3},k\neq 0,k\in Z\right)$; 5) 5π ($5\pi k$, $k\neq 0$, $k\in Z$). § 19. **5.** 1) sin 3,9, sin 3,3, sin 1,2; 2) cos 1,9, cos 1,2, cos 0,3; 3) tg (−1,3), tg 0,7, tg 1,5; 4) ctg 2,9, ctg 1,1, ctg 0,5. § 20. **1.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) так. **2.** 1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$; 2) $\sin\alpha=0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha=-1\frac{1}{3}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$; 4) $\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-5$. **3.** 1) 0; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 1; 4) $-\cos^2\alpha$;

5) 1; 6) 0; 7) $\sin\alpha$; 8) 1; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $-2\ \mathrm{tg}\ \alpha$. **5.** 1) $-\frac{3}{8}$. 2) а) 2; б) 2.

§ 21. <u>**Пункт 21.1.**</u> **1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) 1; 10) $\sqrt{3}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\sin\alpha$; 4) $\cos\beta$; 5) $\mathrm{ctg}\ 3\alpha$; 6) $\mathrm{tg}\ 6\alpha$; 7) $\mathrm{tg}\ 7\alpha$; 8) $\mathrm{tg}\ 5\alpha$; 9) $\mathrm{tg}\ \alpha\ \mathrm{ctg}\ \beta$; 10) $\mathrm{tg}\ (\alpha-\beta)$. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 6) $-2-\sqrt{3}$. <u>**Пункт 21.2.**</u> **1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{1}{2}$. **4.** 1) $\sin\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$; 4) $\frac{1}{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$. **5.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **6.** 1) $\frac{120}{169}$; 2) $-\frac{119}{169}$; 3) $-1\frac{1}{119}$; 4) $-\frac{119}{120}$. **7.** 1) $\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **8.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $-3\frac{3}{7}$; 4) $-\frac{7}{24}$. **9.** $-0{,}8$. **10.** $-1{,}125$; 0. <u>**Пункт 21.3.**</u> **1.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) 1. **2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\alpha$; 5) 1. <u>**Пункт 21.4.**</u> **1.** 1) 0; 2) $-\sin 18^\circ$; 3) $\sqrt{2}\sin 25^\circ$; 4) $\mathrm{tg}\ 20^\circ\ \mathrm{ctg}\ 5^\circ$; 5) $\sin(\alpha-\beta)\times$ $\times\sin(\alpha+\beta)$; 6) $4\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; 7) $4\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}\left(\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{3\pi}{10}\right)$. **4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. § 22. <u>**Пункт 22.1.**</u> **1.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; 3) $\sqrt{2}-1$. **2.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{2}{3}$. **3.** $3+2\sqrt{2}$. **4.** $-\frac{2}{\sqrt{13}}$. **5.** 0,6. **6.** $-\frac{1}{3}$. **7.** 2. **8.** $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. *Вказівка.* Якщо $\alpha=18^\circ$, то $36^\circ=2\alpha$ і $54^\circ=3\alpha$ (де $\sin\alpha>0$).

Додаткові вправи 3. **1.** 1) 0; 2) $|\sin\beta+\cos\beta|$; 3) 13; 4) $\sin\beta$. **2.** 1) $2\ \mathrm{tg}\ \alpha$; 2) -1; 3) 1; 4) 1. **7.** 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{1}{(m+1)^2}$; 3) $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. *Вказівка.* З умови випливає, що $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}$, де $|\cos\alpha|\leqslant 1$; 4) $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos 2\alpha=-\frac{7}{9}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розділ 4

§ 23. 1. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$. 2. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. 3. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) π; 6) $\frac{3\pi}{4}$. 4. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. 5. 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{4}$. 6. 1) 7; 2) 3; 3) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 7. 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. 8. 1) $\sqrt{7}$; 2) 1,5; 3) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; 4) $\frac{3}{5}$. 9. 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $7-2\pi$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $8-2\pi$; 5) $\frac{\pi}{5}$; 6) $4-\pi$; 7) $\frac{\pi}{9}$; 8) $10-3\pi$. § 24. 1. 1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z$; 2) коренів немає; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z$. 2. 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$; 4) коренів немає. 3. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$. 4. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$; 3) $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$; 4) $\frac{5\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$. 5. 1) $(-1)^{n+1} \times \arcsin 0{,}6 + \pi n,\ n \in Z$; 2) $\pm\arccos 0{,}3 + 2\pi n,\ n \in Z$; 3) $-\mathrm{arctg}\ 3{,}5 + \pi n,\ n \in Z$; 4) $\mathrm{arcctg}\ 2{,}5 + \pi n,\ n \in Z$. 6. 1) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n \in Z$; 4) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,3+\frac{\pi n}{4},\ n \in Z$. 7. 1) $(-1)^n\ \pi + 4\pi n,\ n \in Z$; 2) $\pm\frac{15}{4}+10\pi n,\ n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n \in Z$; 4) $\frac{7\pi}{4}+7\pi n,\ n \in Z$. 8. 1) $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; 2) $\pm 2\pi + 6\pi n,\ n \in Z$; 3) $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n \in Z$. 9. 1) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{3}+3\pi n,\ n \in Z$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$. 10. 1) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $4\pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n \in Z$; 3) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$; 4) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n \in Z$. 11. 1) $-\frac{5\pi}{12}-\pi n,\ n \in Z$; 2) $\pi - 2\pi n,\ n \in Z$; 3) $-8\pi n$; $-\frac{4\pi}{3}-8\pi n,\ n \in Z$; 4) $-\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$. 12. 1) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; 2) $\pm\frac{\pi}{18}$; $\pm\frac{11\pi}{18}$; $\pm\frac{13\pi}{18}$; 3) $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{7\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{16}$; $\frac{15\pi}{16}$. 13. 1) $-\frac{17\pi}{18}$; $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{5\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{19\pi}{18}$; 2) 0; $\pm 2\pi$; 4π; 3) 0; 2π; 4π; 4) $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{4}$.

§ 25. 1. 1) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$;

3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\pi+4\pi n,\ (-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **2.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$; 3) $\pi+2\pi n,\ n\in Z$; 4) $\pm\pi+6\pi n$, $n\in Z$. **3.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$. **4.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}5+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; 3) $-\operatorname{arctg}2+\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7}+2\pi n,\ n\in Z$. **5.** 1) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi n$, $n\in Z$. **6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}2+\pi n\ n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$. **7.** 1) $\pi+2\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ (-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **8.** 1) $2\pi n$; $\pi+4\pi n,\ n\in Z$; 2) $4\pi n$; $\pi+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **9.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n, \operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n, \operatorname{arctg}3++\pi n, n\in Z$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **10.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. **11.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **12.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $2\pi n,\ n\in Z$; 3) πn; $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **13.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\operatorname{arctg}2++\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$. **14.** 1) $\frac{\pi n}{8}$, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; 3) $\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$. **15.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **16.** 1) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; 2) $2\pi n,\ n\in Z$. **17.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **18.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$;

$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 4+\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2 \operatorname{arctg} 2 + + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\pi n$, $n \in Z$; 3) πn; $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n \in Z$. **20.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; 2) $(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; 3) $\pi + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. **§ 26. 1.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $n \in Z$. **2.** 1) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; -\pi n\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n \in Z$. **3.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k, n \in Z$; 2) $\left(\pi+2\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi k\right)$, $k, n \in Z$. **4.** 1) $\left((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k, n \in Z$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi n\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n; \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi n\right)$, $n \in Z$. **5.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n); \frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n); -\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k); \frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi(n+k); -\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $k, n \in Z$. **6.** 1) $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(k+n); \frac{\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(k+n); \frac{5\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(n+k); -\frac{\pi}{12}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(n+k); -\frac{5\pi}{12}+\pi(n-k)\right)$, $k, n \in Z$. **7.** 1) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k, n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k, n \in Z$. **8.** 1) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k, n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k, n \in Z$.

§ 27. 1. 1) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in Z$; 3) розв'язків немає; 4) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in Z$. **2.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in Z$; 3) R; 4) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n \in Z$. **3.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$; 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in Z$. **4.** 1) $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in Z$; 3) $\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in Z$. **5.** 1) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)$,

$n \in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}+6\pi n; \frac{11\pi}{2}+6\pi n\right]$, $n \in Z$; 3) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n \in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{5}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in Z$. 6. 1) $\left[\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n \in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$; 3) $\left[-\frac{9\pi}{2}+6\pi n; 6\pi n\right]$, $n \in Z$; 4) $\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$. 7. 1) $\left(-\frac{2\pi}{9}-\frac{2\pi n}{3}; -\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in Z$; 2) $\left[-\frac{7\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}\right]$, $n \in Z$; 3) $\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n\right)$, $n \in Z$. 8. 1) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

§ 28. 1. 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$. 2. 1) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) коренів немає; 3) $3 + 4n$, $n \in Z$; 4) 1; 5) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$. 3. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{11}+\pi n$, k, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, k, $n \in Z$. 4. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $(0,5; \pi + 4\pi n)$; $(-0,5; \pi - 4\pi n)$ $n \in Z$. 5. 1) 1; 2) $-0,25$; 3) 1; 4) 1; 5) 0,125; 6) 0; ±1. 6. 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(2k-n); \frac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(2k+n); -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, k, $n \in Z$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(4k+n); \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, k, $n \in Z$. 3) $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$; $\left((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, k, $n \in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, k, $n \in Z$; 5) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k, n \in Z$; 6) $(\pi n; \pi k)$; $(-0,5 \arccos(-0,75) + \pi n; -0,5 \arccos(-0,75) + \pi k)$, $(0,5 \arccos(-0,75) + \pi n; 0,5 \arccos(-0,75) + \pi k)$, $(-0,5 \arccos 0,25 + \pi n; -0,5 \arccos 0,25 + \pi k)$, $(0,5 \arccos 0,25 + \pi n; 0,5 \arccos 0,25 + \pi k)$, k, $n \in Z$.

Вказівка. Подати систему у вигляді $\begin{cases} 4\sin(3x+2y) = -\sin x, \\ \sin y = -4\sin(2x+3y) \end{cases}$ і перемножити відповідно праві і ліві частини одержаних рівнянь. Врахувати, що при таких перетвореннях можлива поява сторонніх розв'язків системи. Розв'язуючи проміжне рівняння $4 \sin 5x + \sin x = 0$, зручно скористатися тим, що $\sin 5x = \sin(x + 4x)$. § 29. 1. 1) При $-1 < a < 1$ коренів немає; при $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 1$ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{a}+\pi n$, $n \in Z$; 2) при $-0,5 \leqslant a \leqslant 0,5$ $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$; при $a < -0,5$ або $a > 0,5$ $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2a}+\pi n$, $n \in Z$; 3) при $a = 0$ або $a < -1$, або $a > 1$ $x = \pi n$, $n \in Z$; при $-1 \leqslant a < 0$ або $0 < a \leqslant 1$ $x = \pi n$, $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) при $-1 < a < 1$ $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$; при $a \leqslant -1$

або $a \geqslant 1$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{a}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) При $a < -0{,}5$ або $a > 4$ коренів немає; при $a = -0{,}5$ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-0{,}5 < a \leqslant 0$ $x=(-1)^n \arcsin\frac{1\pm\sqrt{2a+1}}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $0 < a \leqslant 4$ $x=(-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{2a+1}}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) при $a < -1{,}25$ або $a > 5$ $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a = -1{,}25$ $x = \pm\arccos 0{,}25 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-1{,}25 < a < 1$ $x = \pi n$; $x=\pm\arccos\frac{1\pm\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $1 \leqslant a < 5$ $x = \pi n$, $x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $b = 0$ рівняння не визначене; при $b \neq 0$ і $a = 0$ $x \neq \frac{\pi k}{b}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; при $b \neq 0$ і $a \neq 0$ $x=\frac{\pi n}{a}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq \frac{ak}{b}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) при $a = -1$ або $2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$ $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a < -1$ або $-1<a\leqslant 2-2\sqrt{2}$, або $a \geqslant 2+2\sqrt{2}$ $x = 2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2+a}{a\sqrt{2}}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $-2\sqrt{5} \leqslant a \leqslant 2\sqrt{5}$; 2) $-5 \leqslant b \leqslant 5$; 3) $a \in \boldsymbol{R}$; 4) $a \in \boldsymbol{R}$; 5) $\frac{4-\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{4+\pi}{2}$. **4.** $3-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<3+\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.** (0; 1); (1; 1). **7.** 1) При $a < -2$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $-2 \leqslant a < -2$ $x\in\left(\arcsin\frac{a}{2}+2\pi n; \pi-\arcsin\frac{a}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \geqslant 2$ коренів немає; 2) при $a \leqslant \frac{1}{3}$ $x\in\left(-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n; \arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $\frac{1}{3}<a<3$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $a \geqslant 3$ $x\in\left(\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $a < -1$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $a = -1$ $x \in (-\pi + 2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-1 < a < 0$ або $0 < a < 3$ $x\in\left(-\arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n; \arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a = 0$ $x\in\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \geqslant 3$ $x\in\left(-\arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n; -\arccos\frac{1+\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right) \cup \left(\arccos\frac{1+\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n; \arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $-0{,}5 \leqslant a \leqslant 0{,}5$; 2) $-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$. **9.** 1) $a < -2$, $a = 1$, $a > 2$; 2) $a < 0$, $a = 1$, $a > 4$; 3) $a = 2$. **10.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi(k+n); \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi(k+n); \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 4) при $a<-2$ $x \in \left[\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n;\right.$

$2\pi-\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n\Big]\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; при $-2\leqslant a\leqslant 2$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, при $a>2$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n,-\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. § 30. **1.** 1) $\left(\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$; **2.** 1) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{8}+\pi n;\frac{\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **3.** 1) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **4.** 1) $\left(\pi n;\frac{\pi}{8}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{3\pi}{8}+\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{8}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **5.** 1) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **6.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{2\pi}{7}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{2\pi}{7}+2\pi n;2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{4\pi}{7}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{4\pi}{7}+2\pi n;\right.$ $\left.\frac{6\pi}{7}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{6\pi}{7}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **7.** $\left(-\frac{7\pi}{12};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{12}\right)$. **8.** $\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$.

9. 1) При $a\leqslant -2$ $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; при $-2<a<-\sqrt{2}$ $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\pi+2\pi n;2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; при $a=-\sqrt{2}$ $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; при $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\arccos\frac{a}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; при $a=\sqrt{2}$ $x\in\left(2\pi n;\right.$ $\left.\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; при $\sqrt{2}<a<2$ $x\in\left(2\pi n;\right.$ $\left.\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;2\pi-\arccos\frac{a}{2}+\right.$ $\left.+2\pi n\right)$, $n\in Z$; при $a\geqslant 2$ $x\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+\right.$

$+2\pi n; 2\pi+2\pi n\Big)$, $n \in Z$. Додаткові вправи до розділу 4. **1.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) $2\pi n$, $n \in Z$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. **2.** 1) πn, $n \in Z$; 2) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) πn, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. **3.** 1) $\pi + 2\pi n$, $4\pi n$, $n \in Z$; 2) $2\pi n$, $\pi + 4\pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\mathrm{arctg}\,2 + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $-\mathrm{arcctg}\,2 + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; 4) $2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. **5.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; 3) $2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)+2\pi n$, $n \in Z$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in Z$. **6.** 1) $2\pi n$, $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{5\pi}{3}+4\pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **7.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. **8.** 1) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n$, $n \in Z$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; 3) πn, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$. **9.** 1) $-\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$, π; 3) $67{,}5^\circ$; 4) 240°. **10.** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) 2π; 3) $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$; 4) $\frac{\pi}{5}$. **11.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. **12.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\mathrm{arctg}\,3 + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\mathrm{arctg}\,2 + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\mathrm{arctg}\,15 + \pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $\mathrm{arctg}\,13 + \pi n$, $n \in Z$. **13.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$. **14.** 1) $\frac{\pi n}{2}+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $2\pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$;4) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **15.** 1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. **16.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\pi n$, $n \in Z$. **17.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

2) $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$. **18.** 1) $\pi+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pi+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{5\sqrt{2}}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

19. 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **20.** 1) πn, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}+(-1)^n\arcsin\frac{4}{\sqrt{34}}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **21.** 1) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{2}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{5}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **22.** 1) 2; 2) 7; 3) 0; 4) ±0,5; 1. **23.** 1) 0; $\pm\frac{4\pi}{3}$; $\pm\frac{3\pi}{5}$; 2) $-\frac{10\pi}{3}$; -2π; $-\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$; 4) 1,75. **24.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) коренів немає. **25.** 1) 0; 2) 1; 3) $\pm\sqrt{2}$; 4) 0. **26.** 1) πn, $-\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $-\frac{11\pi}{12}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **27.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{12}{13}+2\pi n; 2\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\arccos\frac{3}{5}+2\pi n; 1\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $(2\pi n; 1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

28. 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$. **29.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **30.** 1) $\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}; \frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **31.** 1) $\left(-\operatorname{arctg}2+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left[\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$. **32.** 1) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right) \cup$

$\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;2\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 3) $\left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$; 4) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\operatorname{arctg}2+\pi n\right]$, $n\in Z$. **33.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left[\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. **34.** 1) $\left(-\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; 3) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{2\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{8}+\pi n;\frac{3\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{4\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n;\frac{5\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n;\frac{6\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{8}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{7}+2\pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{7}+2\pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{7}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{9\pi}{7}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\frac{11\pi}{7}+2\pi n\right]\cup\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\frac{13\pi}{7}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. **35.** 1) $\left[-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $(0,5;\ 1]$; 3) $[-1;\ \sin 0,5)\cup(\sin 1;\ 1]$; 4) $[-1;\ \cos 2)$. **36.** 1) $\left(\frac{17\pi}{36}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\frac{53\pi}{36}+2\pi n;\frac{35\pi}{18}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 3) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 4) $(0;\ 1)$. **37.** 1) $0\leqslant a\leqslant 3$; 2) $-4,5\leqslant a\leqslant 4,5$. **38.** 1) $[0,6;\ 1]$; 2) $[0,6;\ 1]$; 3) $[0,5;\ 1]$; 4) $\left[0,5;\frac{120}{169}\right)$. **39.** 1) πn, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **40.** 1) $a\leqslant-2\sqrt{6}$ або $a\geqslant 2\sqrt{6}$; 2) $a\leqslant-4\sqrt{6}$ або $a\geqslant 4\sqrt{6}$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Розділ 2. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

Розділ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ