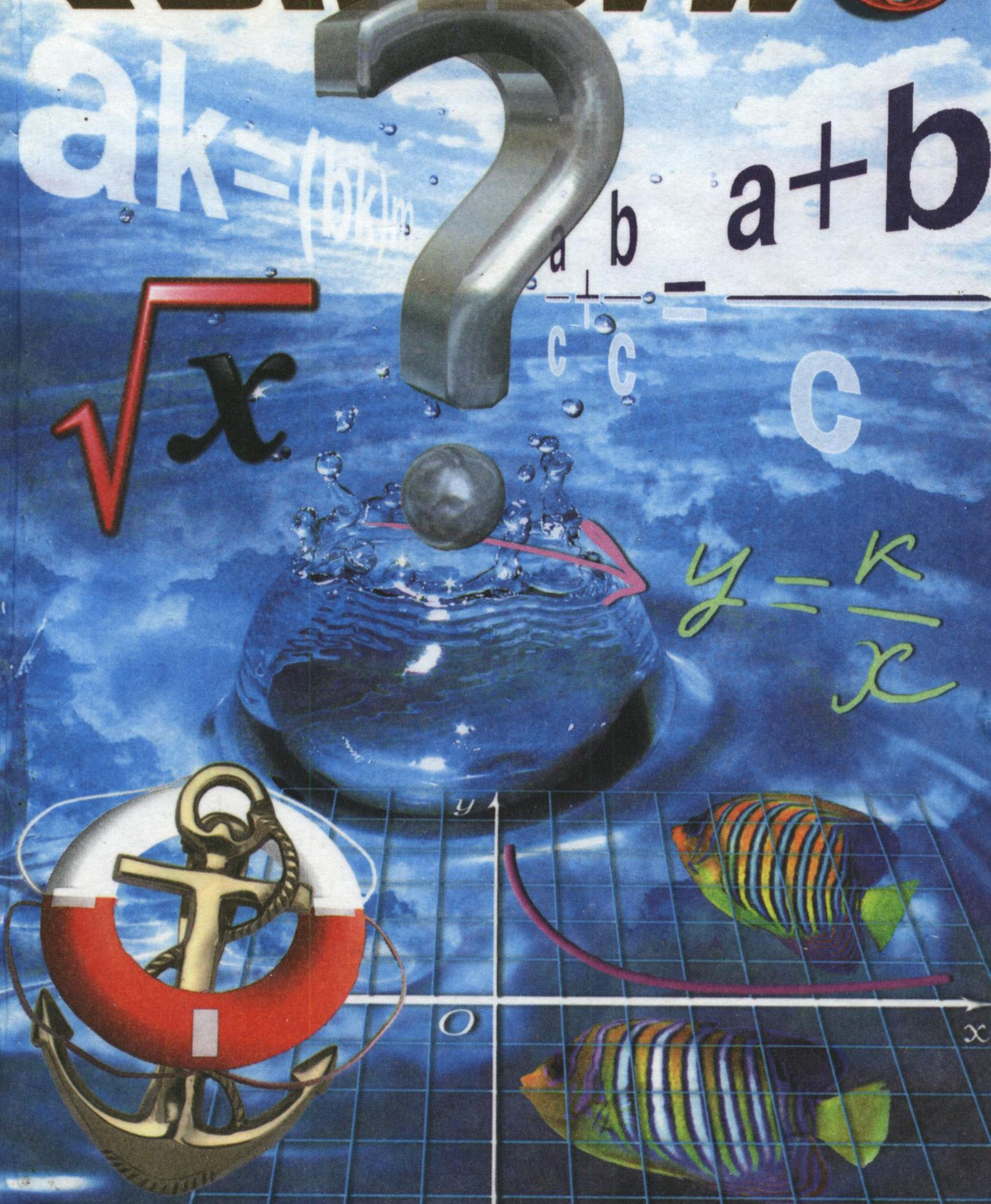
О.Я. Біляніна
Н.Л. Кінащук
І.М. Черевко

АЛГЕБРА 8



ББК 22.14я721
Б61

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1.4/18-679 від 27.03.2008 р.)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Відповідальні за підготовку до видання:
Прокопенко Н.С. – головний спеціаліст МОН України;
Потапова Ж.В. – методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти

Біляніна, О.Я.
Б61 Алгебра : 8 : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / О.Я. Біляніна, Н.Л. Кінащук, І.М. Черевко. – К. : Генеза, 2008. – 304 с. : іл.
ISBN 978-966-504-797-1.

ББК 22.14я721

ISBN 978-966-504-797-1

Математика – барометр цивілізації.

М.П. Єругін

Дорогий друже!

З особливостями навчання алгебри ти вже ознайомився в 7-му класі. Вивчаючи два предмети: алгебру і геометрію, ти відчув між ними тісний взаємозв'язок і деяку різницю.

Даний підручник є продовженням підручника «Алгебра–7», у якому формуються основні аспекти побудови предмета як науки та важливість і потрібність його на сьогодні. У ньому вміщено навчальний та практичний комплекс, в якому особливе місце відводиться розв'язуванню прикладних завдань, які потрібні для повсякденного життя.

Підручник містить три навчальних розділи, які поділено на параграфи, і додатковий матеріал для повторення та підсилення вивченого. Параграфи структуруються за такою схемою: перелік основних запитань, які несуть основний зміст теми; виклад теоретичного матеріалу; приклади його застосування (у формі «Як записати» і «Як пояснити»); різнорівневі вправи для закріплення та самооцінювання (тести); вправи для повторення; рубрика «Перерва». Вивчаючи теоретичний матеріал, звертай увагу на текст, який виділено **жирним** та *курсивним* шрифтами та позначено піктограмами. Це ті **математичні твердження** і *терміни*, які треба запам'ятати. Дослідження окремих фактів спробуй виконати самостійно.

Різнорівневі («°, •, ••, *») розвивальні вправи для закріплення та самооцінювання – тести – допоможуть тобі у засвоєнні конкретної теми, розширять знання, вироблять уміння і закріплять навички в реальних ситуаціях під час розв'язування практичних задач. Для більшого запам'ятовування та відновлення раніше вивченого вміщено рубрику «Вправи для повторення», яка відтворює основні важливі завдання, що складають курс алгебри.

Якщо під час розв'язування задач у тебе виникли труднощі, то до таких вправ ми розставили підказки – «Рятівні круги». Сподіваємося, вони тобі допоможуть бути сміливішим та впевненішим у подоланні непростого шляху. Оскільки «якщо ти хочеш навчитися плавати, то заходь у воду і пливи, а якщо хочеш навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуй їх» (Дьєрдь Пойа).

Завдання рубрики «Готуймося до тематичного оцінювання» допоможуть тобі підготуватися на належному рівні до контролю з теми та перевірити свій рівень навченості. При їх розв'язуванні слід пам'ятати, що випадкові (вгадані) відповіді, як правило, не підтвердять твої знання. Вправи до розділу збагачують, узагальнюють та систематизують матеріал, а рубрика «Джерело» нагадує про історію алгебраїчних понять, з яких зароджувалася велика сучасна наука алгебра.

Якщо ж у тебе з'явиться вільна хвилинка і велике бажання «бути на ти» з цікавою математикою, то для цього підручник має завдання рубрики «Перерва» і «Задачі підвищеної складності». Розв'язуючи ці задачі, ти зможеш отримати насолоду від власної перемоги. Адже «велику радість можна отримати лише у великій праці» (Йоганн Вольфганг фон Гете).

Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Дуже сподіваємося, що підручник, який зараз знаходиться у ваших руках, вам сподобається. Цей математичний твір виплеканий педагогічним досвідом і практикою. Ми намагалися зробити його цікавим навчаючим засобом, який був би зручним як при викладанні теоретичного матеріалу, так і при практичному його застосуванні. Тренувальні вправи для закріплення носять розвивальний характер, тому сподіваємося, що вони допоможуть крок за кроком, з наростаючим підсиленням знань, виводити учня на вершини відповідних рівнів компетентності, посильні для кожної особистості. З огляду на такі педагогічні цілі, добірку завдань ми будували дещо нетрадиційно: завдання вимагають від учня систематичної зосередженості. Цим ми намагаємося викорінити шаблонність у навчальній діяльності та приділити більше уваги розвитку мислення, що вимагає сьогодення. Через увесь підручник однією лінією іде доведення того факту, що математика виникла не випадково і є необхідністю для життя. Ми також старалися створювати можливості для використання сучасних технологій, форм та методів навчання (робота в групах, у парах, індивідуально тощо). Вправи для домашнього завдання, які ми рекомендуємо, виділено благородним кольором – кольором життя. Відразу зазначаємо, що ми лише рекомендуємо, а ви приймаєте рішення.

«Вправи для повторення» складаються з п'яти номерів. Перші три з них підтримують систему концентрованого навчання, закріплюючи основний зміст курсу алгебри, а останні два – допомагають учителю провести актуалізацію опорних знань, умінь, навичок учнів, створити проблемну ситуацію та здійснити мотивацію навчання.

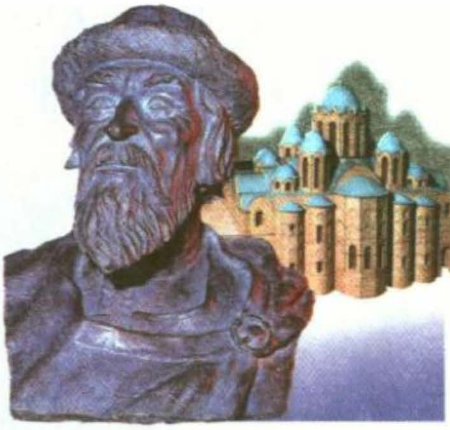
Завдання в тестовій формі – нової структури, для якої використано основи педагогічного тестування та основні принципи й правила побудови тесту за навчанням міжнародного проекту TRAST згідно з програмою TEMPUS/TACIS «Справедливе оцінювання» під керівництвом І.Є. Булах, М.Р. Мруги, Л.І. Даниленко та Т.В. Пустової. Їх можна використовувати як навчальні, навчально-діагностичні, проміжні контрольні та підсумкові. Сучасні формати тестових завдань дозволяють вибирати: одну найбільш правильну відповідь; визначену та невизначену кількість відповідей, меншу за загально задану; правильну комбінацію варіантів відповідей; логічну пару між завданнями та правильними відповідями. Таким чином, практично вгадування правильної відповіді мало ймовірне, а діагностування – пронизливе.

Цілі підручника – через формування в учнів математичних знань сприяти: розвитку уваги, пам'яті, інтуїції; навчанню розмірковувати над умовами завдань, будувати шляхи їх розв'язання, аналізувати, класифікувати та вибирати серед них найоптимальніші.

Бажаємо творчого натхнення та успіхів!

З повагою, автори

Історія розвитку математики в Україні



Український народ завжди цінував освіту, стежив за розвитком освіти в інших країнах та створював свої осередки освіти й науки, які сприяли поширенню знань і загальному духовному прогресу нації. Ще за тисячі років до нової ери в Китаї, Єгипті, Вавилоні, Ассирії та інших країнах світу створювалися школи різного рівня. Як відомо, першими були школи **Платона** (427–347 рр. до н. е.) й **Арістотеля** (384–322 рр. до н. е.). А в V–III ст. до н. е. з'явилися вже вищі, як на той час, школи у **Римі** й **Афінах**. Першою вищою школою була філософська школа в Константинополі (425 р.).

В Україні почали з'являтися перші школи лише в XI–XIII ст. Вони були при княжих дворах, церквах, монастирях. Починаючи з 988 р. київський князь Володимир Святославович почав відкривати у великих містах школи **«книжного вчення»**. Ці школи навчали «семи вільним мистецтвам» (наукам) – граматики, риторики, діалектики, **арифметики**, **геометрії**, астрономії і музики. Слід зазначити, що школа при дворі князя Володимира була на рівні

Рафаель Санті. Афінська школа

Троїцька церква

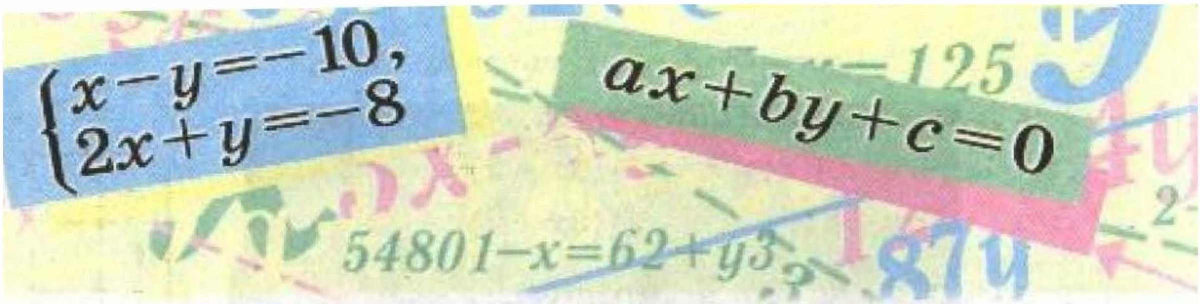
закладів Європи. Далі син князя, Ярослав Мудрий, перетворив батькову школу на вищий заклад, а при Софійському соборі створив бібліотеку, де переписували книги. У 1086 р. в Києві було відкрито першу школу для дівчат. Святослав, син Ярослава Мудрого, продовжив добрий почин батька. З тих часів до нас дійшли дуже гарні слова Володимира Мономаха: *«Що знаєте – не забувайте, чого не вмієте – навчайтесь»*. Деякі школи разом з бібліотеками Ярослава Мудрого можна віднести до навчальних закладів, які склали основу вищих шкіл України.

Майже 200 років, через війни, школа пригальмовує в розвитку. Тільки в 1439 р. з'явилося перше братство у Львові, у 1589 р. – у Рогатині, у 1589 р. – у Кам'янці-Подільському, у 1606 р. – у Замості, у 1615 р. – у Києві та інших містах України. Вони відігравали велику роль у розширенні мережі шкіл та друкарень. Вищих навчальних закладів на батьківщині не було. Українці їхали навчатися за кордон (у Краківський, Болонський, Празький університети). Більшість із них поверталися в Україну і ставали вчителями, керівниками братських шкіл, священиками. Математичні підручники видавалися переважно латинською мовою. У братських школах Європи були дуже поширені **математичні** книги, які підштовхнули розвиток математичних ідей щодо викладання математики. У 1615 р. засновано **Київське Богоявленське братство** зі своєю школою, які підтримувались запорізьким козацтвом, зокрема і самим Петром Конашевичем-Сагайдачним. Удосконалюючи та розширюючи освіту, архімандрит Києво-Печерської лаври Петро Могила заснував у 1632 р. в приміщенні Троїцької церкви **«гімназіон»**, або Лаврську школу, на 100 чоловік для засвоєння «вільних наук» грецькою, церковно-слов'янською та латинською мовами. У цьому ж році шляхом об'єднання братської та Лаврської шкіл засновано **Києво-Могилянський колегіум**, який сильний викладацький склад зумів піднести до рівня найкращих європейських університетів того часу. А 26 вересня 1701 р. Петро І офіційно надав єдиному на той час вищому навчальному

Києво-Могилянська академія

закладу Східної Європи статус **академії**. У 1764 р. Катериною II було скасовано в Україні гетьманство і відновлено на Лівобережжі України другу Малоросійську колегію, а в 1786 р. царським урядом було проведено загальноросійську шкільну реформу, наслідком якої стало утворення мережі головних і малих «народних училищ». У цей час у багатьох містах виникають гімназії з різними мовами навчання – польською, німецькою тощо. Україномовними були лише братські школи у Львові та Дрогобичі. У XVIII ст. поширюється освіта на Лівобережній та Слобідській Україні, відкриваються три колегіуми – у Чернігові, Переяславі, Харкові. З другої половини цього ж століття Києво-Могилянська академія поступово підпорядковується програмам російських духовних училищ та Московського і Петербурзького університетів, а в 1817 р. її закривають. Україна втратила центр наукової та навчальної роботи. На математичну освіту на той час мали вже деякий вплив Чернігівський, Переяславський, Харківський колегіуми, а пізніше – Львівський, Харківський, Київський, Одеський університети. Страдницьким був шлях української освіти в умовах царату, проте видатних науковців вона не втратила – Михайла Остроградського, Тимофія Осиповського, Віктора Буняковського, Софію Ковалевську, Михайла Ващенка-Захарченка. Великий внесок у методику викладання математики зробив Феофан Прокопович – викладач Києво-Могилянської академії (1677–1736). Сучасні відомі математики: Михайло Кравчук, Микола Чеботарьов, Отто Шмідт, Марк Крейн, Стефан Банах, Борис Гнєденко, Віктор Глушков, Юрій Митропольський, Микола Боголюбов, Олексій Погорєлов, Анатолій Самойленко та інші продовжують розвивати математичну освіту.

На сьогодні в Україні проводяться дослідження майже з усіх напрямів математичної науки, встановлені зв'язки з усіма провідними математичними центрами світу. Вітчизняні вчені беруть активну участь у міжнародних конференціях, симпозіумах та конгресах, вкладають свій вагомий внесок у скарбницю світової математичної науки.



ПОВТОРЕННЯ КУРСУ АЛГЕБРИ ЗА 7-й КЛАС

Завдання в тестовій формі

1°. Виберіть лінійне рівняння, коренем якого є число 3.

А) $2x + 7 = 64$; В) $33 - 10x = 13$; Д) $7x + 13 = 8$.

Б) $14 - 3x = 12$; Г) $\frac{1}{3}x + 1 = 2$;

2°. Виберіть математичну модель, яка відповідає умові задачі.

Одне число у 3 рази більше за друге. Якщо від першого числа відняти 4, а до другого додати 4, то ці числа стануть рівними.

А) $3x - 4 + 4 = x$; В) $3x - 4 = x - 4$; Д) $3x - 4 = x + 4$.

Б) $3x - x = 4$; Г) $3x - 8 = x + 4$;

3°. Визначте пару рівносильних рівнянь:

1) $x(x - 3) - x^2 = 9$;
2) $x(x + 7) - x^2 = 21$;
3) $x(x - 2,5) - x^2 = 1,5$;
4) $x^2 - x(x - 4) + 12 = 0$;
5) $x^2 - x(x + 2) - 7 = 0$.

А) 1 і 3; Б) 1 і 4; В) 2 і 4; Г) 2 і 5; Д) 3 і 5.

4°. Знайдіть показник степеня, спростивши вираз

$$\left(x^7\right)^3 \cdot x^6 \cdot \left(x^3\right)^2 : x^{11}.$$

А) 22; Б) 20; В) 11; Г) 7; Д) 3.

5°. Виберіть значення виразу $(5x - 3) - (7 - 3x)$, якщо $x = 0,25$.

А) $-3,5$; Б) $-9,5$; В) -8; Г) -6; Д) -4.

6°. Виберіть алгебраїчний вираз, що відповідає змісту тексту:

сума квадратів двох чисел більша за їх подвійний добуток на 55.

А) $(a + b)^2 - 2ab = 55$;
Б) $a^2 + b^2 - 2ab = 55$;
В) $2ab - \left(a^2 + b^2\right) = 55$;
Г) $2ab - (a + b)^2 = 55$;
Д) $a^2 - b^2 + 2ab = 55$.

7°. Утворіть правильні тотожності.

А) $25x^2 + 20x + 4$; 1) $(3x+5)^2$;

Б) $x^2 + 18x + 81$; 2) $(5x+2)^2$;

В) $x^4 + 6x^2 + 9$; 3) $\left(2x+\frac{1}{4}\right)^2$;

Г) $4x^2 + x + \frac{1}{16}$; 4) $(x^2+3)^2$;

Д) $9x^2 + 30x + 25$. 5) $(x+9)^2$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

8°. Визначте два правильні розклади на множники.

А) $a(3x-y) + b(y-3x) = (3x-y)(a+b)$;

Б) $2(3x-4y) - a(4y-3x) = (3x-4y)(a+2)$;

В) $x^3 - 9x = x(x-3)(3-x)$;

Г) $25x - x^3 = x(5-x)(x+5)$;

Д) $x^5 + x^3 = x^3(x+1)(x-1)$.

9°. Виберіть лінійну функцію, графік якої проходить через початок координат.

А) $y = 5x + 0{,}5$; В) $y = \frac{1}{5}x + 1$; Д) $y = \frac{1}{5}x$.

Б) $y = 5x - 0{,}5$; Г) $y = x^2 - \frac{1}{5}$;

10°. Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 37, а одне з них на 5 більше за інше.

А) 32 і 37; Б) 37 і 42; В) 11 і 26; Г) 16 і 21; Д) 21 і 26.

11•. Знайдіть добуток коренів рівнянь

$$3(2x-5) - 2(x+7) = 15 \text{ і } \frac{2x+6}{3} - \frac{x+57}{4} = x.$$

А) -231; Б) -143; В) -84; Г) 273; Д) $115{,}5$.

12•. Ідентифікуйте кожному рівнянню його розв'язок.

А) $3(x+4) + 6(11-x) = 18$; 1) $x = -6$;

Б) $8(1-x) + 4(x-2) = 24$; 2) $x = -13$;

В) $14(x-5) - 7(x+2) = -14$; 3) $x = 20$;

Г) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x-7) = x$; 4) $x = 10$;

Д) $\frac{1}{7} - \frac{x+2}{4} = \frac{3-6x}{28}$. 5) $x = -7$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

13•. Знайдіть два числа, коли відомо, що одне з них на 20 % більше за друге, а якщо від більшого числа відняти 45, а до меншого додати 16, то ці числа стануть рівними.

А) 366 і 305; В) 244 і 183; Д) 305 і 183.

Б) 305 і 244; Г) 366 і 244;

14•. Обчисліть значення виразу $\dfrac{2\cdot 3^{22}-5\cdot 3^{21}}{9^{10}}$.

А) 2; Б) 3; В) 3^2; Г) 3^9; Д) 3^{11}.

15•. Знайдіть значення виразу $27a^2b^2$, якщо $3ab=-6$.

А) −216; Б) −108; В) 108; Г) 54; Д) −54.

16•. Знайдіть значення виразу $(3a^2-ab+4b^2)-(3b^2-ab+2a^2)$, попередньо спростивши його, якщо $a=-\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{4}{5}$.

А) 0,28; Б) 0,04; В) −0,48; Г) 1; Д) 1,96.

17•. Знайдіть суму квадратів коренів рівнянь

$(2x-7)(x+4)-(2x+5)(x-3)=-3$ і

$7x(x+2)-x(7x+12)=24$.

А) 289; Б) 49; В) 144; Г) 324; Д) 169.

18•. Укажіть трійку правильних рівностей:

1) $a^3-a^2b+ab^2-b^3=(a^2-b^2)(a+b)$;

2) $a^3-a^2b-ab^2+b^3=(a-b)^2(a+b)$;

3) $a^3-ab^2+a^2b-b^3=(a-b)(a+b)^2$;

4) $ab^2-a^3+a^2b-b^3=(a+b)(a-b)^2$;

5) $a^2b-a^3+ab^2-b^3=-(a+b)(a-b)^2$.

А) 1, 2 і 4; Б) 2, 3 і 5; В) 1, 3 і 5; Г) 2, 4 і 5; Д) 1, 2 і 5.

19•. Визначте дві функції, графіками яких є паралельні прямі.

А) $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{5}$; В) $y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$; Д) $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{4}$.

Б) $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{5}$; Г) $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$;

20•. Знайдіть, скільки коштує 1 футбольний м'яч і 1 волейбольний, коли відомо, що за 3 футбольних і 2 волейбольних м'ячі заплатили 230 грн., а за 7 футбольних і 4 волейбольних – 510 грн.

А) 50 грн. і 40 грн.; В) 60 грн. і 25 грн.; Д) 70 грн. і 20 грн.

Б) 48 грн. і 43 грн.; Г) 40 грн. і 45 грн.;

21••. Визначте три рівняння, які при $a = 2$ не мають розв'язків:

1) $2x + 17{,}5 - 1{,}6x = 14{,}3 + ax$;
2) $\dfrac{2x-1}{a-2} + \dfrac{a}{2} = 16$;
3) $2a - x = 4$;
4) $(a - 2) \cdot x = 15$;
5) $(2 - 4a) \cdot x = 2{,}428$;
6) $\dfrac{a-2}{17} + \dfrac{a+1}{34} = 15x$;
7) $ax - 2x = 18$;
8) $2a - x = 4(5 - x)$.

А) 1, 3 і 5; Б) 2, 4 і 7; В) 2, 3 і 8; Г) 4, 5 і 7; Д) 2, 5 і 8.

22••. Спростіть вираз $a^{n+3} \cdot b^{n-2} \cdot a^{n-4} \cdot b^{4-n}$.

А) $a^{n-1}b^{n+2}$;
Б) $a^{2n-1}b^{2}$;
В) ab^{2-2n};
Г) $a^{n-1}b^{n+2}$;
Д) $a^{2n}b^{2}$.

23••. Визначте, на скільки відсотків зміниться площа поверхні куба, якщо спочатку його ребро зменшили на 10 %, а потім збільшили на 10 %.

А) Не зміниться;
Б) зменшиться на 11,94 %;
В) збільшиться на 1,99 %;
Г) зменшиться на 1,99 %;
Д) збільшиться на 11,94 %.

24••. Знайдіть значення виразу $(x^2 - 3xy + 4y^2)(2x - 3y) - (6y^2(3x - 2y) - xy^2)$, якщо $x = -0{,}5$, $y = -\dfrac{1}{9}$.

А) $\dfrac{1}{2}$; Б) 0; В) $-\dfrac{1}{2}$; Г) $-\dfrac{1}{162}$; Д) -1.

25••. Виберіть систему рівнянь, за якою можна знайти двоцифрове число, сума цифр якого дорівнює 7, а при читанні числа у зворотному порядку воно збільшується на 45.

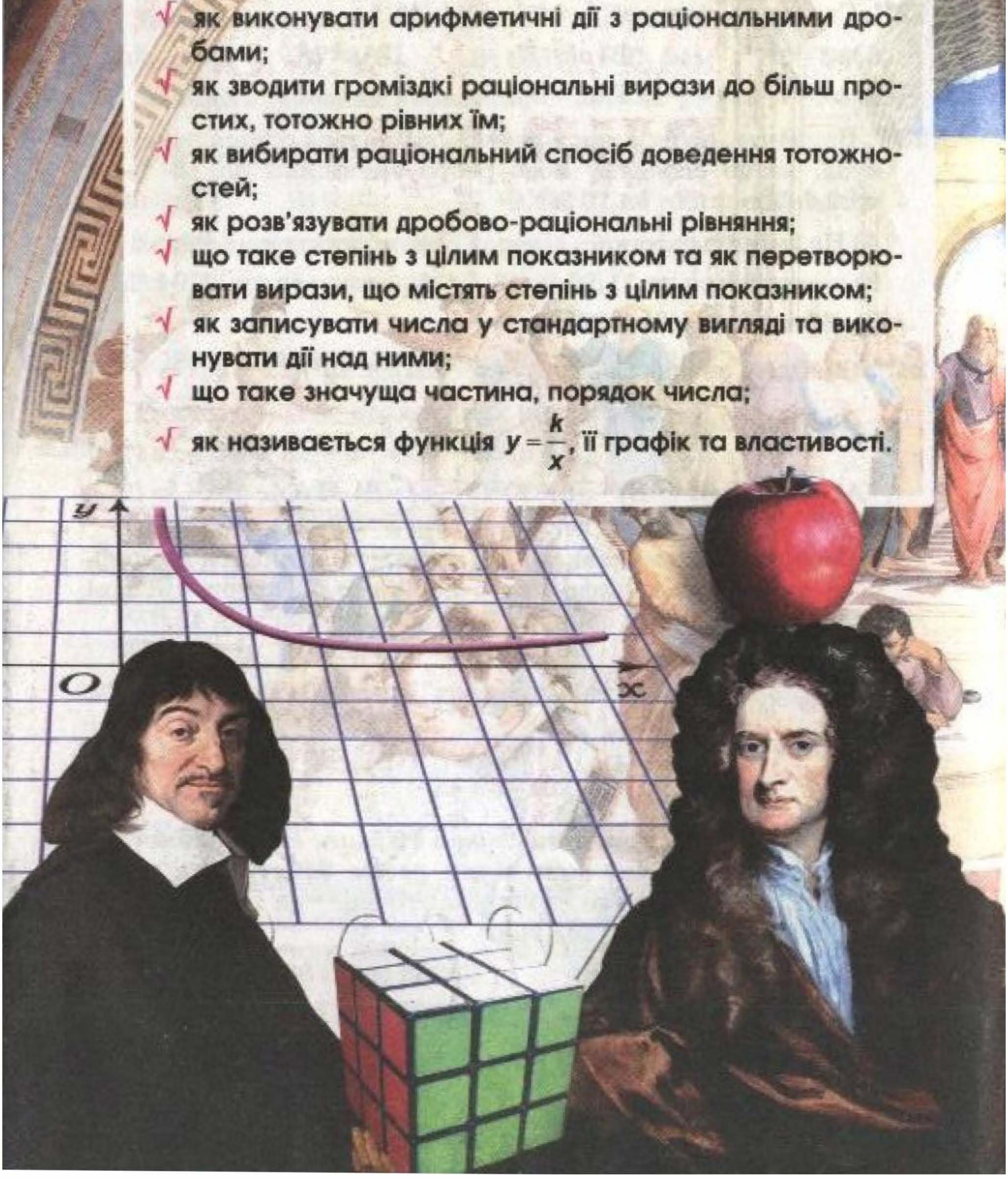
А) $\begin{cases} a+b=7, \\ 9b-9a=45; \end{cases}$
Б) $\begin{cases} a+b=7, \\ 2a-2b=45; \end{cases}$
В) $\begin{cases} a+b=7, \\ a-b=45; \end{cases}$
Г) $\begin{cases} a+b=7, \\ 10a-b=45; \end{cases}$
Д) $\begin{cases} a+b=7, \\ 11a+11b=45. \end{cases}$

26••. Знайдіть початкові ціни стола і стільця, коли відомо, що 2 столи і 4 стільці коштували разом 840 грн., а після підвищення ціни стола на 20 %, а стільця – на 10 % за 1 стіл і 3 стільці заплатили 585 грн.

А) 220 грн. і 100 грн.;
Б) 236 грн. і 96 грн.;
В) 240 грн. і 90 грн.;
Г) 288 грн. і 88 грн.;
Д) 264 грн. і 99 грн.

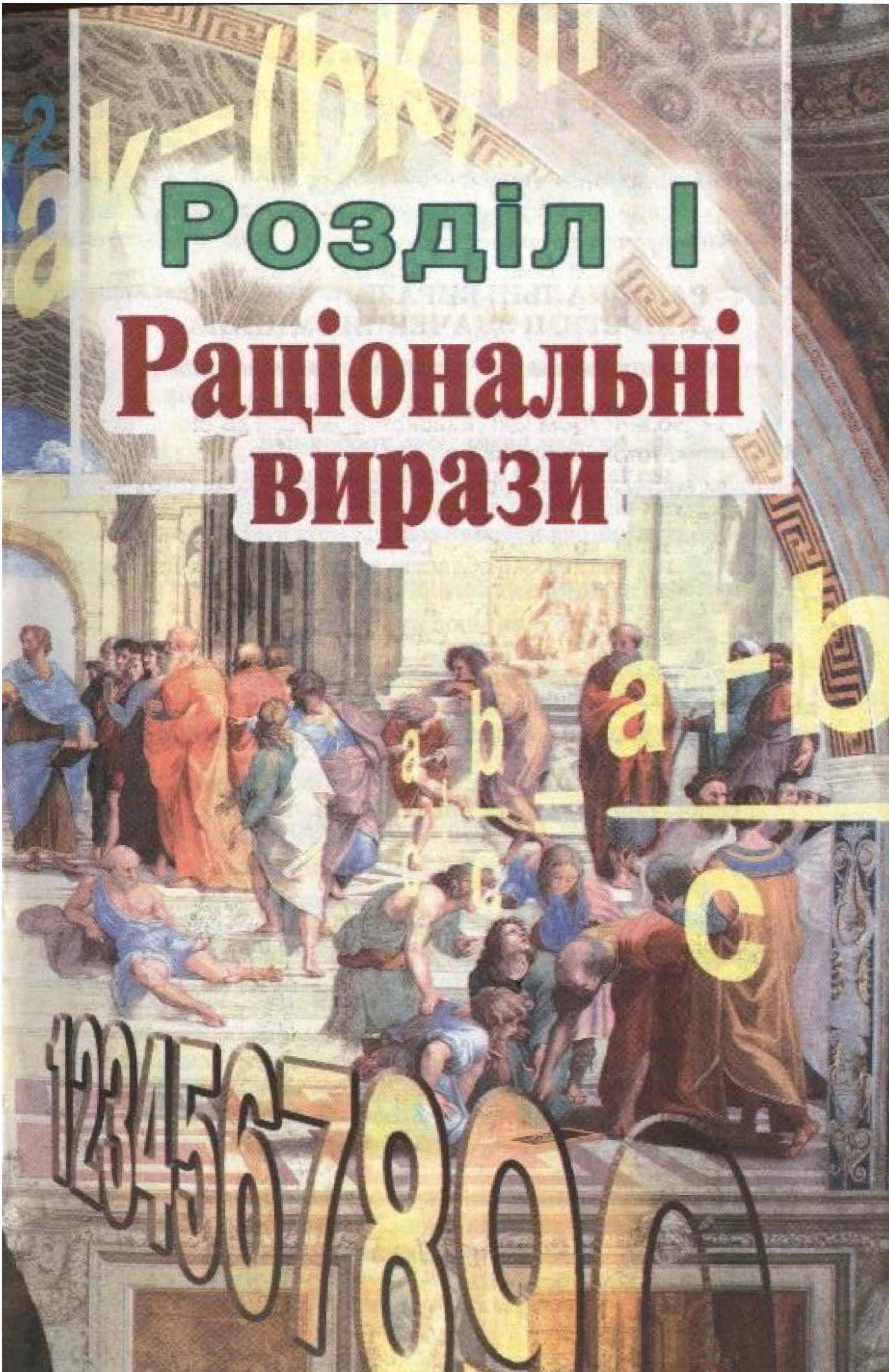
Опрацювавши цей розділ, ви будете знати:

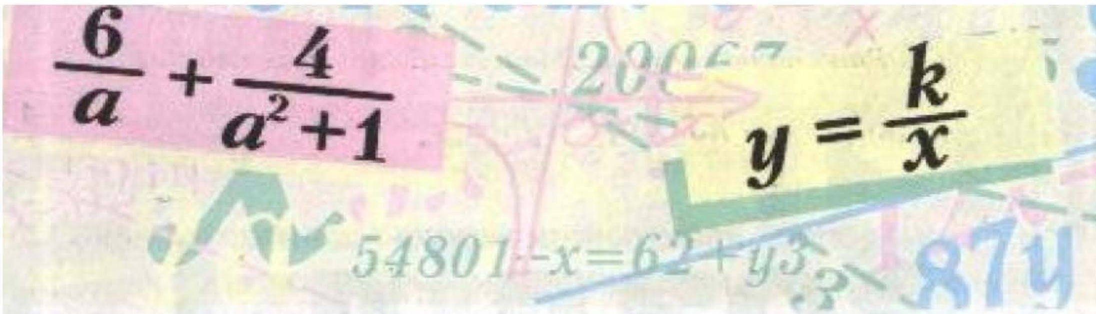
- √ які раціональні вирази називаються дробовими;
- √ як визначати значення змінних, при яких раціональний вираз втрачає зміст;
- √ коли раціональний дріб дорівнює нулю;
- √ як використовувати основну властивість раціонального дробу та правило скорочення раціонального дробу;
- √ як виконувати арифметичні дії з раціональними дробами;
- √ як зводити громіздкі раціональні вирази до більш простих, тотожно рівних їм;
- √ як вибирати раціональний спосіб доведення тотожностей;
- √ як розв'язувати дробово-раціональні рівняння;
- √ що таке степінь з цілим показником та як перетворювати вирази, що містять степінь з цілим показником;
- √ як записувати числа у стандартному вигляді та виконувати дії над ними;
- √ що таке значуща частина, порядок числа;
- √ як називається функція $y=\dfrac{k}{x}$, її графік та властивості.



Розділ І

Раціональні вирази





§1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. ДОПУСТИМІ ЗНАЧЕННЯ ЗМІННИХ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **які вирази називають раціональними;**
- **які вирази називають дробовими;**
- **що таке дріб і який дріб називається раціональним;**
- **як визначати значення змінних, при яких дробовий вираз втрачає зміст;**
- **що називають областю допустимих значень змінних раціонального виразу;**
- **коли дріб дорівнює нулю.**

Основу курсу алгебри становлять алгебраїчні вирази, які складаються із чисел, букв та знаків алгебраїчних дій і дужок. Серед алгебраїчних виразів є вирази, які називають *раціональними*.

Раціональний вираз **– це вираз, який складається зі скінченної кількості чисел і букв, що з'єднуються знаками дій додавання, віднімання, множення, ділення та дужками.**

Раціональні вирази бувають цілі та дробові. В курсі алгебри 7-го класу ми працювали з *цілими раціональними виразами*:

$$8xy^2,\ 4a,\ -\frac{1}{3}am^3x,\ x^4-y^2,\ 5m:4,\ (9+a)^2,\ \frac{2a-b}{13}.$$

Отже, у цілих виразах над змінними виконуються тільки дії додавання, віднімання і множення. Якщо у виразі над змінними виконати дію ділення на вираз зі змінними, то отримують вираз, який називають *дробово-раціональним (дробовим) виразом*.

Раціональний вираз, який утворений з чисел, змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення та ділення на вираз, який містить змінні, називають *дробово-раціональним*.

Наприклад, раціональні вирази: $3+\frac{a}{x}$, $\frac{4}{x-y}$, $\frac{15x-4}{x+5}$, $8x+\frac{3-a}{a^2-4}$, $7x^2+\frac{1}{6+x^2}$ є *дробово-раціональними*, а дроби, що містяться в них: $\frac{a}{x}$, $\frac{4}{x-y}$, $\frac{15x-4}{x+5}$, $\frac{3-a}{a^2-4}$, $\frac{1}{6+x^2}$, називають *раціональними дробами*.

Дроби, які містять змінні у знаменнику, називають *раціональними дробами*.

Будь-який дробово-раціональний вираз допустимими перетвореннями зводиться до дробу $\frac{A}{B}$, де A і B – многочлени стандартного вигляду. Нагадуємо, що числа та одночлени є окремими видами многочлена.

Таким чином, ми ознайомилися зі звичайними дробами $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{13}{9}, \frac{27}{10}, \dots\right)$ та раціональними дробами $\left(\frac{3a}{17x}, \frac{25-3x}{x+7}, \frac{a+b}{x^2-2x}, \dots\right)$.

З а у в а ж е н н я. Піднесення до степеня є окремим випадком множення, тому вирази $7x^2$, a^3, $\frac{3-a}{a^2-4}$ є також раціональними. Вираз, записаний за допомогою дії ділення, наприклад, $(2a-3):b$ можна легко подати у вигляді дробу $\frac{2a-3}{b}$, який містить змінні у знаменнику.

Для цілих виразів значення змінних можуть набувати довільних числових значень, оскільки будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена. Проте дробові вирази при деяких значеннях змінних втрачають зміст.

Наприклад, вираз:

1) $\frac{a}{x}$ не має змісту при $x=0$;

2) $\frac{15x-4}{x+5}$ має зміст при всіх значеннях x, крім $x=-5$;

3) $\frac{4}{x-y}$ має зміст лише при тих значеннях x та y, коли $x \neq y$.

Для кожного з вищерозглянутих виразів ми виключали ті значення змінних, при яких знаменник дробу перетворюється на нуль, оскільки **ділити на нуль не можна!**

Значення змінних, при яких можливі всі математичні дії, що містить раціональний вираз, називають *допустимими значеннями змінних*.

Такі значення змінних утворюють *область визначення*, або *область допустимих значень* виразу (скорочено ОДЗ).

Приклад 1. Знайдіть область допустимих значень змінної x в раціональному дробі $\frac{4+x}{x(x-2)}$.

Розв'язання

Як записати

$\frac{4+x}{x(x-2)}$, ОДЗ – ?

ОДЗ: $x(x-2) \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Відповідь. $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Як пояснити

Оскільки дріб існує, коли знаменник відмінний від нуля, то знаходимо ті значення змінних, що перетворюють знаменник на нуль. Маємо: $x(x-2)=0$, якщо $x=0$ або $x=2$. Отже, областю допустимих значень раціонального дробу $\frac{4+x}{x(x-2)}$ є всі значення x, крім $x=0$ та $x=2$, що коротко записують ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Приклад 2. Знайдіть допустимі значення змінної a для виразу $\frac{5}{a}+\frac{a}{a^2+4}$.

Розв'язання

Як записати

$\frac{5}{a}+\frac{a}{a^2+4}$. $\begin{cases} a \neq 0, \\ a^2+4 \neq 0. \end{cases}$

Оскільки $a^2+4>0$ при будь-яких значеннях a, то вираз a^2+4 не впливає на ОДЗ, тому ОДЗ: $a \neq 0$.

Відповідь. $a \neq 0$.

Як пояснити

Даний раціональний вираз складається із суми двох дробових, тому знаходимо ОДЗ для кожного з них:

1) дріб $\frac{5}{a}$ не має змісту при $a=0$;

2) дріб $\frac{a}{a^2+4}$ має зміст при будь-яких значеннях змінної a, оскільки $a^2 \geqslant 0$, $a^2+4 \geqslant 4 > 0$. Таким чином, для заданого раціонального виразу ОДЗ: $a \neq 0$.

Багато років арифметика нагромаджувала практичні правила для розв'язування повсякденних життєвих задач. Ці правила приводили до використання дій додавання, віднімання, множення і ділення спочатку тільки з цілими числами, а потім і з дробовими. Алгебра виникла в результаті пошуку загальних способів для розв'язування однотипних арифметичних задач. Цими способами в більшості випадків є складання рівнянь. Характерною відмінністю алгебри від арифметики є введення буквених позначень. За допомогою букв можна було узагальнити властивості арифметичних дій та записати їх у більш стислій формі. Можливість перетворювати за певними правилами буквені записи зробила їх зручнішими для обчислень. Буквені обчислення тотожних перетворень складають апарат класичної алгебри. Практично алгебра вивчає, використовуючи буквені позначення, загальні властивості числових систем і загальні методи розв'язування задач за допомогою рівнянь. Увівши невідому величину та виконуючи відповідні дії, приходять до рівняння, з якого вже знаходять невідому. Папірус Рінда (2000 р. до н. е.) свідчить про натяк на таке трактування задач, проте минули тисячоліття, поки вчені-математики прийшли до таких висновків.

Вправи для закріплення

1°. Визначте, які раціональні вирази є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{7}{19}xy^2$; 5) $-\frac{1}{4}$; 9) $\frac{9}{a-3}+x$; 13) $\frac{9}{7}x+\frac{1}{3}y-\frac{4}{5}yx^2$;

2) $(a-b)^2$; 6) 9,3; 10) $\frac{9}{mnk}$; 14) $m(m+3)-n^3$;

3) $\frac{6}{7}-\frac{2}{x}$; 7) $15a$; 11) $\frac{a}{x}+\frac{x}{a}-2$; 15) $\frac{3a+2}{14}+\frac{a^3}{7}$;

4) $\frac{x}{a^2+4}$; 8) 0; 12) $\frac{m^3-4m}{m+3}$; 16) $\frac{(9-x)(x+9)-(9-x)^2}{36}$.

2°. Заповніть таблицю, використовуючи вирази:

1) $5-x+y-z$; 3) $\frac{4}{t-2}-\frac{4}{t+2}$; 5) $5a+\frac{a^2}{4}$;

2) $7x-y^2-8+\frac{1}{3}x$; 4) $(4-x)^2$; 6) $\frac{9-a}{x+y}$.

7) $\frac{9}{17}+x^2$; 9) $\frac{6}{a}+\frac{4}{t^2+1}$; 11) $\frac{5}{9}a+\frac{9}{5}b$;

8) $\frac{11}{a^2-5}$; 10) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; 12) $\frac{3a}{4}+\frac{3}{4a}$.

Цілі вирази	Дробові вирази

3°. Обчисліть значення раціонального дробу $\frac{m^2-4}{2m}$ при $m=-2$; -1; 1; $\frac{1}{2}$; 2.

4°. Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{a-x}{a+x}$ при $a=5$, $x=-7$; 3) $\frac{3y+2x}{x-y}$ при $x=-2$, $y=2$;

2) $\frac{m}{m^2+5}$ при $m=0$; $m=-5$; 4) $\frac{4a^2-1}{a+6}$ при $a=0{,}5$.

5°. Відомо, що площа прямокутника зі сторонами x см та y см дорівнює 28 см^2. Складіть вираз для знаходження площі прямокутника. Виразіть:

1) змінну x через y; 2) змінну y через x.

Чому дорівнює x, якщо $y=14$ см?

6°. У залі кінотеатру 400 місць, причому кількість рядів дорівнює k, а кількість місць у ряду m. Складіть вираз для знаходження кількості місць у ряду. Обчисліть значення m, якщо $k=16$.

7°. Знайдіть область допустимих значень змінної x для виразу:

1) $\frac{7}{x-2}$; 3) $\frac{9-x}{x(x-3)}$; 5) $\frac{7-x^2}{2x(x-1)}$; 7) $\frac{7-x}{9+x^2}$;

2) $\frac{16x}{x+4}$; 4) $\frac{6+x}{x(4+x)}$; 6) $\frac{9+x^2}{3x(4x+8)}$; 8) $\frac{8+x}{2x^2+5}$.

8•. Знайдіть значення виразу:

1) $A=\frac{4a-a^2}{a+3}$ при $a=-2$;

2) $B=\frac{7b}{b^2-2}$ при $b=3$;

3) $C=4c^2-16c+3$ при $c=-\frac{1}{2}$.

Обчисліть значення виразу $2A+3B-\frac{1}{3}C$.

Складіть математичні моделі до задач (**9–10**).

9°. Із двох пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 70 км, одночасно назустріч один одному зі швидкостями 35 км/год і a км/год вирушили два мотоциклісти, які зустрілися через t годин. Запишіть вираз, за допомогою якого можна визначити час t. Знайдіть t, якщо $a = 21$ км/год.

10°. Човен проплив 30 км за течією річки і 26 км проти течії. Складіть вираз для знаходження загального часу руху човна, якщо його власна швидкість становить v км/год, а швидкість течії – 3 км/год.

11°. Знайдіть допустимі значення змінної a для виразу:

1) $a^2 - 2a + \dfrac{1}{3a}$; 3) $\dfrac{7-a}{a(3a+3)}$; 5) $\dfrac{4}{a} - \dfrac{5a}{a+6}$; 7) $\dfrac{7a}{a^2-9}$;

2) $a^2 - \dfrac{5}{a}$; 4) $\dfrac{7-a^2}{2a(4a+2)}$; 6) $\dfrac{4}{3-a} + \dfrac{5a}{a+2}$; 8) $\dfrac{a^2+9}{a^2-25}$.

12°. Визначте знак дробу $\dfrac{m}{n}$, якщо:

1) $m > 0$, $n < 0$; 3) $m < 0$, $n < 0$;

2) $m < 0$, $n > 0$; 4) $m > 0$, $n > 0$.

13°. Знайдіть, при яких значеннях змінної дріб дорівнює нулю:

1) $\dfrac{7-x}{5}$; 2) $\dfrac{2-x}{16}$; 3) $\dfrac{a+5}{a-2}$; 4) $\dfrac{y-1}{y+1}$; 5) $\dfrac{t(t-1)}{t+4}$; 6) $\dfrac{x(x+2)}{x-7}$.

14°°. Визначте значення змінної a, при якому значення дробу $\dfrac{a-7}{3}$ дорівнює:

1) 1; 2) 0; 3) 3; 4) –2.

Раціональний дріб дорівнює нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.

15°°. Знайдіть значення змінної t, при яких не має змісту вираз:

1) $\dfrac{t}{t^2-6t+9}$; 3) $\dfrac{8-t}{t^2-100}$; 5) $\dfrac{6}{t} + \dfrac{2t}{t^2-1}$;

2) $\dfrac{2t+t^2}{t^2+10t+25}$; 4) $\dfrac{11}{t^3-16t}$; 6) $\dfrac{7t}{(t-6)^{10}}$.

16°°. При яких значеннях змінної дріб перетворюється на нуль:

1) $\dfrac{t^2-16}{t+2}$; 2) $\dfrac{81-x^2}{2x+6}$; 3) $\dfrac{t^2-6t+9}{t+3}$; 4) $\dfrac{a^2+2a+1}{a-1}$?

17••. Визначте знак дробу:

1) $\frac{x-2}{x-5}$ при $x>8$; 3) $\frac{m-4}{m-5}$ при $m<0$; 5) $\frac{m-8}{m^2+2}$ при $m<8$;

2) $\frac{a-3}{a+8}$ при $a>3$; 4) $\frac{y+11}{y-10}$ при $y<-15$; 6) $\frac{a+2}{a^2+3}$ при $a>-2$.

18••. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення дробу:

1) $\frac{5}{t^2+2}$ **додатне;** 3) $\frac{t^2+5}{-t^2-1}$ **від'ємне;** 5) $\frac{(t-2)^2}{t^2+5}$ **невід'ємне;**

2) $-\frac{4}{t^2+8}$ **від'ємне;** 4) $-\frac{-a^2-4}{a^2+2}$ **додатне;** 6) $\frac{(y+4)^2}{-y^2-9}$ **недодатне.**

19*. Визначте значення змінної, при яких дріб перетворюється на нуль:

1) $\frac{t^2-9}{t+3}$; 2) $\frac{x^2-16}{x-4}$; 3) $\frac{m^2-4m}{m}$; 4) $\frac{y^2+6y}{y+6}$.

Вправи для самооцінювання

1°. Виберіть серед раціональних виразів дробовий.

а) $8x^2-\frac{1}{3}x+2$; б) $\frac{7}{3}-x$; в) $\frac{t^2-2t+3}{4}$; г) $\frac{t^2-2}{t}$.

2°. Знайдіть значення раціонального дробу $\frac{8-x^2}{2x}$ при $x=-2$.

а) 1; б) −1; в) −3; г) 3.

3°. Знайдіть значення змінної t, при якому вираз $\frac{t^2-25}{t+6}$ не має змісту.

а) $t=6$; б) $t=25$; в) $t=-6$; г) $t=\pm5$.

4•. Укажіть дріб, який дорівнює нулю при $x=-5$.

а) $\frac{2x-10}{x+1}$; б) $\frac{x^2-5}{x-2}$; в) $\frac{4x+20}{x-11}$; г) $\frac{x-5}{x+5}$.

5•. Визначте, яким буде значення раціонального дробу $-\frac{(t-7)^2}{t^2+9}$ при будь-якому значенні змінної t.

а) Додатним; б) від'ємним; в) недодатним; г) невід'ємним.

6•. Знайдіть значення змінної x, при якому дріб $\frac{9-4x}{5}$ дорівнює -3.

а) 6; б) -5; в) 1,5; г) $-1,5$.

7••. Визначте, яким буде дробовий вираз $\frac{8-t}{t+6}$ при $t > 8$.

а) Додатним; б) недодатним; в) від'ємним; г) невід'ємним.

8••. Визначте вираз, який є математичною моделлю до задачі. Катер, швидкість якого у стоячій воді дорівнює x км/год, пройшов 32 км проти течії річки та 24 км за течією. Складіть вираз для знаходження часу, який катер затратив на весь шлях, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

а) $\frac{32}{2+x}+\frac{24}{2-x}$; б) $\frac{32}{2-x}+\frac{24}{2+x}$; в) $\frac{32}{x+2}+\frac{24}{x-2}$; г) $\frac{32}{x-2}+\frac{24}{x+2}$.

9••. Знайдіть значення змінної, при яких дріб $\frac{64x-x^3}{x+8}$ перетворюється на нуль.

а) 0, 8 і -8; б) 0 і 8; в) 0 і -8; г) 8 і -8.

Вправи для повторення

20. Знайдіть добуток розв'язків двох лінійних рівнянь:

1) $\left(\frac{3}{5}x+0{,}5\right)\cdot 2=0{,}2x+3{,}4$ і $3y+31=3{,}5+0{,}5y$;

2) $(3x-5)\cdot\frac{1}{3}=2x-15\frac{2}{3}$ і $2y+0{,}21=0{,}5y+\frac{3}{8}$;

3) $\left(\frac{2}{5}x-1{,}5\right)\cdot 2=2{,}7-0{,}2x$ і $4y-13=1{,}5y+14{,}5$;

4) $(5x-4)\cdot\frac{1}{5}=2x-5{,}6$ і $7y-1{,}5=4{,}5y+1{,}25$.

21. Визначте кількість коренів рівняння:

1) $2x(x-3)=x(2x-5)-17$;

2) $(2x-1)(2x+1)=x(4x+7)-7(x+2)$;

3) $(3x-2)^2-19x=(9x+5)(x-4)+24$;

4) $5x(x-3)+7=5(x+1)^2+2$.

22. У першому резервуарі 1900 м^3 води, а в другому – 7500 м^3. У перший резервуар щохвилини надходить 400 м^3 води, а з другого щохвилини забирають 300 м^3 води. Через скільки хвилин у резервуарах води стане порівну?

23. Подайте відсотки у вигляді звичайних дробів:

1) 10 %, 20 %, 30 %, 40 %, 80 %;

2) 3 %, 27 %, 41 %, 69 %, 99 %;

3) 15 %, 35 %, 50 %, 75 %, 85 %;

4) 1,25 %, 12,5 %, 37,5 %, 125 %, 625 %.

24. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}\right):\left(3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\right)$;

2) $\left(7\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}\right):\left(2\frac{1}{3}+1\frac{3}{4}\right)$;

3) $0{,}3:(1{,}02+1{,}98)$;

4) $\frac{2}{5}:(1{,}02-0{,}22)$.

§ 2. РАЦІОНАЛЬНИЙ ДРІБ. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- яку рівність називають тотожністю;
- яка тотожність виражає основну властивість раціонального дробу;
- які раціональні вирази називають тотожно рівними;
- правило скорочення раціональних дробів;
- який раціональний дріб є нескоротним.

Виконуючи дії зі звичайними дробами, часто доводилося використовувати основну властивість дробу: *якщо чисельник і знаменник дробу помножити на одне й те саме натуральне число, то значення дробу не зміниться*. Наприклад:

1) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\ldots=\frac{50}{100}=\ldots$; 2) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{12}{18}=\ldots=\frac{200}{300}=\ldots$

Оскільки в *раціональному дробі* чисельником і знаменником є многочлени, то для нього також буде доцільною основна властивість дробу: *для будь-яких натуральних чисел a, b, k виконується тотожність*:

$$\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}.$$

Доведемо справедливість цієї самої рівності для будь-яких значень a, b, k, при яких знаменник відмінний від нуля, тобто при $b \neq 0$ і $k \neq 0$.

Нехай дріб $\frac{a}{b} = m$ (1). Звідси за означенням частки $a = bm$. Помножимо обидві частини цієї рівності на k. Оскільки $k \neq 0$, то виконується рівність $ak = bmk$. Використовуючи сполучну властивість множення, отримуємо: $ak = (bk)m$, або $(bk)m = ak$.

Оскільки $b \neq 0$ і $k \neq 0$, то $bk \neq 0$. Тому за означенням частки отримуємо: $\frac{ak}{bk} = m$ (2). З рівностей (1) і (2) маємо: $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$, що й вимагалося довести.

Доведена рівність є *тотожністю*.

Тотожністю називають рівність, яка правильна при всіх допустимих значеннях змінних, що входять до неї.

Для будь-яких значень a, b, k, де $b \neq 0$ і $k \neq 0$, справедлива тотожність

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}. \qquad (3)$$

Властивість, виражену тотожністю (3), називають *основною властивістю дробу*.

Два раціональні вирази, які набувають рівних значень при всіх допустимих значеннях змінних, називають *тотожно рівними*, а заміну одного виразу тотожно рівним йому – *тотожним перетворенням* виразу. Наприклад, раціональні вирази $\frac{x(x-2)}{3x}$ і $\frac{x-2}{3}$ тотожно рівні при $x \neq 0$.

Якщо ж у тотожності (3) поміняти ліву і праву частини місцями, то отримаємо: $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$. Це означає, що чисельник і знаменник дробу поділили на їхній спільний множник k ($k \neq 0$). У цьому випадку кажуть, що *дріб скоротили на k*. Дріб $\frac{ak}{bk}$ називають *скоротним*, а дріб $\frac{a}{b}$ – *нескоротним*.

Для спрощення раціональних виразів під час виконання тотожних перетворень доводиться часто скорочувати раціональні дроби. При цьому користуються таким алгоритмом:

1) записують многочлени чисельника і знаменника дробу у вигляді добутку (іншими словами – розкладають чисельник і знаменник дробу на множники);

2) визначають спільний множник для чисельника і знаменника дробу;

3) ділять чисельник і знаменник дробу на їхній спільний множник, отримуючи нескоротний дріб;

4) записують тотожну рівність з урахуванням ОДЗ початкового дробу.

Зауваження. Область допустимих значень раціонального дробу здебільшого зручно шукати, коли його знаменник розкладено на множники.

Приклад 1. Скоротіть раціональний дріб $\frac{m^2-16}{mx+4x}$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$\frac{m^2-16}{mx+4x}=\frac{(m-4)(m+4)}{x(m+4)}=$ $=\frac{m-4}{x}$ при $x\neq 0$ і $m\neq -4$. *Відповідь.* $\frac{m-4}{x}$ при $x\neq 0$ і $m\neq -4$.	Скорочення дробу передбачає ділення його чисельника і знаменника на їхній спільний множник, тому розкладаємо їх на множники, використовуючи відомі нам способи. Отримуємо дріб $\frac{(m-4)(m+4)}{x(m+4)}$, який скорочуємо на $(m+4)$ за умови, що $m+4\neq 0$, тобто $m\neq -4$. Таким чином, виконується тотожність: $\frac{m^2-16}{mx+4x}=\frac{m-4}{x}$ при $x\neq 0$ і $m\neq -4$.

Приклад 2. Зведіть дріб $\frac{5d}{2a^2}$ до знаменника $8a^5$.

Розв'язання

Як записати

$8a^5 = 2a^2 \cdot 4a^3$, тоді

$$\frac{5d}{2a^2} = \frac{5d \cdot 4a^3}{2a^2 \cdot 4a^3} = \frac{20a^3d}{8a^5}.$$

Відповідь. $\frac{20a^3d}{8a^5}$.

Як пояснити

Знаменник шуканого дробу $8a^5$ розкладаємо на множники так, щоб один з них дорівнював знаменнику даного дробу $2a^2$. Таким чином, $8a^5 = 2a^2 \cdot 4a^3$, тому чисельник і знаменник дробу $\frac{5d}{2a^2}$ множимо на $4a^3$ (основна властивість дробу). Отримуємо дріб $\frac{20a^3d}{8a^5}$.

Вираз $4a^3$, на який домножили чисельник і знаменник заданого дробу, називають *доповняльним множником* до чисельника і знаменника дробу $\frac{5d}{2a^2}$.

Запам'ятаймо!

$$-\frac{a-b}{m-n} = \frac{b-a}{m-n} = \frac{a-b}{n-m}; \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1.$$

Вправи для закріплення

25°. Серед виразів: $6c$; $7m^2nc$; 13; a; $10a^2x$; $7m^2$; $9a^4b^3c^5$; $12x^2yt^3$ виберіть спільний множник чисельника і знаменника дробу:

1) $\frac{5a}{8a}$;
2) $\frac{14m^2}{21m^3}$;
3) $-\frac{6c}{24xc}$;
4) $\frac{28m^2nc}{7m^5nc^2}$;
5) $\frac{28m^2nc}{7m^5nc^2}$;
6) $\frac{13a}{39xy}$;
7) $\frac{-24x^2yt^3}{36x^3yt^3}$;
8) $\frac{18a^4b^4c^5}{27a^5b^3c^{10}}$.

26°. Запишіть дріб $\frac{m}{n}$ у вигляді дробу $\frac{ak}{bk}$, де k – спільний множник чисельника m і знаменника n дробу:

1) $\frac{4a}{8}$; 3) $\frac{8x}{12yx}$; 5) $\frac{3x^2y}{9y}$; 7) $\frac{21m^2n}{42m^2n^3}$;

2) $\frac{6x}{9}$; 4) $\frac{9ab}{24a}$; 6) $\frac{10a^2b}{15ab^2}$; 8) $\frac{100a^2xy^4}{200a^2x^2y^2}$.

27°. Скоротіть дріб:

1) $\frac{63m^2x^3}{42m^5x}$; 3) $\frac{15t^3x}{40tx^2}$; 5) $\frac{-12a^2x}{18ax}$; 7) $-\frac{-2m^2n}{4m^2n^2}$;

2) $\frac{100p^4x}{25px^3}$; 4) $\frac{6m^2n^3x}{18m^2n^3x^2}$; 6) $\frac{39bm^2}{-26cm^2}$; 8) $\frac{-0{,}6m^2b}{0{,}2am^2}$.

28°. Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть його:

1) $15m^2x:30mx^3$; 3) $7c^2xy:14c^3xy^2$; 5) $-6mn:(-18ma)$;

2) $24a^2b:3ab^4$; 4) $-15amy:(-5a^2my)$; 6) $24a^3x:0{,}3ax^2$.

29°. Використовуючи властивості степенів і правило скорочення дробу, обчисліть значення дробу:

1) $\frac{(2^4)^2}{4^5}$; 3) $\frac{81^4}{27^5}$; 5) $\frac{25^2}{125}$; 7) $\frac{10^{15}}{100^8}$;

2) $\frac{3^5}{9^2}$; 4) $\frac{8^{12}}{16^9}$; 6) $\frac{27^4}{9^7}$; 8) $\frac{16^7}{64}$.

30°. Скоротіть дріб, враховуючи ОДЗ:

1) $\frac{m(x-3)}{5(x-3)}$; 2) $\frac{7(a+4)}{x(a+4)}$; 3) $\frac{ma(y+8)}{na(y+8)}$; 4) $\frac{2tx^2(y-1)}{4kx^2(y-1)}$.

Скоротіть дроби, розклавши їх чисельники та знаменники на множники (31–36).

31•. 1) $\frac{5a+15b}{10ab}$; 3) $\frac{7x+7y}{x+y}$; 5) $\frac{m^2-mn}{m-n}$;

2) $\frac{10x-20y}{10xy}$; 4) $\frac{a+b}{3b+3a}$; 6) $\frac{x^2+6x}{x+6}$.

32•. 1) $\frac{(m-3)^2}{2(m-3)}$; 3) $\frac{4m-2}{(2m-1)^2}$; 5) $\frac{(3-x)^2}{2x-6}$;

2) $\frac{(7+x)^2}{3(x+7)}$; 4) $\frac{6-8x}{(3-4x)^2}$; 6) $\frac{15-6m}{(2m-5)^2}$.

33••. 1) $\frac{t^2-4}{2t+4}$; 3) $\frac{6xm+18m}{9-x^2}$; 5) $\frac{a^3-16a}{a^2+4a}$;

2) $\frac{25-x^2}{2x+10}$; 4) $\frac{3x^2-15xy}{x^2-25y^2}$; 6) $\frac{t^2-9t}{81t-t^3}$.

34••. 1) $\frac{(m+n)^2}{-m-n}$; 3) $\frac{7x+14}{(-x-2)^2}$; 5) $\frac{(-3-m)^{2009}}{(-3-m)^{2008}}$;

2) $\frac{-2-x}{(x+2)^2}$; 4) $\frac{(-4-3m)^2}{6m+8}$; 6) $\frac{(-3-m)^{2008}}{(3+m)^{2009}}$.

35••. 1) $\frac{a^2-2a+1}{a-1}$; 3) $\frac{(t+3)\cdot 2}{t^2+6t+9}$; 5) $\frac{-t^2+100}{t^2+20t+100}$;

2) $\frac{d^2+4d+4}{d+2}$; 4) $\frac{4c^2+20c+25}{4c+10}$; 6) $\frac{n^2-18n+81}{81-n^2}$.

36••. 1) $\frac{9m^2-n^2}{9m^2+6n+1}$; 3) $\frac{36n^2-m^2}{m^2+12mn+36n^2}$; 5) $\frac{x^2-16b^2}{16b^2-8bx+x^2}$;

2) $\frac{4a^2-25b^2}{4a^2-20ab+25b^2}$; 4) $\frac{49a^2-42a+9}{49a^2-9}$; 6) $\frac{y^2-18by+81b^2}{81b^2-y^2}$.

37••. Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть його:

1) $(4m^2-n^2):(n+2m)$; 4) $(1+a):(1+a^3)$;

2) $(a-3b):(9b^2-a^2)$; 5) $(m-5):(m^3-125)$;

3) $(8+t^3):(t+2)$; 6) $(64+y^3):(4+y)$.

38••. Скоротіть дріб:

1) $\frac{ca+mc+za+mz}{2a+2m}$; 3) $\frac{m+n+mn+n^2}{6m+6n}$; 5) $\frac{a^2-ab-4a+4b}{16-a^2}$;

2) $\frac{2+c-2c-c^2}{4-4c}$; 4) $\frac{ax+x+2+2a}{3x+6}$; 6) $\frac{3m-bx+mx-3b}{9-x^2}$.

39••. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$ при $x=-0,5$; 3) $\frac{y^2-y^{16}}{y^{14}-1}$ при $y=-\frac{1}{7}$;

2) $\frac{a^6+a^{19}}{a^7+a^{20}}$ при $a=-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{-t^5-t^9}{t^6+t^2}$ при $t=\frac{1}{5}$.

40••. Зведіть дріб:

1) $\frac{2a}{5b^2}$ до знаменника $10b^5$; 2) $\frac{3x}{4m^2}$ до знаменника $12m^3x$;

3) $\frac{3x}{4y}$ до знаменника $8y^2$; 5) $\frac{10a}{13ty}$ до знаменника $130t^2y^3$;

4) $\frac{5}{6a}$ до знаменника $6a^3$; 6) $\frac{m^2}{x^3y^5}$ до знаменника $12x^3y^{10}$.

41••. Зведіть до знаменника $48a^3b^2x$ дріб:

1) $\frac{3t}{8a^3b^2}$; 3) $\frac{1}{48b^2x}$; 5) $\frac{a}{24a^3b^2}$;

2) $\frac{5}{48a^3x}$; 4) $\frac{7}{6a^2bx}$; 6) $\frac{2x}{3a^3b^2x}$.

42••. Серед виразів: $(4-a)$; $4x$; $(y+2m)$; $(3-a)$; $2y^2$; $3a^2$ виберіть доповняльний множник до дробу при зведенні його до знаменника M:

1) $\frac{x}{3a}, M=9a^3$; 4) $\frac{7x}{4-a}, M=(4-a)^2$;

2) $\frac{8-a}{x^6}, M=4x^7$; 5) $\frac{a-9}{3+a}, M=(3-a)(3+a)$;

3) $\frac{5t}{4x^9}, M=8x^9y^2$; 6) $\frac{11}{y-2m}, M=y^2-4m^2$.

43••. Зведіть дріб до знаменника M:

1) $\frac{x}{m-3}, M=(m-3)^2$; 5) $\frac{x}{x-3}, M=9-x^2$;

2) $\frac{y}{6-a}, M=36-a^2$; 6) $\frac{12x}{m+1}, M=m^3+1$;

3) $\frac{3b}{b^2+2bc+c^2}, M=5x(b+c)^2$; 7) $\frac{5b}{3-c}, M=27-c^3$;

4) $\frac{6}{x-y}, M=y-x$; 8) $\frac{3b}{b^2+bc+c^2}, M=b^3-c^3$.

44••. Скоротіть дріб:

1) $\frac{(2a-2b)^2}{(a-b)^2}$; 4) $\frac{t^2+8t+16}{(2t+8)^2}$; 7) $\frac{(6x+4y)^2}{9x^2-4y^2}$;

2) $\frac{(x-y)^2}{(3x-3y)^2}$; 5) $\frac{(3a+9)^2}{a^2+6a+9}$; 8) $\frac{4x^2-y^2}{(5y+10x)^2}$;

3) $\frac{(4x-2y)^2}{4x^2-y^2}$; 6) $\frac{(3x+9m)^2}{(3m+x)^2}$; 9) $\frac{(5x-10m)^2}{(2m-x)^2}$.

Франсуа Вієт

Великий внесок у розвиток алгебри зробили науковці Стародавньої Індії, Вавилону, Стародавньої Греції. Проте у працях стародавніх математиків не використовувалися символи і знаки, тому громіздкі записи гальмували розвиток науки. У 1202 р. італійський математик Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (1180–1240) увів запис дробу через риску в творі «Книга абака», однак дроби ще не вважали числами. Наприкінці XVI ст. французький математик Франсуа Вієт (1540–1603) став позначати невідомі величини голосними буквами A, E, I, O, ..., а відомі – приголосними B, C, M, K, ... Ці букви він з'єднав знаками дій, утворюючи перші буквені формули, які характерні й для сучасної алгебри. З виходом у 1707 р. книжки англійського математика і фізика Ісаака Ньютона (1643–1727) «Загальна арифметика» дроби визнано рівноправними числами та сформульовано поняття дробу як частки від ділення одного виразу на інший: «Запис однієї з двох величин над другою, між якими проведено риску, означає частки або ж величину, яка виникла при діленні верхньої величини на нижню... Величини такого роду називаються дробами». Таким чином з'явилася можливість працювати із сучасними алгебраїчними дробами.

Вправи для самооцінювання

1°. Виберіть спільні множники чисельника і знаменника дробу $\dfrac{16a^2bc^3}{24a^3b^2c}$.

а) $4a^3bc$; б) $8a^2bc$; в) $4a^2b$; г) $8a^3b^2c^3$.

2°. Виберіть два дроби, які тотожно рівні дробу $\dfrac{120m^5n^7x^2}{140m^7n^7x}$.

а) $\dfrac{12m^2}{14x}$; б) $\dfrac{12x}{14m^2}$; в) $\dfrac{6x}{7m^2}$; г) $\dfrac{6m^2}{7x}$.

3°. Укажіть доповняльний множник до чисельника і знаменника дробу $\frac{7x}{3a^2b}$ при зведенні його до знаменника $36a^4bc^3$.

а) $33a^2bc^3$; б) $33a^2c^3$; в) $12a^2bc^3$; г) $12a^2c^3$.

4•. Скоротіть дріб $\frac{64-m^2}{m^2+16m+64}$.

а) $\frac{8-m}{8+m}$; б) $\frac{m-8}{m+8}$; в) $\frac{1}{16m}$; г) $-\frac{1}{16m}$.

5•. Визначте дріб, у якому правильно виконано розкладання на множники чисельника і знаменника дробу $\frac{18a^2-60ab+50b^2}{25b^2-9a^2}$.

а) $\frac{2(3a-5b)^2}{(3a-5b)(3a+5b)}$; в) $\frac{(6a-10b)^2}{(5b-3a)^2}$;

б) $\frac{2(5b-3a)^2}{(5b-3a)(5b+3a)}$; г) $\frac{2(3a-5b)^2}{(5b-3a)^2}$.

6•. Укажіть чотири рівності, які є тотожностями.

а) $\frac{100-t^2}{(t-10)^2}=\frac{10+t}{10-t}$; г) $\frac{4a^2-9}{9-12a+4a^2}=-\frac{2a+3}{2a-3}$;

б) $\frac{4-y^2}{2+y}=y-2$; д) $\frac{7-x}{(x-7)^2}=-\frac{1}{7-x}$;

в) $\frac{y^2+2y+1}{1-y^2}=\frac{y+1}{1-y}$; е) $\frac{p^3-16p}{(p+4)(4-p)}=-p$.

7••. Скоротіть дріб $-\frac{(-x-a)^{50}}{(a+x)^{49}}$.

а) $-x-a$; б) $x+a$; в) $x-a$; г) $a-x$.

8••. Зведіть дріб $\frac{2-x}{m+5}$ до знаменника $-m^3-10m^2-25m$.

а) $\frac{m(2-x)(m+5)}{-m^3-10m^2-25m}$; в) $\frac{-m(x-2)(m+5)}{-m^3-10m^2-25m}$;

б) $\frac{m(x-2)(m-5)}{-m^3-10m^2-25m}$; г) $\frac{m(x-2)(m+5)}{-m^3-10m^2-25m}$.

9••. Знайдіть значення раціонального дробу $\frac{(-3x-6t)^2}{-5x-10t}$, якщо $x+2t=\frac{5}{12}$.

а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $-\frac{3}{4}$.

Вправи для повторення

45. Подайте многочлен у вигляді добутку:

1) $0{,}25a^2-6a+36$; 3) $mx^2+4mx+4m$; 5) $5t^2+5y^4-10ty^2$;

2) $-4x^2+4x-1$; 4) $-a^3+6a^2-9a$; 6) $-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}m^3-m^6$.

46. Розкладіть многочлен на множники:

1) $ab+bc+ca+c^2$; 3) $(a-b)^2-ca+cb$; 5) $(2a+3)^2-(a-1)^2$;

2) $m+c+c^3+mc^2$; 4) $x-y+3(y-x)^2$; 6) $(4x-2)^2-(x-2)^2$.

47. Доведіть, що значення виразу:

1) $8^8+8^7-8^6$ ділиться на 71;

2) $9^7-9^6+9^5$ ділиться на 73;

3) $11^9+11^8-11^7$ ділиться на 109;

4) $13^{10}+13^9-13^8$ ділиться на 181.

48. Знайдіть допустимі значення виразу:

1) $\frac{7a}{2a+5}$; 3) $\frac{m+4}{m^2-4}$; 5) $\frac{m+5}{2m(m-5)}$;

2) $\frac{a-5}{5a(a+11)}$; 4) $\frac{3y}{y^2+9}$; 6) $\frac{8+y}{y(y-1)(y+2)}$.

49. Знайдіть суму і різницю двох виразів A і B, якщо:

1) $A=\frac{2x^2-3x+1}{8}$, $B=\frac{2x^2+3x-1}{8}$;

2) $A=\frac{5x^2-2x+3}{20}$, $B=\frac{5x^2+2x-3}{20}$;

3) $A=\dfrac{9x^2-4y^2}{24}$, $B=\dfrac{4y^2-9x^2}{24}$;

4) $A=\dfrac{49x^2-16y^2}{10}$, $B=\dfrac{16y^2-49x^2}{10}$.

50. Знайдіть закономірність між виразами, записаними в першому рядку. Застосовуючи цю закономірність до другого рядка, запишіть замість «...» пропущені числа, а замість знака «?» – раціональний вираз.

$\dfrac{a^3+a^5}{a^3}$	$a \neq 0$	a^2+1
$\dfrac{m^6-m^4}{m^4-m^2}$	$m \neq ...$	?

§3. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як знайти суму (різницю) двох раціональних дробів з однаковими знаменниками;**
- **як спростити чисельник, утворений при додаванні (відніманні) раціональних дробів з однаковими знаменниками;**
- **який вираз вважають остаточним результатом додавання (віднімання) раціональних дробів;**
- **як поширюється правило виконання дій додавання (віднімання) для більшої кількості раціональних дробів.**

Як відомо, при додаванні (відніманні) цілих виразів з однаковими знаменниками додають (віднімають) їх чисельники, а знаменник залишають без змін. Наприклад:

$$\frac{2a}{13}+\frac{5a}{13}=\frac{2a+5a}{13}=\frac{7a}{13},\quad \frac{17x-2}{5}-\frac{12x+6}{5}=\frac{17x-2-12x-6}{5}=\frac{5x-8}{5}.$$

Аналогічно виконують додавання (віднімання) будь-яких раціональних дробів з однаковими знаменниками:

$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}$, де a, b, c – деякі многочлени і $c \neq 0$.

Доведемо, що ця рівність справедлива при будь-яких допустимих значеннях змінних, тобто для $c \neq 0$.

Позначимо $\frac{a}{c}=m, \frac{b}{c}=k$, тоді $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=m+k$. З іншого боку, за означенням частки $a = mc$, $b = kc$. Звідси $a + b = mc + kc = c(m + k)$, тобто $a + b = c(m + k)$. При $c \neq 0$

$$m+k=\frac{a+b}{c}.$$

Отже, з одного боку, $m+k=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, а з другого $m+k=\frac{a+b}{c}$, тому справедлива рівність: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

Така рівність є тотожністю, оскільки виконується для довільних значень змінних a, b, c, причому $c \neq 0$, де a, b, c – многочлени.

Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, потрібно додати їх чисельники, а знаменник залишити без змін.

Оскільки віднімання завжди можна замінити додаванням (додати протилежний вираз), то віднімання раціональних дробів виконується за правилом, аналогічним додаванню:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a}{c}+\left(-\frac{b}{c}\right)=\frac{a+(-b)}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Щоб відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками, потрібно від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити без змін.

За правилом додавання (віднімання) можна знайти суму (різницю) і більшої кількості дробів з однаковими знаменниками.

Зауваження. Після виконання дій додавання (віднімання) необхідно перевірити, чи можна отриманий дріб скоротити.

Виконання дій додавання (віднімання) раціональних дробів з однаковими знаменниками здійснюють за таким алгоритмом:

1) за правилом додавання (віднімання) раціональних дробів отримують дріб із тим самим знаменником і чисельником, що дорівнює сумі (різниці) чисельників заданих дробів;

2) спрощують утворений чисельник-многочлен, використовуючи правила розкриття дужок, зведення подібних доданків;

3) отриманий дріб скорочують, якщо це можливо.

Приклад. Виконайте дії $\dfrac{8-a^2}{a^2+am}+\dfrac{3am+6}{a^2+am}-\dfrac{14-4a^2}{a^2+am}$.

Розв'язання

Як записати

$$\frac{8-a^2}{a^2+am}+\frac{3am+6}{a^2+am}-\frac{14-4a^2}{a^2+am}=$$

$$=\frac{(8-a^2)+(3am+6)-(14-4a^2)}{a^2+am}=$$

$$=\frac{3a^2+3am}{a^2+am}=\frac{3a(a+m)}{a(a+m)}=3$$

при $a\neq 0$ і $a\neq -m$.

Відповідь. 3 при $a\neq 0$ і $a\neq -m$.

Як пояснити

Застосовуючи правила додавання та віднімання раціональних дробів, спрощуємо чисельник утвореного дробу. Отриманий дріб $\dfrac{3a^2+3am}{a^2+am}$ – скоротний, тому розкладаємо його чисельник і знаменник на множники: $\dfrac{3a(a+m)}{a(a+m)}=3$ при $a\neq 0$ і $a\neq -m$.

Рене Декарт

Стародавні математики у своїх працях не використовували символи і знаки, тому громіздкі записи утруднювали здійснення записів алгебраїчних перетворень, гальмували розвиток науки. Необхідність і можливість введення буквеної символіки і лаконічніших записів прийшли з винайденням книгодрукування в XV ст. Зокрема, англійський математик Т. Гарріот (1560–1621) увів знаки дій та нерівностей. Французький математик і філософ Р. Декарт (1596–1650) удосконалив використання символіки. У своїх записах для невідомих величин він використовує останні букви латинського алфавіту x, y, z, ..., а для відомих – перші букви латинського алфавіту a, b, c і т. д. У математиці відбувся великий прорив: буквами замінюють які завгодно числа, а символічними позначеннями – дії. Це значно спрощує записи, тому такий успіх мав виключно важливе значення. Проте пройшли ще десятиліття, а може, й століття, поки виробилися зручні знаки й стали такими, як ми їх бачимо сьогодні.

Але без такого знаряддя, як мова формул, був би неможливий подальший розвиток математики: створення нових її напрямів – математичного аналізу, математичного трактування законів механіки та фізики тощо.

Вправи для закріплення

51°. Виконайте додавання або віднімання дробів та вкажіть область допустимих значень отриманого дробу:

1) $\frac{2b^2}{3x}-\frac{b^2}{3x}$; 3) $\frac{4mn}{5a}+\frac{3mn}{5a}$;

2) $\frac{x+2y}{19}-\frac{x}{19}$; 4) $\frac{m+16n}{9y}-\frac{16n}{9y}$.

52°. Подайте суму або різницю у вигляді дробу:

1) $\frac{a+8}{3a}+\frac{a-8}{3a}$; 3) $\frac{14y-12}{3y-9}-\frac{7y+9}{3y-9}$;

2) $\frac{25-3x}{12x}-\frac{25-9x}{12x}$; 4) $\frac{8t+13}{2t+16}+\frac{11-5t}{2t+16}$.

Спростіть вирази (53–56).

53°. 1) $\frac{18-2a}{b}-\frac{3-2a}{b}$; 3) $\frac{25m-1}{3m}+\frac{12-3m}{3m}-\frac{m-1}{3m}$;

2) $\frac{-11-3a}{2a}+\frac{8a+11}{2a}$; 4) $\frac{6y-1}{6y}-\frac{2y+13}{6y}+\frac{9+2y}{6y}-\frac{1}{6y}$.

54•. 1) $\frac{9}{3-x}-\frac{x^2}{3-x}$; 4) $\frac{16t+1}{t^2-25}+\frac{4-15t}{t^2-25}$;

2) $\frac{25}{x-5}-\frac{x^2}{x-5}$; 5) $\frac{3x-11}{(3-x)^2}+\frac{17-5x}{(3-x)^2}$;

3) $\frac{3a-2m}{m^2-a^2}+\frac{3m-2a}{m^2-a^2}$; 6) $\frac{13a+6b}{(a+2b)^2}-\frac{9a-2b}{(a+2b)^2}$.

55•. 1) $\frac{2a}{3-a}+\frac{6}{a-3}$; 3) $\frac{5x+y}{2x-y}+\frac{3x+2y}{y-2x}$; 5) $\frac{16}{a-4}+\frac{a^2}{4-a}$;

2) $\frac{5x}{7-x}-\frac{3x}{x-7}$; 4) $\frac{6x+22a}{x-4a}+\frac{4x+30a}{4a-x}$; 6) $\frac{t^2}{t-9}+\frac{81}{9-t}$.

56•. 1) $\frac{3x-2}{2x-3}+\frac{2-3x}{3-2x}$; 2) $\frac{12a-11m}{4a-2m}-\frac{9a-10m}{4a-2m}$;

3) $\frac{1+49x^2}{7x-1}+\frac{14x}{1-7x}$;

4) $\frac{9-30a}{5a-3}-\frac{25a^2}{3-5a}$;

5) $\frac{9m^2}{2a-3m}+\frac{12am-4a^2}{3m-2a}$;

6) $\frac{81y^2}{5x-9y}-\frac{25x^2-90xy}{9y-5x}$.

Знайдіть значення виразів (57–58).

57•. 1) $\frac{m^2-12}{m-4}-\frac{4}{m-4}$ при $m=-2$;

2) $\frac{5k+11}{k^2-9}-\frac{4k+14}{k^2-9}$ при $k=-2{,}8$;

3) $\frac{3y^2-15}{7-y}+\frac{34+2y^2}{y-7}$ при $y=2$;

4) $\frac{5m^2+41}{9-2m}-\frac{40-9m^2}{2m-9}$ при $m=2$.

58••. 1) $\frac{k^2-8k}{k^2-16}+\frac{16}{k^2-16}$ при $k=-8$;

2) $\frac{t^2-4at}{t^2-4a^2}-\frac{4a^2}{4a^2-t^2}$ при $t=-2$, $a=\frac{1}{2}$;

3) $\frac{8x^2+9y^2}{9y^2-16x^2}-\frac{24xy-8x^2}{9y^2-16x^2}$ при $y=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{2}$;

4) $\frac{25m^2}{25m^2-4n^2}+\frac{20mn-4n^2}{4n^2-25m^2}$ при $m=-0{,}4$, $n=-0{,}5$.

59••. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної a значення виразу не залежить від a:

1) $\frac{8a-3}{3a-4}+\frac{2a+5}{4-3a}$;

2) $\frac{36+17a}{5a+12}-\frac{2a}{12+5a}$;

3) $\frac{14+13a}{9-8a}+\frac{5a+23}{8a-9}$;

4) $\frac{2a+111}{3a+19}-\frac{32a-301}{19+3a}$.

60••. Виконайте віднімання:

1) $\frac{t^2}{(t-3)^2}-\frac{9}{(3-t)^2}$;

2) $\frac{16}{(4-y)^2}-\frac{y^2}{(y-4)^2}$;

3) $\frac{25}{(5+a)^2}-\frac{a^2}{(a+5)^2}$;

4) $\frac{1}{(2m-1)^2}-\frac{4m^2}{(1-2m)^2}$.

Подайте дроби у вигляді суми або різниці двох нескоротних дробів (61–62).

61••. 1) $\frac{m+n}{2}$; 4) $\frac{4m^2-n^2}{2mn}$;

2) $\frac{3a-2bc}{a}$; 5) $\frac{a^3+a^6}{a^2}$;

3) $\frac{m^2-n^2}{mn}$; 6) $\frac{n^{10}-n^7}{n^5}$.

Скористайтесь тотожністю $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$.

62••. 1) $\frac{t^{19}-t^{14}}{t^{16}}$; 3) $\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}$; 5) $\frac{3a^2+2m^2}{6a^2m^2}$;

2) $\frac{x^5-x^9}{x^7}$; 4) $\frac{a^3-7ab}{a^3}$; 6) $\frac{9t^4-m^4t^3}{t^4}$.

Вправи для самооцінювання

1°. Виконайте віднімання $\frac{3k+m}{2b} - \frac{m}{2b}$.

а) $\frac{3k+2m}{2b}$; б) $\frac{3k}{2b}$; в) $\frac{3k-2m}{2b}$; г) $\frac{3km}{2b}$.

2°. Подайте суму $\frac{5a-4b}{4a} + \frac{21a-10b}{4a}$ у вигляді дробу.

а) $\frac{13-14b}{2}$; б) $\frac{26a-7b}{2a}$; в) $\frac{13a-7b}{2a}$; г) $\frac{13-7b}{2}$.

3°. Спростіть вираз $\frac{x^2+1}{x-3} - \frac{10}{x-3}$, якщо $x \neq 3$.

а) $x+3$; б) $x-3$; в) $x-6$; г) $x+6$.

4•. Виконайте віднімання $\frac{a-3}{a-1} - \frac{2}{1-a}$.

а) -1; б) $\frac{a-1}{1-a}$; в) $\frac{a-5}{a-1}$; г) 1.

5•. Знайдіть значення виразу $\frac{x^2+9y^2}{x-3y} + \frac{6xy}{3y-x}$ при $x=-4$, $y=\frac{2}{3}$.

а) -6; б) 36; в) 4; г) -2.

6•. Спростіть вираз $\dfrac{4m^2}{(5-2m)^2}-\dfrac{25}{(2m-5)^2}$.

а) $\dfrac{4m^2+25}{(5-2m)^2}$; б) $\dfrac{2m}{2m+5}$; в) 1; г) $\dfrac{2m+5}{2m-5}$.

7••. Подайте дріб $\dfrac{3a^6+2a^2}{6a^4}$ у вигляді суми двох нескоротних дробів.

а) $\dfrac{3a^2}{6}+\dfrac{1}{3a^2}$; б) $\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{3}$; в) $\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{3a^2}$; г) $\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{1}{4a^2}$.

8••. Подайте вираз $\dfrac{64-2ab}{(a-8)^2}+\dfrac{2ab-a^2}{(8-a)^2}$ у вигляді нескоротного дробу.

а) $\dfrac{64-a^2}{(a-8)^2}$; б) $\dfrac{8+a}{8-a}$; в) $\dfrac{a^2-64}{(8-a)^2}$ г) $\dfrac{a+8}{a-8}$.

9••. Виберіть два правильно виконані тотожні перетворення.

а) $\dfrac{5m}{m-3}-\dfrac{2m-4}{3-m}=\dfrac{5m+2m+4}{m-3}$;

б) $\dfrac{9m^2}{(4-3m)^2}-\dfrac{16}{(3m-4)^2}=\dfrac{9m^2-16}{(3m-4)^2}$;

в) $\dfrac{a^4b^4}{(a^2b^2-1)^2}-\dfrac{1}{(1-a^2b^2)^2}=\dfrac{a^4b^4+1}{(a^2b^2-1)^2}$;

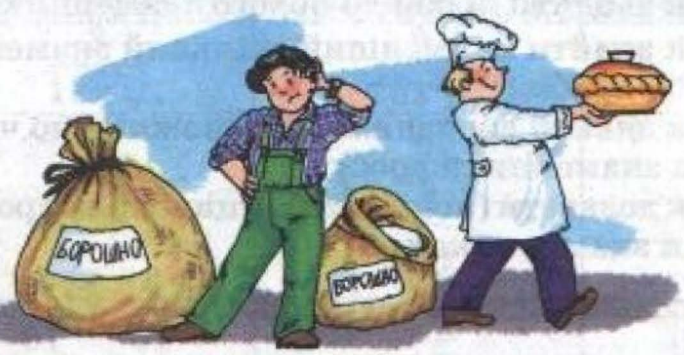
г) $\dfrac{x^2+9y^2}{x-3y}-\dfrac{6xy}{3y-x}=\dfrac{(x+3y)^2}{x-3y}$.

Вправи для повторення

63. Спростіть вираз:

1) $9x^2-(3x-2)(3x+2)$;
2) $25y^2-(5y+7)(5y-7)$;
3) $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2$;
4) $(5x-4y)^2-(5x+4y)^2$.

64. У першому мішку міститься 90 кг борошна, а в другому – на 15 кг менше. Після того як з першого мішка взяли в 3 рази більше борошна, ніж з другого, у ньому залишилось у 2 рази менше борошна, ніж у другому. Скільки кілограмів борошна взяли з першого мішка?



65. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+4)(x+1) = x-(x-2)(2-x)$;

2) $(x-9)(x-1) = x-(x-3)(3-x)$;

3) $(x+2)(x+8) = 3x-(4-x)(x-4)$;

4) $(x-4)(x-9) = 7x-(6-x)(x-6)$.

66. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$; 3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$;

2) $3\frac{1}{2}-\left(1\frac{1}{2}-\left(2\frac{1}{3}-\left(3\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$; 4) $2\frac{1}{2}-\left(3\frac{1}{4}-\left(4\frac{1}{8}-\left(5\frac{1}{16}-6\frac{1}{32}\right)\right)\right)$.

Використайте переставний і сполучний закони додавання.

67. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{a}{8}-\frac{b}{4}-1$; 3) $\frac{a}{9}+\frac{a-1}{3}+2$; 5) $\frac{m+c}{3}-m-c$;

2) $\frac{k}{7}+\frac{c}{3}-2$; 4) $\frac{m}{10}-\frac{2m}{15}+m$; 6) $\frac{y+k}{5}+y+k$.

68. Знайдіть закономірність між виразами, записаними в першому рядку, застосуйте її до виразів в другому рядку і запишіть вираз, який має бути замість знака «?».

$8a-7b$	$10b-4a$	$4a+3b$
$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$	$\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$	?

§4. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З РІЗНИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як зводити дроби до нового знаменника;**
- **як знайти найменший спільний знаменник кількох дробів;**
- **як знайти доповняльний множник до чисельника та знаменника дробу;**
- **як додавати (віднімати) раціональні дроби з різними знаменниками.**

На прикладі знаходження суми дробів $\frac{3}{10}$ і $\frac{8}{15}$ відтворимо алгоритм виконання додавання (віднімання) звичайних дробів з різними знаменниками:

1) визначають найменший спільний знаменник дробів, тобто найменше спільне кратне чисел 10 і 15. Число 30 є найменшим спільним знаменником (НСК (10, 15) = 30);

2) знаходять доповняльні множники до чисельника та знаменника кожного з дробів (це 3 і 2 відповідно);

3) множать відповідні доповняльні множники на чисельники і додають (віднімають) отримані добутки, записуючи їх у чисельнику нового дробу, та записують отриманий найменший спільний знаменник – число 30;

4) виконують скорочення отриманого дробу, якщо це можливо.

Таким чином

$$\frac{3^{\backslash 3}}{10}+\frac{8^{\backslash 2}}{15}=\frac{3\cdot 3+8\cdot 2}{30}=\frac{9+16}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}.$$

Користуючись цим же алгоритмом, виконуємо додавання та віднімання раціональних дробів. Запишемо правило додавання раціональних дробів з різними знаменниками у загальному вигляді:

$\frac{a^{\backslash d}}{b}+\frac{c^{\backslash b}}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$, де a, b, c і d – довільні многочлени, причому $b\neq 0$ і $d\neq 0$.

Проте слід зауважити, що при додаванні (відніманні) раціональних дробів найскладнішим є перший крок: *знаходження найменшого спільного знаменника дробів*.

Наприклад, для дробів $\frac{x^2}{4a^3}$ і $\frac{5x}{6a^2}$ спільним знаменником є одночлен $12a^3$. Число 12 – найменше спільне кратне чисел 4 і 6, а вираз a^3 – степінь з найбільшим показником, який ділиться як на a^2, так і на a^3.

!? Наведемо кілька прикладів дробів та їх найменших спільних знаменників. Проаналізуйте самостійно, чому саме вказаний вираз є найменшим спільним знаменником двох дробів.

№	I дріб	II дріб	Найменший спільний знаменник
1)	$\frac{8}{13x^2y}$	$\frac{3}{26x^2y}$	$26x^2y$
2)	$\frac{5}{a^2b^2}$	$\frac{7}{a^3b^4}$	a^3b^4
3)	$\frac{10a}{3x^2y}$	$\frac{b}{2xy^2}$	$6x^2y^2$
4)	$\frac{a}{x-y}$	$\frac{b}{x+y}$	$(x-y)(x+y)$
5)	$\frac{13}{a-b}$	$\frac{5}{(a-b)^2}$	$(a-b)^2$
6)	$\frac{a}{(x-y)(x+y)}$	$\frac{b}{(x-y)^2}$	$(x-y)^2(x+y)$
7)	$\frac{5}{2(x-3)}$	$\frac{7}{8(x-3)}$	$8(x-3)$
8)	$\frac{19}{3(a+4)}$	$\frac{17}{4(b-1)}$	$12(a+4)(b-1)$
9)	$\frac{1}{5(x-3)}$	$\frac{1}{5(x-2)}$	$5(x-3)(x-2)$
10)	$\frac{24}{(x-1)^4(x-2)^2}$	$\frac{15}{(x-1)(x-2)(x-3)}$	$(x-1)^4(x-2)^2(x-3)$

Отже, для знаходження найменшого спільного знаменника дробів треба: 1) всі знаменники розкласти на множники (знаменники всіх дробів таблиці вже розкладені на множники!); 2) знайти найменше спільне кратне для числових коефіцієнтів; 3) визначити для кожного буквеного множника, який трапляється кілька разів, найбільший показник степеня; 4) усі існуючі у знаменниках множники «зібрати» в добуток, причому буквені множники, які повторюються кілька разів, беруться з найбільшим показником степеня.

Таким чином, можна сформулювати алгоритм, який допоможе додавати та віднімати раціональні дроби:

1) розкладаємо знаменник кожного дробу на множники;

2) знаходимо найменше спільне кратне числових коефіцієнтів, які містяться в розкладах на множники, отриманих на першому кроці;

3) складаємо добуток, який міститиме *числовий коефіцієнт, отриманий на другому кроці, та всі існуючі у знаменниках буквені множники, причому множники, які повторюються кілька разів, слід брати з найбільшим показником степеня.* Отриманий добуток – ***найменший спільний знаменник дробів;***

4) знаходимо доповняльні множники для кожного з дробів (це ті множники, які містяться в новому знаменнику, але яких немає в заданому знаменнику);

5) множимо доповняльні множники на відповідні чисельники, записуємо відповідну суму (різницю) отриманих добутків у чисельнику нового дробу та спрощуємо вираз у чисельнику;

6) перевіряємо, чи скорочуватиметься отриманий дріб.

Зауваження. Область допустимих значень отриманого виразу – це допустимі значення раціональних дробів, над якими виконуються дії. Її знаходять після того, як знаменник розкладено на множники (крок 1).

Приклад 1. Виконайте дії $\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}$.

Розв'язання

Як записати

$$\frac{12-y}{6y-36}+\frac{6}{6y-y^2}=$$

$$=\frac{12-y}{6(y-6)}+\frac{6}{y(6-y)}=$$

$$=\frac{12-y}{6(y-6)}-\frac{6}{y(y-6)}=$$

$$=\frac{(12-y)\cdot y-6\cdot 6}{6y(y-6)}=$$

$$=\frac{12y-y^2-36}{6y(y-6)}=\frac{-(y^2-12y+36)}{6y(y-6)}=$$

$$=\frac{(y-6)^2}{6y(6-y)}=\frac{(6-y)^2}{6y(6-y)}=\frac{6-y}{6y},$$

причому $y\neq 0$ і $y\neq 6$.

Відповідь. $\frac{6-y}{6y}$, причому $y\neq 0$ і $y\neq 6$.

Як пояснити

1) Розкладаємо кожний знаменник на множники;

2) змінюємо знак перед другим доданком так, щоб отримані знаменники мали однаковий множник: $(y-6)$;

3) знаходимо найменший спільний знаменник дробів: $6y(y-6)$ та визначаємо доповняльні множники для кожного з дробів: до першого – y, до другого – 6;

4) спрощуємо новий чисельник, звівши його до вигляду многочлена;

5) розкладаємо чисельник на множники;

6) скорочуємо отриманий дріб;

7) записуємо відповідь, враховуючи ОДЗ: $y\neq 0$ і $y\neq 6$ (див. крок 1).

Вправи для закріплення

69°. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a}{m}+\frac{m}{a}$; 2) $\frac{4}{5a}-\frac{5}{7a}$; 3) $\frac{1}{24x}-\frac{1}{36x}$; 4) $\frac{5y}{12a}+\frac{7y}{16a}$.

70°. Виконайте дії:

1) $\frac{m-2}{4m}+\frac{m-3}{6m}$; 3) $\frac{4+5m^2}{16m}-\frac{15m^2}{48m}$;

2) $\frac{2x-3}{10x}-\frac{x+7}{15x}$; 4) $\frac{2k^2-7}{24k}-\frac{k^2-2}{48k}$.

71•. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $m+\frac{1}{a}$; 3) $\frac{m+n^2}{n}-n$;

2) $x-\frac{2}{y}$; 4) $\frac{x-y^2}{y}+y$.

Цілий вираз A завжди можна записати у вигляді дробу $\frac{A}{1}$.

72•. Виконайте дії:

1) $\frac{m^3-1}{m^3}-\frac{1}{m^4}$; 3) $\frac{8+n}{n^3}-\frac{1}{n^2}$;

2) $\frac{a^4+3}{a^4}+\frac{1-a^2}{a^2}$; 4) $\frac{6a+2}{a^9}-\frac{6}{a^8}$.

73•. Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{2x-3y}{x^2y}-\frac{3x+2y}{xy^2}$; 3) $\frac{m+n}{m^2n}+\frac{m-n}{mn^2}$;

2) $\frac{5a-b}{ab^2}+\frac{a-5b}{a^2b}$; 4) $\frac{a+m^2}{m^3a}-\frac{a^2+m}{ma^3}$.

74•. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{1}{mn}+\frac{1}{mx}+\frac{1}{nx}$; 3) $\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{b}-\frac{b^2-a^2}{ab}$;

2) $\frac{y-x}{xy}+\frac{z-x}{xz}-\frac{z+y}{yz}$; 4) $\frac{2m+3n}{m}-\frac{3m-n}{n}-\frac{3n^2-3m^2}{mn}$.

75°. **Виконайте віднімання дробів:**

1) $\frac{a-b}{ab}-\frac{m-b}{bm}$; 3) $\frac{b-a}{a^2b^3}-\frac{a+b}{a^3b^2}$;

2) $\frac{a-4b}{4a}-\frac{b-4a}{4b}$; 4) $\frac{3b+2a}{9b^2a}-\frac{2a-5b}{6a^2b}$.

Спростіть вирази (76–79).

76°°. 1) $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1$; 3) $7-\frac{14a}{2a+b}$;

2) $\frac{9}{b^2}+\frac{6}{b}+1$; 4) $5-\frac{10x}{2x+y}$.

77°°. 1) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b+a}$; 3) $\frac{2}{4-a}+\frac{3}{4+a}$;

2) $\frac{y}{x-y}+\frac{x}{x+y}$; 4) $\frac{1}{x+2y}-\frac{1}{x-2y}$.

78°°. 1) $\frac{5a}{2(a-b)}-\frac{2a}{3(a-b)}$; 3) $\frac{m}{2-a}+\frac{1}{7a-14}$;

2) $\frac{3x}{4(x+y)}-\frac{2x-y}{3(x+y)}$; 4) $\frac{2k}{5t-35}-\frac{k}{28-4t}$.

79°°. 1) $\frac{x-1}{3x-12}-\frac{x-3}{2x-8}$; 3) $\frac{4a}{3a-6}+\frac{3a}{8-4a}$;

2) $\frac{b-2}{2b-6}-\frac{b-1}{3b-9}$; 4) $\frac{3y}{4y-4}+\frac{2y}{5-5y}$.

Вправи для самооцінювання

1°. **Укажіть правильні тотожності.**

а) $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$; в) $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}=\frac{bc-ad}{ab}$;

б) $\frac{b}{a}-\frac{c}{d}=\frac{ab-cd}{ad}$; г) $\frac{d}{a}+\frac{b}{c}=\frac{b+d}{ac}$.

2°. **Виберіть дві правильні тотожності.**

а) $\frac{2}{3a}+\frac{5}{4a}=\frac{23}{12a}$; б) $\frac{13}{5a}-\frac{3}{2a}=\frac{11}{10a}$;

в) $\frac{4}{7a}-\frac{2}{5a}=\frac{18}{35a^2}$; г) $\frac{3}{4a}+\frac{4}{9a}=\frac{7}{36a^2}$.

3°. Доберіть до кожного раціонального виразу його найменший спільний знаменник.

а) $\frac{a^3-1}{a^5b}+\frac{3}{a^2b^3}$; 1) a^4b^4;

б) $\frac{a^2+4}{ab^4}-\frac{a^2-1}{a^4b^3}$; 2) a^2b^2;

в) $\frac{a+7}{a^3b^2}+\frac{a-3}{a^2b^5}$; 3) a^5b^3;

г) $\frac{2a+1}{ab^2}-\frac{a-6}{a^2b}$. 4) a^3b^5.

а	
б	
в	
г	

4•. Серед виразів (а–в) визначте такий, який є найменшим спільним знаменником для трьох із чотирьох заданих виразів (1–4), і такий, який не може бути спільним знаменником для жодного з них.

а) $24a^3b^3$; 1) $\frac{a+b}{3a^2b^5}+\frac{a-b}{8a^3b^3}$;

б) $24a^3b^5$; 2) $\frac{2a-b}{12a^3b^2}-\frac{a-2b}{8ab^5}$;

в) $24a^5b^3$. 3) $\frac{a^2-b^2}{24a^2b^3}+\frac{b^2-a^2}{6a^5}$;

4) $\frac{a^2-b}{3ab^5}-\frac{a-b^2}{24a^3}$.

а			
б			
в			

5•. Подайте раціональний вираз $\frac{a+2b}{a}-\frac{3a+b}{b}-\frac{b^2-3a^2}{ab}$ у вигляді дробу.

а) $\frac{2}{ab}$; б) $\frac{b}{a}$; в) $\frac{3b}{a}$; г) $\frac{b^2-6a^2}{ab}$.

6•. Визначте дві тотожності:

1) $\frac{x^2-y^2}{x}+x=\frac{2x^2-y^2}{x}$ при $x\neq0$;

2) $\frac{x^2+y}{x}-x=\frac{2x^2+y}{x}$ при $x\neq0$;

3) $\dfrac{x-y^3}{y^2}+y=\dfrac{x-y^3+y}{y^2}$ при $y\neq0$;

4) $\dfrac{x+y^2}{y}-y=\dfrac{x}{y}$ при $y\neq0$.

а) 1 і 3; б) 2 і 4; в) 1 і 4; г) 2 і 3.

7••. Ідентифікуйте парами раціональний вираз і його запис у вигляді раціонального дробу.

а) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}$; 1) $\dfrac{b^2-2ab-a^2}{a^2-b^2}$;

б) $\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}$; 2) $\dfrac{a^2-2ab-b^2}{a^2-b^2}$;

в) $\dfrac{a}{b-a}-\dfrac{b}{a+b}$; 3) $\dfrac{b^2+2ab-a^2}{a^2-b^2}$;

г) $\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}$. 4) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

а	
б	
в	
г	

8••. Визначте вирази, які при перетворенні їх до вигляду дробу містять у чисельнику квадрат суми чи різниці двох виразів:

1) $a-\dfrac{5a-16}{a-3}$; 3) $2a-\dfrac{2(a+4)}{a-3}$;

2) $a-\dfrac{12a+4}{a+8}$; 4) $4a-\dfrac{4(10a-1)}{a+8}$.

а) 1 і 3; б) 1 і 4; в) 2 і 4; г) 3 і 4.

9••. Знайдіть суму многочленів M і P, якщо

$$M=\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4} \quad \text{і} \quad P=\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}+\frac{36}{x^2-9}.$$

а) $\dfrac{20x+48}{x^2+5x+6}$; б) $\dfrac{-20x}{x^2+5x+6}$; в) $\dfrac{-4x-48}{x^2-x-6}$; г) $\dfrac{20x}{x^2-x-6}$.

Вправи для повторення

80. Запишіть замість зірочок такі одночлени, щоб утворилася тотожність:

1) $(7a-b)(*+*+*)=343a^3-b^3$;

2) $(*-*)(25a^4+*+4b^2)=125a^6-8b^3$;

3) $(ab+*)(*-*+c^4)=a^3b^3+c^6$;

4) $(*+3b)(*-*+*)=8a^3+27b^3$.

81. Обчисліть, не використовуючи калькулятор:

1) $\frac{132^3-68^3}{64}+132\cdot68$; 3) $\frac{5{,}783^3-4{,}317^3}{1{,}466}+5{,}783\cdot4{,}317$;

2) $\frac{89^3+64^3}{153}-89\cdot64$; 4) $\frac{8{,}333^3+1{,}333^3}{9{,}666}-8{,}333\cdot1{,}333$.

82. Периметр прямокутника дорівнює 70 см. Коли довжину прямокутника зменшили на 5 см, а ширину збільшили на 5 см, то його площа збільшилася на 50 см^2. Знайдіть довжину і ширину початкового прямокутника. На скільки відсотків збільшилася площа нового прямокутника?

83. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^{44}a^{12}}{a^{30}a^{18}}$; 3) $\frac{(x+y)^6(y+x)^5}{(x+y)^8}$;

2) $\frac{(0{,}5)^8\cdot b^{10}}{(0{,}5)^6\cdot b^7}$; 4) $\frac{(x-y)^{100}}{(x-y)^{78}(x-y)^{20}}$.

84. Виконайте дії:

1) $3\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{11}-7\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{15}$;

2) $6\frac{1}{3}:\frac{19}{21}+5\frac{1}{4}:\frac{21}{28}$;

3) $6\frac{6}{11}:3\frac{3}{11}+9\frac{3}{13}:3\frac{1}{13}+4\frac{4}{15}:1\frac{1}{15}+12\frac{4}{17}:6\frac{2}{17}$;

4) $2\frac{1}{8}:1\frac{1}{16}+4\frac{1}{15}:\frac{1}{60}+\frac{3}{4}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

Готуймося до тематичного оцінювання

«Раціональні вирази. Додавання та віднімання раціональних виразів»

Запитання для самоконтролю

1. Які вирази називаються дробовими?
2. Які дроби називаються раціональними?

3. Які вирази називаються раціональними?

4. Які значення змінної називаються допустимими?

5. Яка рівність називається тотожністю?

6. Якою тотожністю виражається основна властивість дробу?

7. Який раціональний дріб називається скоротним (нескоротним)?

8. Який алгоритм скорочення раціональних дробів?

9. Як знайти суму (різницю) кількох раціональних дробів з однаковими знаменниками?

10. Як знайти доповняльний множник до чисельника та знаменника дробу?

11. Як знайти найменший спільний знаменник для кількох раціональних дробів з різними знаменниками?

12. Як знайти суму (різницю) кількох раціональних дробів з різними знаменниками?

Завдання в тестовій формі

1°. Укажіть дробові вирази.

А) $\frac{7}{5}+\frac{36a^2-1}{4}$; В) $\frac{2y}{3}+\frac{3y}{2}$; Д) $\frac{3x^2+8x-3}{2x-1}$.

Б) $\frac{2x-3}{4}+x^2$; Г) $\frac{17a}{b}-\frac{3b}{2a}$;

2°. Доберіть до кожного значення x (А–Д) відповідне значення (1–5) раціонального дробу $\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

А) $x=0$; 1) $\frac{-7}{16}$;

Б) $x=3$; 2) -1;

В) $x=-1$; 3) 3;

Г) $x=2$; 4) $-\frac{3}{4}$;

Д) $x=-3$. 5) $\frac{5}{4}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

3°. Виберіть формулу для знаходження часу (t, год), якщо відомі відстань (s, км) та середня швидкість мотоцикла, що дорівнює 20 км/год.

А) $t=20s$; Б) $t=s-20$; В) $t=\frac{s}{20}$; Г) $t=20-s$; Д) $t=\frac{20}{s}$.

4°. **Укажіть два раціональні дроби, областю визначення яких є довільне число.**

А) $\dfrac{x^2-9}{x+3}$; Б) $\dfrac{x^2-16}{x^2+16}$; В) $\dfrac{3-x}{x^2-9}$; Г) $\dfrac{x+2}{4-x^2}$; Д) $\dfrac{5-x}{25+x^2}$.

5°. **Ідентифікуйте дробовий вираз (А–Д) та значення змінної (1–5), при яких цей вираз не має змісту.**

А) $\dfrac{x-1}{x+1}$; 1) Таких не існує;

Б) $\dfrac{x+1}{x-1}$; 2) $x=-1$;

В) $\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$; 3) $x=1$;

Г) $\dfrac{1+x^2}{x^2}$; 4) $x=\pm1$;

Д) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. 5) $x=0$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

6°. **Визначте два дроби, до яких правильно застосовано правило скорочення:**

1) $\dfrac{14b}{21b^3}=\dfrac{2b^2}{3}$; 3) $\dfrac{x^2-1}{2x}=\dfrac{x-1}{2}$; 5) $\dfrac{x^2+5}{x^2}=5$.

2) $\dfrac{20a^3}{12a}=\dfrac{5a^2}{3}$; 4) $\dfrac{x(x-1)}{2(x-1)}=\dfrac{x}{2}$;

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4; Д) 2 і 5.

7°. **Доберіть до кожних двох дробів (А–Д) їхню суму (1–5).**

А) $\dfrac{x}{x^2-4}$ і $\dfrac{2}{x^2-4}$; 1) $\dfrac{1}{2-x}$;

Б) $\dfrac{x^2}{x+2}$ і $\dfrac{4}{x+2}$; 2) $x+2$;

В) $-\dfrac{4}{x+2}$ і $\dfrac{x^2}{x+2}$; 3) $\dfrac{x^2+4}{x+2}$;

Г) $-\dfrac{x}{x^2-4}$ і $\dfrac{2}{4-x^2}$; 4) $\dfrac{1}{x-2}$;

Д) $-\dfrac{x^2}{2-x}$ і $\dfrac{4}{2-x}$. 5) $x-2$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

8°. Перетворіть раціональний вираз $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}-\frac{1}{ac}$ у дріб.

А) $\frac{a+b-c}{abc}$; Б) $\frac{a-b+c}{abc}$; В) $\frac{b+c-a}{abc}$; Г) $\frac{a-b-c}{abc}$; Д) $\frac{1}{abc}$.

9°. Подайте раціональний вираз $\frac{2x}{x^2-4}+\frac{3x-5}{x^2-4}-\frac{x+3}{x^2-4}$ у вигляді нескоротного дробу.

А) $\frac{4}{x+2}$; Б) $\frac{4}{x-2}$; В) $\frac{4x-2}{x^2-4}$; Г) $\frac{4x-8}{\left(x^2-4\right)^3}$; Д) $\frac{4}{3(x+2)}$.

10°. Доберіть до кожного раціонального виразу рівносильний йому раціональний дріб.

А) $\frac{7a}{3x}\pm\frac{5b}{6x}$; 1) $\frac{28a\pm5b}{12x}$;

Б) $\frac{7a}{2x}\pm\frac{5b}{3x}$; 2) $\frac{14a\pm5b}{12x}$;

В) $\frac{7a}{3x}\pm\frac{5b}{12x}$; 3) $\frac{14a\pm5b}{6x}$;

Г) $\frac{7a}{4x}\pm\frac{5b}{3x}$; 4) $\frac{21a\pm10b}{6x}$;

Д) $\frac{7a}{6x}\pm\frac{5b}{12x}$. 5) $\frac{21a\pm20b}{12}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

11•. Укажіть вираз, який не має змісту при $x=\pm1$.

А) $\frac{7x+3}{x^2-x}$; Б) $\frac{x^2-1}{x-x^2}$; В) $\frac{2x-1}{x^2+1}$; Г) $\frac{5x+4}{x^2-1}$; Д) $\frac{x^2+x}{x^2+x}$.

12•. Ідентифікуйте парами дробовий вираз і нескоротний дріб.

А) $\frac{ax-2ay}{2by-bx}$; 1) $\frac{a}{b}$;

Б) $\frac{3a-36b}{12b^2-ab}$; 2) $-\frac{a}{3}$;

В) $\frac{ay-ax}{by-bx}$; 3) $-\frac{3}{b}$;

Г) $\frac{7b-14b^2}{42b-21}$; 4) $-\frac{a}{b}$;

Д) $\frac{a^3-ab^2}{3b^2-3a^2}$. 5) $-\frac{b}{3}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

13•. Укажіть пари рівних раціональних дробів:

1) $\frac{x^2-4}{2x+4}$ і $-\frac{x}{2}$; 3) $\frac{2y-4y^2}{(2y-1)^2}$ і $\frac{2y}{2y-1}$; 5) $\frac{25-x^2}{(x+5)^2}$ і $\frac{5-x}{x+5}$.

2) $\frac{3x-9}{x^2-9}$ і $\frac{3}{x+3}$; 4) $\frac{9t^2-6t}{(2-3t)^2}$ і $\frac{3t}{3t-2}$;

А) 1, 3 і 5; Б) 2, 4 і 5; В) 1, 2 і 4; Г) 2, 3 і 5; Д) 1, 4 і 5.

14•. Виберіть два раціональні вирази, які тотожно дорівнюють 4.

А) $\frac{(x+1)^2}{x}-\frac{(x-1)^2}{x}$; Г) $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(1-x)^2}{x^2+1}$;

Б) $\frac{(x-1)^2}{x}-\frac{(x+1)^2}{x}$; Д) $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{(1-x)^2}{x^2+1}$.

В) $\frac{x^2-4}{x^2-1}-\frac{x^2-8}{x^2-1}$;

15•. Визначте рівняння, яке має безліч розв'язків.

А) $\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}=0$; Г) $\frac{x^2}{x-1}=\frac{x}{1-x}$;

Б) $\frac{x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$; Д) $\frac{x^2-6x}{3-x}=\frac{9-6x}{3-x}$.

В) $\frac{y^2}{y-3}-\frac{3y}{3-y}=0$;

16•. Утворіть парами з виразів (А–Д) і (1–5) правильні рівності.

А) $m^2-\frac{1}{m}$; 1) $\frac{1-m^3}{m^2}$;

Б) $\frac{1}{m^2}-m$; 2) $\frac{1-m^2}{m}$;

В) $1-\frac{1}{m^2}$; 3) $\frac{1-m^3}{m^3}$;

Г) $\frac{1}{m}-m$; 4) $\frac{m^2-1}{m^2}$;

Д) $\frac{1}{m^3}-1$. 5) $\frac{m^3-1}{m}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

4•

17•. Визначте раціональний дріб, значення якого є цілим числом при натуральних значеннях змінної n: 1, 2, 3, 4.

А) $\frac{2n+4}{2n}$; Б) $\frac{2n-12}{2n}$; В) $\frac{2n+24}{2n}$; Г) $\frac{3n-24}{3n}$; Д) $\frac{3n+12}{3n}$.

18•. Запишіть додатним виразом різницю швидкостей, коли відомо, що на деяку відстань s одному з мотоциклістів потрібно t год, а другому – на 1 год більше:

1) $\frac{s}{t}-\frac{s+1}{t}$; 2) $\frac{s}{t}-\frac{s}{t-1}$; 3) $\frac{s}{t}-\frac{s}{t+1}$; 4) $\frac{s}{t+1}-\frac{s}{t}$; 5) $\frac{s}{t-1}-\frac{s}{t}$.

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 2 і 5; Д) 1 і 4.

19•. Знайдіть раціональні вирази, що перетворюються на раціональний дріб, чисельник якого є квадратом двочлена:

1) $\frac{2x-3}{x^2}-\frac{x+1}{x^3}$; 3) $\frac{a-b}{b^2}-\frac{a-b}{ab}$; 5) $\frac{m+2n}{m^2n^2}+\frac{n-4m}{4m^3n}$.

2) $\frac{m-2}{m^2}+\frac{1}{m^3}$; 4) $\frac{y}{x^3}-\frac{x+2y}{x^2y}$;

А) 1, 2 і 4; Б) 2, 3 і 4; В) 1, 3 і 4; Г) 1, 4 і 5; Д) 2, 3 і 5.

20•. Визначте вирази, сума яких дорівнює раціональному дробу $\frac{(a-b)^2}{ab}$:

1) $\frac{a}{b}-1$; 2) $1-\frac{a}{b}$; 3) $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$; 4) $1-\frac{b}{a}$; 5) $\frac{b}{a}-1$.

А) 1 і 3; Б) 2 і 3; В) 2 і 4; Г) 1 і 5; Д) 2 і 5.

21••. Доберіть парами рівняння (А–Д) і їхні розв'язки (1–5).

А) $\frac{4x^3-49x}{(2x+7)^2}=0$; 1) $-\frac{7}{2}$;

Б) $\frac{49x^3-4x}{2x^2+7x}=0$; 2) 0 і $\frac{2}{7}$;

В) $\frac{(7+2x)^2}{2x^3-7x^2}=0$; 3) $\pm\frac{7}{2}$;

Г) $\frac{7x^2-2x}{(2x-7)^2}=0$; 4) 0 і $\frac{7}{2}$;

Д) $\frac{4x^3-49x}{2x^3+7x}=0$. 5) $\pm\frac{2}{7}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

22••. Знайдіть тотожно рівні раціональні вирази:

1) $\dfrac{4x^2+12x+9}{(3x-5)^2}+\dfrac{5x^2+18x+16}{(5-3x)^2}$;

2) $\dfrac{40x^2-38}{(6x-10)^2}-\dfrac{4x^2+62}{(10-6x)^2}$;

3) $\dfrac{(3x-2)^2}{(5-3x)^2}+\dfrac{12x-29}{(3x-5)^2}$;

4) $\dfrac{2x+7}{3x-5}-\dfrac{3x-10}{5-3x}$;

5) $\dfrac{(x+2)^2}{5-3x}+\dfrac{x^2-x+1}{3x-5}$.

А) 1 і 2; Б) 2 і 3; В) 3 і 4; Г) 4 і 5; Д) 1 і 5.

23••. Знайдіть значення виразу $\dfrac{t^2-4mt}{t^2-4m^2}-\dfrac{4m^2}{4m^2-t^2}$ **при** $t=6$, $m=-0,5$.

А) $\dfrac{7}{5}$; Б) $\dfrac{47}{5}$; В) $\dfrac{7}{25}$; Г) $\dfrac{47}{25}$; Д) $\dfrac{49}{35}$.

24••. Виконайте скорочення дробу $\dfrac{a^4+a^2-4a^2b-4b}{a^4+3a^2+2}$.

А) $\dfrac{a^2+4b}{a^2+2}$; Б) $\dfrac{a^2-4b}{a^2+2}$; В) $\dfrac{a^2+4}{a^2+2}$; Г) $\dfrac{a^2-4}{a^2+2}$; Д) $\dfrac{a-2}{a+2}$.

25••. Визначте всі цілі значення n**, при яких буде цілим значення виразу** $\dfrac{n^2+3n-2}{n+3}$.

А) $-2; -1; 1; 2$; Б) $-3; -2; -1; 5$; В) $-4; -2; 1; 2$; Г) $-5; -4; -2; -1$; Д) $-5; -4; -3; -2$.

26••. Укажіть вираз, значення якого не залежить від значення змінної.

А) $\dfrac{a-6}{a^2+3a}-\dfrac{a-3}{a}+\dfrac{a}{a+3}$;

Б) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{9x+6}{x^3-8}$;

В) $\dfrac{b+1}{b-3}+\dfrac{b-1}{b+3}-\dfrac{4b^2-12}{b^2-9}$;

Г) $\dfrac{3}{25-c^2}+\dfrac{1}{5-c}-\dfrac{3}{5+c}$;

Д) $\dfrac{t+6}{4t+8}-\dfrac{t+2}{4t-8}+\dfrac{5}{t^2-4}$.

27••. Знайдіть різницю виразів P **і** Q**, якщо** $P=\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{2ab}{a^2-2ab+b^2}$, $Q=\dfrac{2b}{b-a}+\dfrac{3ab-b^2}{b^2-2ba+a^2}$.

А) $\dfrac{a+b}{a-b}$; Б) $\dfrac{a+b}{b-a}$; В) $\dfrac{a^2-b^2}{(b-a)^2}$; Г) $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$; Д) $\dfrac{b-a}{a-b}$.

28••. Визначте значення змінної (А–В), при яких чотири вирази із п'яти заданих (1–5) не матимуть змісту, та такі, які не впливають на їх зміст.

А) $x=\pm5$; 1) $\dfrac{5-x}{(x+3)^2}+\dfrac{x+5}{(x-3)^2}-\dfrac{x^2-25}{x^2-9}$;

Б) $x=\pm3$; 2) $\dfrac{10+2x}{2x+6}-\dfrac{15+3x}{3x-9}-\dfrac{100-4x^2}{4x^2-36}$;

В) $x=\pm1$. 3) $\dfrac{x^2-9}{1-x^2}+\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{2x-6}{x+1}$;

4) $\dfrac{2x-2}{(3+x)(x+1)}-\dfrac{(x-5)(x+1)}{9-x^2}+\dfrac{(x-1)(x+5)}{(3-x)(x-1)}$;

5) $\dfrac{(x+1)(x-5)}{2x^2-18}-\dfrac{(x-1)(x+5)}{9-x^2}+\dfrac{(x+1)(x+5)}{3x^2-27}$.

А				
Б				
В				

29••. Визначте формулу знаходження середньої швидкості (v_0) автомобіля, якщо деяку відстань (s, км) він їхав зі швидкістю a км/год, а повертався – зі швидкістю b км/год.

А) $v_0=\dfrac{a+b}{2}$; В) $v_0=\dfrac{ab}{|a-b|}$; Д) $v_0=\dfrac{2ab}{|a-b|}$.

Б) $v_0=\dfrac{ab}{a+b}$; Г) $v_0=\dfrac{2ab}{a+b}$;

30••. Ідентифікуйте раціональний вираз і рівний йому раціональний дріб.

А) $\dfrac{5}{a^2-2a+1}-\dfrac{4}{a^2+2a+1}-\dfrac{1}{a^2-1}$; 1) $\dfrac{10a+2}{(a^2-1)^2}$;

Б) $\dfrac{4}{a^2-2a+1}-\dfrac{3}{a^2+2a+1}-\dfrac{1}{a^2-1}$; 2) $\dfrac{18a+2}{(a^2-1)^2}$;

В) $\dfrac{3}{a^2-2a+1}-\dfrac{2}{a^2+2a+1}-\dfrac{1}{a^2-1}$; 3) $\dfrac{22a+2}{(a^2-1)^2}$;

Г) $\dfrac{6}{a^2-2a+1}-\dfrac{5}{a^2+2a+1}-\dfrac{1}{a^2-1}$; 4) $\dfrac{26a+2}{(a^2-1)^2}$;

Д) $\dfrac{7}{a^2-2a+1}-\dfrac{6}{a^2+2a+1}-\dfrac{1}{a^2-1}$. 5) $\dfrac{14a+2}{(a^2-1)^2}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

§ 5. МНОЖЕННЯ ТА ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- як перемножити раціональні дроби;
- як піднести раціональний дріб до степеня;
- як поділити один раціональний дріб на інший.

Множення та ділення раціональних дробів здійснюється за відомими нам правилами множення та ділення звичайних дробів.

Щоб перемножити два дроби, треба окремо перемножити їх чисельники й окремо – знаменники, записуючи перший добуток чисельником, а другий – знаменником нового дробу:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Зауваження 1. Після записів чисельника і знаменника дробу у вигляді добутку слід, якщо це можливо, виконати скорочення дробу.

Зауваження 2. За наведеним правилом також можна перемножити кілька дробів:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\ldots\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot c\cdot\ldots\cdot m}{b\cdot d\cdot\ldots\cdot n}.$$

Якщо всі дроби в добутку однакові, то це відповідний степінь: $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, ..., $\left(\frac{a}{b}\right)^n$. Таким чином маємо: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n}$.

Далі, застосовуючи правило множення дробів та означення степеня, отримуємо $\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n}}=\frac{a^n}{b^n}$. Отже, $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Щоб піднести дріб до степеня, треба окремо піднести до цього степеня чисельник і окремо – знаменник, записуючи перший результат у чисельник, а другий – у знаменник нового дробу.

Приклад 1. Виконайте множення $\frac{a^2-b^2}{24ac^3}\cdot\frac{8ac^2}{a+b}$.

Розв'язання

Як записати

$$\frac{a^2-b^2}{24ac^3}\cdot\frac{8ac^2}{a+b}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\cdot 8ac^2}{24ac^3\cdot(a+b)}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)\cdot 8\cdot a\cdot c^2}{24\cdot a\cdot c^3\cdot(a+b)}=\frac{a-b}{3c},$$

причому $a\neq 0$, $c\neq 0$, $a\neq -b$.

Відповідь. $\frac{a-b}{3c}$ при $a\neq 0$, $c\neq 0$, $a\neq -b$.

Як пояснити

Застосовуємо правило множення дробів і розкладаємо многочлен a^2-b^2 (чисельник першого дробу) на множники. Отримуємо скоротний дріб $\frac{(a-b)(a+b)\cdot 8ac^2}{24ac^3(a+b)}$, який дорівнює дробу $\frac{a-b}{3c}$. Шукаємо ОДЗ отриманого виразу як ОДЗ дробів, які перемножали: $a\neq 0$, $c\neq 0$, $a\neq -b$.

Приклад 2. Піднесіть до шостого степеня дріб $\frac{2c^2m^3}{3a^5}$.

Розв'язання

Як записати

$$\left(\frac{2c^2m^3}{3a^5}\right)^6=\frac{\left(2c^2m^3\right)^6}{\left(3a^5\right)^6}=\frac{64c^{12}m^{18}}{729a^{30}}$$

при $a\neq 0$.

Відповідь. $\frac{64c^{12}m^{18}}{729a^{30}}$ при $a\neq 0$.

Як пояснити

Використовуючи правила піднесення дробу та добутку до степеня, отримуємо:

$$\frac{\left(2c^2m^3\right)^6}{\left(3a^5\right)^6}=\frac{2^6\left(c^2\right)^6\cdot\left(m^3\right)^6}{3^6\left(a^5\right)^6}=$$

$$=\frac{64c^{12}m^{18}}{729a^{30}},\text{ якщо } a\neq 0.$$

Щоб поділити один дріб на другий, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Зауваження 3. Виконуючи дію ділення дробів, слід враховувати, що, крім умов $b\neq 0$, $d\neq 0$, необхідним є виконання умови $c\neq 0$.

Приклад 3. Виконайте ділення $\frac{5xy^2}{a^2-2ab+b^2}:\frac{5xy^2}{a^2-b^2}$.

Розв'язання

Як записати

$$\frac{5xy^2}{a^2-2ab+b^2}:\frac{5xy^2}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{5xy^2\cdot(a-b)(a+b)}{(a-b)^2\cdot 5xy^2}=\frac{a+b}{a-b},$$

причому $a\neq b$, $a\neq -b$,

$x\neq 0$, $y\neq 0$.

Відповідь. $\frac{a+b}{a-b}$ при $a\neq \pm b$,

$x\neq 0$, $y\neq 0$.

Як пояснити

Застосовуємо правило ділення та розкладання на множники многочленів у чисельниках та знаменниках. Отримуємо скоротний дріб $\frac{5xy^2\cdot(a-b)(a+b)}{(a-b)^2\cdot 5xy^2}$, який дорівнює $\frac{a+b}{a-b}$. Знаходимо ОДЗ, враховуючи, що знаменник першого та чисельник і знаменник другого дробів мають бути відмінними від нуля, тобто $a\neq b$, $a\neq -b$, $x\neq 0$ та $y\neq 0$.

Вправи для закріплення

Виконайте множення (85–88).

85°. 1) $\frac{3a}{b}\cdot\frac{b}{6a}$; 3) $\frac{a^2b}{12c}\cdot\frac{4c}{ab^2}$; 5) $6x\cdot\frac{a}{3x^2}$;

2) $-\frac{2x}{3y}\cdot\frac{y}{6x}$; 4) $\frac{m^3n}{5a}\cdot\frac{15a}{2mn^3}$; 6) $\frac{7y^3}{t^2}\cdot t^3$.

86°. 1) $\frac{2x}{a}\cdot\frac{a}{8x}$; 3) $\frac{x^2y}{15p}\cdot\frac{5p}{xy^2}$; 5) $8b\cdot\frac{t}{4b^2}$;

2) $-\frac{3b}{2c}\cdot\frac{c}{9b}$; 4) $\frac{35a^4}{18n^2}\cdot\frac{9n}{14a^2}$; 6) $\frac{3a^2}{b^2}\cdot b^3$.

87°. 1) $\frac{2x^3y}{3a^2b}\cdot\frac{9a^4b^3}{4x^4y^3}\cdot\frac{16xy^5}{30ab^2}$; 2) $\frac{9m^3n}{4xy}\cdot\frac{5a^2b^3}{18m^3nx}\cdot\frac{16xy}{15a^3b^3}$.

88°. 1) $\frac{49t^4a^2}{16y^5x^4}\cdot\frac{2x}{ta}\cdot\frac{8x^3y^5}{7t^3a^3}$; 2) $\frac{6a^3n^2}{35q^3}\cdot\frac{49n^4}{a^5q^2}\cdot\frac{5a^4q^2}{42n^6}$.

89°. Піднесіть дріб до степеня:

1) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^4$; 2) $\left(\frac{7a}{2m^2}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{2x^3y}{5a^2}\right)^3$; 4) $\left(\frac{m^3n^2x^6}{t^4y^9}\right)^{10}$.

90°. Подайте степінь у вигляді дробу:

1) $\left(\frac{b}{a^2}\right)^{20}$; 2) $\left(-\frac{3x^2}{y^{12}}\right)^3$; 3) $\left(\frac{2m^4}{7n^3}\right)^2$; 4) $\left(\frac{a^2b^7n^{11}}{c^9m^5}\right)^{15}$.

Виконайте ділення дробів (91–92).

91°. 1) $\frac{3a^2}{b}:\frac{b}{a^3}$; 3) $-\frac{2x^2}{y}:\frac{6x^3}{y^2}$; 5) $\frac{56y^2}{a^2}:16y^3$;

2) $\frac{9m}{14n}:\frac{4m^2}{21n^2}$; 4) $\frac{7a^3}{b^2}:\left(-\frac{14a^4}{b}\right)$; 6) $12x^2:\frac{6x}{c}$.

92°. 1) $\frac{2x^2}{y}:\frac{x}{y^2}$; 3) $\frac{4a}{5b}:\frac{2a^2}{15b^2}$; 5) $10a^2:\frac{5a}{b}$;

2) $-\frac{3a}{b^2}:\frac{12a^2}{b^3}$; 4) $\frac{3x}{7t^2}:\frac{6x^2}{14t}$; 6) $\frac{7x^3}{y^2}:14x^2$.

93°. Спростіть вираз:

1) $\frac{3x^2}{2y^2t^2}\cdot\frac{6y^3}{7t^6}:\frac{9xy}{14t^2}$; 2) $\frac{216a^6}{7b^3}:\frac{18a^8}{b^4}\cdot\frac{7a^3}{3b^2}$.

94°. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{2a^3}{25b^3}\cdot\frac{10b^2}{3c^4}:\frac{4a^2}{15bc^3}$; 2) $\frac{115x^8}{17y^4}:\frac{23x^6a}{34y^3}\cdot\frac{a^2xy}{5x^2}$.

Виконайте множення дробів (95–96).

95•. 1) $\frac{y^2+3y}{4}\cdot\frac{y}{2y+6}$; 3) $\frac{3a-x}{21b}\cdot\frac{14b^2}{x-3a}$; 5) $\frac{y^2-9}{27y^2}\cdot\frac{9y}{y-3}$;

2) $\frac{3a-x}{8}\cdot\frac{b}{12a^2-4ax}$; 4) $\frac{8-3m}{15y^2}\cdot\frac{25y^3}{3m-8}$; 6) $\frac{x^2-49}{3x^3}\cdot\frac{x}{7-x}$.

96•. 1) $\frac{3}{x^2-2x}\cdot\frac{2x-4}{x}$; 3) $\frac{a-2b}{12c}\cdot\frac{18c^2}{2b-a}$; 5) $\frac{x^2-16}{8x^3}\cdot\frac{4x}{x+4}$;

2) $\frac{6m+3}{5}\cdot\frac{10a}{2m^2+m}$; 4) $\frac{7-3c}{5a^2}\cdot\frac{10a}{3c-7}$; 6) $\frac{5-y}{2y}\cdot\frac{3y^2}{y^2-25}$.

Виконайте ділення дробів (97–98).

97•. 1) $\frac{a^2-5a}{8m^2}:\frac{5a}{8m}$; 3) $\frac{x^2+x^3}{11a^2}:\frac{4+4x}{a^4}$; 5) $\frac{6ax}{m^2-2m}:\frac{8ax}{3m-6}$;

2) $\frac{7x^2}{5b^3}:\frac{14x^2}{b^4-b^3}$; 4) $\frac{t^4-t^2}{25a^6}:\frac{t-t^3}{125a^7}$; 6) $\frac{15m^2t}{6a+a^2}:\frac{25mt^2}{6mt+am}$.

98•. 1) $\frac{a^3+3a^2}{4}:\frac{a^2+3a}{8x}$; 3) $\frac{x^4-x^5}{22m^4}:\frac{x^4-x^3}{44m}$; 5) $\frac{7mk}{2b^2-ab}:\frac{14mk}{10b-5a}$;

2) $\frac{10d^2}{m^5}:\frac{15d^2}{m^5-m^6}$; 4) $\frac{5a+5a^2}{t^4}:\frac{a^7+a^6}{t^5}$; 6) $\frac{14x^2t^3}{9x+x^2}:\frac{21x^3t^2}{5x+45}$.

99•. **Виконайте дії:**

1) $(3a-6b)\cdot\frac{a+2}{a^2-4b^2}$; 3) $\frac{16-25x^2}{2x}:(4+5x)$;

2) $\frac{t-7}{t^2-25x^2}\cdot(2t+10x)$; 4) $(a^2-49m^2):\frac{7m-a}{3x}$.

Спростіть вирази (100–105).

100•. 1) $(5x+10y)\cdot\frac{x+2}{x^2-4y^2}$; 3) $\frac{100t^2-a^2}{3m}:(a-10t)$;

2) $\frac{a-4}{a^2-9m^2}\cdot(a^2-3am)$; 4) $(16t^2-9x^2):\frac{3x-4t}{2x}$.

101••. 1) $\frac{c^2+4c+4}{2c-6}\cdot\frac{c^2-9}{5c+10}$; 3) $(27a^3+b^3)\cdot\frac{1}{18a^2-6ab+2b^2}$;

2) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x+9}\cdot\frac{x^3+27}{3x-9}$; 4) $\frac{1}{5a^2+10ab+20b^2}\cdot(a^3-8b^3)$.

102••. 1) $\frac{a^2-b^2}{a+3b}:\frac{ab+b^2}{2a+6b}$; 3) $\frac{c+d}{3-2c}:\frac{c^2+2cd+d^2}{2c^2-3c}$;

2) $\frac{m+4}{m-4}:\frac{m^2+16-8m}{m^2-16}$; 4) $\frac{9+6y+4y^2}{2y-1}:\frac{27-8y^3}{4y^2-1}$.

103••. 1) $\frac{m^2-6m+9}{n^2-4}\cdot\frac{2n-4}{3m-9}$; 3) $\frac{xy+y^2}{a-3b}:\frac{y^2-x^2}{6b-2a}$;

2) $\frac{p-7}{p^2-25x^2}\cdot(2p+10x)$; 4) $\frac{b^2+2b+4}{3b-4}:\frac{b^3-8}{9b^2-16}$.

104••. 1) $\left(a^3+27b^3\right)\cdot\dfrac{2}{3a^2-9ab+27b^2}$; 3) $\dfrac{(3x-y)^3}{(x-3y)^3}:\dfrac{9x^2-6xy+y^2}{x^2-6xy+9y^2}$;

2) $\left(y^6-8x^3\right):\dfrac{2y^4+4xy^2+8x^2}{3}$; 4) $\dfrac{x^2-4ax+4a^2}{x^2+4ax+4a^2}\cdot\left(\dfrac{x+2a}{x-2a}\right)^3$.

105••. 1) $\dfrac{x^2-ax-bx+ab}{x^2+ax-bx-ab}\cdot\dfrac{x^2+2ax+a^2}{x^2-2bx+b^2}$;

2) $\dfrac{y^2-ay+cy-ac}{y^2-ay-cy+ac}\cdot\dfrac{y^2-2cy+c^2}{y^2-2ay+a^2}$.

106*. **Доведіть тотожність:**

1) $\left(\dfrac{y^2-49}{y^2-14y+49}\right)^4:\left(\dfrac{y+7}{y-7}\right)^4=1$;

2) $\dfrac{0{,}25a^6-16}{0{,}2a^3-25}\cdot\dfrac{0{,}2a^2+a^2+5}{0{,}25a^4+a^2+4}\cdot\dfrac{a-5}{a^2-4}=1$.

Вправи для самооцінювання

1°. Укажіть дріб, що дорівнює добутку $\dfrac{48x^5}{49y^3}\cdot\dfrac{7y^2}{16x^3}$.

а) $\dfrac{336(xy)^7}{784(xy)^6}$; б) $\dfrac{3x^8}{7y^5}$; в) $\dfrac{3x^2}{7y}$; г) $\dfrac{336x^5y^2}{784x^3y^3}$.

2°. Виконайте ділення $\dfrac{56y^2}{a^2}:16y^3$.

а) $\dfrac{7}{2a^2y}$; б) $\dfrac{4}{a^2y}$; в) $\dfrac{896y^5}{a^2}$; г) $\dfrac{896y}{a^2}$.

3°. Виберіть дріб, що дорівнює виразу $\left(-\dfrac{3ab^2}{c^3}\right)^2$.

а) $\dfrac{9ab^4}{c^6}$; б) $\dfrac{9ab^4}{c^5}$; в) $\dfrac{9a^2b^4}{c^5}$; г) $\dfrac{9a^2b^4}{c^6}$.

4•. Знайдіть частку $\left(\dfrac{a}{x^2}\right)^3:\left(\dfrac{a}{x^4}\right)^3$.

а) x^2; б) x^6; в) $\dfrac{a^6}{x^{18}}$; г) $\dfrac{a^9}{x^{72}}$.

5•. Знайдіть значення виразу $\frac{x^3-9x}{m^3-m}:\frac{3x^2-27}{4m^2-4}$ при $x=-\frac{1}{4}$, $m=\frac{2}{3}$.

а) 4,5; б) −5; в) −0,5; г) 8.

6•. Визначте вираз, значення якого не залежить від значень змінних, які входять до нього.

а) $\frac{6x^2}{m^3n}:\frac{x}{3mn^2}:\frac{2x}{m^2n}$; в) $\left(\frac{3}{m}\right)^2\cdot\left(\frac{2m^2}{3}\right)^3:m^3$;

б) $\frac{2ab}{3c^2d}:\frac{2cd^2}{9ab}\cdot\frac{(cd)^3}{(ab)^2}$; г) $\frac{xy+y^2}{a+b}:\frac{x+y}{4a+4b}$.

7••. Знайдіть вираз, який є тотожним виразу $\frac{a-x}{a+x}$.

а) $\frac{(3a-3x)^2}{9}:(a+x)^2$; в) $\frac{3a+3x}{x^2-a^2}\cdot\frac{(x-a)^2}{3x+3a}$;

б) $\frac{mx+ma}{a^2-x^2}:\frac{m^2}{a+x}$; г) $\frac{2a-2x}{a^2-x^2}:\frac{a^2+x^2-2ax}{2(a-x)^3}$.

8••. Визначте три тотожності.

а) $(10m-15n)^2:\frac{(3n-2m)^2}{2m}=50m$ при $3n-2m\neq0$ та $m\neq0$;

б) $\left(\frac{4x^2-4x}{x+3}\right):(2x-2)=\frac{2x}{x+3}$ при $x\neq-3$ та $x\neq1$;

в) $(a^2-6ab+9b^2):(a^2-9b^2)=1$ при $a\neq3b$ та $a\neq-3b$;

г) $\frac{a^2+4a+4}{16-b^4}:\frac{4-a^2}{4+b^2}\cdot(b^2-4)=\frac{a+2}{a-2}$ при $b\neq\pm2$ та $a\neq\pm2$;

д) $(x+3y):(x^2-9y^2)=x-3y$ при $x\neq3y$ та $x\neq-3y$.

9••. Спростіть вираз $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

а) $\frac{x+1}{2x+1}$; б) $\frac{2x+1}{x+1}$; в) $\frac{x+1}{x}$; г) $\frac{x}{x+1}$.

Вправи для повторення

107. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2$; 3) $\left(\frac{11}{20}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^3$; 5) $\left(2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{5}-1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^7$;

2) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)^3$; 4) $\left(3\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}-1{,}5\right)^4$; 6) $\left(1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\right)^5$.

108. Знайдіть добуток коренів рівняння:

1) $(5x-4)(8x-5)=0$; 3) $(16-25x)(8x-5)=0$;

2) $(3{,}25-x)(13x-2)=0$; 4) $(3-7x)(15x-14)=0$.

109. З 8-А класу 16 учнів мають вдома підключення до Internet. Скільки учнів у 8-А класі, коли відомо, що 5 учнів узагалі не мають комп'ютерів, а до мережі Internet підключено 80 % усіх, хто їх має?

110. Скоротіть дріб:

1) $\frac{2c^2-4c}{2a-ac}$; 2) $\frac{(m-a)^2}{a-m}$; 3) $\frac{m^4-m}{1-m^3}$; 4) $\frac{49c^2-14c+1}{1-49c^2}$.

111. Знайдіть многочлен A:

1) $\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{A}{4x^2-1}$; 3) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{A}{(x-y)^2}$;

2) $\frac{3x-2y}{3x+2y}=\frac{A}{9x^2-4y^2}$; 4) $\frac{2x-y}{2x+y}=\frac{A}{(2x+y)^2}$.

§6. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- як зводити громіздкі дробові вирази до простіших, тотожно рівних їм;
- як використовувати різні способи перетворення раціональних виразів;
- як вибрати раціональний спосіб доведення тотожностей.

Будь-який числовий вираз після виконання арифметичних дій, що входять до нього, набуває конкретного числового значення. Наприклад:

$$1)\ 50\cdot(0,4-1,6)^2=72;\qquad 2)\ \left(5\frac{3}{7}:\frac{19}{21}-2\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{26}\right)^2=25.$$

Зауважимо, що при знаходженні числового значення виразу найважливіше пам'ятати правила послідовності виконання дій.

Раціональний вираз, який складено з чисел та змінних за допомогою арифметичних дій, можна завжди перетворити на тотожно рівний йому. Оскільки будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді раціонального дробу, то здійснення його перетворення можна звести до виконання додавання, віднімання, множення або ділення раціональних дробів за відомими правилами виконання дій із раціональними дробами. Тому як і для числових виразів, так і для раціональних важливо пам'ятати про чіткий порядок послідовності виконання дій.

Приклад 1. Спростіть вираз $\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}\right)\cdot\frac{(a-1)^2}{4a}$.

Розв'язання

Як записати

$$1)\ \frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}=\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{(a-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{(a^2+2a+1)-(a^2-2a+1)}{(a-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{a^2+2a+1-a^2+2a-1}{(a-1)(a+1)}=\frac{4a}{a^2-1};$$

$$2)\ \frac{4a}{a^2-1}\cdot\frac{(a-1)^2}{4a}=\frac{4a\cdot(a-1)(a-1)}{(a-1)(a+1)\cdot 4a}=$$

$$=\frac{a-1}{a+1}\ \text{при}\ a\neq\pm1,\ a\neq0.$$

Відповідь. $\frac{a-1}{a+1}$ при $a\neq\pm1, a\neq0$.

Як пояснити

Заданий раціональний вираз є добутком різниці двох раціональних дробів $\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}$ і дробу $\frac{(a-1)^2}{4a}$. Отже, спочатку виконуємо віднімання: $\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}=$ $=\frac{4a}{a^2-1}$, а далі – множення: $\frac{4a}{a^2-1}\cdot\frac{(a-1)^2}{4a}$. Таким чином, враховуючи ОДЗ: $a\neq\pm1$, $a\neq0$, маємо спрощений вираз $\frac{a-1}{a+1}$.

Приклад 2. Перетворіть на раціональний дріб вираз

$$x+3-\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x}.$$

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$x+3-\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{x+3}{1}-\frac{1\cdot(x-1)(x+1)}{(x+1)\cdot x}=$ $=\frac{x+3}{1}-\frac{x-1}{x}=\frac{x(x+3)-(x-1)}{x}=$ $=\frac{x^2+3x-x+1}{x}=\frac{x^2+2x+1}{x}=\frac{(x+1)^2}{x}$, де $x\neq-1$, $x\neq0$. *Відповідь.* $\frac{(x+1)^2}{x}$ при $x\neq-1$, $x\neq0$.	Щоб перетворити даний вираз на раціональний дріб, спочатку знаходимо добуток двох раціональних дробів $\frac{1}{x+1}$ і $\frac{x^2-1}{x}$, а потім від многочлена $x+3$ віднімаємо отриманий результат, враховуючи, що $\frac{x+3}{1}=x+3$, причому $x\neq-1$ і $x\neq0$.

Зауваження. Перетворення раціональних виразів можна здійснювати за допомогою послідовного виконання арифметичних дій, нумеруючи їх (приклад 1) і не нумеруючи їх (приклад 2). Останній спосіб називають «ланцюжковим».

Перетворення раціональних виразів також використовують при доведенні тотожностей. Нагадаємо, що *довести тотожність* – означає встановити, що при всіх допустимих значеннях змінних її ліва і права частини є тотожно рівними виразами. В курсі алгебри тотожності доводять різними способами. Наприклад:

1) виконують перетворення її лівої частини і в результаті отримують праву частину;

2) виконують перетворення її правої частини і в результаті отримують ліву частину;

3) окремо перетворюють її ліву і праву частини і в кожному з випадків отримують один і той самий вираз;

4) утворюють різницю її лівої і правої частини і в результаті перетворень отримують нуль.

Вибір способу залежить від конкретного вигляду тотожності, яку треба довести.

Приклад 3. Доведіть тотожність $\dfrac{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x}{y}+1+\dfrac{y}{x}}=\dfrac{x-y}{xy}$, якщо $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Розв'язання

Як записати

$$\frac{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x}{y}+1+\dfrac{y}{x}}=\frac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2y^2}}{\dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}}=$$

$$=\frac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^2y^2}:\frac{x^2+xy+y^2}{xy}=$$

$$=\frac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)\cdot xy}{x^2y^2\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)}=\frac{x-y}{xy}.$$

Таким чином, $\dfrac{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x}{y}+1+\dfrac{y}{x}}=\dfrac{x-y}{xy}$,

що й треба було довести,

причому $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Як пояснити

Для доведення цієї тотожності зручно перетворити її ліву частину:

– або виконати окремо дії в чисельнику, знаменнику, а потім поділити результат чисельника на результат знаменника;

– або звести дроби в чисельнику і знаменнику до спільного знаменника і використати основну властивість дробу, домножуючи на вираз x^2y^2, $x^2\cdot y^2\neq 0$ ($x\neq 0$, $y\neq 0$);

– або виконати «ланцюжком» одночасно перетворення і в чисельнику, і в знаменнику, поки не отримаємо такий вираз, як у правій частині тотожності.

Вправи для закріплення

112°. Виконайте дії:

1) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{xy}{(x-y)^2}$;

2) $\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}\right)\cdot\dfrac{mn}{(m+n)^2}$;

3) $\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{xy}{x+y}$;

4) $\left(\dfrac{m}{n^2}-\dfrac{1}{m}\right)\cdot\dfrac{mn}{m-n}$.

113°. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a+3}{a-3}-\dfrac{a-3}{a+3}\right):\dfrac{3a}{a^2-9}$;

2) $\left(\dfrac{a-2}{a+2}-\dfrac{a+2}{a-2}\right):\dfrac{4a}{a^2-4}$;

3) $\left(\frac{4-x}{4+x}-\frac{4+x}{4-x}\right):\frac{x^2-16}{16}$; 4) $\left(\frac{x+5}{x-5}-\frac{x-5}{x+5}\right)\cdot\frac{25-x^2}{10}$.

114°. **Доведіть, що раціональний вираз є цілим:**

1) $\left(a-1+\frac{2}{a+1}\right)\cdot\frac{(a+1)^2}{a^2+1}$; 3) $\left(m-n+\frac{n^2}{m+n}\right)\cdot\frac{(m+n)^2}{m^2}$;

2) $\left(a+1+\frac{2}{a-1}\right)\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$; 4) $\left(m+n+\frac{m^2}{n-m}\right)\cdot\frac{(m-n)^2}{n^2}$.

115°. **Спростіть вираз:**

1) $\left(\frac{x-y}{x}+\frac{x}{x+y}\right)\cdot\frac{x^2-xy}{2x^2-y^2}$; 3) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{a}{a-2}\right):\frac{a}{4-a^2}$;

2) $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)\cdot\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$; 4) $\left(\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a+1}\right):\frac{12a^2+3}{4a^2-1}$.

116°. **Перетворіть раціональний вираз на дріб:**

1) $\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{ab}{b^2-a^2}$; 3) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{xy^2}{y^2-x^2}$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}$; 4) $\left(\frac{y}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{x^2y}{x^2-y^2}$.

117°. **Доведіть тотожність:**

1) $\frac{4x^2-1}{3}:\left(x-\frac{x+1}{3}\right)=2x+1$; 3) $\left(\frac{1}{a-1}-1\right):\frac{4-a^2}{(a-1)^2}=\frac{a-1}{a+2}$;

2) $\frac{9y^2-1}{4}:\left(y-\frac{y-1}{4}\right)=3y-1$; 4) $\left(\frac{1}{1-b}+1\right):\frac{b^2-4}{(b-1)^2}=\frac{b-1}{b+2}$.

Спростіть вирази (118–123).

118°. 1) $\left(1-\frac{a+b}{a-b}\right):\frac{1}{b-a}$; 3) $2m^2:\left(m-n+\frac{n^2}{m+n}\right)$;

2) $\left(\frac{a^2+b^2}{a-b}-a\right)\cdot\frac{b-a}{a+b}$; 4) $\frac{x(6-x)}{9-x^2}:\left(x-\frac{9}{x-3}-3\right)$.

119•. 1) $(x-2)^2\cdot\frac{x}{4-x^2}+\frac{2x^2}{x+2}$;

2) $(m^2-4m+4):\frac{4-m^2}{3}+\frac{3m}{m+2}$;

3) $\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{x}-\frac{12-x^2}{x^2-4}$;

4) $\left(\frac{t-4}{t+4}+\frac{t+4}{t-4}\right)\cdot\frac{11}{2t^2+32}+\frac{11}{16-t^2}$.

120•. 1) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$; 3) $\left(2+\frac{m}{m+1}\right)\cdot\frac{3m^2+3m}{12m+8}$;

2) $\left(\frac{2c}{m^2}-\frac{1}{2c}\right):\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2c}\right)$; 4) $\left(\frac{2a}{2a-1}+1\right):\frac{4a^2-a}{6a-3}$.

121•. 1) $\left(\frac{t}{t-5}-2t\right):\frac{11-2t}{t-5}$; 3) $\frac{a+8b}{2b}-\frac{3a^2}{b^2}\cdot\frac{b}{6a}$;

2) $\left(p-\frac{5p}{p+2}\right):\frac{p-3}{p+2}$; 4) $\frac{6x+y}{3x}-\frac{5y^2}{x^2}\cdot\frac{x}{15y}$.

122•. 1) $\frac{x+4}{4-x}\cdot\left(\frac{2x^2}{4+x}-x\right)$; 3) $\frac{x^2-4}{9-y^2}:\frac{x-2}{3+y}-\frac{2}{3-y}$;

2) $\frac{y-3}{y+3}\cdot\left(y+\frac{y^2}{3-y}\right)$; 4) $\frac{a^2-x^2}{b^2-16}\cdot\frac{b+4}{a-x}+\frac{x}{4-b}$.

123•. 1) $\frac{a+b}{3a-b}+\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{3a-b}$; 2) $\frac{x-y}{2x+y}+\frac{1}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{2x+y}$.

124••. Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{7}{b+7}+\frac{b^2+49}{b^2-49}-\frac{7}{b-7}\right):\frac{b+1}{2}=\frac{2}{b+1}$ при $b\neq\pm7,\ b\neq-1$;

2) $\left(\frac{a}{a-5}-\frac{a}{a+5}+\frac{5a+25}{25-a^2}\right):\frac{5a-25}{a^2+10a+25}=\frac{a+5}{a-5}$ при $a\neq\pm5$.

Подайте вирази у вигляді раціональних дробів (125–126).

125••. 1) $\dfrac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}}$; 2) $\dfrac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1}$; 3) $\dfrac{\frac{m}{n^2}-\frac{n}{m^2}}{\frac{m}{n}+1+\frac{n}{m}}$; 4) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}}$.

126••. 1) $\dfrac{5+\dfrac{m}{n}}{5-\dfrac{m}{n}}$; 3) $\dfrac{\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}\cdot\dfrac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\dfrac{\dfrac{x+t}{m}-1}{\dfrac{x-t}{m}+1}$; 4) $\dfrac{t-m}{\dfrac{t}{m}-\dfrac{m}{t}}\cdot(m+t)$.

127••. Доведіть тотожність, указавши допустимі значення змінних, що входять до неї:

1) $\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right):(x-y)=\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$;

2) $\dfrac{2a-b}{ab}-\dfrac{1}{a+b}\cdot\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{1}{b}$;

3) $\dfrac{1}{m+p}\cdot\left(\dfrac{m^2}{p}+\dfrac{p^2}{m}\right)+1=\dfrac{m^2+p^2}{mp}$;

4) $\left(\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right):\left(\dfrac{x+a}{a}-\dfrac{x-a}{x}\right)=\dfrac{ax}{x^2-a^2}$.

128••. Знайдіть значення виразу, попередньо спростивши його:

1) $\left(\dfrac{y^2-3y}{y^2-6y+9}-\dfrac{3y-9}{y^2-9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{3}{y}\right)$ при $y=6$;

2) $\left(\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{x}{a^3-x^3}\cdot\dfrac{a^2+ax+x^2}{a+x}\right)\cdot\dfrac{a^2-x^2}{5a^2}-\dfrac{6}{5a}$ при $a=-\dfrac{1}{7}$.

129••. Спростіть вираз і доведіть, що його значення не залежить від усіх допустимих значень змінних, що входять до нього:

1) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}$;

2) $\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$.

Вправи для самооцінювання

1°. Укажіть правильний порядок дій при здійсненні тотожних перетворень раціонального виразу

$$\left(\frac{x^2}{y}\overset{(1)}{-}\frac{x}{y^2}\overset{(2)}{\cdot}\left(\frac{x+2}{x-y}\overset{(3)}{-}\frac{x-2}{x+y}\right)\right)\overset{(4)}{:}\frac{y^2-4}{xy+y^2}\overset{(5)}{-}2.$$

а) 1, 3, 2, 4, 5; б) 3, 2, 1, 4, 5; в) 3, 2, 4, 1, 5; г) 1, 3, 2, 5, 4.

2°. Зведіть раціональний вираз $\dfrac{2-\frac{a}{x}}{2+\frac{a}{x}}$ до дробу.

а) $\dfrac{2x-a}{2x+a}$; б) $\dfrac{(2x-a)(2x+a)}{x^2}$; в) $\dfrac{2x+a}{2x-a}$; г) $\dfrac{x^2}{4x^2-a^2}$.

3°. Визначте для виразу $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}:\dfrac{x+4}{a-2}$ його допустимі значення змінних.

а) $x\neq a$ та $a\neq 2$;

б) $x\neq a$, $x\neq -4$ та $a\neq 2$;

в) $x\neq a$, $x\neq -a$ та $a\neq 2$;

г) $x\neq \pm a$, $x\neq -4$ та $a\neq 2$.

4•. Знайдіть числове значення виразу $\dfrac{\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{9}}{\frac{a}{12}+\frac{b}{18}}$ при $a=\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{1}{2}$.

а) 3; б) 1; в) $\dfrac{1}{3}$; г) $-\dfrac{1}{6}$.

5•. Зведіть раціональний вираз $\dfrac{\frac{a}{b}-x}{\frac{b}{a}+x}$ до раціонального дробу, якщо $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

а) $\dfrac{b}{a}$; б) $\dfrac{a-b}{a+b}$; в) $\dfrac{a}{b}$; г) $\dfrac{a+b}{a-b}$.

6•. Спростіть вираз $\left(\left(\frac{x}{y}+1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2\right):\left(x^2+y^2\right)$.

а) $\frac{2\left(x^2+y^2\right)^2}{y^2}$; б) $\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2y^2}$; в) $2y^2$; г) $\frac{2}{y^2}$.

7••. Визначте дві тотожності.

а) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2=2+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$; в) $\frac{1{,}2x^2-xy}{0{,}36x^2-0{,}25y^2}=\frac{20x}{6x+5y}$;

б) $\left(-n+\frac{1}{n}\right)^2=n^2+\frac{1}{n^2}-2$; г) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)^2-\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)^2=\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)\cdot 2$.

8••. Перетворіть раціональний вираз $\left(y^2-4\right)\cdot\left(\frac{3}{y+2}-\frac{2}{y-2}\right)+5$ на цілий.

а) $y-10$ при $y\neq\pm2$; в) $y-5$ при $y\neq\pm2$;

б) $y+3$ при $y\neq\pm2$; г) $5y+3$ при $y\neq\pm2$.

9••. Перетворіть на раціональний дріб раціональний вираз

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)-\frac{ab-4a^2}{b+2a}.$$

а) $\frac{ab-4a^2}{b+2a}$ при $b\neq\pm2a,\ b\neq0$; в) $\frac{3ab}{b+2a}$ при $b\neq\pm2a,\ b\neq0$;

б) $\frac{ab}{b+2a}$ при $b\neq\pm2a,\ b\neq0$; г) $\frac{ab-8a^2}{b+2a}$ при $b\neq\pm2a,\ b\neq0$.

Вправи для повторення

130. Подайте дріб у вигляді суми або різниці двох дробів:

1) $\frac{m^2-mn}{2m}$; 3) $\frac{16a-8m^2}{8am}$; 5) $\frac{m^3+n^3}{(mn)^2}$;

2) $\frac{a^2-4ab}{2a}$; 4) $\frac{m+n}{mn}$; 6) $\frac{a^{17}-a^{15}}{a^{16}}$.

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}.$$

131. Спростіть вираз:

1) $\frac{x}{x-1}-\frac{x^2+1}{1-x^2}-\frac{x}{1+x}$; 3) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}$;

2) $\frac{x}{x-y}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{x+y}$; 4) $\frac{8a}{a^2-4}+\frac{2a}{6-3a}+\frac{2a}{a+2}$.

132. Складіть математичну модель для розв'язування задачі.

З пункту A одночасно в одному напрямі виїхали мотоцикліст і велосипедист. Яка відстань буде між ними через 3 год, якщо швидкість мотоцикліста становить x км/год, а швидкість велосипедиста – y км/год?

133. Знайдіть значення змінних, при яких не має змісту вираз:

1) $\frac{2x+6}{5-3x}$; 2) $\frac{3x+1}{\frac{1}{3}x-3}$; 3) $\frac{3x+1}{4-5x}+\frac{4x+1}{5+4x}$; 4) $\frac{16x+1}{5x+2}-\frac{3x+1}{2x-5}$.

134. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2,4x+48}{8}=0$; 3) $\frac{3x+4}{12}+\frac{2x-3}{12}=0$;

2) $\frac{1,8x-54}{18}=0$; 4) $\frac{1,5x-7}{2}+\frac{1,9x+38,5}{4}=0$.

§ 7. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- які рівняння називають раціональними;
- яка відмінність між цілими раціональними та дробово-раціональними рівняннями;
- які є способи розв'язування дробово-раціональних рівнянь;
- як вибрати раціональний спосіб розв'язування заданого дробово-раціонального рівняння;
- як впливає ОДЗ рівняння на кількість його розв'язків;
- які дробово-раціональні рівняння є рівносильними.

В алгебрі нам доводилось часто працювати з рівняннями, в яких ліва і права частини є цілими раціональними виразами. Від цього й пішла назва – *цілі раціональні* рівняння.

Рівняння називають *цілим раціональним (цілим)*, якщо його ліва і права частини – цілі раціональні вирази.

Таким чином, вивчені нами у 7-му класі рівняння є цілими:

$0{,}2x-7=3{,}4$; $\quad 7x-2=3(2-x)$;

$-3x+17=-19$; $\quad \dfrac{2x+1}{3}=\dfrac{3x-4{,}5}{4}$.

Очевидно, що цілими будуть і ті рівняння, в яких ліва частина – многочлен, а права – 0. Наприклад: $x^2-5x+6=0$; $x^3-x^2+x-1=0$; $x^4-5x^2+4=0$; $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=0$.

З такими рівняннями ми ознайомимося пізніше.

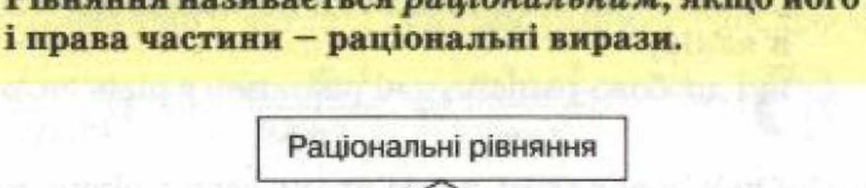
Рівняння називається *дробово-раціональним (дробовим)*, якщо хоча б одна з його частин є дробовим раціональним виразом.

Прикладами дробових рівнянь є рівняння: $\dfrac{1+x^2}{x}=2$; $2x=\dfrac{x^2+1}{x}$; $\dfrac{x^2-x}{2-x}=\dfrac{x}{2-x}$; $\dfrac{9-x}{x-4}=\dfrac{2x-3}{x-4}$; $\dfrac{(x-1)^2}{x+1}=0$ і т. д. Розглядаючи кожне з них, слід зазначити, що дробові вирази містяться або в одній із частин рівняння, або в обох його частинах. Тому на зміст рівняння впливатиме зміст дробового виразу, тобто ті значення змінних, які перетворюють знаменник дробу на нуль.

Отже, при розв'язуванні дробових рівнянь важливо виконати перевірку коренів для початкового рівняння або узгодити знайдені корені з областю допустимих значень рівняння.

Аналогічно до того, що цілі та дробові вирази є раціональними, кажуть і про рівняння: *цілі та дробові рівняння називають раціональними*. Проте у практиці цілі раціональні рівняння розрізняють на: *лінійні*, *квадратні*, *кубічні* тощо.

Рівняння називається *раціональним*, якщо його ліва і права частини – раціональні вирази.



Розв'язуючи дробово-раціональні рівняння, використовують відомі нам рівносильні перетворення:

1) перенесення доданків із однієї частини рівняння в іншу;

2) додавання (віднімання) до (від) обох частин рівняння одного й того самого числа або виразу, визначеного на всій області допустимих значень;

3) множення (ділення) обох частин рівняння на одне й те саме число, відмінне від нуля, або вираз, визначений на всій ОДЗ.

Дробово-раціональні рівняння називаються *рівносильними*, якщо всі розв'язки першого рівняння є розв'язками другого, і навпаки, всі розв'язки другого рівняння є розв'язками першого. До рівносильних також відносяться рівняння, що не мають розв'язків.

Розглянемо деякі способи розв'язування дробово-раціональних рівнянь, оскільки із способами розв'язування простіших цілих рівнянь ви вже знайомі.

1. Зведення рівняння до вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – цілі раціональні вирази, причому $Q(x)\neq 0$. Суть цього способу полягає в тому, що всі члени рівняння переносять в одну частину, зводять до спільного знаменника і використовують умову рівності дробу нулю. Це традиційний найпоширеніший спосіб.

Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x^2}{x^2-4}=-\dfrac{1}{x-2}$. **(1)**

Розв'язання

Як записати

$$\frac{1}{x+2}-\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{x-2}=0; \quad (2)$$

$$\frac{x-2-x^2+x+2}{(x-2)(x+2)}=0;$$

$$\frac{2x-x^2}{(x-2)(x+2)}=0;$$

Як пояснити

Переносимо всі дроби в ліву частину рівняння і зводимо їх до спільного знаменника. Отримавши рівняння вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, використовуємо умову рівності дробу нулю:

Продовження розв'язання прикладу 1

Як записати	Як пояснити
$\begin{cases} 2x-x^2=0, & (3) \\ (x-2)(x+2)\neq 0. \end{cases}$ Звідси	$\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$
$\begin{cases} x(2-x)=0, \\ x\neq \pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=0, \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2=2, \\ x\neq \pm 2. \end{cases}$ Отже, $x=0$ – єдиний корінь даного рівняння, оскільки $x=2$ – сторонній, бо перетворює знаменник на нуль. *Відповідь.* 0.	Звідси отримуємо корені, які слід перевірити на обмеження, адже $Q(x)\neq 0$. Після перевірки вибираємо корені заданого рівняння і записуємо відповідь.

Зауважимо, що рівняння (1) і (2) – *рівносильні*, а рівняння (1) і (3), (2) і (3) – *нерівносильні*, оскільки рівняння (3) має два розв'язки: $x_1=0$ та $x_2=2$, а рівняння (1) і (2) задовольняє лише один корінь $x=0$.

2. Домноження обох частин рівнянь на спільний знаменник дробів, що входять до нього. Тоді дістають ціле рівняння, розв'язують його і вибирають корені, які не перетворюють спільний знаменник дробів на нуль. (Використайте такий спосіб для розв'язання прикладу 1 самостійно.)

3. Зведення рівняння до рівності двох дробів з однаковими знаменниками, тобто до вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{M(x)}{Q(x)}$, де $Q(x)\neq 0$. Тоді у рівних дробах з однаковими знаменниками будуть рівними і чисельники на всій області допустимих значень.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{4}{x-4}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{20}{(x-4)(x+1)}. \quad (4)$$

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
ОДЗ: $x-4\neq 0$ та $x+1\neq 0$; $x\neq 4$ та $x\neq -1$. $\dfrac{4}{x-4}-\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{20}{(x-4)(x+1)}$;	Знаходимо ОДЗ дробових виразів, що входять до рівняння: $x\neq 4$ та $x\neq -1$ (знаменники відмінні від нуля). Зводимо рівняння до

Продовження розв'язання прикладу 2

Як записати	Як пояснити
$\dfrac{4(x+1)-(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+1)}=$ $=\dfrac{20}{(x-4)(x+1)}$; $4x+4-x^2+16=20$; $4x-x^2+20=20$; $4x-x^2=0$; $x(4-x)=0$; (5) $x_1=0$ або $x_2=4$. Оскільки $x=4$ не задовольняє ОДЗ рівняння, то розв'язком рівняння (4) є $x=0$.	вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{M(x)}{Q(x)}$ і прирівнюємо чисельники цих дробів: $P(x)=M(x)$. Звідси знаходимо корені утвореного рівняння і на кінець – узгоджуємо їх з ОДЗ. Таким чином, отримуємо остаточний корінь рівняння: $x=0$.

Зауважимо, що рівняння (4) і (5) – *нерівносильні*, оскільки рівняння (5) має два розв'язки: $x_1=0$ і $x_2=4$, а рівняння (4) задовольняє лише один корінь $x=0$.

4. Зведення рівняння до вигляду, коли дріб дорівнює деякому числу, тобто до вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=a$, де $Q(x)\neq 0$, тоді $P(x)=a\cdot Q(x)$ на всій області допустимих значень.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{2(x+2)(x-0,5)}{2x^2-4x+5}=1$. (6)

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$2(x+2)(x-0,5)=2x^2-4x+5$; $2(x^2+2x-0,5x-1)=2x^2-4x+5$; $2x^2+3x-2=2x^2-4x+5$. (7) Віднімаючи від обох частин рівняння $2x^2$, отримуємо: $3x-2=$ $=-4x+5$; $3x+4x=5+2$; $7x=7$; $x=1$. Перевіркою переконуємося, що $x=1$ не перетворює знаменник $2x^2-4x+5$ на нуль ($2\cdot 1^2-4\cdot 1+5=3$, $3\neq 0$). *Відповідь.* 1.	Очевидно, що рівняння вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=1$, $Q(x)\neq 0$ можна звести до рівняння $P(x)=Q(x)$. Розв'язуючи ціле рівняння, знаходимо корені, які перевіряємо на виконання умови, що знаменник не може дорівнювати нулю.

Зауважимо, що рівняння (6) і (7) – *рівносильні*, оскільки на всій області допустимих значень обидва рівняння мають один і той самий корінь $x=1$, який задовольняє і рівняння (6), і рівняння (7).

Наведені способи розв'язування дробово-раціональних рівнянь не вичерпують усіх можливостей знаходження їх розв'язків. Зокрема, можна користуватися основною властивістю пропорції чи довільними рівносильними перетвореннями, але знову-таки наголошуємо: *на всій області допустимих значень.*

!? **Подумайте самостійно, як можна розв'язати рівняння $x^2-\frac{2}{x+3}=9-\frac{2}{x+3}$, не використовуючи жодний із розглянутих нами способів.**

Вправи для закріплення

Розв'яжіть рівняння (135–143).

135°. 1) $\frac{x-8}{x}=0$; 3) $\frac{7x+14}{x-2}=0$;

2) $\frac{x+6}{x-2}=0$; 4) $\frac{0,5x+6}{2x-24}=0$.

136°. 1) $\frac{(x+1)(2x-4)}{x-2}=0$; 3) $\frac{(0,5x-1)(x+7)}{3x-6}=0$;

2) $\frac{(3x+9)(x-1)}{x+3}=0$; 4) $\frac{(3x+27)(x-9)}{\frac{1}{3}x+3}=0$.

137°. 1) $\frac{x+11}{x-11}=0$; 3) $\frac{(7-x)(3x+11)}{3x-21}=0$;

2) $\frac{7x-14}{0,5x+1}=0$; 4) $\frac{(0,5x+0,5)(0,4x-2)}{0,2x-1}=0$.

138•. 1) $\frac{x+8}{x}-2=0$; 3) $\frac{6x+2}{3x}=5$;

2) $\frac{8x+3}{x}-5=0$; 4) $\frac{3-9x}{2x}=-4$.

139•. 1) $\frac{8x^2-5}{x}=3x$; 3) $\frac{3x+4}{7-x}=\frac{8-3x}{x-1}$;

2) $\frac{-4-3x^2}{4x}=-x$; 4) $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+3}{x-1}$.

140•. 1) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$; 3) $\frac{x-1}{2x+1}-\frac{2x-1}{1+5x}=0$;

2) $\frac{1+3x}{1-2x}=\frac{5-3x}{1+2x}$; 4) $\frac{5x-2}{x+4}-\frac{x+4}{x-8}=0$.

141••. 1) $4x+3-\frac{2}{x+3}=15-\frac{2}{x+3}$; 3) $\frac{1}{2}x+2{,}5-\frac{10}{x+4}=\frac{9}{2}-\frac{10}{4+x}$;

2) $-7x-110+\frac{9}{x-1}=\frac{9}{x-1}-117$; 4) $7x+13+\frac{8}{3-x}=62-\frac{8}{x-3}$.

142••. 1) $9x-24+\frac{3}{2-x}=3x-\frac{3}{x-2}$;

2) $x^2-\frac{2}{x+3}=-3x-\frac{2}{3+x}$;

3) $\frac{x}{10}+4+\frac{7}{x+10}=\frac{7}{x+10}-5$;

4) $5x^2-1-\frac{4}{x-3}=4x^2+8+\frac{4}{3-x}$.

Знайдіть ОДЗ та використайте на ній одне з відомих рівносильних перетворень рівнянь: до обох частин рівняння можна додати (відняти) один і той самий вираз.

143••. 1) $\frac{2x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1$; 3) $\frac{2}{y^2-3y}-\frac{1}{y-3}=\frac{6}{y^3-9y}$;

2) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{20}{x^2-4}$; 4) $1-\frac{72}{x^2-8x+16}=\frac{14}{x-4}$.

144••. Чисельник дробу на 7 менший, ніж його знаменник. Якщо чисельник збільшити на 5, а знаменник зменшити на 6, то значення дробу дорівнюватиме $2\frac{1}{3}$. Знайдіть цей дріб.

145••. Знаменник дробу на 13 більший, ніж чисельник. Якщо чисельник дробу подвоїти, а знаменник збільшити на 14, то дріб дорівнюватиме $\frac{20}{37}$. Знайдіть цей дріб.

146••. Чисельник деякого дробу на 2 більший, ніж знаменник. Якщо чисельник цього дробу збільшити на 1, не змінюючи знаменник, то дістанемо дріб, який дорівнюватиме дробу, отриманому із заданого, якщо його чисельник і знаменник зменшити на 1. Знайдіть цей дріб.

147••. Знаменник дробу на 2 менший, ніж чисельник. Якщо чисельник збільшити на 7, а знаменник – на 5, то значення дробу не зміниться. Знайдіть цей дріб.

148••. Відстань 20 км Михайлик проходить на 1 год швидше, ніж Оленка. Знайдіть швидкість кожної дитини, якщо Михайлик проходить за 1 год відстань в 1,25 раза більшу, ніж Оленка.

149••. Відстань 240 км вантажна машина проходить на 2 год довше, ніж легковий автомобіль. Знайдіть швидкості обох машин, якщо швидкість вантажної машини у 2 рази менша, ніж швидкість легкового автомобіля.

150••. Двоє робітників, працюючи разом, виконують певну роботу за 4 год. За скільки годин, працюючи окремо, може виконати цю роботу другий робітник, якщо перший її виконує самостійно за 6 год?

151••. Дві труби, відкриті одночасно, наповнюють басейн за 2 год. Причому перша труба наповнює цей басейн за 3 год. За скільки годин можна наповнити басейн, якщо відкрити лише другу трубу?

Вправи для самооцінювання

1°. Визначте трійку рівнянь, які є дробово-раціональними.

а) $7x-2=\frac{1}{3}$, $x^2-\frac{2}{x}=5$, $7-\frac{2}{x+2}=\frac{1}{x}$;

б) $\frac{2}{5}x+\frac{x}{4}=1$, $\frac{8}{3}x+\frac{x}{9}=1$, $\frac{x-3}{7}-2=\frac{5}{x}$;

в) $\frac{2}{3}x+1=\frac{2}{x}$, $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=7$, $\frac{4}{x-1}+\frac{3}{x+1}=x^2+6$;

г) $7x-\frac{2}{x+3}=-\frac{2}{x+3}+1$, $\frac{6}{4-y}+y=\frac{6}{4-y}-2$, $\frac{8}{5}x+\frac{1}{3}x=\frac{7-y^2}{2}$.

2°. Знайдіть корінь рівняння $\frac{6-3x}{x}+5=0$.

а) $x=2$; б) $x=-3$; в) $x=3$; г) $x=\frac{11}{3}$.

3°. Знайдіть суму коренів рівнянь $\frac{x-24}{6x+12}=0$ і $\frac{(4-x)(3x+9)}{x+3}=0$.

а) -19; б) -23; в) 25; г) 28.

4•. Виберіть пару рівносильних рівнянь.

а) $x^2=9$ та $\frac{x^2}{3+x}=\frac{9}{x+3}$;

б) $2x-4=0$ та $2x+\frac{4}{x+3}=\frac{4}{x+3}+4$;

в) $\frac{1}{3}x-\frac{8}{5-x}=\frac{5}{3}+\frac{8}{x-5}$ та $-x=-5$;

г) $x^2-25=0$ та $9x+\frac{3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+45$.

5•. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=0$.

а) Рівняння розв'язків не має; б) -2; в) 2; г) ± 2.

6•. Визначте рівняння, яке є математичною моделлю задачі. Чисельник звичайного дробу на 18 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 3, а від знаменника відняти 5, то отримаємо $\frac{5}{6}$.

а) $\frac{x-15}{x-5}=\frac{5}{6}$; б) $\frac{x-21}{x-5}=\frac{5}{6}$; в) $\frac{x+15}{x-5}=\frac{5}{6}$; г) $\frac{x-18}{x-5}=\frac{5}{6}$.

7•. Знайдіть числове значення виразу $m=2x^2-5x+1$, якщо x – корінь рівняння $\frac{x+2}{2x-4}-\frac{6}{2x+4}=\frac{x^2+8}{x^2-4}$.

а) 1; б) 13; в) 19; г) 151.

8••. Відстань 160 км легковий автомобіль проходить на 2 год швидше, ніж автобус. Знайдіть відстань, яку проїде легковий автомобіль за 1,5 год, якщо його швидкість у 2 рази більша, ніж швидкість автобуса.

а) 120 км; б) 40 км; в) 80 км; г) 60 км.

9••. Розв'яжіть рівняння $\frac{5x+3}{x-5}=\frac{7}{3}a$, якщо a – корінь рівняння

$$\frac{2}{(1+a)^2}-\frac{5}{(a-1)^2}=\frac{3}{1-a^2}.$$

а) $-\frac{3}{7}$; б) -2; в) 3; г) $\frac{1}{3}$.

Вправи для повторення

152. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{3a-2b}{2b-3a}$; 3) $\dfrac{(3a-2b)^2}{2b-3a}$; 5) $\dfrac{(-3a-2b)^2}{3a+2b}$;

2) $\dfrac{(3a-2b)^2}{(2b-3a)^2}$; 4) $\dfrac{3a-2b}{(2b-3a)^2}$; 6) $\dfrac{(3a+2b)^2}{(-3a-2b)^2}$.

153. Доведіть, що вираз:

1) $\dfrac{(3a+2b)^2}{ab}-\dfrac{(3a-2b)^2}{ab}$ тотожно рівний 24;

2) $\dfrac{(3a+2b)^2}{9a^2+4b^2}+\dfrac{(3a-2b)^2}{9a^2+4b^2}$ тотожно рівний 2;

3) $\dfrac{(3a-2b)^2}{4ab}-\dfrac{(3a+2b)^2}{4ab}$ тотожно рівний -6;

4) $\dfrac{(3a+2b)^2}{-18a^2-8b^2}+\dfrac{(3a+2b)^2}{-18a^2-8b^2}$ тотожно рівний -1.

154. Складіть математичну модель до задачі.

Перші 20 тестових завдань вступного тесту до фізико-математичного ліцею Андрій розв'язував по x завдань за 1 год, наступні 12 задач він за годину розв'язував на 4 задачі менше, а решту 3 задачі – за 85 хв. Скільки часу затратив Андрій на розв'язування тесту? Знайдіть час написання тесту, якщо:

1) $x=20$; 2) $x=16$.

155. Знайдіть значення виразу, попередньо спростивши його:

1) $2a^2\cdot\dfrac{1}{8}a^3$, якщо $a=2^8$; 3) $25\cdot(25a)^3$, якщо $a=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$;

2) $4(3a)^2$, якщо $a=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$; 4) $27(a^2)^3\cdot 81(a^3)^2$, якщо $a=\dfrac{1}{3}$.

156. Використовуючи властивості степеня, обчисліть:

1) $1{,}7^7\cdot\left(\dfrac{10}{17}\right)^7$; 2) $\dfrac{36^3\cdot 6^4}{2^{10}\cdot 3^{10}}$; 3) $\dfrac{100^3\cdot 10^8}{2^{15}\cdot 5^{15}}$; 4) $\dfrac{1000^2\cdot 10^5}{(10^7)^2}$.

Готуймося до тематичного оцінювання

«Раціональні вирази. Тотожні перетворення раціональних виразів»

Запитання для самоконтролю

1. За яким правилом можна перемножати два раціональні дроби?

2. Як піднести раціональний дріб до степеня?

3. Як поділити один раціональний дріб на інший?

4. Яка найважливіша умова для існування раціонального дробу?

5. Як звести вираз до раціонального дробу?

6. Які способи перетворення раціональних виразів використовують для їх спрощення?

7. Які найвідоміші способи доведення тотожностей?

8. Що означає перетворити раціональний вираз «ланцюжковим» способом?

9. Які рівняння називаються цілими; дробовими; раціональними?

10. Назвіть відомі способи розв'язування дробових рівнянь.

11. Як впливає ОДЗ рівняння на його розв'язок?

12. Які дробово-раціональні рівняння називаються рівносильними?

Завдання в тестовій формі

1°. Виберіть дві правильні рівності.

А) $\frac{2}{3a}\cdot\frac{5b}{7}=\frac{14}{15ab}$; В) $\frac{4}{3a}\cdot\frac{5b}{7}=\frac{20b}{21a}$; Д) $\frac{7a}{11}\cdot\frac{2}{3b}=\frac{14a}{33b}$.

Б) $\frac{3a}{2}\cdot\frac{7}{5b}=\frac{6a}{35b}$; Г) $\frac{5a}{9}\cdot\frac{4}{7b}=\frac{20}{63ab}$;

2°. Виберіть дві рівності, в яких правильно застосовано правило ділення двох дробів.

А) $\frac{2a}{3b}:\frac{5c}{7d}=\frac{2a}{3b}\cdot\frac{5c}{7d}$; Г) $\frac{x-2}{x+3}:\frac{x+2}{x-3}=\frac{x-2}{x+2}\cdot\frac{x+3}{x-3}$;

Б) $\frac{17a}{3b}:\frac{9c}{k}=\frac{17a}{3b}\cdot\frac{k}{9c}$; Д) $\frac{x+2}{x+3}:\frac{3-x}{2-x}=\frac{2+x}{3+x}\cdot\frac{2-x}{3-x}$.

В) $\frac{5x-1}{1+5x}:\frac{x}{y}=\frac{1+5x}{5x-1}\cdot\frac{x}{y}$;

3°. Піднесіть до степеня $\left(-\frac{3ab^2}{m^4}\right)^2$.

А) $\frac{6a^2b^4}{m^8}$; Б) $\frac{9a^2b^4}{m^8}$; В) $\frac{9a^3b^4}{m^6}$; Г) $-\frac{6a^3b^4}{m^6}$; Д) $-\frac{3a^2b^4}{m^8}$.

4°. Подайте добуток (А–Д) у вигляді дробу (1–5).

А) $\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{a+b}{3}$; 1) $\frac{1}{3}$;

Б) $\frac{a-b}{ab}\cdot\frac{3}{a-b}$; 2) $\frac{a-b}{3}$;

В) $\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{3}$; 3) $\frac{ab}{3}$;

Г) $\frac{3}{a^2+b}\cdot\frac{a^2+b}{a-b}$; 4) $\frac{3}{ab}$;

Д) $\frac{a-b}{3ab}\cdot\frac{ab}{a-b}$. 5) $\frac{3}{a-b}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

5°. Визначте рівносильні рівняння:

1) $\frac{2x-1}{x^2}=\frac{3}{x^2}$; 3) $\frac{2x}{x+1}=\frac{6}{x+1}$; 5) $\frac{5x-1}{x^2+1}=\frac{4x+1}{x^2+1}$.

2) $\frac{x+3}{x-1}=\frac{2}{x-1}$; 4) $\frac{3-x}{x^2-1}=\frac{1+x}{x^2-1}$;

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 5; Д) 2 і 5.

6°. Утворіть з раціональних виразів (А–Д) та раціональних дробів (1–5) правильні рівності на всій їх області визначення.

А) $\frac{x-3}{x+2}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2-9}$; 1) $\frac{x+2}{x-2}$;

Б) $\frac{x^2-4}{3+x}\cdot\frac{x+3}{(x-2)^2}$; 2) $\frac{x+3}{x+2}$;

В) $\frac{x+1}{x-3}\cdot\frac{(x-3)^2}{x^2-1}$; 3) $\frac{x-1}{x-3}$;

Г) $\frac{(x+3)^2}{x^2-4}\cdot\frac{x-2}{x+3}$; 4) $\frac{x+2}{x+3}$;

Д) $\frac{x^2-1}{(x-3)^2}\cdot\frac{x-3}{x+1}$. 5) $\frac{x-3}{x-1}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

7°. Виконайте ділення $\frac{x-5}{x^2+4x}:\frac{x-5}{5x+20}$.

А) $\frac{5x+20}{x^2+4x}$; Б) $\frac{10}{x}$; В) $\frac{5}{x}$; Г) $\frac{(x-5)^2}{5x(x+4)^2}$; Д) $\frac{x-5}{x+4}$.

8°. Укажіть добуток, спрощений вигляд якого є цілим виразом.

А) $\frac{(x-1)^2}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$; В) $\frac{(x-1)^2}{x^3+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$; Д) $\frac{x^3-1}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}$.

Б) $\frac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^3}$; Г) $\frac{x^3-1}{(x+1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$;

9°. Спростіть вираз $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{a}{a^2+b^2}$.

А) $\frac{a}{b}$; Б) $\frac{1}{b}$; В) $\frac{1}{a}$; Г) $\frac{a}{a^2+b^2}$; Д) $\frac{1}{b(a+b)}$.

10°. Доберіть раціональним виразам (А–Д) раціональні дроби (1–5).

А) $\left(\frac{2x}{x+2}+1\right)\cdot\frac{x+2}{3x-2}$; 1) $\frac{4x-3}{4x+3}$;

Б) $\left(\frac{3x}{x+3}+1\right)\cdot\frac{x+3}{4x-3}$; 2) $\frac{3x+2}{3x-2}$;

В) $\left(\frac{4x}{x+4}+1\right)\cdot\frac{x+4}{5x-4}$; 3) $\frac{3x-2}{3x+2}$;

Г) $\left(\frac{3x}{x-3}+1\right)\cdot\frac{x-3}{4x+3}$; 4) $\frac{5x+4}{5x-4}$;

Д) $\left(\frac{2x}{x-2}+1\right)\cdot\frac{x-2}{3x+2}$. 5) $\frac{4x+3}{4x-3}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

11•. Виконайте множення $\frac{25n^2-10mn+m^2}{18m-3n}\cdot\frac{6m-n}{m-5n}$.

А) $\frac{25n^2-10mn+m^2}{3(m-5n)}$; В) $\frac{5n-m}{6}$; Д) $\frac{5n-m}{12m-2n}$.

Б) $\frac{m-5n}{3}$; Г) $\frac{(m-5n)^3}{3(6m-n)^2}$;

12•. Виконайте ділення $\frac{m^2-mn}{m^2}:\frac{m^2-2mn+n^2}{m^2n^2}$.

А) $\frac{m}{(m-n)^2}$; Б) $\frac{m}{m-n}$; В) $\frac{n^2}{m-n}$; Г) $\frac{mn^2}{m-n}$; Д) $\frac{n^2}{(m-n)^2}$.

13•. Виберіть вираз, спрощений вигляд якого дорівнює 1.

А) $\frac{a^2-2a}{a^3-a}\cdot\frac{a^3+a^2}{a-2}:\frac{a^2}{a^2-a}$; Г) $\frac{m^2-3m}{m^3-m}\cdot\frac{m^2+m}{m-3}:\frac{m^2}{m^3-m^2}$;

Б) $\frac{b-2}{7b+5}\cdot\frac{49b^2-25}{b^2-4b+4}\cdot\frac{2-b}{5-7b}$; Д) $\frac{3r^2-r}{r+3}:\frac{9r^2-6r+1}{r^2+3r}\cdot\frac{3r-1}{r^3}$.

В) $\frac{2c^2-c}{c+2}:\frac{4c^2-4c+1}{c^3+2c^2}\cdot\frac{2c-1}{c^2}$;

14•. Визначте два вирази, при спрощенні яких отримують однаковий раціональний дріб:

1) $\frac{a-1}{a+5}\cdot\frac{a^2+5a}{a^2-2a+1}$; 3) $\frac{a-1}{3a}:\frac{a^2-2a+1}{3a^2}$; 5) $\frac{a+4}{a^2-a}:\frac{a+4}{a^2-2a+1}$.

2) $\frac{a^2-a}{2a-6}:\frac{2a-2}{a^2-3a}$; 4) $\frac{a-3}{4a+12}\cdot\frac{a^2+3a}{a-3}$;

А) 1 і 3; Б) 1 і 4; В) 2 і 4; Г) 3 і 5; Д) 2 і 5.

15•. Визначте вирази, сума яких дорівнює 6:

1) $\frac{2x-14}{x^2-1}\cdot\frac{3x+3}{x-7}$; 3) $\frac{3x^2-6x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x^2-4}$; 5) $\frac{6x^2-6x}{x+4}\cdot\frac{x+4}{x^2-1}$.

2) $\frac{2x+12}{x^2-4}\cdot\frac{3x+6}{x+6}$; 4) $\frac{2x^2+6x}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x^2-9}$;

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4; Д) 1 і 5.

16•. Ідентифікуйте значення виразу $\frac{4m^2-4m}{m+3}:(2m-2)$ при відповідних значеннях m.

А) $m=-1$; 1) -4;

Б) $m=-2$; 2) 5;

В) $m=-4$; 3) -1;

Г) $m=-5$; 4) -10;

Д) $m=-2{,}5$. 5) 8.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

17•. Визначте вирази, які є між собою рівними при $a \neq 0$:

1) $\frac{a^4-1}{a^2}$; 2) $\frac{(a^2-1)^2}{a^2}$; 3) $\frac{a^4-2a^2+1}{a^2}$; 4) $2-a^2-\frac{1}{a^2}$; 5) $a^2+\frac{1}{a^2}-2$.

А) 1, 2 і 3; Б) 2, 3 і 4; В) 3, 4 і 5; Г) 1, 3 і 5; Д) 2, 3 і 5.

18•. Подайте раціональний вираз $\frac{2a-b}{ab}-\frac{1}{a+b}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$ у вигляді раціонального дробу.

А) $\frac{1}{b}$; Б) $\frac{1}{a}$; В) $\frac{a}{b}$; Г) $\frac{b}{a}$; Д) $\frac{2}{ab}$.

19•. Укажіть дріб, який дорівнює виразу $\left(-\frac{3a^3}{b^8}\right)^3\cdot\left(\frac{b^4}{3a^2}\right)^2$.

А) $-\frac{3a^5}{b^{16}}$; Б) $\frac{9a^5}{b^3}$; В) $\frac{3a^7}{b^8}$; Г) $-\frac{3a^4}{b^4}$; Д) $\frac{3a^4}{b^7}$.

20•. Спростіть раціональний вираз $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\frac{x-y}{xy}:\frac{2}{x+y}$.

А) -4; Б) -2; В) 2; Г) 4; Д) $\frac{x+y}{2}$.

21••. Доберіть до кожного раціонального виразу (А–Д) тотожно рівний йому раціональний дріб (1–5).

А) $\frac{3a}{a-4}-\frac{a+2}{2a-8}\cdot\frac{96}{a^2+2a}$;

Б) $\frac{a+4}{a^2-6a+9}:\frac{a^2-16}{2a-6}-\frac{2}{a-4}$;

В) $\frac{a+2}{a^2-2a+1}:\frac{a^2-4}{3a-3}-\frac{3}{a-2}$;

Г) $\frac{7a}{a+2}-\frac{a-8}{3a+6}\cdot\frac{84}{a^2-8a}$;

Д) $\frac{a-2}{a^2+2a+1}:\frac{a^2-4}{5a+5}+\frac{5}{a+2}$.

1) $\frac{7a-14}{a}$;

2) $\frac{5}{a+1}$;

3) $\frac{2}{3-a}$;

4) $\frac{3}{1-a}$;

5) $\frac{3a+12}{a}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

22••. Укажіть серед умов (А–В) таку, яка визначає область допустимих значень чотирьох із п'яти заданих раціональних виразів (1–5), і таку, яка не є ОДЗ для жодного з них.

А) Усі числа, крім $x=0$ та $x=\pm3$;

Б) усі числа, крім $x=\pm1$ та $x=\pm2$;

В) усі числа, крім $x=\pm5$ та $x=\pm4$.

1) $\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{(x+1)^2}{x^2-4}$;

2) $\left(\frac{x^2+5}{x^2-1}-\frac{x^2+4}{x^2-4}\right):\frac{4}{x^2+9}$;

3) $\left(\frac{2x+1}{x}+\frac{3}{9-x^2}\right)\cdot\frac{x}{3-x}$;

4) $\left(\frac{5}{1-x^2}+\frac{6}{4-x^2}\right)\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{5}$;

5) $\left(\frac{5}{|x|-1}-\frac{10}{|x|-2}\right)\cdot\frac{x^2-5}{x^2+1}$.

А				
Б				
В				

23••. Визначте раціональні вирази, значення яких є цілими числами:

1) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2$;

2) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2$;

3) $\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+\left(\frac{y}{x}+1\right)^2$;

4) $\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^2$;

5) $\left(1+\frac{x}{y}\right)^2-\left(1-\frac{x}{y}\right)^2$.

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4; Д) 2 і 5.

24••. Обчисліть значення виразу $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\right):\left(1+\frac{9}{x^3-1}\right)$ при $x=-\frac{1}{2}$, попередньо спростивши його.

А) $-\frac{4}{3}$; Б) $\frac{4}{3}$; В) $\frac{4}{9}$; Г) $-\frac{4}{9}$; Д) $\frac{4}{21}$.

25••. Визначте раціональний вираз, спрощений вигляд якого є раціональним дробом.

А) $\frac{a^2-a}{a^2-2a+1}\cdot\frac{a+2}{a+1}:\frac{a^2+2a}{a^2-1}$; Б) $\frac{2b^2-8}{b^3-b}:\frac{b-2}{b-1}\cdot\frac{b^2+b}{b+2}$;

В) $\frac{3c+6}{2c-2}\cdot\frac{c^2-1}{c^2+c}:\frac{c+2}{2c}$; Д) $\frac{n^2-1}{n^2+2n}:\frac{n^2-n}{2n^2}\cdot\frac{n+2}{n^2+n}$.

Г) $\frac{4m^2-8m}{m^2-1}\cdot\frac{m^2-m}{m-2}:\frac{2m^3}{m^2+m}$;

26••. Подайте вираз $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$ у вигляді раціонального дробу.

А) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$; Б) $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$; В) $\frac{x-y}{x+y}$; Г) $\frac{x+y}{x-y}$; Д) $\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$.

27••. Укажіть три рівняння, що мають спільним коренем одне й те саме число:

1) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x^2+10}{x^2-4}$; 4) $\frac{4x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{3x^2+45}{x^2-9}$;

2) $\frac{3x^2+x-18}{x+1}=3x+6$; 5) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{2x^2-3x-4}{x^2-4}$.

3) $\frac{5x^2-4x+4}{x-1}=5x$;

А) 1, 2 і 3; Б) 2, 4 і 5; В) 1, 3 і 5; Г) 1, 2 і 4; Д) 2, 3 і 5.

28••. Визначте рівняння, що не мають розв'язку:

1) $\frac{x-1}{2x+1}-\frac{x+1}{2x-1}=\frac{8x-14}{4x^2-1}$; 4) $\frac{1}{x^2-x}+\frac{5}{x^2+x}=\frac{2}{x^2-1}$;

2) $\frac{x^2+3}{x^2-2x}-\frac{x}{x-2}=\frac{3}{x}$; 5) $\frac{x}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}=\frac{20}{x^2-16}$.

3) $\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x^2-4}=0$;

А) 1 і 2; Б) 2 і 4; В) 3 і 4; Г) 3 і 5; Д) 1 і 5.

29••. Складіть математичну модель до текстової задачі. Моторний човен рухається по річці між пристанями *K* і *M*. Швидкість течії річки становить *a* км/год, а власна швидкість човна *x* км/год. Відстань від *K* до *M* за течією річки човен долає за *t* год. Знайдіть відстань, яку залишиться подолати човну проти течії річки через *t* год після відправлення з *M* до *K*.

А) $(x+a)t-xt$; В) $xt-(x-a)t$; Д) $(x+a)t-at$.

Б) $(x-a)t-xt$; Г) $(x+a)t-(x-a)t$;

30••. Знайдіть частку двох раціональних виразів $P : Q$, якщо

$$P=\frac{m^3+m^4}{4(m-1)^2}:\frac{m^4+m^5}{4m^2-4m} \text{ і } Q=\frac{9m^2-9m}{m^6+m^5}:\frac{(3m-3)^2}{m^5+m^4}.$$

А) 1; Б) 2; В) 4; Г) $(m-1)^2$; Д) $\frac{1}{(m-1)^2}$.

§8. СТЕПІНЬ З ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- означення степеня з цілим показником;
- властивості степеня з цілим показником;
- як перетворювати вирази, що містять степінь з цілим показником.

Степінь з цілим показником включає три види степеня:
1) степінь з цілим додатним показником;
2) степінь з нульовим показником;
3) степінь з цілим від'ємним показником.

Степінь з цілим додатним показником ототожнюється зі степенем з натуральним показником, який ми вивчили в 7-му класі.

Поняття степеня з нульовим показником випливає з властивостей степеня з натуральним показником: $1=\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0$.

Отже, $a^0=1$, де a – довільне число, $a\neq0$. Вираз 0^0 не визначений.

У науковій літературі можна знайти відомості про дуже великі або дуже малі величини. Наприклад, відстань від Землі до планети Нептун дорівнює 4 500 000 000 км, а діаметр молекули води дорівнює 0,0000000003 м. Із цими числами легше працювати тоді, коли вони записані у вигляді $a\cdot10^n$, тобто $4,5\cdot10^9$ км і $3\cdot10^{-10}$ м. Очевидним є те, що такі записи зручніші та компактніші. Зміст числового виразу $4,5\cdot10^9$ нам знайомий (це число, яке в 10^9 більше за 4,5), а ось вираз $3\cdot10^{-10}$ трапляється вперше. З'ясуємо, який зміст вкладають математики в запис 10^{-10}. Випишемо послідовно степені числа 10 з показниками 0, 1, 2, … та продовжимо цей рядок вліво, враховуючи те, що кожне наступне число в 10 разів більше, ніж попереднє.

$$\ldots,\ \frac{1}{100\,000},\ \frac{1}{10\,000},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5,\ \ldots,$$

або

$$\ldots, \frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^4}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots$$

Скориставшись тим, що починаючи зі степеня 10^0 показник кожного наступного степеня на 1 більший, тобто показник кожного попереднього степеня на 1 менший, отримаємо:

$$\ldots, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots$$

Повертаючись до виразу $3 \cdot 10^{-10}$, можемо сказати, що це таке число, яке в 10^{10} разів менше за 3. Отже, $3 \cdot 10^{-10} = 3 : 10^{10} = \frac{3}{10^{10}}$, або $3 \cdot 10^{-10} = \frac{3}{10^{10}}$.

Степенем з цілим від'ємним показником $(-n)$ будь-якого відмінного від нуля числа a називається дріб, чисельник якого дорівнює одиниці, а знаменник – степінь числа a з додатним показником n, тобто

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ де } n \text{ – натуральне число.}$$

Наприклад, $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

Слід зауважити, що мають місце тотожності:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n \text{ при } a \neq 0, b \neq 0.$$

Спробуйте довести їх самостійно.

Пригадаємо властивість ділення степенів з натуральними показниками та однаковою основою: $a^n : a^m = a^{n-m}$, де $n > m$, $a \neq 0$.

1) Нехай $n = m$, тоді $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. Оскільки $a^n : a^n = 1$ при довільному натуральному n і $a \neq 0$, тому $a^0 = 1$ при $a \neq 0$, причому вираз 0^0 вважається невизначеним (не має змісту).

2)* Нехай $n < m$, тоді $m = n + k$, де k – деяке натуральне число. Тому $a^n : a^m = a^n : a^{n+k} = a^{n-(n+k)} = a^{-k}$. З іншого боку: $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^{n+k}} = \frac{a^n}{a^n \cdot a^k} = \frac{1}{a^k}$. Таким чином, $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ при $a \neq 0$, де k – натуральне число. Вираз 0^{-n} не має змісту.

Для степеня з будь-яким цілим показником справедливі такі самі властивості, як для степеня з натуральним показником.

Для будь-якого $a \neq 0$ і довільних цілих чисел m та n:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (2)$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}. \quad (3)$$

Для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ і довільного цілого числа n:

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

Ці властивості можна довести, використовуючи означення степеня з цілим показником та відомі нам властивості степеня з натуральним показником.

Доведемо, наприклад, властивість (1). Нехай m та n – цілі додатні числа, тоді $(-m)$ та $(-n)$ – цілі від'ємні числа. Доведемо, що $a^{-n} \cdot a^{-m} = a^{-n-m}$ при $a \neq 0$, де m і n – натуральні числа.

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{-n-m}.$$

Отже, $a^{-n} \cdot a^{-m} = a^{-n-m}$, що й вимагалося довести.

Приклад 1. **Обчисліть значення виразу $5^{-2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \cdot 0{,}1^{-2}$.**

Розв'язання

Як записати

$$5^{-2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \cdot 0{,}1^{-2} =$$

$$= \frac{1}{5^2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 100}{25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

Відповідь. $1\frac{1}{5}$.

Як пояснити

Використовуємо означення степеня з цілим від'ємним показником і правила множення дробів та скорочення дробів. Оскільки $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, то

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100.$$

Приклад 2. Спростіть вираз $\left(\frac{2a^{-3}b^4}{9}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$ при $a\neq0$, $b\neq0$.

Розв'язання

Як записати

$$\left(\frac{2a^{-3}b^4}{9}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}=$$

$$=\frac{9}{2a^{-3}b^4}\cdot\left(\frac{a^{-2}b^3}{3}\right)^3=\frac{9}{2a^{-3}b^4}\cdot\frac{a^{-6}b^9}{3^3}=$$

$$=\frac{9a^{-6}b^9}{2a^{-3}b^4\cdot27}=\frac{a^{-6}b^9}{6a^{-3}b^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^{-6}}{a^{-3}}\cdot\frac{b^9}{b^4}=$$

$$=\frac{1}{6}a^{-3}b^5.$$

Відповідь. $\frac{1}{6}a^{-3}b^5$.

Як пояснити

Обидва дроби є степенями з цілим від'ємним показником, тому використовуємо тотожність: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$ і підносимо другий дріб до куба. Записуємо добуток отриманих раціональних дробів і ділимо окремо степені з основою a та основою b.

Ісаак Ньютон

Англійський математик Т. Гаріот (1560–1621), увівши знаки дій та знаки нерівностей, не здогадався скоротити записи дії множення однакових множників. Він виписував усі множники, які входили в одночлен, наприклад, 5*aaabbbb* чи 3*aabb*. Слід зазначити, що з квадратом і кубом числа працювали ще вчені Вавилона, майже 4000 років тому, отримуючи їх при обчисленнях площі квадрата та об'єму куба. Замінити дію множення однакових множників степенем зумів французький математик і філософ Рене Декарт (1596–1650). Він увів і показник степеня, і запис «a^n». Проте це стосувалося лише степеня з натуральним показником. Степінь з нульовим показником одночасно ввели в XV ст. двоє вчених: самаркандець аль-Каші і француз Нікола Шюке. Над теорією степеня з від'ємним показником працювали Нікола Шюке і англійський математик Джон Валіс (1616–1703). Удосконалив записи степенів з цілими показниками в сучасному вигляді «a^{-n}» і почав їх застосовувати на практиці видатний англійський математик і фізик Ісаак Ньютон (1643–1727).

Вправи для закріплення

157°. Запишіть степінь з цілим від'ємним показником у вигляді дробу:

1) 10^{-5}; 4) a^{-2008}; 7) $(7x+y)^{-4}$;

2) 7^{-9}; 5) $(4y)^{-10}$; 8) $5y^{-3}$;

3) x^{-24}; 6) $(2at)^{-40}$; 9) $\frac{1}{2}t^{-5}$.

158°. Запишіть дріб у вигляді степеня з цілим від'ємним показником або у вигляді добутку:

1) $\frac{1}{10^5}$; 3) $\frac{1}{a^{13}}$; 5) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{9a}{y^8}$;

2) $\frac{1}{2^{35}}$; 4) $\frac{1}{2008^{10}}$; 6) $\frac{1}{a}$; 8) $\frac{12x}{y^3}$.

Обчисліть значення виразів (159–160).

159°. 1) 5^{-2}; 3) $(-2)^{-2}$; 5) $(-1)^{-2008}$; 7) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) 7^{-1}; 4) $(-3)^{-3}$; 6) $(-1)^{-9}$; 8) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^{-2}$.

160°. 1) $0{,}01^{-3}$; 3) -5^{-2}; 5) $-0{,}2^{-3}$; 7) $(-5)^{-2}$;

2) $1{,}25^{-2}$; 4) -2^{-3}; 6) $(-0{,}2)^{-3}$; 8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

161°. Подайте числа:

1) 16; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$ у вигляді степеня з основою 2;

2) $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{3}$; 3; 81; 243 у вигляді степеня з основою 3;

3) $\frac{1}{625}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{5}$; 1; 5; 25 у вигляді степеня з основою 5;

4) 1 000 000; 10 000; 10; 1; 0,1; 0,001; 0,000001 у вигляді степеня з основою 10.

Обчисліть значення виразів (162–163).

162•. 1) $16 \cdot 2^{-3}$; 3) $2^{-3}+3^{-2}$; 5) $(7,3)^0-(-0,1)^{-1}$;

2) $-5 \cdot 25^{-1}$; 4) $100 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$; 6) $\left(-1\frac{1}{17}\right)^0 \cdot 5-\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$.

163•. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot 7^{-3} \cdot 7^5$; 3) $27 \cdot (-9)^{-1}$; 5) $-(-4)^{-2} \cdot 32+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

2) $2,4^0-2,4^{-1} \cdot \frac{5}{12}$; 4) $625^{-1} \cdot 5^7$; 6) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot 16+0,25^{-3}$.

164•. Порівняйте з нулем значення степеня:

1) $(-2)^{-6}$; 3) $(-2,4)^0$; 5) $(-9,9)^{-9}$; 7) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2007}$;

2) $(-3)^{-3}$; 4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-7}$; 6) $(-9,9)^{-8}$; 8) $\left(-1\frac{1}{13}\right)^{-2008}$.

165•. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $-(-2)^{-3}$; 3) $(-7)^0 \cdot 5-1$; 5) $-\left(-1\frac{1}{12}\right)^{-4}$;

2) $-(-7)^{-4}$; 4) $-(-1,3)^0 \cdot 2+(-4)$; 6) $-\left(7\frac{1}{5}\right)^{-12}$.

166•. Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:

1) $9a^{-3}$; 4) $(2a^2b^3)^{-1}$; 7) $x^{-2}y^{-3}$; 10) $5a(x-t)^{-4}$;

2) $-5y^{-9}$; 5) $a^{-2}b$; 8) $a^{-8}b^{-9}$; 11) $-\frac{1}{3}k(x+t)^{-2}$;

3) $(xy^2)^{-4}$; 6) $2xy^{-4}$; 9) $8(x-t)^{-3}$; 12) $-\frac{2}{7}k(t-x)^{-3}$.

167•. Запишіть у вигляді добутку дріб:

1) $\frac{5}{x^3}$; 3) $\frac{7x}{y^4}$; 5) $\frac{1}{m^2n^3}$; 7) $\frac{3x}{(a-5)^4}$;

2) $\frac{a}{3b^2}$; 4) $\frac{a^3}{9b^2}$; 6) $\frac{4x}{y^2t^4}$; 8) $\frac{(2x+1)^2}{3(a-m)^7}$.

Використайте тотожність $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$ $(a \neq 0)$.

2
240
1680

168••. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\cdot 25^{4}-\left(\left(\frac{7}{3}\right)^{-3}\right)^{0}+25^{-6}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{-4}:\ 25^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}\cdot 125^{-3}-\left(\left(\frac{7}{2}\right)^{-2}\right)^{0}+\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}\right)^{-2}\cdot\left(27^{-1}\right)^{-3}:3^{-1}+\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}\cdot(0{,}125)^{2}-\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{5}\right)^{0}+8^{20}\cdot\left(2^{8}\right)^{-8}\cdot(0{,}25)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

4) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{3}\cdot\left(5^{-3}\right)^{2}+2\cdot\left((1{,}5)^{-4}\right)^{0}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}\cdot\left(4^{-4}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-8}\cdot 2^{-5}$.

169••. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a^{-3}b^{2}}{c^{-3}}\right)^{4}:\left(\frac{a^{2}c^{4}}{b^{2}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{(bc)^{-1}}{a^{4}}\right)^{4}\cdot\left(\frac{a^{-2}}{b^{3}c^{4}}\right)^{0}$;

2) $\left(\frac{a^{-3}}{b^{2}c^{4}}\right)^{-4}:\left(\frac{a^{-3}b^{6}}{c^{4}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{c^{-4}}{a^{3}b^{10}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{a^{3}b^{-2}}{c^{-3}}\right)^{0}$;

3) $\left(\frac{a^{5}b^{3}}{c^{5}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{b^{-2}c^{2}}{a^{-4}}\right)^{-3}:\left(\frac{c^{-4}}{ab^{-3}}\right)^{4}\cdot\left(\frac{a^{-2}}{b^{3}c^{4}}\right)^{0}$;

4) $\left(\frac{b^{-3}c^{5}}{a^{10}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{b^{2}c^{6}}{a^{4}}\right)^{-3}:\left(\frac{a^{2}b^{-3}}{c^{2}}\right)^{4}\cdot\left(\frac{ab^{-2}}{c^{-5}}\right)^{0}$.

Вправи для самооцінювання

1°. Виберіть дві числові тотожності.

а) $5^{-10}=10^{-5}$; б) $7^{-9}=\frac{1}{7^{9}}$; в) $(-3)^{-7}=3^{-7}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=5^{3}$.

2°. Доберіть кожному дробу степінь з цілим показником.

а) $\frac{1}{5^{7}}$; 1) 7^{5};

б) $\frac{1}{7^{5}}$; 2) 5^{7};

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-7}$; 3) 5^{-7};

г) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-5}$. 4) 7^{-5}.

а	
б	
в	
г	

3°. Доберіть кожному числу степінь з основою 10.

а) 10 000; 1) 10^{-3};

б) 0,001; 2) 10^{-5};

в) 0,00001; 3) 10^{4};

г) 0,000001. 4) 10^{-6}.

а	
б	
в	
г	

4•. Знайдіть числове значення виразу $20\cdot 2^{-3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^{-1}$.

а) –10; б) –40; в) –16; г) –25.

5•. Виберіть добуток степенів, що дорівнює m^{-10}.

а) $\left(m^{-2}\cdot m^{-3}\right)^{-2}$; в) $\left(m^{-3}\cdot m^{-3}\cdot m^{-1}\right)^{-3}$;

б) $\left(\left(m^{-2}\right)^{-2}\right)^{-2}\cdot m^{-2}$; г) $\left(m^{-2}\right)^{-2}\cdot\left(m^{-3}\right)^{-2}$.

6•. Утворіть парами числові рівності.

а) $8^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; 1) 2^{-2};

б) $32\cdot\left(2^{-4}\right)^{2}$; 2) 2^{2};

в) $2^{10}\cdot 16^{-2}$; 3) 2^{-3};

г) $4^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$. 4) 2^{3}.

а	
б	
в	
г	

7••. Визначте вираз, спрощений вигляд якого дорівнює $\frac{6}{ab^{2}}$.

а) $3(2^{-2}a^{-2}b^{4}\cdot 2^{3}a^{3}b^{-2})$; в) $3(2^{-1}ab^{-3}\cdot 2^{2}a^{-2}b)$;

б) $3\left(2^{4}a^{-2}b^{-6}\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)^{3}\right)$; г) $3(2^{-3}a^{5}b^{-2}\cdot 2^{4}a^{-6}b^{4})$.

8••. Знайдіть значення виразу $5^{-1}x^{-2}y^{4}\cdot 5x^{3}y^{-2}$, **якщо** $x=0{,}125$, $y=2^{4}$.

а) 8; б) 32; в) 128; г) 64.

9••. **Обчисліть значення виразу**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot(0{,}25)^{-2}+\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-5}\right)^0-32^4\cdot(0{,}125)^5:\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{-1}.$$

а) -125 б) -129; в) 121; г) -5.

Вправи для повторення

170. **Спростіть вираз:**

1) $\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-2}-\frac{4}{4-x^2}\right):\frac{x-2}{x+2}$;

2) $\left(\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{6}{9-x^2}\right):\frac{x-3}{x+3}$;

3) $\left(\frac{4}{x+4}-\frac{1}{x-4}-\frac{8}{16-x^2}\right):\frac{x-4}{x+4}$;

4) $\left(\frac{4}{x+5}-\frac{1}{x-5}-\frac{10}{25-x^2}\right):\frac{x-5}{x+5}$.

171. **Запишіть у вигляді виразу розв'язок текстової задачі.**

За перший день турист пройшов x км. А за кожний наступний день він проходив на 10 % менше, ніж за попередній. Яку відстань пройшов турист:

1) за два дні; 2) за три дні; 3) за чотири дні?

172. **Зведіть многочлен до стандартного вигляду:**

1) $a^2-3a+a^3-4a^2+3a-2$; 3) $7a^2\cdot 2ab^2-4ab^2(-ab)-3a\cdot 5a^2b^2$;

2) $4a^2-2a-a^3+a-a^2+2$; 4) $-5a^3\cdot(3b^2)-8a^2b\cdot 2a+3a^2b^2\cdot 6a$.

173. **Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел x та y, якщо $x=2{,}7\cdot 10^{11}$, $y=4{,}5\cdot 10^{10}$.**

174. **Обчисліть значення виразу:**

1) $\frac{(1{,}2\cdot 10^3)(6{,}5\cdot 10^5)}{0{,}0312}$; 3) $\frac{(2{,}4\cdot 10^{14})(0{,}0125\cdot 10^{16})}{3000}$;

2) $\frac{24\cdot 250}{\left(\frac{1}{10}\right)^8}$; 4) $\frac{0{,}008\cdot 0{,}009}{\left(\frac{1}{10}\right)^{15}}$.

§ 9. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як записати число в стандартному вигляді;**
- **що таке значуща частина числа; порядок числа;**
- **на що вказує порядок числа;**
- **як виконувати дії над числами, записаними в стандартному вигляді.**

Часто доводиться працювати з дуже великими додатними числами (астрономам, географам) і дуже малими числами (хімікам, медикам, фізикам), які не зовсім зручно читати, писати та виконувати дії над ними. У такому разі, як ми вже зазначали, використовують степінь числа 10 з цілим показником. Наприклад, масу одного атома водню записують $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г, а середню відстань від Землі до Місяця – $3{,}84 \cdot 10^{5}$ км. Великим числом визначається об'єм Землі, який дорівнює 1 083 000 000 000 км^3, а малим – діаметр молекули води, який дорівнює 0,0000000003 м. Із такими числами легше працювати, коли вони записані у вигляді $a_1 \cdot 10^n$, де число a_1 у своїй цілій частині містить тільки цифру одиниць, відмінну від нуля. По-іншому кажуть, що це число записано в *стандартному вигляді*. Тобто $1{,}083 \cdot 10^{12}$ км^3, $3 \cdot 10^{-10}$ м – це записи відповідних величин об'єму Землі і діаметра молекули води в стандартному вигляді.

Кожне додатне число можна подати у стандартному вигляді.

Стандартним виглядом числа a називають його запис у вигляді $a_1 \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a_1 < 10$ і n – ціле число.

Наприклад, $6273 = 6{,}273 \cdot 10^3$, де $a_1 = 6{,}273$; $0{,}00256 = 2{,}56 \cdot 10^{-3}$, де $a_1 = 2{,}56$.

У записах великих і малих чисел у стандартному вигляді число a_1 називають *значущою частиною числа a*, а показник степеня n – *порядком числа a*.

Приклад 1. Подайте число $a = 6\,230\,000\,000$ у стандартному вигляді.

Розв'язання

Як записати

$a = 6{,}230000000 \cdot 10^9 =$

$= 6{,}23 \cdot 10^9$.

Відповідь. $6{,}23 \cdot 10^9$.

Як пояснити

У числі a ставимо кому так, щоб отримане число a_1 задовольняло умову: $1 \leqslant a_1 < 10$. Дістаємо $a_1 = 6{,}23$. Ми зменшили число a в 10^9 разів. Щоб перейти від числа a_1 до числа a, збільшуємо a_1 у 10^9 разів. Отже, $a = 6{,}23 \cdot 10^9$.

Приклад 2. Подайте число $a = 0{,}00000543$ у стандартному вигляді.

Розв'язання

Як записати

$a = 0{,}00000543 =$

$= 0000005{,}43 \cdot 10^{-6} =$

$= 5{,}43 \cdot 10^{-6}$.

Відповідь. $5{,}43 \cdot 10^{-6}$.

Як пояснити

У числі a ставимо кому так, щоб отримане число a_1 задовольняло умову: $1 \leqslant a_1 < 10$, тобто $a_1 = 5{,}43$. Задане число збільшено в 10^6 разів. Тому, щоб перейти від числа a_1 до числа a, треба зменшити число a_1 у 10^6 разів, або збільшити в 10^{-6} разів.

Зауваження. Порядок числа дає уяву про те, наскільки число велике або мале. Якщо порядок додатний і великий, то це означає, що число дуже велике. Якщо ж порядок по модулю великий, але від'ємний, то число дуже мале.

Вправи для закріплення

175°. Запишіть у стандартному вигляді число:

1) $8{,}2 \cdot 1000$; 3) $52{,}3 \cdot 10\,000$; 5) $263 \cdot 1\,000\,000\,000$;
2) $3{,}7 \cdot 100\,000$; 4) $16{,}24 \cdot 10\,000\,000$; 6) $7250 \cdot 1\,000\,000$.

176°. Подайте в стандартному вигляді число:

1) $0{,}012 \cdot 10^3$; 3) $201{,}4 \cdot 10^{-4}$; 5) $0{,}00549 \cdot 10^{-13}$;
2) $0{,}0005 \cdot 10^9$; 4) $2008 \cdot 10^{-8}$; 6) $0{,}24003 \cdot 10^{-7}$.

177°. Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 256 307; 4) 7 256 211; 7) $12{,}635 \cdot 10^{19}$;
2) 0,00725; 5) $0{,}000052 \cdot 10^{-6}$; 8) $25{,}78901 \cdot 10^{-10}$;
3) 0,0000018; 6) $0{,}0000008 \cdot 10^5$; 9) $0{,}3724 \cdot 10^{-12}$.

178°. На скільки порядків:

1) число 342 000 000 більше, ніж 4 000 000;
2) число 18 000 000 менше, ніж 216 000 000 000 000?

179•. Запишіть у стандартному вигляді:

1) масу Землі M (M = 6 000 000 000 000 000 000 000 м);
2) $1 \text{ мг} = \dfrac{1}{1\,000\,000\,000} \text{ кг}$;

3) 1 мм = 0,001 м;

4) масу атома Гідрогену 0,0000000000000000000000017 г;

5) масу Місяця 73 500 000 000 000 000 000 кг.

180•. Знайдіть значення виразу та запишіть отриманий результат у стандартному вигляді:

1) $(2,5 \cdot 10^{-8}) \cdot (4,4 \cdot 10^{9})$;
3) $(0,36 \cdot 10^{6}) : (2,4 \cdot 10^{2})$;
2) $(0,3 \cdot 10^{6}) \cdot (2,6 \cdot 10^{-10})$;
4) $(3,362 \cdot 10^{-5}) : (4,1 \cdot 10^{-3})$.

181•. Виконайте дії та запишіть отримане число в стандартному вигляді:

1) $(9,1 \cdot 10^{-6}) \cdot (2 \cdot 10^{10})$;
3) $(0,06 \cdot 10^{-12}) \cdot (2,5 \cdot 10^{40})$;
2) $(1,23 \cdot 10^{-8}) \cdot (4,8 \cdot 10^{-15})$;
4) $(11,88 \cdot 10^{-2}) \cdot (13,2 \cdot 10^{6})$.

182•. Густина заліза становить $7,8 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Знайдіть масу залізної плити, довжина якої 1,5 м, ширина $4 \cdot 10^{-1}$ м, а висота $2,1 \cdot 10^{-1}$ м.

183•. Визначте шлях, який пройде світло за $13,2 \cdot 10^{4}$ с, якщо швидкість світла становить 300 000 км/с.

184••. Виразіть:

1) $5,2 \cdot 10^{6}$ кг у грамах;
3) $8,13 \cdot 10^{15}$ кг у тоннах;
2) $1,7 \cdot 10^{-6}$ км у дециметрах;
4) $6,21 \cdot 10^{-10}$ мм у метрах.

185••. Маса Юпітера становить $1,9 \cdot 10^{27}$ кг, а маса Венери – $4,87 \cdot 10^{24}$ кг. Визначте, у скільки разів одна з планет має масу більшу від іншої. (Відповідь округліть до цілих.)

186••. В 1 ккал міститься $4,2 \cdot 10^{3}$ Дж. Скільки кілокалорій в 1 Дж?

187••. Порядок числа a дорівнює −13. Яким буде порядок числа:

1) $1000a$;
3) $a \cdot 10^{23}$;
5) $a \cdot 10^{-16}$;
2) $0,01a$;
4) $\frac{a}{10^{32}}$;
6) $\frac{a}{10^{-15}}$?

188••. Порівняйте числа:

1) $1,23 \cdot 10^{7}$ і $2,1 \cdot 10^{7}$;
3) $2,6 \cdot 10^{16}$ і $1,3 \cdot 10^{17}$;
2) $5,11 \cdot 10^{-11}$ і $51,1 \cdot 10^{-11}$;
4) $3,7 \cdot 10^{-6}$ і $4,9 \cdot 10^{-7}$.

Вправи для самооцінювання

1°. Виберіть стандартний вигляд числа 4 350 000.

а) $435 \cdot 10^4$; б) $4,35 \cdot 10^6$; в) $43,5 \cdot 10^5$; г) $0,435 \cdot 10^7$.

2°. Укажіть порядок числа $9,28 \cdot 10^{-4}$, поданого в стандартному вигляді.

а) -4; б) 4; в) 9,28; г) 10^{-4}.

3°. Визначте значущу частину числа 0,000508, попередньо записавши його в стандартному вигляді.

а) 4; б) -4; в) 0,508; г) 5,08.

4•. Запишіть у стандартному вигляді число, яке дорівнює $(1,2 \cdot 10^{-12}) \cdot (20,5 \cdot 10^{17})$.

а) $2,46 \cdot 10^4$; б) $2,46 \cdot 10^5$; в) $2,46 \cdot 10^7$; г) $2,46 \cdot 10^6$.

5•. Виразіть $9,7 \cdot 10^{-6}$ м у міліметрах.

а) $9,7 \cdot 10^{-11}$ мм; в) $9,7 \cdot 10^{-5}$ мм;

б) $9,7 \cdot 10^{11}$ мм; г) $9,7 \cdot 10^5$ мм.

6•. Визначте, який шлях пройде світло за $4,2 \cdot 10^7$ с, якщо швидкість світла становить 300 000 км/с. Відповідь запишіть у стандартному вигляді.

а) $1,26 \cdot 10^{12}$ км; в) $1,26 \cdot 10^{11}$ км;

б) $1,26 \cdot 10^{13}$ км; г) $1,26 \cdot 10^{10}$ км.

7•. Визначте порядок числа $\frac{m}{10^{-28}}$, коли відомо, що порядок числа m дорівнює -15.

а) 43; б) -43; в) 13; г) -13.

8••. Визначте, у скільки разів розмір вірусу грипу (0,0001 мм) більший за товщину плівки мильної бульбашки (0,00000006 см).

а) у $\frac{5}{3} \cdot 10^4$ раза; в) у $\frac{5}{3} \cdot 10^3$ раза;

б) у $\frac{50}{3}$ раза; г) у $\frac{5}{3} \cdot 10^2$ раза.

9••. Знайдіть масу сталевої кульки, коли відомо, що її радіус дорівнює $3 \cdot 10^{-3}$ м, а об'єм обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де R – радіус кулі, $\pi \approx 3$ (густина сталі $7,8 \cdot 10^3$ кг/м^3).

а) $8,484 \cdot 10^{-6}$ кг; в) $8,484 \cdot 10^{-5}$ кг;

б) $8,484 \cdot 10^{-4}$ кг; г) $8,484 \cdot 10^2$ кг.

Вправи для повторення

189. Знайдіть значення змінної, при якому дріб дорівнює нулю:

1) $\dfrac{18x^2-9x}{4-8x}$; 3) $\dfrac{x^2-36}{x^2-12x+36}$;

2) $\dfrac{19x-38x^2}{10x-5}$; 4) $\dfrac{3x^2-12}{-x^2+4x-4}$.

190. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної при всіх допустимих її значеннях:

1) $\dfrac{5x+7}{2x-1}+\dfrac{9x+5}{1-2x}$; 3) $\dfrac{x+17}{5x-20}+\dfrac{5x+1}{20-5x}$;

2) $\dfrac{7x+3}{3x-1}+\dfrac{x+5}{1-3x}$; 4) $\dfrac{4x-1}{15x-5}+\dfrac{3-8x}{5-15x}$.

191. Оператор мав виконати замовлення комп'ютерного набору деякого рукопису за 13 днів. Однак, набираючи щодня на 2 сторінки більше, він впорався із замовленням на 1 день швидше. Скільки сторінок має рукопис?

192. Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{1}{2}x-4$; 2) $y=-\dfrac{1}{2}x-4$; 3) $y=\dfrac{1}{2}x+4$; 4) $y=-\dfrac{1}{2}x+4$.

Знайдіть за графіком значення:

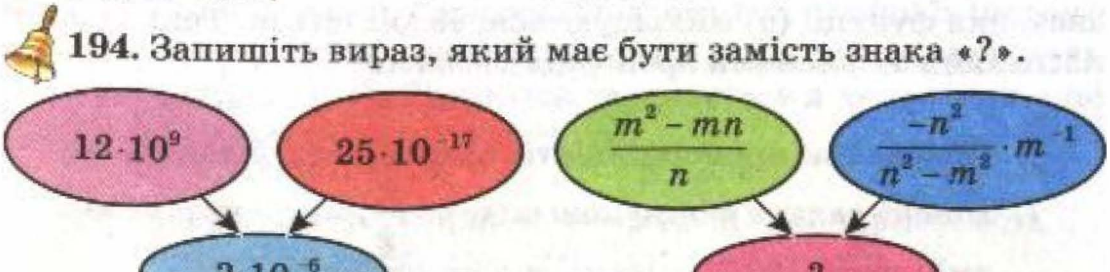
а) x, при якому значення функції дорівнює нулю;
б) функції, при якому аргумент дорівнює нулю;
в) x, при яких значення функції додатні;
г) x, при яких значення функції від'ємні.

193. Задайте лінійну функцію за допомогою формули, якщо її графік проходить через початок координат і точку:

1) $M(-1; 2)$;
2) $K(-3; 1)$;
3) $P(1; -3)$;
4) $Q(2; -1)$.

Лінійна функція має вид: $y=kx+b$, де $k\neq 0$. Графік проходить через задану точку, якщо її координати перетворюють формулу на правильну рівність.

194. Запишіть вираз, який має бути замість знака «?».



§10. ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як називається функція $y = \frac{k}{x}$;**
- **який вигляд має графік функції $y = \frac{k}{x}$ та як його побудувати;**
- **як впливає знак числа k на розташування графіка на координатній площині;**
- **які властивості має функція $y = \frac{k}{x}$.**

Досить часто трапляються ситуації, практичне розв'язання яких зводиться до встановлення залежності виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$ і $x \neq 0$. Наприклад, групу восьмикласників – 120 школярів – треба повезти на екскурсію. Для цього треба замовити m автобусів по n місць у кожному.

Очевидно, що кількість автобусів m залежить від кількості посадочних місць n. Цю залежність можна виразити аналітично: $m = \frac{120}{n}$. Зрозуміло, що при збільшенні посадочних місць в автобусі (n) кількість автобусів (m) буде зменшуватись, і навпаки. Оскільки кожному допустимому значенню n відповідає єдине значення m, то таку залежність можна вважати функцією (обов'язкова умова, що в автобусі всі місця зайняті і стояти заборонено).

Допустимими значеннями функції $m = \frac{120}{n}$ є лише всі можливі (реальні) натуральні числа. Якщо ж розглядати функцію $y = \frac{120}{x}$, то її область визначення розширюється – це множина всіх чисел, відмінних від нуля. Проте властивість, що при збільшенні значень аргументу (x) значення функції (y) зменшуються і, навпаки, при зменшенні значень аргументу (x) значення функції (y) збільшуються, зберігається. Такі функції називають *оберненими пропорційностями*.

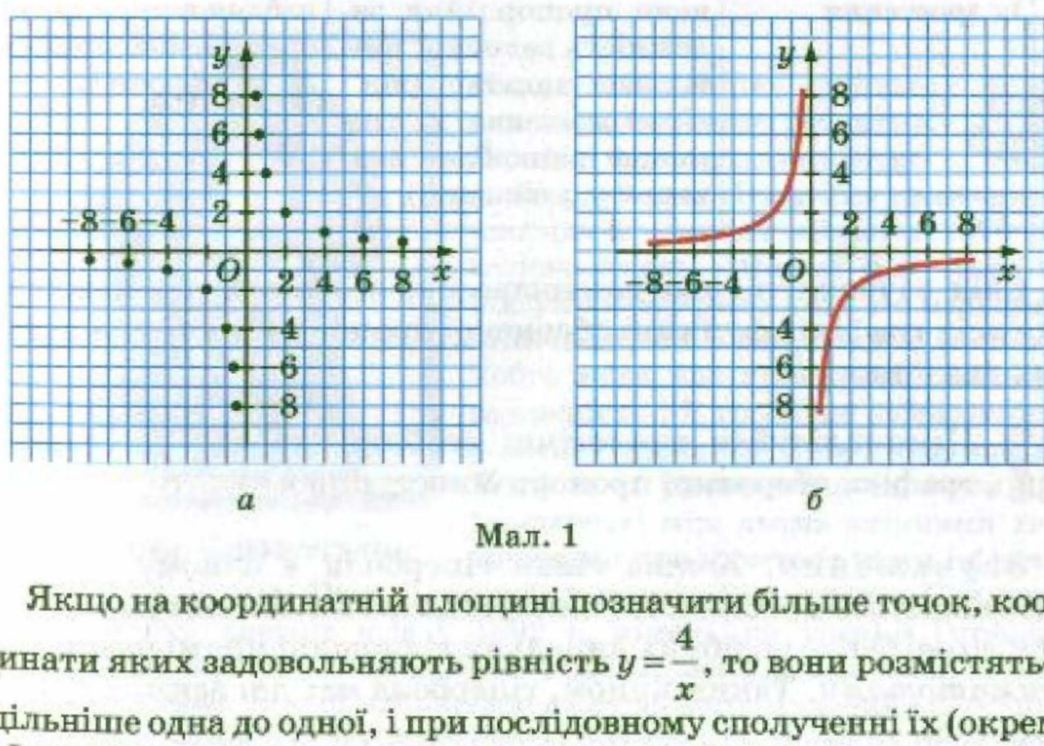
Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де x – незалежна змінна ($x \neq 0$) і k – число, що не дорівнює нулю.

Областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є множина всіх чисел, відмінних від нуля. Це випливає з того, що вираз $\frac{k}{x}$ має зміст при всіх значеннях x, крім $x = 0$ (на нуль ділити не можна). Таким чином, область визначення функції $D(y)$: $x \neq 0$. Оскільки $k \neq 0$, то й значення дробу $\frac{k}{x}$ не може дорівнювати нулю. Звідси область значень функції $E(y)$: $y \neq 0$.

Побудуємо графік функції $y = \frac{4}{x}$. Для цього складемо таблицю:

x	-8	-6	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	6	8
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

і позначимо на координатній площині отримані точки (мал. 1, *а*).



а *б*

Мал. 1

Якщо на координатній площині позначити більше точок, координати яких задовольняють рівність $y = \frac{4}{x}$, то вони розмістяться щільніше одна до одної, і при послідовному сполученні їх (окремо в I та III чвертях) утворяться дві криві лінії, які називаються *гіперболою* (мал. 1, *б*). Гіпербола складається з двох гілок – це графік оберненої пропорційності.

Криву, яка є графіком оберненої пропорційності, називають гіперболою (дві гілки гіперболи).

Проаналізуємо деякі особливості отриманого графіка функції

$$y=\frac{4}{x}.$$

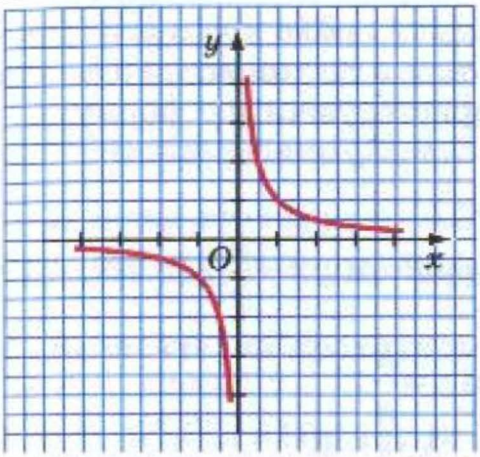
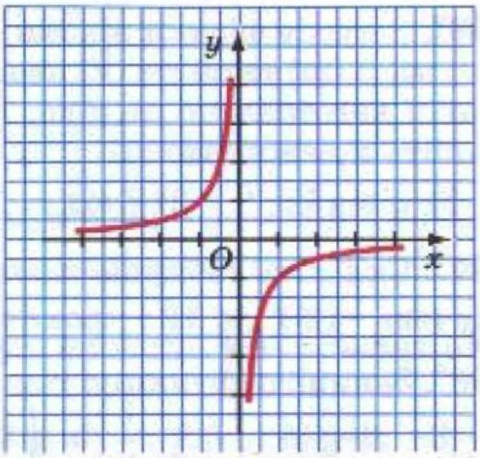
№	Факт	Наслідок	Висновок
1	$x \neq 0$	На графіку немає жодної точки з абсцисою 0	Графік не перетинає вісь Oy
2	$y \neq 0$	На графіку немає жодної точки з ординатою 0	Графік не перетинає вісь Ox
3	Розглянемо $x > 0$	$y > 0$	Частина графіка розміщена в І координатній чверті
4	Розглянемо $x < 0$	$y < 0$	Частина графіка розміщена в ІІІ координатній чверті
5	Розглянемо додатні (від'ємні) значення x у порядку їх зростання	Відповідні їм значення y будуть розміщені у порядку спадання (обернено пропорційна залежність величин: чим більше додатне (від'ємне) значення x, тим менше відповідне значення y, і навпаки)	Частина графіка, розміщена в І чверті (ІІІ чверті), постійно наближається до координатних осей, не перетинаючи їх

Слід зауважити, що вищенаведені особливості характерні для всіх графіків функцій оберненої пропорційності при додатних значеннях k.

!? Проаналізуйте аналогічні особливості для довільного графіка оберненої пропорційності при $k<0$.

Зауваження. Кожна гілка гіперболи в одному напрямі наближається все ближче і ближче до осі Ox, а в іншому напрямі – до осі Oy. У подібних випадках відповідні прямі називають *асимптотами*. Таким чином, гіпербола має дві асимптоти: Ox і Oy.

Обернена пропорційність $y=\frac{k}{x}$
Графік – дві гілки гіперболи
$D(y)$: $x \neq 0$; $E(y)$: $y \neq 0$

Ox – горизонтальна асимптота гіперболи, Oy – вертикальна асимптота гіперболи. Протилежним значенням аргументу відповідають протилежні значення функції	
$k>0$	$k<0$
	
При $x>0 \to y>0$ (I чверть), при $x<0 \to y<0$ (III чверть)	При $x>0 \to y<0$ (IV чверть), при $x<0 \to y>0$ (II чверть)

Микола Лобачевський

Поняття «функція» пройшло довгий шлях свого розвитку. В роботі французького вченого П'єра Ферма «Введення у вивчення плоских і тілесних місць» в 1679 р. зазначається: «Всякий раз, коли в підсумковому рівнянні є дві невідомі величини, то очевидним є місце». Тобто мова йде про функціональну залежність і її графічне зображення («місце» визначає лінію). Вивченню ліній за їх рівняннями та взаємній залежності між двома змінними величинами приділяється увага і французьким вченим Рене Декартом у книзі «Геометрія». Поняття «функція» вперше ввів у 1692 р. німецький учений Готфрід Лейбніц. Функцією він називав різні відрізки, що зв'язані з деякою кривою. Більш наближене до сучасного означення функції трапляється в працях швейцарського вченого Йоганна Бернуллі (1713 р.), російського вченого Леонарда Ейлера (1748 р.), французького вченого Жана Фур'є (1822 р.), російського вченого Миколи Лобачевского (1834 р.), німецького вченого Петера Густава Лежена (Діріхле) (1838 р.), де вже вводиться позначення функції $f(x)$ і визначається функція аналітичним способом. У принципі, сучасне означення функції приписують німецькому вченому Діріхле.

Вправи для закріплення

195°. Сторони прямокутника дорівнюють m см та n см, а його площа становить 18 см^2. Виразіть формулою залежність n від m.

196°. З курсу фізики відомо формулу, якою пов'язані між собою маса (m) та об'єм (V) деякого тіла з густиною (ρ) речовини, з якої виготовлено це тіло. Використовуючи цю формулу, запишіть залежність:

1) ρ від V; 2) V від ρ.

197°. Складіть таблицю значень функції $y=-\frac{6}{x}$ для всіх цілих значень $-12 \leqslant x \leqslant 12$ з кроком 2.

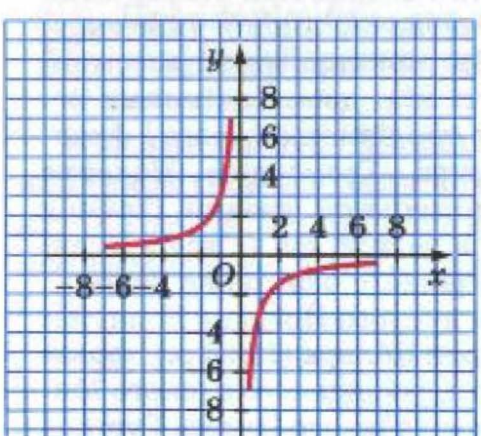
198°. Запишіть функцію у вигляді $y=\frac{k}{x}$:

1) $y=\frac{6}{10x}$; 3) $y=-\frac{3}{5x}$; 5) $y=\frac{3}{4x}$;

2) $y=\frac{7}{2x}$; 4) $y=-\frac{3}{2x}$; 6) $y=\frac{61}{100x}$.

199°. Запишіть функцію $y=\frac{5}{4x}$ у вигляді $y=\frac{k}{x}$ і складіть її таблицю значень для $-3 \leqslant x \leqslant 3$ з кроком 0,5.

200°. Функцію задано формулою $y=\frac{8}{x}$. Яке значення функції відповідає значенню $x=-0{,}04$? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -5?



Мал. 2

201°. На малюнку 2 зображено графік функції $y=-\frac{3}{x}$. Користуючись графіком:

1) знайдіть значення функції, якому відповідає значення аргументу: -3; $-1{,}5$; -1; $1{,}5$; 3;

2) знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції: 6; 2; 1,5; $-1{,}5$; -2; -6;

3) порівняйте: $y(-6)$ та $y(-2)$; $y(-3)$ та $y\left(-\frac{1}{2}\right)$; $y(3)$ та $y(6)$.

202°. Заповніть таблицю значень для функції $y=-\frac{15}{x}$.

x	-5		$\frac{1}{3}$	-2		$0,25$	$\frac{3}{4}$		
y		-15			30			$1\frac{1}{2}$	60

203°. Функцію задано формулою $y=-\frac{9}{x}$. Знайдіть:

1) y, якщо $x=-30$; $x=-0,3$; $x=9$; $x=18$;

2) x, якщо $y=-9$; $y=-90$; $y=1$; $y=4,5$; $y=27$.

204°. Визначте, чи проходить графік функції $y=\frac{10}{x}$ через точки: $A(2;\ 5)$, $K(-10;\ 1)$, $B\left(\frac{1}{2};\ 20\right)$, $C\left(\frac{1}{4};\ 2,5\right)$, $M\left(-3;\ -3\frac{1}{3}\right)$, $F\left(-\frac{2}{5};\ -25\right)$.

205•. Графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $F\left(\frac{1}{9};\ 18\right)$. Чи проходить цей графік через точки: $A(-1;\ -2)$, $B(-2;\ 1)$, $C\left(\frac{1}{2};\ 4\right)$, $K\left(-\frac{1}{3};\ 6\right)$, $M\left(-\frac{1}{4};\ -\frac{1}{2}\right)$, $P(0,5;\ 4)$?

Побудуйте графіки функцій (206–207).

206•. 1) $y=\frac{2}{x}$, $-8 \leqslant x \leqslant 8$;

2) $y=-\frac{5}{x}$, $-7 \leqslant x \leqslant 7$;

3) $y=-\frac{\frac{1}{3}}{x}$, $-6 \leqslant x \leqslant 6$.

207•. 1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=-\frac{0,5}{x}$; 3) $y=\frac{9}{x}$.

208•. Визначте, при якому значенні k графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку:

1) $A(1;\ 2)$; 2) $K(-0,5;\ -6)$; 3) $D\left(1\frac{1}{2};\ -12\right)$;

4) $B(-4; 2)$; 5) $F\left(-\frac{1}{3}; 6\right)$; 6) $M\left(-2; 2\frac{1}{2}\right)$.

209•. Знайдіть k, коли відомо, що графіку функції $y = \frac{-k}{x}$ належить точка:

1) $A(-9; 9)$; 3) $C\left(-\frac{1}{2}; -6\right)$; 5) $F\left(1\frac{1}{3}; -15\right)$;

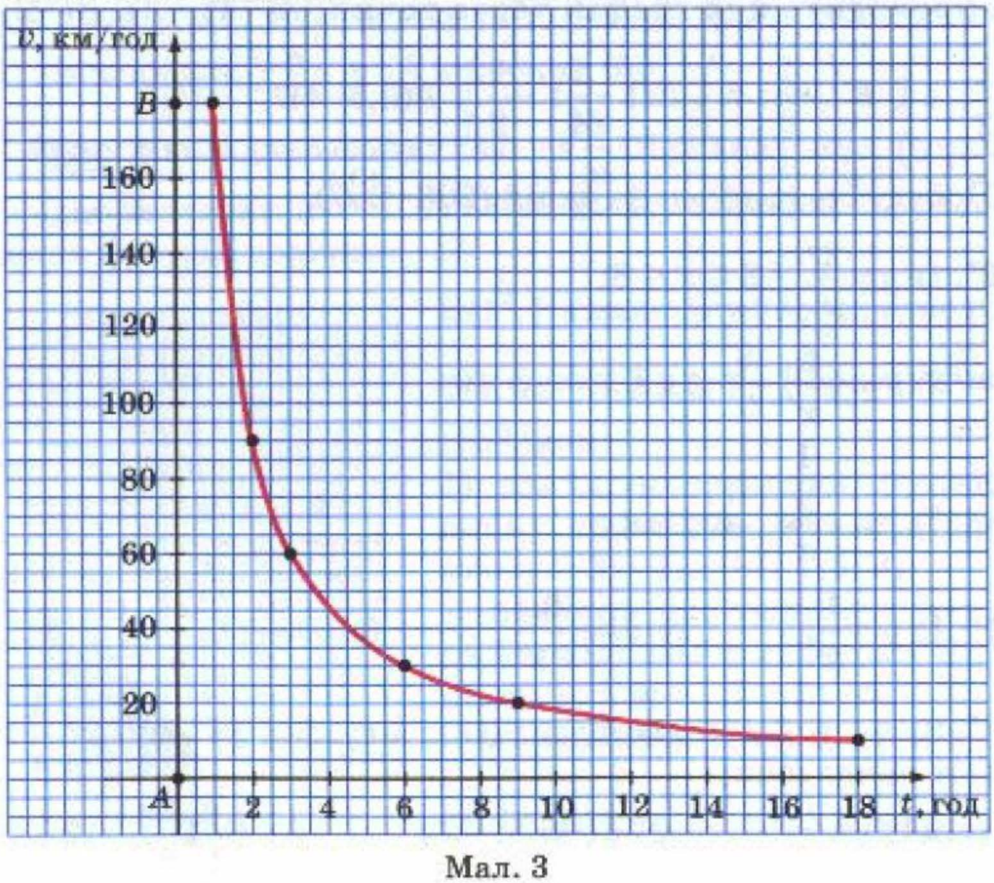
2) $B(3; -6)$; 4) $M(5; -10)$; 6) $K\left(-1\frac{1}{7}; -21\right)$.

210•. Об'єм прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи a см і b см і висотою 40 см дорівнює 6400 см^3. Виразіть формулою залежність: a від b; b від a. Знайдіть:

1) a, якщо $b = 20$ см; 2) b, якщо $a = 40$ см.

211••. Побудуйте графік функції $y = \frac{k}{x}$, який проходить через точку $M(-6; 3)$. Чому дорівнює відстань від точки M до координатних осей?

212••. На малюнку 3 побудовано графік залежності часу від швидкості руху автомобіля по міжнародній автомагістралі між двома пунктами A та B. За допомогою графіка знайдіть:



Мал. 3

1) скільки часу потрібно на шлях із пункту A до пункту B, якщо рухатися зі швидкістю: 180 км/год; 120 км/год; 90 км/год; 60 км/год;

2) з якою швидкістю потрібно рухатися, щоб дістатися з пункту A в пункт B: за 1 год; за 3 год; за 6 год; за 18 год;

3) якою є відстань між пунктами A та B.

213••. Побудуйте графік залежності часу (t), затраченого велосипедистом на шлях від пункту A до пункту B, від швидкості його руху (v), якщо відстань між пунктами становить 18 км. Використовуючи графік, знайдіть:

1) скільки часу потрібно велосипедисту на шлях від пункту A до пункту B, рухаючись зі швидкістю 12 км/год;

2) з якою швидкістю потрібно рухатися велосипедисту, щоб дістатися з пункту A в пункт B: за 2 год; за 1,5 год.

214••. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=-\frac{6}{x}$ та $y=-x-1$. Визначте, користуючись графічним зображенням, точки перетину графіків функцій.

215••. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=2x$ та $y=\frac{8}{x}$. За допомогою отриманого графічного зображення визначте абсциси точок перетину графіків функцій.

216••. Знайдіть $x_1^2+x_2^2$, де x_1 та x_2 – абсциси точок перетину графіків функцій $y=-\frac{4}{x}$ та $y=3-x$.

Вправи для самооцінювання

1°. Сторони прямокутника дорівнюють x см та y см, а площа прямокутника – 2,8 см². Виразіть формулою y від x.

а) $y=2,8x$; б) $x=2,8y$; в) $x=\frac{2,8}{y}$; г) $y=\frac{2,8}{x}$.

2°. Визначте значення функції $y=-\frac{1,5}{x}$ при $x=\frac{1}{3}$.

а) –0,5; б) –4,5; в) 0,5; г) 4,5.

3°. Укажіть, при якому значенні аргументу значення функції $y=\frac{12}{x}$ дорівнює -4.

а) -3; б) $-\frac{1}{3}$; в) $-4{,}8$; г) 8.

4•. Визначте кількість спільних точок графіків функцій $y=-\frac{2}{x}$ та $y=1-x$.

а) Одна; б) дві; в) три; г) спільних точок немає.

5•. Виберіть функцію, яка є оберненою пропорційністю, коли відомо, що при $x=3$ значення функції дорівнює 12.

а) $y=\frac{12}{x}$; б) $y=\frac{24}{x}$; в) $y=\frac{36}{x}$; г) $y=\frac{48}{x}$.

6•. Відомо, що графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $X(-7;\ 0{,}3)$. Укажіть точку, яка належить графіку цієї функції.

а) $M(0{,}3;\ 7)$; б) $P(-0{,}1;\ 21)$; в) $N\left(-\frac{1}{3};\ -6{,}3\right)$; г) $S(0{,}5;\ 4{,}2)$.

7••. Обчисліть значення виразу $\frac{x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2}{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}$, де $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ – точки перетину графіків функцій $y=\frac{2}{x}$ і $y=x-1$.

а) $\frac{4}{8}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{4}{2}$.

8••. Укажіть трійку точок, які належать графіку функції $y=-\frac{15}{x}$.

а) $A(-3;\ 5)$; $B(1;\ -15)$; $C(1{,}5;\ 10)$;

б) $T(0{,}3;\ -50)$; $O\left(-2;\ \frac{15}{2}\right)$; $L(-0{,}1;\ -150)$;

в) $P(1;\ -15)$; $Q(-0{,}5;\ 30)$; $R(-0{,}12;\ 125)$;

г) $F(-10;\ 1{,}5)$; $G\left(12;\ -1\frac{1}{4}\right)$; $H(-0{,}6;\ 2{,}5)$.

9••. Визначте дві функції, графіки яких розташовані в I і III координатних чвертях:

1) $y=\frac{8}{(2-x)^2-(x+2)^2}$; 2) $y=\frac{18-12x}{x^2-3x}-\frac{6}{3-x}$;

3) $y=\dfrac{16}{(x+1)^2-(x-1)^2}$; 5) $y=\dfrac{36}{(3-x)^2-(3+x)^2}$.

4) $y=\dfrac{3x(x+1)-3x^2+15}{x(x+5)}$;

а) 1 і 3; б) 3 і 5; в) 2 і 4; г) 3 і 4.

Вправи для повторення

217. Спростіть вираз, використовуючи властивості степеня:

1) $\left(\dfrac{1}{2}x^2y^{-3}\right)^{-2}$; 3) $\dfrac{25x^{-5}}{y^{-3}}\cdot\dfrac{y^3}{5x^{-7}}$; 5) $\left(\dfrac{2x^3}{y^2}\right)^{-2}\cdot\left(x^{-2}y\right)^{-4}$;

2) $\left(\dfrac{1}{3}x^{-2}y^2\right)^{-3}$; 4) $\dfrac{4x^{-1}}{y^{-2}}\cdot\dfrac{y^2}{2x^{-3}}$; 6) $\left(\dfrac{x^2}{3y^2}\right)^{-3}\cdot\left(xy^{-3}\right)^2$.

218. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2+x-6}{x-3}=\dfrac{x+3}{x-3}$; 3) $\dfrac{x-4}{x}=\dfrac{2x+8}{x+4}$;

2) $\dfrac{x^2+x-7}{x-4}=\dfrac{x+9}{x-4}$; 4) $\dfrac{x+3}{x}=\dfrac{2x-6}{x-3}$.

219. Басейн можна наповнити водою за допомогою двох працюючих труб за 3 год. Якщо б працювала кожна труба окремо, то через другу трубу басейн можна наповнити за 8 год. За скільки годин зможе наповнити басейн перша труба, працюючи окремо?

220. Розв'яжіть рівняння:

1) $(5-x)(x^2-4)(x^2+1)=0$; 3) $(18-3x)(81-x^2)(x^2+16)=0$;

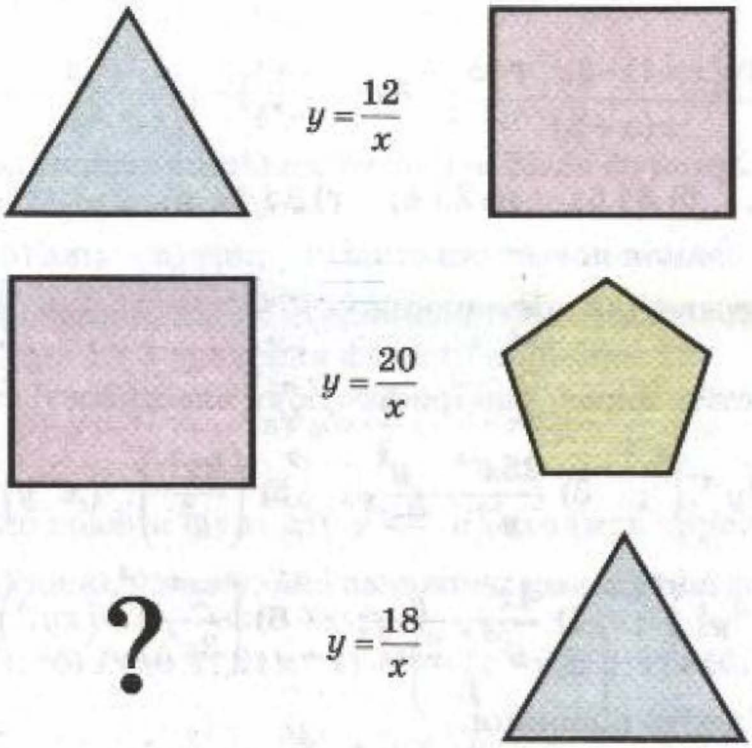
2) $(5-2x)(x^2-25)(x^2+4)=0$; 4) $(18-4x)(100-x^2)(x^2+25)=0$.

221. Заповніть таблицю.

a	−3,5	−2,5	−1,5	0	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
a^2										

$65^2=(6\cdot 7)\cdot 100+25=4200+25=4225$;
$85^2=(8\cdot 9)\cdot 100+25=7200+25=7225$;
$\overline{a5}^2=a(a+1)\cdot 100+25$.

222. Визначте, якою фігурою треба замінити знак «?».



Готуймося до тематичного оцінювання

«Стандартний вигляд числа.

Функція $y=\frac{k}{x}$, її графік та властивості»

Запитання для самоконтролю

1. Чому дорівнює степінь довільного числа, відмінного від нуля, з нульовим показником?

2. Який дріб називається степенем з цілим від'ємним показником?

3. Які справедливі властивості для степеня (a^n, $a \neq 0$) з цілим показником?

4. Який запис довільного додатного числа називається стандартним виглядом цього числа?

5. Як знайти значущу частину числа?

6. Що називається порядком числа та на що він указує?

7. Як виконувати дії над числами, записаними в стандартному вигляді?

8. Як називається функція $y=\frac{k}{x}$ і яка крива є її графіком?

9. Чим відрізняються функції $y=kx$ і $y=\frac{k}{x}$?

10. Як побудувати графік функції $y = \dfrac{k}{x}$?

11. Як впливає знак числа k на розташування графіка на координатній площині?

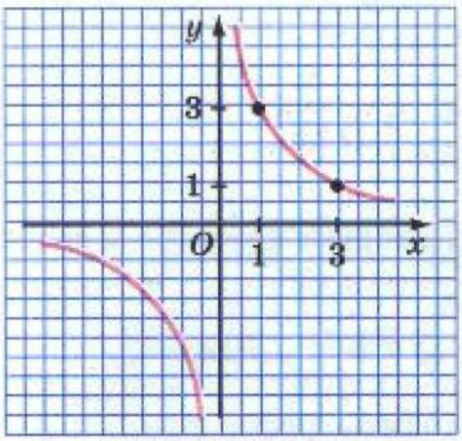
12. Які властивості має функція $y = \dfrac{k}{x}$?

Завдання в тестовій формі

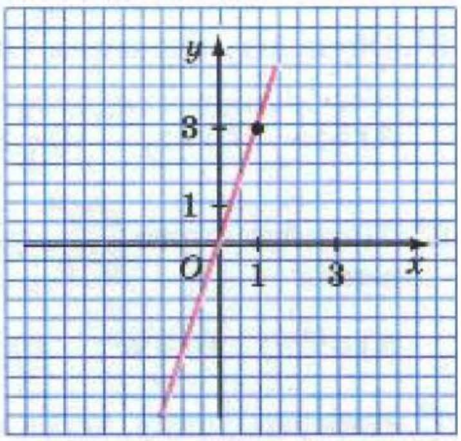
1°. Укажіть малюнок, на якому зображено графік функції

$$y = -\frac{3}{x}.$$

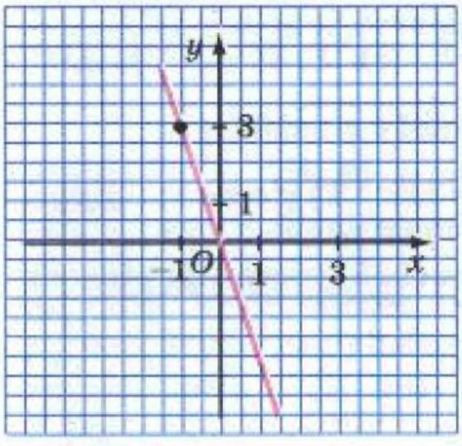
А)



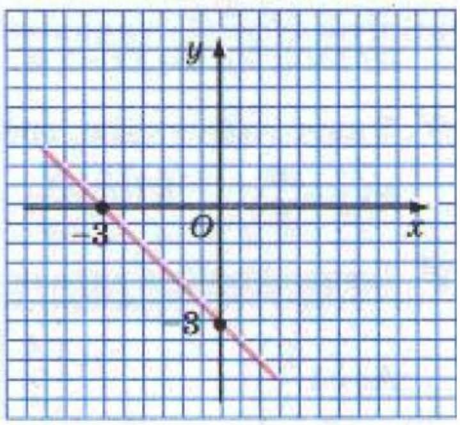
Г)



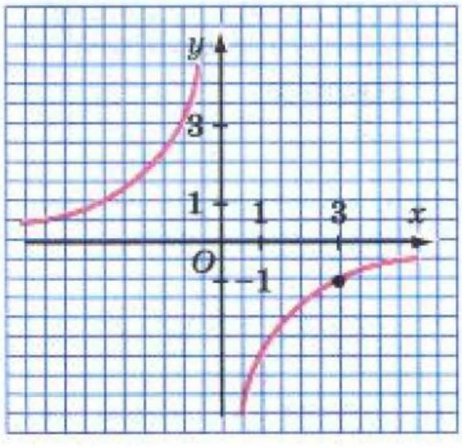
Б)



Д)



В)



2°. Визначте три вирази, значення яких дорівнюють 1.

А) $4^3 : 2^6$; Б) $8^2 : 2^5$; В) $2^9 : 8^3$; Г) $4^3 : 2^3$; Д) $2^4 : 16$.

3°. Запишіть число 0,0278 у стандартному вигляді.

А) $0{,}278 \cdot 10^{-1}$; Г) $2{,}78 \cdot 10^{-2}$;

Б) $0{,}00278 \cdot 10$; Д) $278 \cdot 10^{-4}$.

В) $0{,}000278 \cdot 10^2$;

4°. Подайте вираз $\dfrac{a^4}{a^2 \cdot a^6}$ у вигляді степеня з основою a.

А) a^{-8}; Б) a^{-2}; В) a^{-3}; Г) a^0; Д) a^{-4}.

5°. Обчисліть значення виразу $5^{16} : \left(5^6\right)^3$.

А) 5; Б) 1; В) $\dfrac{1}{5}$; Г) $\dfrac{1}{25}$; Д) 25.

6°. Подайте вираз $\dfrac{a^4 b^{14}}{a^{12} b^7}$ у вигляді добутку степенів з основами a та b.

А) $a^{16}b^7$; Б) b^7a^8; В) $a^{-8}b^7$; Г) a^8b^{-7}; Д) $a^{-8}b^{-7}$.

7°. Виберіть точку, через яку проходить графік функції $y = -\dfrac{8}{x}$.

А) $M(4; 2)$; Б) $K(-2; 4)$; В) $N(-1; -8)$; Г) $Z(-4; -2)$; Д) $P(2; 4)$.

8°. Укажіть функцію, графіком якої є гіпербола.

А) $y = \dfrac{x}{7}$; Б) $y = \dfrac{7}{x}$; В) $y = 7x$; Г) $y = x - 7$; Д) $y = 7 - x$.

9°. Ідентифікуйте вирази (А–Д) та (1–5) у вигляді рівності.

А) $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$; 1) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3$;

Б) $\left(1\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; 2) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$;

В) $\left(1\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$; 3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$;

Г) $\left(1\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$; 4) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3$;

Д) $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$. 5) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

10°. Доберіть до кожного числа (А–Д) його запис у стандартному вигляді (1–5).

А) 6 250 000; 1) $6,25 \cdot 10^3$;

Б) 6250; 2) $6,25 \cdot 10^{-1}$;

В) 62,5; 3) $6,25 \cdot 10^{-4}$;

Г) 0,625; 4) $6,25 \cdot 10$;

Д) 0,000625. 5) $6,25 \cdot 10^6$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

11•. Обчисліть значення виразу $3^8 \cdot 3^{-2} \cdot \left(3^{-4}\right)^2$.

А) $\frac{1}{9}$; Б) 9; В) $\frac{1}{3}$; Г) 3; Д) 1.

12•. Виберіть функцію, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{1}{4};\ -12\right)$.

А) $y=-\frac{48}{x}$; В) $y=-\frac{12}{x}$; Д) $y=-\frac{3}{x}$.

Б) $y=-\frac{0,25}{x}$; Г) $y=-\frac{4}{x}$;

13•. Виберіть дві точки, через які проходить графік функції $y=-\frac{12}{x}$.

А) $M(6;\ 2)$; В) $P(-4;\ -3)$; Д) $L(-8;\ -1,5)$.

Б) $K(-3;\ 4)$; Г) $Q(-0,5;\ 24)$;

14•. Подайте число $0,0361 \cdot 10^{18}$ у стандартному вигляді.

А) $0,361 \cdot 10^{17}$; Г) $3,61 \cdot 10^{20}$;

Б) $0,361 \cdot 10^{19}$; Д) $361 \cdot 10^{14}$.

В) $3,61 \cdot 10^{16}$;

15•. Утворіть між виразами (А–Д) та (1–5) правильні рівності.

А) $25 \cdot 5^{-3}$; 1) 125;

Б) $5^{-2} \cdot 5^4$; 2) 5;

В) $\left(5^{-1}\right)^3 \cdot 5^4$; 3) $\frac{1}{5}$;

Г) $\left(5^{-2}\right)^{-1} \cdot 5$; 4) $\frac{1}{25}$;

Д) $\left(5^{-1}\right)^4 \cdot 5^2$. 5) 25.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

16•. Знайдіть значення k, коли відомо, що графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $Q\left(-\frac{1}{2};\ 5\right)$.

А) $k=-\frac{2}{5}$; Б) $k=-10$; В) $k=-\frac{5}{2}$; Г) $k=-1$; Д) $k=\frac{2}{5}$.

17•. Ідентифікуйте вимірювання довжини в сантиметрах і кілометрах.

А) $2{,}75\cdot10^{8}$ см; 1) $2{,}75\cdot10^{-3}$ км;
Б) $275\cdot10^{4}$ см; 2) $2{,}75\cdot10^{-2}$ км;
В) $0{,}275\cdot10^{3}$ см; 3) $2{,}75\cdot10^{-1}$ км;
Г) $0{,}0275\cdot10^{5}$ см; 4) $2{,}75\cdot10$ км;
Д) $0{,}000275\cdot10^{8}$ см. 5) $2{,}75\cdot10^{3}$ км.

А	Б	В	Г	Д

18•. Ідентифікуйте вимірювання маси у кілограмах і грамах.

А) $4{,}75\cdot10^{-5}$ кг; 1) $4{,}75\cdot10^{2}$ г;
Б) $47{,}5\cdot10$ кг; 2) $4{,}75\cdot10^{-2}$ г;
В) $0{,}475\cdot10^{-3}$ кг; 3) $4{,}75\cdot10^{5}$ г;
Г) $0{,}00475\cdot10^{2}$ кг; 4) $4{,}75\cdot10^{-1}$ г;
Д) $0{,}0000475\cdot10^{9}$ кг. 5) $4{,}75\cdot10^{7}$ г.

А	Б	В	Г	Д

19•. Виконайте множення $(4{,}5\cdot10^{-3})\cdot(5{,}2\cdot10^{-5})$, записуючи результат у стандартному вигляді.

А) $23{,}4\cdot10^{15}$; В) $2{,}34\cdot10^{-7}$; Д) $2{,}34\cdot10^{16}$.
Б) $23{,}4\cdot10^{-8}$; Г) $2{,}34\cdot10^{-9}$;

20•. Доберіть до кожної точки (А–Д) відповідну формулу оберненої пропорційності (1–5), коли відомо, що її графік проходить через цю точку.

А) $Q\left(4;\ \frac{1}{8}\right)$; 1) $y=\frac{5}{x}$;
Б) $P\left(\frac{2}{3};\ \frac{9}{5}\right)$; 2) $y=\frac{4}{x}$;
В) $R\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{4}{9}\right)$; 3) $y=\frac{1{,}2}{x}$;
Г) $S(-25;\ -0{,}2)$; 4) $y=\frac{0{,}5}{x}$;
Д) $T\left(\frac{1}{4};\ 16\right)$. 5) $y=\frac{2}{3x}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

21••. Подайте вираз $27\cdot 3^{-4}\cdot\left(3^{-1}\right)^{5}\cdot 81^{2}$ у вигляді степеня з основою 3.

А) 3^{-1}; Б) 3^{-2}; В) 3^{-3}; Г) 3^{3}; Д) 3^{2}.

22••. Знайдіть значення виразу $\dfrac{\left(2^{5}\right)^{3}\cdot\left(2^{-6}\right)^{2}}{16^{2}}$.

А) $\dfrac{1}{8}$; Б) $\dfrac{1}{16}$; В) $\dfrac{1}{32}$; Г) $\dfrac{1}{4}$; Д) $\dfrac{1}{2}$.

23••. Знайдіть значення виразу $0{,}04a^{-2}b^{4}\cdot 25a^{3}b^{-3}$, коли відомо, що $a=-0{,}125$, $b=16$.

А) -200; Б) -20; В) -2; Г) $-\dfrac{1}{2}$; Д) $\dfrac{1}{2}$.

24••. Доберіть парами рівні вирази.

А) $\left(3a^{-5}b\right)^{-1}$; 1) $\dfrac{10b^{10}}{7a^{6}}$;

Б) $\left(\dfrac{3}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; 2) $\dfrac{a^{5}}{3b}$;

В) $\left(\dfrac{2}{5}a^{-2}b^{3}\right)^{-3}$; 3) $\dfrac{7b^{2}}{5a^{4}}$;

Г) $\left(\dfrac{5}{7}a^{4}b^{-2}\right)^{-1}$; 4) $\dfrac{16a^{2}b^{6}}{9}$;

Д) $\left(-0{,}7a^{3}b^{-5}\right)^{-2}$. 5) $\dfrac{125a^{6}}{8b^{9}}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

25••. Знайдіть масу залізної плити (форми прямокутного паралелепіпеда), розміри якої $1{,}8\cdot 10^{-1}$ м, $5\cdot 10^{-2}$ м і $2{,}5\cdot 10^{-1}$ м, якщо густина заліза становить $7{,}8\cdot 10^{3}$ кг/м³.

А) $1{,}755\cdot 10^{3}$ г; В) $1{,}755\cdot 10^{5}$ г; Д) $1{,}755\cdot 10$ г.

Б) $1{,}755\cdot 10^{4}$ г; Г) $1{,}755\cdot 10^{2}$ г;

26••. Подайте вираз $\left(\dfrac{a^{-4}}{b^{-3}}\right)^{-3}:\left(b^{-2}a^{3}\right)^{4}\cdot\left(\dfrac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{b^{-8}}{a^{-7}}\right)^{0}$ у вигляді дробу.

А) $\dfrac{a}{b^{3}}$; Б) $\dfrac{a^{2}}{b}$; В) $\dfrac{a^{8}}{b^{5}}$; Г) $\dfrac{b^{5}}{a^{8}}$; Д) $\dfrac{a^{8}}{b}$.

27••. Зведіть вираз $\left(0{,}4a^{-3}b^{-2}\right)^{-3}\cdot\left(0{,}5a^{-4}b^{-3}\right)^{2}$ до вигляду $k\cdot a^{n}b^{m}$, де n, m – цілі числа.

А) $\dfrac{125}{4}a^{-17}b^{-12}$; Б) $\dfrac{125}{8}a^{17}b$; В) $\dfrac{125}{32}a$;

Г) $\frac{125}{16}a^{-1}b^{12}$; Д) $\frac{125}{2}a^{-7}b^{-5}$.

28••. Установіть відповідність між часом t та відповідною відстанню s, коли відомо, що швидкість світла дорівнює $3 \cdot 10^5$ км/с.

А) $t = 0{,}28 \cdot 10^6$ с; 1) $s = 8{,}4 \cdot 10^{12}$ км;
Б) $t = 0{,}028 \cdot 10^5$ с; 2) $s = 8{,}4 \cdot 10^{14}$ км;
В) $t = 2{,}8 \cdot 10^7$ с; 3) $s = 8{,}4 \cdot 10^{16}$ км;
Г) $t = 28 \cdot 10^8$ с; 4) $s = 8{,}4 \cdot 10^{10}$ км;
Д) $t = 280 \cdot 10^9$ с. 5) $s = 8{,}4 \cdot 10^8$ км.

А	Б	В	Г	Д

29••. Обчисліть значення виразу $M = f(-5) + f(-4) \cdot f(1) - f(3)$,

якщо функція f має вигляд $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } -5 \leqslant x < 1, \\ \frac{3}{x}, & \text{якщо } 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

А) $-\frac{77}{20}$; Б) $-\frac{37}{20}$; В) -14; Г) -4; Д) -10.

30••. Знайдіть площу прямокутника, утвореного при послідовному сполученні точок перетину прямих $y = 5$ та $y = -5$ та графіків функцій $y = -\frac{20}{x}$ та $y = \frac{20}{x}$ · (Скористайтеся схематичним малюнком побудови графіків функцій і прямих.)

А) 80; Б) 160; В) 32; Г) 90; Д) 64.

Розділ I. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Цілі вирази		
$2x^2+5a$	$\frac{1}{2}+x$	-4
ОДЗ		
x, a – будь-які числа	x – будь-яке число	не залежить від значень змінних

Дробові вирази		
$\frac{2}{x}$	$\frac{a+2}{a-4}$	$\frac{2x^2+3}{t}$
ОДЗ		
$x\neq 0$	$a\neq 4$	x – будь-яке число, $t\neq 0$

Дії з раціональними дробами

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd},\ b\neq 0,\ d\neq 0;$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ b\neq 0,\ d\neq 0;$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0$$

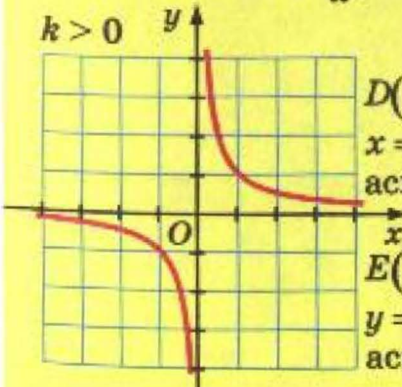
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $b\neq 0$, де n – ціле число

$$\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,\\ b\neq 0.\end{cases}$$

Дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля

Функція $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$, $x\neq 0$ (обернена пропорційність)

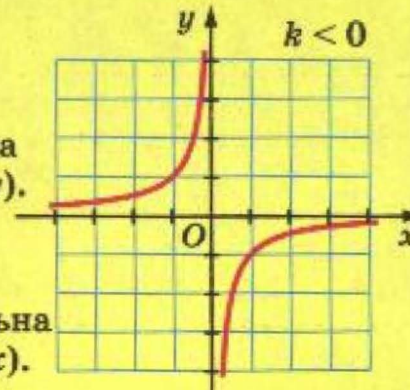
$k>0$



$D(y)$: $x\neq 0$,
$x=0$ – вертикальна асимптота (вісь Oy).

$E(y)$: $y\neq 0$,
$y=0$ – горизонтальна асимптота (вісь Ox).

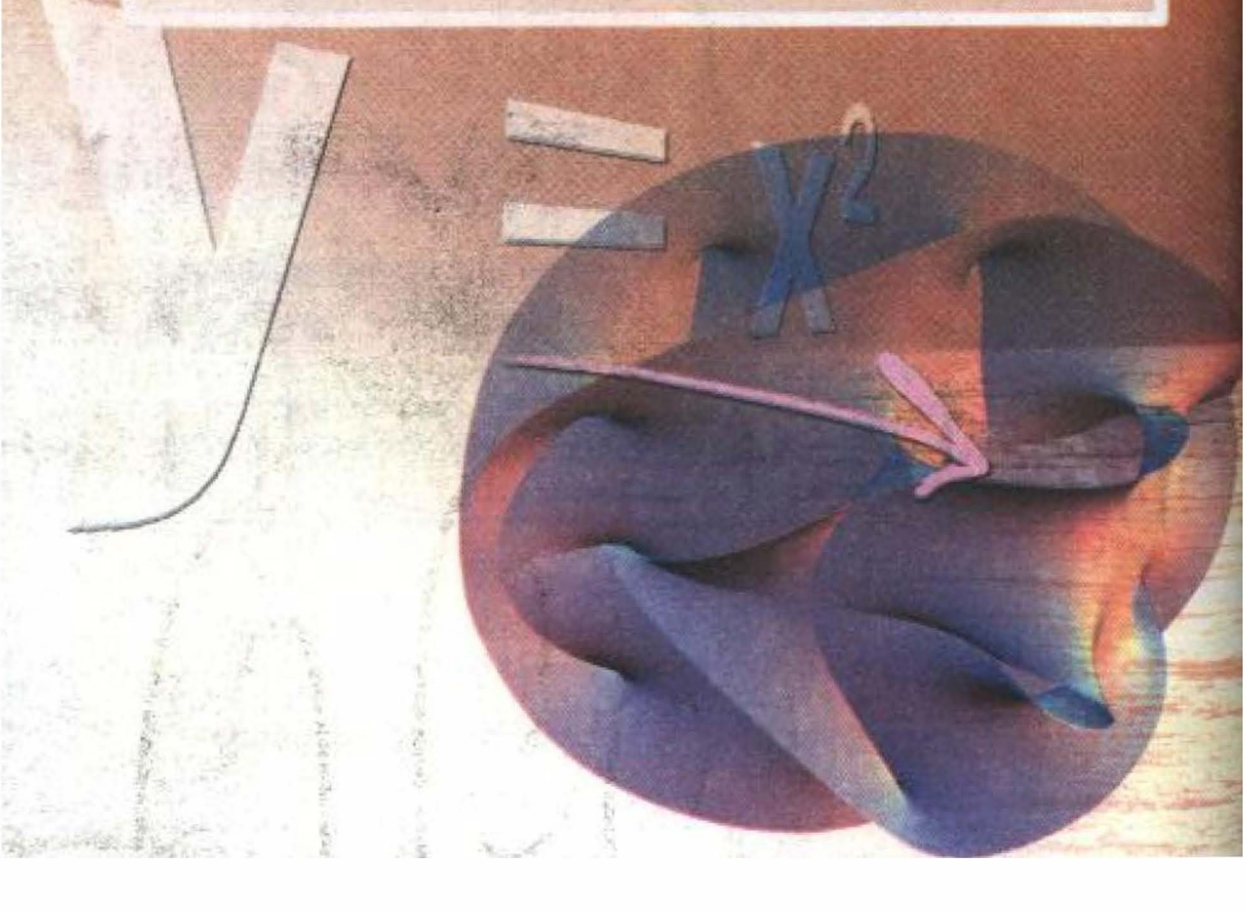
$k<0$



Графіком функції $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$, $x\neq 0$) є гіпербола

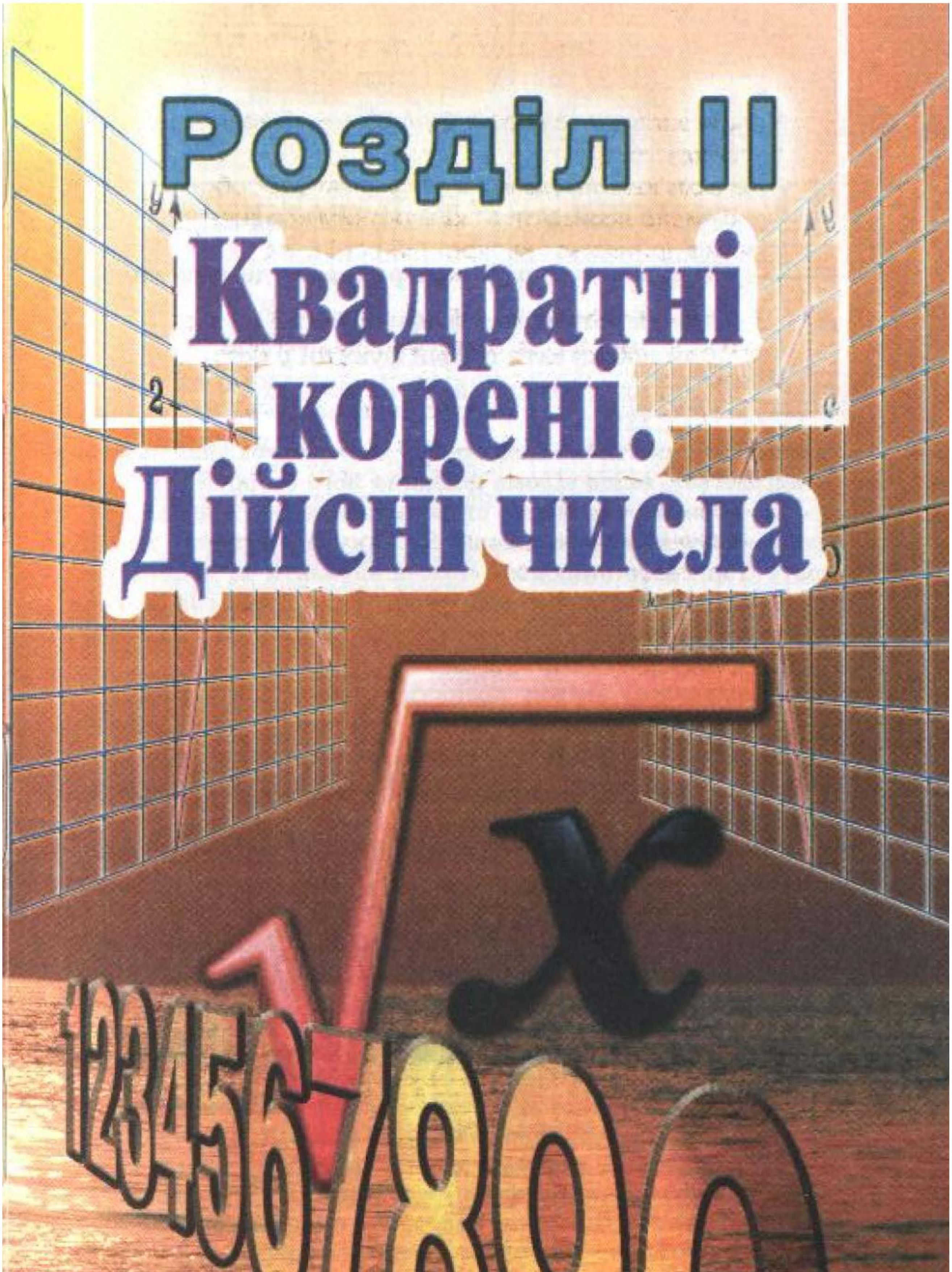
Опрацювавши цей розділ, ви будете знати:

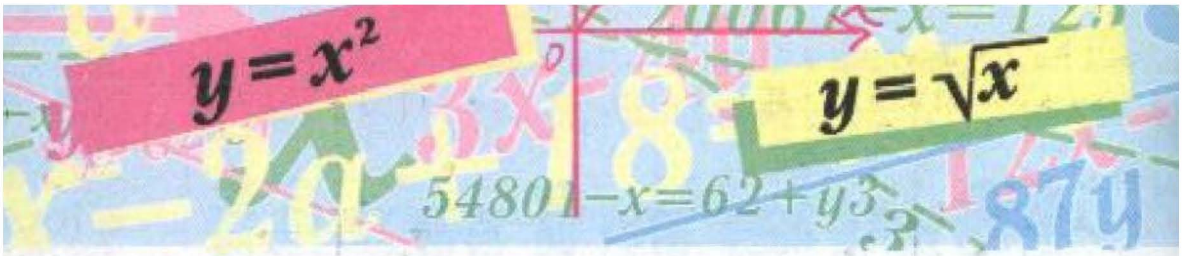
- √ який вигляд має графік функції $y = x^2$ та як його побудувати;
- √ як розв'язувати рівняння графічним способом;
- √ які числа називаються квадратним коренем;
- √ чим відрізняється квадратний корінь від арифметичного квадратного кореня;
- √ які числа називаються ірраціональними;
- √ які властивості має арифметичний квадратний корінь;
- √ як виносити множник з-під знака кореня;
- √ як вносити множник під знак кореня;
- √ як здійснювати перетворення виразів, що містять квадратні корені;
- √ як звільнитися від ірраціональності у знаменнику або чисельнику дробу;
- √ який вигляд має графік функції $y = \sqrt{x}$ та як його побудувати;
- √ як порівнювати ірраціональні числа.



Розділ II

Квадратні корені. Дійсні числа





§11. ФУНКЦІЯ $y = x^2$ ТА ЇЇ ГРАФІК

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- який вигляд має графік функції $y = x^2$;
- як побудувати графік функції $y = x^2$;
- які властивості має функція $y = x^2$.

Розглянемо практичне завдання, в якому треба знайти площу квадрата (S), якщо відома довжина його сторони (a). Очевидно, що кожному значенню сторони квадрата a відповідатиме єдине значення його площі S. Таку залежність площі квадрата S від його сторони a можна виразити за допомогою формули: $S = a^2$ ($a \geqslant 0$). Це, фактично, функціональна залежність між змінними a і S, де a – незалежна змінна, а S – залежна змінна.

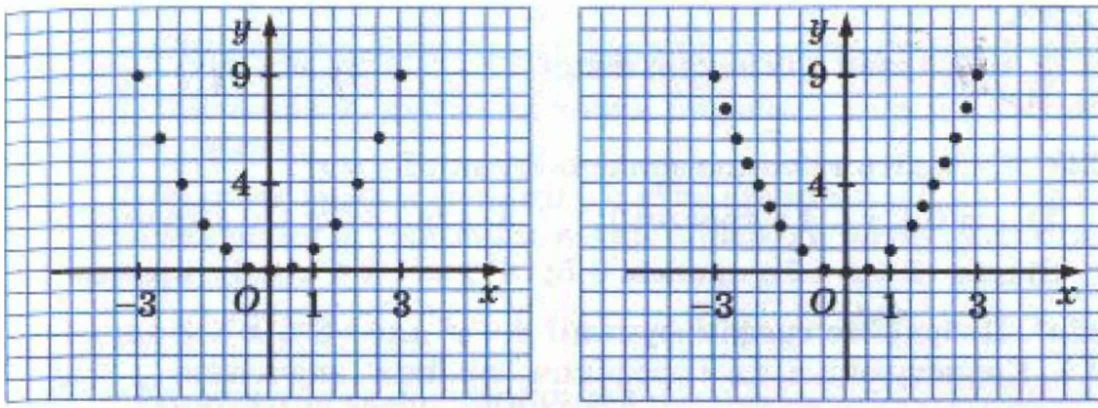
Якщо незалежну змінну позначити через x, а залежну – через y, то отримаємо формулу: $y = x^2$, яка є також функціональною залежністю, але не накладає обмежень на незалежну змінну x (x^2 – одночлен, який має зміст при довільних значеннях x).

Для побудови графіка функції $y = x^2$ складаємо таблицю значень x та y:

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

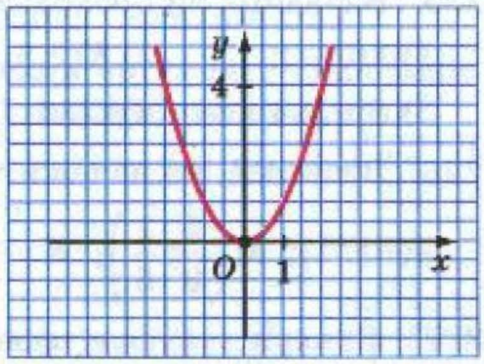
Позначаємо точки (x; y), координати яких подано в таблиці, на координатній площині (мал. 4, *а*). Зауважимо, що, вибравши менший «крок», таблиця міститиме більше значень, а точки розмістяться густіше, як показано на малюнку 4, *б*.

Зменшуючи «крок» та позначаючи відповідні точки (x; y) на координатній площині, дістаємо графік функції – неперервну криву лінію (мал. 5). Цю криву називають *параболою*. Вона має дві нескінченні гілки, які плавно сходяться в одній точці з координатами (0; 0) – *вершині параболи*.



а *б*

Мал. 4



Мал. 5

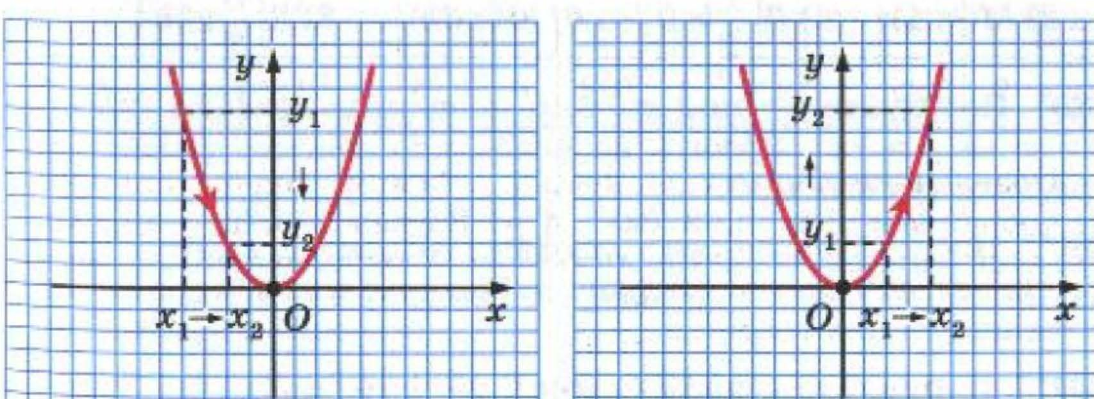
За побудованим графіком (мал. 5) легко визначити властивості функції $y = x^2$:

1) якщо $x = 0$, то $y = 0$ (графік проходить через початок координат);

2) при будь-яких значеннях x значення y будуть невід'ємними, тобто $x^2 \geqslant 0$, звідси $y \geqslant 0$ (графік функції $y = x^2$ розміщений у I та II координатних чвертях, тобто нижче осі Ox графік точок не має);

3) протилежним значенням аргументу відповідають однакові значення функції (див. таблицю), тому дві гілки параболи відображаються, як у дзеркалі, відносно осі Oy;

4) якщо $x < 0$, то при збільшенні значення x зменшується значення y (мал. 6, *а*), а якщо $x > 0$, то при збільшенні x збільшується y (мал. 6, *б*).



а *б*

Мал. 6

Вправи для закріплення

223°. Складіть таблицю значень функції $y = x^2$:

1) для $0 \leqslant x \leqslant 4$ з кроком 1;
2) для $-2 \leqslant x \leqslant 2$ з кроком 0,5;
3) для $-3 \leqslant x \leqslant 0$ з кроком 0,5;
4) для $-4 \leqslant x \leqslant 4$ з кроком 1.

224°. Побудуйте графік функції $y = x^2$ для $-2 \leqslant x \leqslant 3$ з кроком 0,5. Користуючись цим графіком, знайдіть значення:

1) функції, якщо значення аргументу дорівнює: −2; −1; 1; 2;
2) аргументу, якщо значення функції дорівнює: 9; 4; 2; 1; 0.

225°. Визначте, чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:

1) $A(0; 1)$;
2) $B(-2; 4)$;
3) $K(2,5; 5)$;
4) $C(-1,7; -2,89)$;
5) $M(-1,4; 1,96)$.

226°. Визначте, чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

$$A(-1; 1);\ M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right);\ K\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{10}\right);\ D\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{25}\right);\ P\left(-\frac{4}{9}; -\frac{16}{81}\right).$$

227•. Використовуючи властивості функції $y = x^2$, порівняйте значення функції при вказаних значеннях аргументу:

1) $y(-1)$ та $y(1)$;
2) $y\left(-\frac{1}{2}\right)$ та $y(0,5)$;
3) $y(0)$ та $y(-5)$;
4) $y(-9)$ та $y(1)$;
5) $y(-5)$ та $y(-3)$;
6) $y(2)$ та $y(6,3)$.

228•. Знайдіть значення k, при яких графіку функції $y = x^2$ буде належати точка:

1) $A(k; 4)$;
2) $M(k; 1)$;
3) $C(2k; 4)$;
4) $P\left(\frac{1}{2}k; 9\right)$;
5) $N(4; 2k)$;
6) $L(9; 3k)$;
7) $D(0,1k; 0,25)$;
8) $F\left(\frac{3}{7}; 9k\right)$.

229•. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x^2$. Зробіть висновок про взаємне розміщення графіків цих функцій.

230••. Побудуйте різними кольорами графіки функцій $y = |x|^2$ та $y = -|x|^2$ в одній системі координат. Зробіть висновок про взаємне розміщення цих графіків.

231••. Побудуйте графік функції $y = x^2$ та прямі $y = 1$, $y = \frac{9}{4}$. Знайдіть значення x, для яких точки параболи розміщені між даними прямими.

232••. Побудуйте графік функції $y = x^2$ та прямі $y = \frac{1}{9}$, $y = 4$. Знайдіть значення x, для яких точки параболи розміщені між даними прямими.

233••. Побудуйте графік функції $y = x^2$ та прямі $x = -3$, $x = -0{,}5$. Знайдіть значення y, для яких точки параболи розміщені між даними прямими.

Вправи для самооцінювання

1°. Виберіть назву кривої, яка є графіком функції $y = x^2$.

а) Пряма; б) гіпербола; в) ламана; г) парабола.

2°. Ідентифікуйте до кожного значення аргументу відповідне значення функції, якщо функцію задано формулою $y = x^2$.

а) $x = -2$; 1) 0;
б) $x = -1$; 2) 9;
в) $x = 0$; 3) 1;
г) $x = 3$. 4) 4.

а	
б	
в	
г	

3°. Знайдіть значення аргументу для функції $y = x^2$, якщо значення функції дорівнює 16.

а) ±16; б) ±8; в) ±4; г) ±2.

4•. Укажіть точку, через яку проходить графік функції $y = x^2$.

а) $M(-4; 8)$; б) $A\left(-1\frac{1}{3}; 1\frac{7}{9}\right)$; в) $C\left(1\frac{1}{2}; -2\frac{1}{4}\right)$; г) $K(-5; -25)$.

5•. Визначте область значень функції $y = x^2$, якщо $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{5}$.

а) $-\frac{4}{25} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{9}$; в) $-\frac{4}{10} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{6}$;

б) $\frac{1}{6} \leqslant y \leqslant \frac{4}{10}$; г) $\frac{1}{9} \leqslant y \leqslant \frac{4}{25}$.

6•. Визначте точку, яка належить графіку функції $y = x^2$ при $k = 3$.

а) $M(2k; -36)$; б) $P\left(\frac{1}{2}k; 2\frac{1}{4}\right)$; в) $Q(6; -12k)$; г) $R(-1; 3k)$.

7••. Визначте правильну нерівність, коли відомо, що функцію задано формулою $y(x) = x^2$.

а) $y\left(-\frac{1}{6}\right) < y\left(-1\frac{8}{9}\right)$; в) $y\left(\frac{1}{2}\right) > y\left(\frac{2}{3}\right)$;

б) $y(-7{,}1) < y(-6)$; г) $y(-4{,}5) < y(4)$.

8••. Визначте, користуючись графіком функції $y = x^2$, пару прямих, які відтинають на параболі точки, абсциси яких задовольняють умову $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$:

1) $y = \frac{1}{2}$; 2) $y = \frac{1}{4}$; 3) $y = 3$; 4) $y = 9$.

а) 1 і 3; б) 2 і 3; в) 1 і 4; г) 2 і 4.

9••. Знайдіть значення x, для яких точки параболи $y = x^2$ розміщені між прямими $y = \frac{1}{4}$ та $y = 9$.

а) $-9 < x < -\frac{1}{4}$ та $\frac{1}{4} < x < 9$; в) $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ та $-9 < x < 9$;

б) $-3 < x < -\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{2} < x < 3$; г) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ та $-3 < x < 3$.

Вправи для повторення

234. Скоротіть дріб:

1) $\frac{(-a-b)^2}{(a+b)^3}$; 3) $\frac{-m^2+8m-16}{m^2-16}$;

2) $\frac{(x+y)^5}{(-x-y)^3}$; 4) $\frac{25-p^2}{-p^2-10p-25}$.

235. Функцію задано формулою $y = \frac{k}{x}$. Знайдіть число k, коли відомо, що графік функції проходить через точку:

1) $M(0{,}25; -64)$; 3) $P(-0{,}5; -16)$;

2) $K(-0{,}5; 32)$; 4) $Q(-0{,}4; -20)$.

236. Складіть математичну модель до розв'язку задачі.

Із міста A в місто B, відстань між якими дорівнює 600 км, вийшов пасажирський поїзд зі швидкістю 60 км/год, а через 3 год назустріч йому з міста B вирушив товарний поїзд зі швидкістю v км/год. Поїзди зустрілися через t год після виходу пасажирського поїзда з міста A. Знайдіть швидкість товарного поїзда.

237. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{16}{x}$; 2) $y = -\frac{16}{x}$; 3) $y = \frac{20}{x}$; 4) $y = -\frac{20}{x}$.

За побудованим графіком знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 4;

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 1;

в) які з точок M, K, P, Q належать графіку цієї функції, якщо

$M\left(-15; -\frac{4}{3}\right)$; $K\left(-12; \frac{4}{3}\right)$;

$P\left(-12; \frac{5}{3}\right)$; $Q\left(-20; -\frac{4}{5}\right)$.

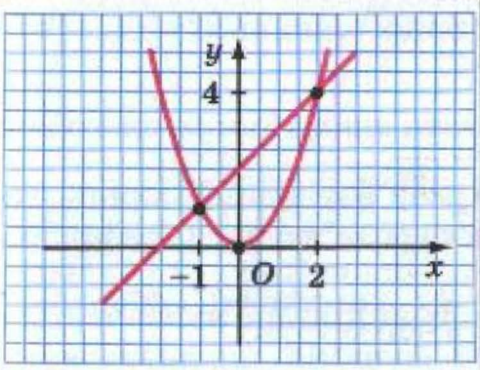
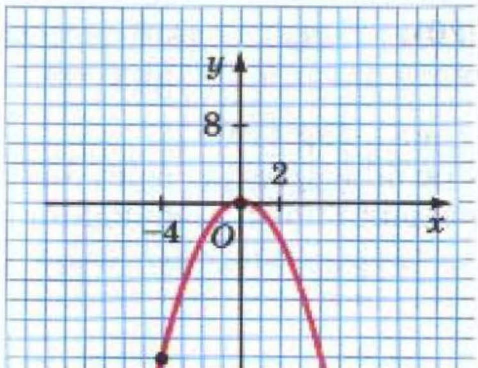
При побудові системи координат інколи зручніше вибирати одиничні відрізки, пристосовуючись до умови. Так, у завданнях 1) та 2) зручно 2 клітинками позначити 4 одиничні відрізки, а у 3) та 4) – 2 клітинками 5 одиничних відрізків.

238. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y=2x+1$ та $y=2x-4$; 2) $y=3x+2$ та $y=-3x+2$.

За побудованими графіками визначте кількість спільних точок. Чи можуть графіки мати безліч спільних точок?

239. Установіть закономірність у першому випадку та відобразіть її в другому.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} 3x+y=-2, \\ \frac{1}{3}x-1\frac{1}{3}y=-1\frac{2}{3} \end{cases}$</td>
<td>$(-1; 1)$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\begin{cases} 3y-2x=-16, \\ 0{,}5x-\frac{1}{4}y=2 \end{cases}$</td>
<td>?</td>
</tr>
</table>

§ 12. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- як розв'язувати рівняння графічним способом;
- як застосовувати алгоритм розв'язування рівнянь графічним способом для нестандартних випадків;
- які переваги і недоліки у використанні графічного способу при розв'язуванні рівнянь.

У курсі алгебри ми користувалися графічним способом при розв'язуванні систем лінійних рівнянь та визначенні спільної точки для графіків двох функцій. Зручність цього способу полягає в тому, що графічна інтерпретація надає можливість одразу зробити висновок про кількість розв'язків системи рівнянь чи кількість спільних точок графіків функцій.

При розв'язуванні раціональних рівнянь аналітичним способом, у більшості випадків, ми зводимо їх до простіших за допомогою рівносильних перетворень. Проте окремі рівняння $x^2=-\dfrac{4}{x}$, $x^2=\dfrac{6}{x}$, $x^2=\dfrac{2}{3x}$ зводяться до таких рівнянь $x^3=-4$, $x^3=6$, $x^3=\dfrac{2}{3}$, які ми ще не вміємо розв'язувати аналітичним способом. Тому в нагоді стає графічний спосіб розв'язування рівнянь. Таким чином, рівняння $f(x)=g(x)$ можна розв'язувати графічним способом. Для цього:

1) вводять дві функції: $y=f(x)$ – функція, що визначається лівою частиною рівняння, і $y=g(x)$ – функція, що визначається правою частиною рівняння;

2) будують графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ в одній системі координат і встановлюють координати їхніх спільних точок (практично шукають розв'язки системи $\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x) \end{cases}$ графічним способом);

3) визначають абсциси точок перетину графіків, які є розв'язками рівняння $f(x)=g(x)$.

Приклад 1. Визначте кількість коренів рівняння:

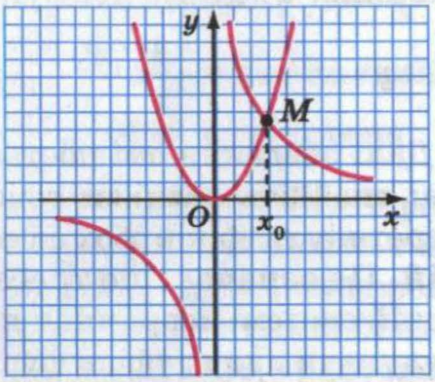
1) $x^2=\dfrac{18}{x}$; 2) $x^2=2x+3$; 3) $\dfrac{2}{x}=-x+1$.

Розв'язання

Як записати

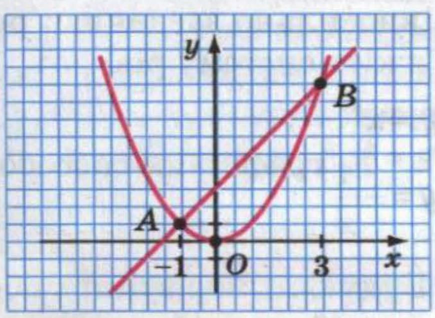
Зображуємо схематично в одній системі координат ескізи графіків відповідних функцій:

1) $y = x^2$ та $y = \dfrac{18}{x}$.



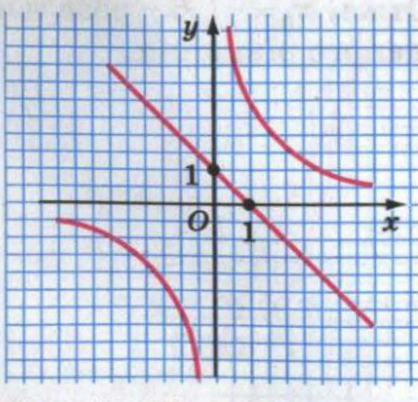
Відповідь. Один корінь.

2) $y = x^2$ та $y = 2x + 3$.



Відповідь. Два корені.

3) $y = \dfrac{2}{x}$ та $y = -x + 1$.



Відповідь. Рівняння коренів не має.

Як пояснити

Використовуємо графічний спосіб розв'язування рівнянь.

1) Для цього вводимо дві функції: $y = x^2$ та $y = \dfrac{18}{x}$. Графіком функції $y = x^2$ є парабола, яка розміщена у I та II координатних чвертях. Графіком функції $y = \dfrac{18}{x}$ є гіпербола, яка розміщена у I та III координатних чвертях.

Таким чином, парабола перетинається з гіперболою в точці, що розміщена в I координатній чверті.

2) Уводимо дві функції $y = x^2$ та $y = 2x + 3$. Графіком функції $y = x^2$ є парабола, яка розміщена в I та II координатних чвертях. Графіком функції $y = 2x + 3$ є пряма, яка перетинає осі координат в точках $(-1,5; 0)$ і $(0; 3)$.

Таким чином, пряма перетинає параболу у двох точках, які розміщені у I та II координатних чвертях.

3) Уводимо дві функції $y = \dfrac{2}{x}$ та $y = -x + 1$. Графіком функції $y = \dfrac{2}{x}$ є гіпербола, яка розміщена у I та III координатних чвертях. Графіком функції $y = -x + 1$ є пряма, яка перетинає осі координат у точках $(1; 0)$ і $(0; 1)$, але не перетинає гіперболу в жодній точці.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $x^2 = -\frac{4}{x}$.

Розв'язання

Як записати

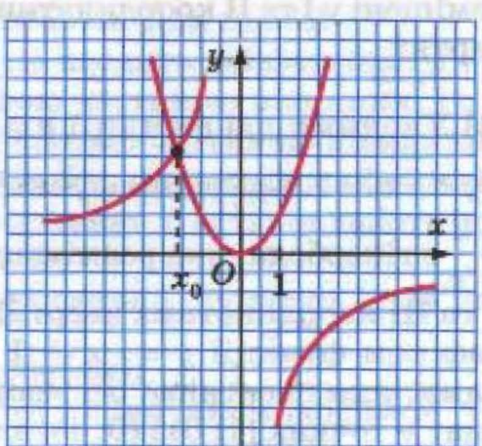
Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases}$ графічним способом.

Для побудови графіків $y = x^2$ та $y = -\frac{4}{x}$ складаємо таблиці:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

Графіком рівняння $y = x^2$ є парабола, а графіком рівняння $y = -\frac{4}{x}$ є гіпербола. Таким чином, маємо графічну інтерпретацію розв'язку рівняння $x^2 = -\frac{4}{x}$,



звідки $x_0 \approx -1{,}6$.

Відповідь. $x_0 \approx -1{,}6$.

Як пояснити

Використовуємо графічний спосіб розв'язування рівнянь. Уводимо дві функції: $y = x^2$ та $y = -\frac{4}{x}$.

Далі завдання змінюється на: знайдіть абсциси точок перетину графіків обох функцій. Це означає, що треба в одній системі координат побудувати два графіки функцій: $y = x^2$ та $x^2 = -\frac{4}{x}$, а це рівносильно завданню: розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases}$ графічним способом.

Будуючи графіки обох функцій в одній системі координат, отримуємо спільну точку, абсциса якої є розв'язком заданого рівняння.

Отже, $x_0 \approx -1{,}6$ – розв'язок заданого рівняння.

У прикладі 2 корінь рівняння знайдено наближено. Перевірка показує, що $x^2 = (-1,6)^2 = 2,56$, а $-\frac{4}{x} = -\frac{4}{-1,6} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Оскільки $2,56 \neq 2,50$, але вони близькі між собою, то корінь $-1,6$ вважають наближеним. Якщо ж при перевірці утворюється правильна рівність, то такий корінь є точним. Наприклад, для рівняння $x^2 = -\frac{8}{x}$ точним коренем є $x_0 = -2$.

!? Розв'яжіть рівняння $x^2 = -\frac{8}{x}$ графічним способом і визначте точність кореня.

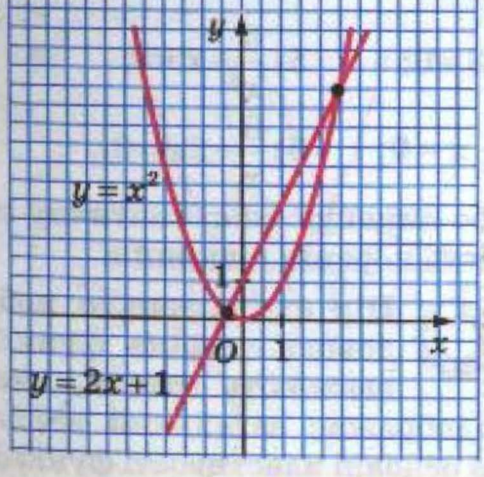
Зауваження. 1) Перевага графічного способу над іншими полягає в тому, що він є наочним, завдяки чому можна одразу визначити кількість коренів рівняння (кількість точок перетину) або показати, що їх немає.

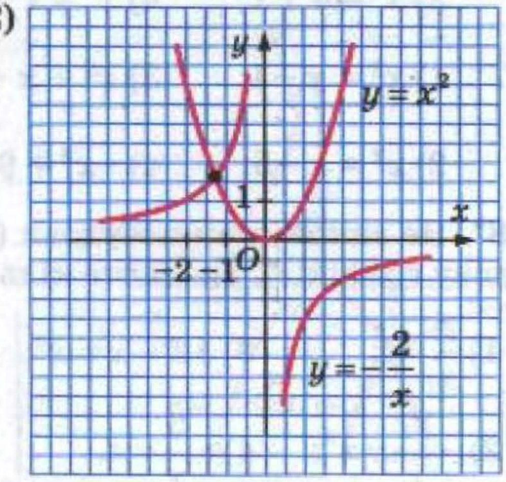
2) Недоліком графічного способу є те, що визначення коренів рівняння у більшості випадків є неточним в силу практичної неможливості виконання абсолютно точних побудов. Тому для підтвердження або перевірки точності знайденого значення кореня необхідно виконувати аналітичну перевірку.

3) Якщо задане рівняння є незручним для введення двох функцій, то, використовуючи рівносильні перетворення, його зводять до вигляду $f(x) = g(x)$.

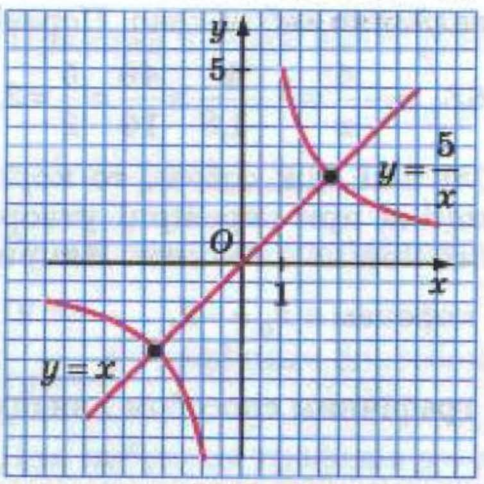
Вправи для закріплення

240°. Визначте, користуючись малюнком, абсциси точок перетину графіків:

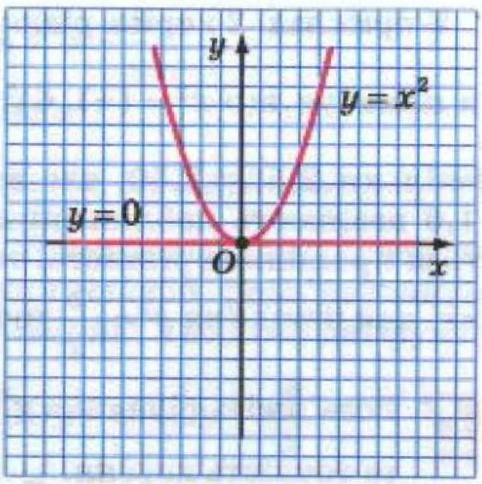
1)


2)


3)



4)



Розв'яжіть рівняння графічним способом (241–242).

241°. 1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = 6$; 3) $x^2 = 0$; 4) $x^2 = -5$.

242°. 1) $x^2 = 5$; 2) $x^2 = 9$; 3) $x^2 = -4$; 4) $x^2 = 1$.

243°. **Визначте, не виконуючи побудови, кількість коренів рівняння:**

1) $x^2 = 100$; 2) $x^2 = 196$; 3) $x^2 = -49$; 4) $x^2 = -16$.

244°. **Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:**

1) $y = x^2$ та $y = x$; 3) $y = x^2$ та $y = 3x$;
2) $y = x^2$ та $y = -2x$; 4) $y = x^2$ та $y = -x$.

245°. **Знайдіть розв'язки рівняння графічним способом:**

1) $x^2 = 4x$; 2) $x^2 = -5x$; 3) $x^2 = 9x$; 4) $x^2 = -3x$.

Розв'яжіть рівняння графічним способом (246–247).

246•. 1) $\frac{8}{x} = x^2$; 3) $-\frac{2}{x} = 3$; 5) $\frac{3}{x} = -x$;

2) $x^2 = 4 + x$; 4) $x^2 = x + 6$; 6) $-x^2 = 4 - x$.

247•. 1) $x^2 = x + 1$; 3) $x^2 + x + 3 = 0$; 5) $\frac{6}{x} + x = 0$;

2) $x^2 = x - 5$; 4) $-x^2 + 9 - x = 0$; 6) $\frac{8}{x} - 2x = 0$.

248•. **Не виконуючи побудови (або виконуючи схематичну побудову графіків), визначте кількість коренів рівняння:**

1) $\frac{2}{x} = 4$; 3) $12 - x = x^2$;

2) $-\frac{17}{x} = x^2$; 4) $-\frac{5}{x} = x$.

Під схематичною побудовою графіка функції вважають графік, який відображає загальний вигляд та основні властивості функції.

249••. Визначте кількість коренів рівняння:

1) $\frac{4}{x}+x+1=0;$ 3) $\frac{5}{x}-x^2=0;$

2) $4+x+x^2=0;$ 4) $-\frac{12}{x}-x+1=0.$

250••. Розв'яжіть рівняння графічно:

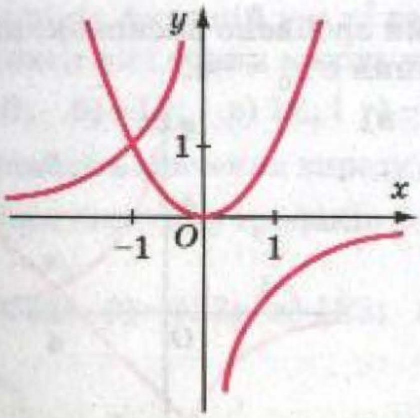
1) $x^2+x-6=0;$ 3) $\frac{6}{x}=x-5;$ 5) $x^2=\frac{1}{x};$

2) $x^2-4x+3=0;$ 4) $\frac{3}{x}-x+2=0;$ 6) $x^2+\frac{1}{x}=0.$

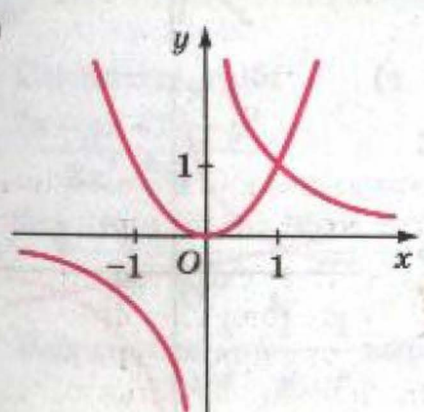
Вправи для самооцінювання

1°. Укажіть, на якому малюнку схематично зображено графічне розв'язання рівняння $x^2=\frac{1}{x}$.

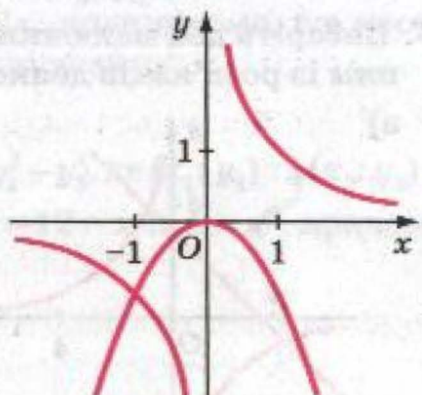
а)



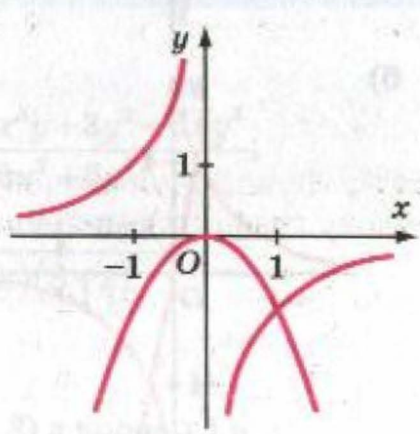
б)



в)

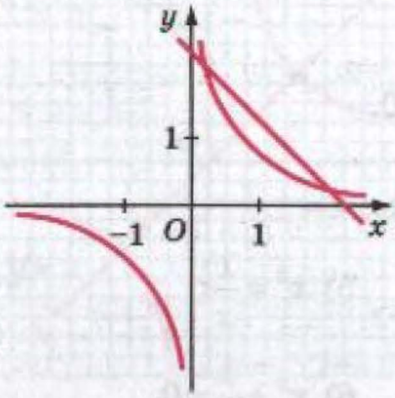


г)

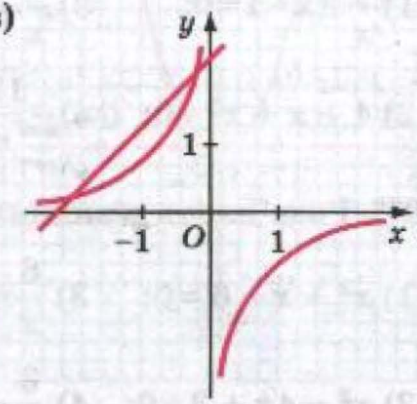


2°. Виберіть малюнок, на якому спільні точки графіків двох функцій розміщені лише у II координатній чверті.

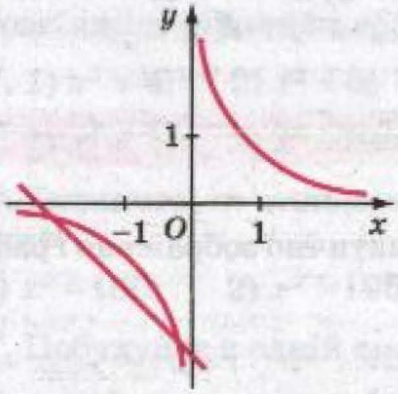
а)



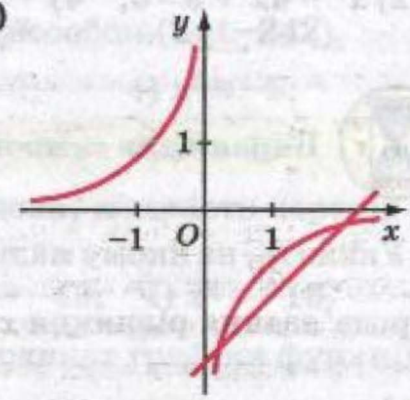
в)



б)

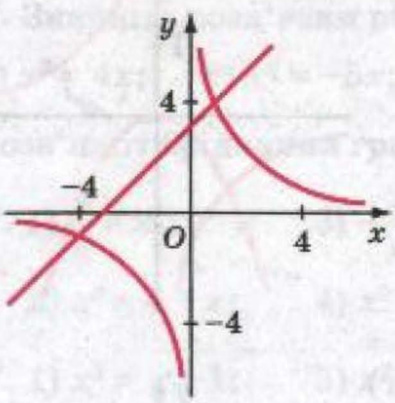


г)

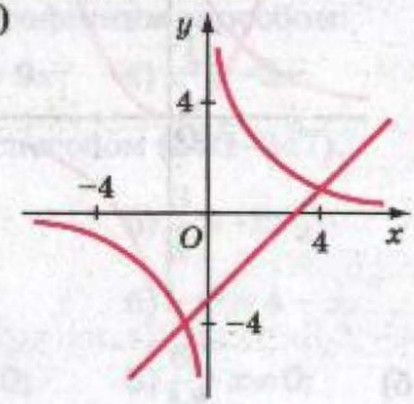


3°. Виберіть два малюнки, за якими зроблено висновок, що одним із розв'язків деякого рівняння є $x_0 = -4$.

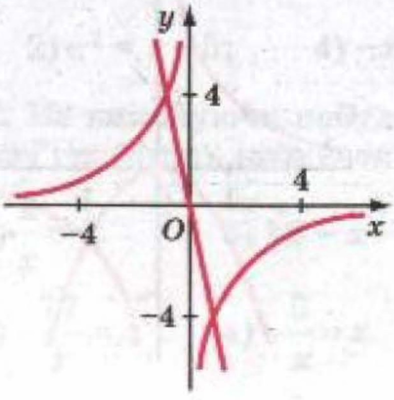
а)



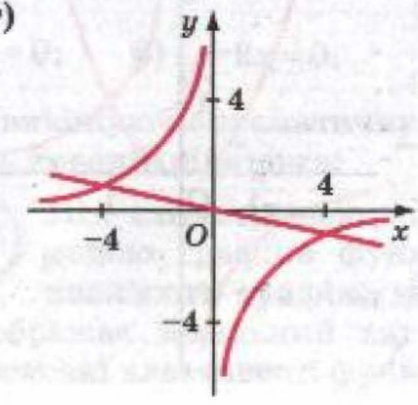
в)



б)



г)



4•. Визначте точку, яка є спільною для графіків функцій $y=\frac{15}{x}$ та $y=\frac{4}{3}x+1$.

а) $M(15;\ 1)$; б) $K(3;\ 5)$; в) $Q(-5;\ -3)$; г) $P\left(1;\ \frac{7}{3}\right)$.

5•. Знайдіть кількість коренів рівняння $\frac{9}{x}=-x+1$, виконавши схематичну побудову відповідних графіків функцій.

а) Безліч; б) один; в) два; г) жодного.

6•. Ідентифікуйте до кожного з рівнянь його кількість коренів.

а) $x=-\frac{6}{x}$; 1) Один;

б) $x^2=2x-1$; 2) два;

в) $x=\frac{4}{x}$. 3) жодного.

а	
б	
в	

7••. Знайдіть значення виразу $(x_0+y_0)^2$, де $(x_0;\ y_0)$ – спільна точка графіків функцій $y=x^2$ та $y=2x-1$.

а) 0; б) 1; в) 4; г) 9.

8••. Знайдіть значення суми x_0+y_0, де $(x_0;\ y_0)$ – спільна точка графіків функцій $y=x^2$ та $y=3-2x$, коли відомо, що координати цієї точки мають протилежні знаки.

а) 6; б) –12; в) 12; г) –6.

9••. Знайдіть значення виразу $x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2$, де $(x_1;\ y_1)$ та $(x_2;\ y_2)$ – точки перетину графіків функцій $y=12-x$ та $y=x^2$, причому $x_1>x_2$.

а) 122; б) –122; в) 182; г) –182.

Вправи для повторення

251. Скоротіть дріб:

1) $\frac{2x-yx+2y-y^2}{2x^2-2y^2}$; 3) $\frac{3x^2-6x^3y+3y^2-6xy^3}{6x^2+6y^2}$;

2) $\frac{2ay-by+10ax-5bx}{8a^2-2b^2}$; 4) $\frac{6-12a+2z-4az}{(4-8a)(3+z)}$.

252. З формули $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ виразіть:

1) x через y і z; 2) y через x і z; 3) z через x і y.

253. Чисельник звичайного дробу на 2 менший за знаменник. Якщо чисельник збільшити на 1, а знаменник – на 3, то отримаємо дріб, що дорівнює даному. Знайдіть даний дріб.

254. Знайдіть суму коренів рівняння:

1) $\frac{17y+y^2}{5-y}=\frac{121+17y}{5-y}$; 3) $\frac{x^2-41x}{x-64}=\frac{36-41x}{x-64}$;

2) $\frac{y^2+53y}{27-y}=\frac{53y+9}{27-y}$; 4) $\frac{77x-x^2}{2x-19}=\frac{77x-81}{2x-19}$.

255. Заповніть таблицю, якщо S – площа квадрата, a – сторона квадрата.

S, см^2	25	64	100	144	196	225	256	400	625	900
a, см										

§13. КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ. РІВНЯННЯ $x^2 = a$

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

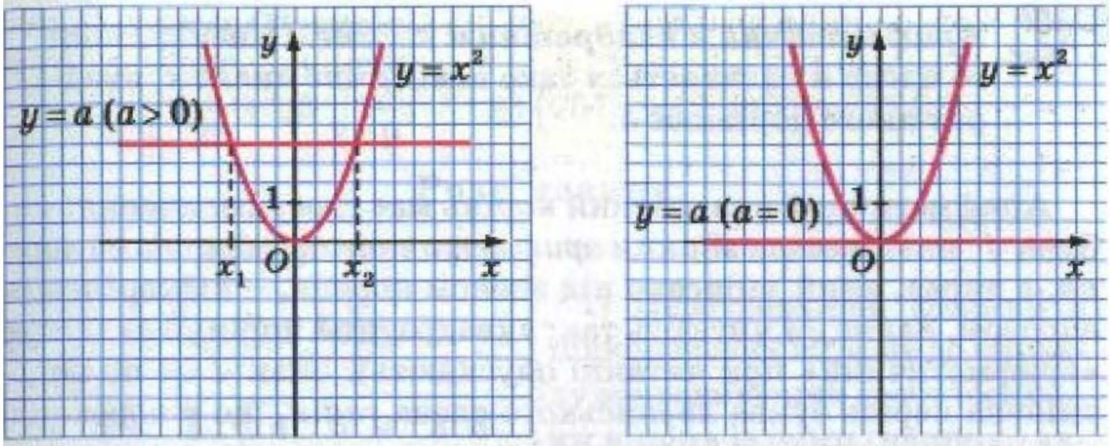
- які числа називають квадратним коренем з невід'ємного числа;
- які числа називають арифметичним квадратним коренем з невід'ємного числа;
- як користуватися знаком $\sqrt{}$ і читати записи вигляду $\sqrt{m}$, $\sqrt{m+n}$ тощо;
- як розв'язувати довільне рівняння вигляду $x^2=a$.

Розв'язуючи графічним способом рівняння вигляду $x^2=a$, виділяють три випадки: 1) $a>0$; 2) $a=0$; 3) $a<0$. Розглянемо кожний із них:

1) при $a>0$ рівняння має два розв'язки (пряма $y=a$ перетинає параболу $y=x^2$ у двох точках (мал. 7, *а*));

2) при $a=0$ рівняння має єдиний розв'язок $x=0$ (пряма $y=0$ перетинає параболу $y=x^2$ в точці $O(0;\ 0)$ (мал. 7, *б*));

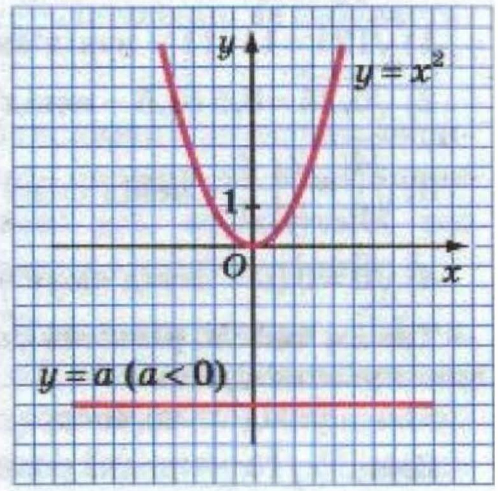
3) при $a<0$ рівняння розв'язків не має (пряма $y=a$ не перетинає параболу $y=x^2$ у жодній точці (мал. 7, *в*)).



а б

Таким чином, розв'язуючи рівняння вигляду $x^2 = a$ $(a > 0)$, отримують два розв'язки, які є протилежними числами. Наприклад, розв'язками рівняння $x^2 = 9$ є два протилежні числа: 3 та -3. По-іншому можна сказати, що числа 3 та -3 є коренями рівняння $x^2 = 9$, або *квадратними коренями* з числа 9.

Наприклад, квадратними коренями з 16 є числа 4 і -4 (ці числа є розв'язками рівняння $x^2 = 16$), а квадратними коренями зі 100 є числа 10 і -10 (розв'язки рівняння $x^2 = 100$).



в

Мал. 7

***Квадратним коренем* з невід'ємного числа *a* називається таке число *x*, квадрат якого дорівнює *a*.**

Чому розглядають квадратний корінь тільки з невід'ємного числа?

Отже, завдання: *знайдіть квадратний корінь з невід'ємного числа a* зводиться до пошуку розв'язків рівняння $x^2 = a$.

Розв'язуючи рівняння $x^2 = a$ $(a > 0)$ графічним способом, ми знаходили або точні значення коренів, або наближені, проте їх завжди два: одне додатне число, а інше – протилежне йому, тобто від'ємне. Так, для рівнянь: $x^2 = 0$; $x^2 = 25$; $x^2 = 100$; $x^2 = 625$ відповідними коренями будуть числа: 0; ± 5; ± 10; ± 25. Невід'ємні числа: 0; 5; 10; 25; ... виділяють окремо і називають *арифметичним квадратним коренем* з числа 0; 25; 100; 625; ...

Арифметичним квадратним коренем **з невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число x, квадрат якого дорівнює a.**

Арифметичний квадратний корінь має своє позначення: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ називається *знаком арифметичного квадратного кореня*, а вираз, який записано під знаком кореня, – *підкореневим виразом*. Запис $\sqrt{a}$ читають так: «квадратний корінь з a» (слово «арифметичний» при читанні опускають). Знак $\sqrt{\ }$ – це видозмінена перша буква латинського слова *radix*, що в перекладі означає «корінь».

Наприклад:

1) $\sqrt{121}=11$ (11 – невід'ємне число та $11^2=121$);

2) $\sqrt{0,25}=0,5$ ($0,5$ – невід'ємне число та $0,5^2=0,25$);

3) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right.$ – невід'ємне число та $\left.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\right)$;

4) $\sqrt{0}=0$ (0 – невід'ємне число та $0^2=0$).

Таким чином, рівність $\sqrt{a}=x$ буде правильною, якщо будуть виконуватися умови:

1) a – невід'ємне число; 2) x – невід'ємне число; 3) $x^2=a$.

Якщо x_1 і x_2 – деякі розв'язки рівняння $x^2=a$, то їх можна записати так: $x_1=-\sqrt{a}$, $x_2=\sqrt{a}$ для невід'ємних значень a ($a \geqslant 0$).

Наприклад:

1) $x^2=25$ при $x_1=-\sqrt{25}$, $x_2=\sqrt{25}$, або $x_1=-5$, $x_2=5$;

2) $x^2=0,81$ при $x_1=-\sqrt{0,81}$, $x_2=\sqrt{0,81}$, або $x_1=-0,9$, $x_2=0,9$;

3) $x^2=2$ при $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$, або $x_1\approx-1,4$, $x_2\approx1,4$.

Отже, якщо a є квадратом деякого числа, то рівняння $x^2=a$ ($a>0$) матиме два точні корені, а якщо a не є квадратом числа, то такі корені будуть наближені.

Зауваження 1. Для від'ємних значень a ($a<0$) вираз $\sqrt{a}$ не має змісту, оскільки квадрат будь-якого числа є числом невід'ємним.

Зауваження 2. З означення арифметичного квадратного кореня випливає:

1) $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ при $a \geqslant 0$; 2) $\sqrt{a^2}=|a|$ при довільних значеннях a.

!? Спробуйте самостійно виконати доведення тверджень зауваження 2.

Приклад 1. Обчисліть:

1) $1\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3\frac{6}{25}}+1,5\cdot\sqrt{1\frac{7}{9}}$; 2) $\left(\sqrt{57}-\sqrt{47}\right)\left(\sqrt{57}+\sqrt{47}\right)$.

Розв'язання

Як записати

1) $1\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3\frac{6}{25}}+1,5\cdot\sqrt{1\frac{7}{9}}=$

$=\frac{5}{3}\cdot\sqrt{\frac{81}{25}}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{5}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=$

$=3+2=5.$

Відповідь. 5.

Як пояснити

1) Перетворюємо кожний з підкореневих виразів до вигляду неправильного дробу (оскільки корінь із суми, наприклад $\sqrt{3+\frac{6}{25}}$, почленно не добувається!).

Обчисливши значення отриманих коренів та виконавши вказані дії, отримуємо, що значення виразу дорівнює 5.

Як записати

2) $\left(\sqrt{57}-\sqrt{47}\right)\left(\sqrt{57}+\sqrt{47}\right)=$

$=\left(\sqrt{57}\right)^2-\left(\sqrt{47}\right)^2=57-47=10.$

Відповідь. 10.

Як пояснити

2) Якщо позначити $\sqrt{57}=a$, $\sqrt{47}=b$, то наш вираз набуде вигляду $(a-b)(a+b)$. Отриманий добуток дорівнює a^2-b^2, звідси $\left(\sqrt{57}\right)^2-\left(\sqrt{47}\right)^2=57-47=10.$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння: 1) $x^2-7=29$; 2) $81-\sqrt{x}=91$.

Розв'язання

Як записати

1) I спосіб

$x^2-7=29,$

$x^2=29+7,\ x^2=36,$

$x=\pm\sqrt{36},$

$x=\pm6.$

II спосіб

$x^2-7=29,\ x^2=36,$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{36},$

$|x|=6,$

$x=\pm6.$

Відповідь. $x=\pm6$.

Як пояснити

1) I спосіб

Зводимо рівняння до вигляду $x^2=a$, де a – число. Отримуємо $x^2=36$, звідси очевидно, що коренями рівняння є квадратні корені числа 36, тобто 6 і −6.

II спосіб

Як і в I способі, зводимо рівняння до вигляду $x^2=36$. Оскільки обидві частини рівняння невід'ємні, то, добувши арифметичний квадратний корінь з кожної з них, отримуємо $|x|=6$, $x=\pm6$.

Нагадаємо, що $\sqrt{x^2}=|x|$ при будь-яких дійсних значеннях x.

Як записати

2) $81-\sqrt{x}=91$,

$\sqrt{x}=81-91$,

$\sqrt{x}=-10$.

Відповідь. Коренів немає.

Як пояснити

2) Знайдемо $\sqrt{x}$ з рівняння як невідомий від'ємник: $\sqrt{x}=81-91$, тобто $\sqrt{x}=-10$. Але згідно з означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{x}\geqslant 0$. Тому задане рівняння коренів немає.

Ще 4000 років тому вавилонські вчені вміли знаходити площу квадрата, якщо задано його сторону, і навпаки, сторону квадрата, якщо відома його площа. Вони складали таблиці квадратів чисел і квадратних коренів з чисел.

Цікавим є те, що вавилоняни використовували *специфічний метод наближеного добування квадратного кореня.*

Нехай a – деяке натуральне число, з якого треба добути квадратний корінь, тоді його записують у вигляді рівності:
$a=b^2+c$, де c – досить мале число у порівнянні з b.

Отже, $\sqrt{a}=\sqrt{b^2+c}=b+\dfrac{c}{2b}$. Таким чином, використовуючи цю формулу, можна знайти корінь квадратний з довільного додатного числа. Наприклад, $\sqrt{118}=\sqrt{10^2+18}=10+\dfrac{18}{20}=10+0{,}9=10{,}9$. Перевірка: $10{,}9^2=118{,}81$.

Цей метод добування кореня належить давньогрецькому вченому Герону Александрійському (І ст. до н. е.). На процес уведення самого знака кореня $\sqrt{}$ пішли століття. Наприклад, європейські математики в епоху Відродження позначали корінь латинським словом *Radix* (корінь), а потім скорочено буквою *R* (звідси пішов термін «радикал», яким прийнято називати знак кореня). Деякі німецькі математики позначали корінь квадратний точкою, деякі – ромбом, і значно пізніше з'явився значок V, до нього дописували вираз, із якого знаходили квадратний корінь, а над виразом ставили риску. Потім знак і риску поєднали, й утворився сучасний знак радикала. Такий знак уперше використав у своїх працях Мішель Ролль (1652–1719).

Вправи для закріплення

256°. Доведіть, що число:

1) 11 є арифметичним квадратним коренем з числа 121;
2) 0,2 є арифметичним квадратним коренем з числа 0,04;
3) –9 не є арифметичним квадратним коренем з числа 81;
4) 0,8 не є арифметичним квадратним коренем з числа 6,4.

257°. Доведіть, що:

1) $\sqrt{0,25}=0,5$; 2) $\sqrt{400}=20$; 3) $\sqrt{1,96}=1,4$; 4) $\sqrt{90\,000}=300$.

258°. Знайдіть значення:

1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{36}$; 3) $\sqrt{10\,000}$; 4) $\sqrt{14\,400}$; 5) $\sqrt{0,16}$; 6) $\sqrt{0,49}$.

259°. Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{1}{16}}$; 2) $\sqrt{\frac{81}{64}}$; 3) $\sqrt{\frac{100}{49}}$; 4) $\sqrt{\frac{36}{121}}$; 5) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; 6) $\sqrt{20\frac{1}{4}}$.

260°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2=1$; 3) $x^2=15$; 5) $t^2=-4$; 7) $m^2=19$;
2) $y^2=144$; 4) $y^2=0$; 6) $y^2=-18$; 8) $x^2=2$.

261°. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{25}+\sqrt{0,04}$; 3) $\sqrt{0,64}+\sqrt{0,81}$; 5) $\sqrt{16\,900}-\sqrt{19\,600}$;

2) $\sqrt{49}+\sqrt{4900}$; 4) $\sqrt{900}-\sqrt{400}$; 6) $\sqrt{0,16}-\sqrt{16}$.

262°. Визначте, чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{-49}$; 5) $\sqrt{-16\cdot 4}$; 7) $\sqrt{-(-1)}$;

2) $\sqrt{50}$; 4) $-\sqrt{625}$; 6) $\sqrt{-4\cdot(-16)}$; 8) $-\sqrt{-9}$.

263•. Обчисліть:

1) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{400}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{900}$; 3) $\left(\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}\right):0,2$;

2) $0,5\cdot\sqrt{64}+\sqrt{\frac{1}{100}}$; 4) $70\cdot\sqrt{\frac{4}{49}}+9\cdot\sqrt{\frac{100}{81}}$.

264•. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{x+y}$, якщо: а) $x=4$, $y=32$; б) $x=0,64$, $y=0,36$; в) $x=-24$, $y=25$;

2) $\sqrt{9m+2n}$, якщо: а) $m=\frac{1}{9}$, $n=40$; б) $m=0$, $n=18$; в) $m=\frac{4}{9}$, $n=0$;

3) $a+\sqrt{a}$, якщо: а) $a=0$; б) $a=16$; в) $a=0,64$; г) $a=3600$;

4) $\sqrt{a^2-b^2}$, якщо: а) $a=13$, $b=12$; б) $a=-5$, $b=4$; в) $a=10$, $b=-8$.

265••. Визначте значення змінної, при якому буде правильною рівність:

1) $\sqrt{a}=10$; 3) $\sqrt{x}\cdot 5=15$; 5) $\sqrt{x}-7=0$; 7) $3\sqrt{x}-5=0$;

2) $\sqrt{x}=0,6$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{x}=2$; 6) $2\sqrt{y}=0$; 8) $4\sqrt{x}-3=0$.

266••. Знайдіть, якщо це можливо, значення змінної x, при якому виконується рівність:

1) $\sqrt{x}=15$; 3) $\sqrt{x}=-19$; 5) $91-\sqrt{x}=0$;

2) $4\cdot\sqrt{x}=0$; 4) $5+\sqrt{x}=0$; 6) $\sqrt{x}+2008=0$.

267••. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-0{,}01=0{,}03$; 4) $5:t^2=20$; 7) $\frac{2}{3}x^2+2=0$;

2) $y^2+1=37$; 5) $\frac{1}{2}x^2=-4$; 8) $7y^2+175=0$.

3) $40-m^2=-9$; 6) $\frac{1}{3}t^2=3$;

268••. Знайдіть корені рівняння:

1) $2\sqrt{y}-8=0$; 3) $\frac{1}{5}m^2+1=6$; 5) $(7-x)^2=0$;

2) $0{,}01\sqrt{x}-1=0$; 4) $1\frac{9}{16}x^2-1=\frac{24}{25}$; 6) $(2x+6)^2=0$.

269••. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{25}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{7^2}\right)^2$; 5) $\left(\sqrt{1\frac{9}{16}}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{4}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{3^2}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2}\right)^2$.

Проаналізуйте результат і зробіть висновки.

Вправи для самооцінювання

1°. Визначте вираз, який не має змісту.

а) $\sqrt{100}$; б) $\sqrt{(-10)^2}$; в) $-\sqrt{(-25)\cdot(-4)}$; г) $-\sqrt{(-25)\cdot 4}$.

2°. Знайдіть значення змінної x, при якому $\sqrt{x}=0,9$.

а) 0,3; б) 0,81; в) 0,03; г) 8,1.

3°. Обчисліть значення виразу $0{,}1\cdot\sqrt{400}+0{,}2\cdot\sqrt{1600}$.

а) 80; б) 18; в) 10; г) 60.

4•. Знайдіть значення виразу $\sqrt{4-2a}$ при $a=-22{,}5$.

а) 7; б) 24,5; в) 14; г) $\sqrt{28{,}5}$.

5•. Визначте, при якому значенні змінної x рівність $4\sqrt{x}-1=0$ є правильною.

а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{8}$.

6•. Обчисліть значення виразу $-\left(\sqrt{36}\right)^2\cdot\left(\sqrt{(-3)^2}\right)^2$.

а) −54; б) 54; в) −324; г) 324.

7••. Виберіть правильну рівність або нерівність.

а) $\sqrt{7}+\sqrt{2}<3$; б) $\sqrt{7^2-2^2}=3$; в) $\sqrt{7^2+2^2}>3$; г) $\sqrt{7}-\sqrt{2}=3$.

8••. Обчисліть значення виразу $\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{36}\right)^2-0{,}4\left(-\sqrt{25}\right)^2$.

а) −9; б) 11; в) 16; г) 42.

9••. Визначте, при яких значеннях змінної x має зміст вираз $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

а) При $x\geqslant 0$; б) при $0\leqslant x\leqslant 1$; в) при $x>0$; г) при $0<x<1$.

Вправи для повторення

270. Скоротіть дріб:

1) $\frac{t^6+t^4}{t^8+t^{10}}$; 3) $\frac{y^{10}-y^{12}}{y^{10}-y^8}$; 5) $\frac{c^6-c^4}{c^4-1}$; 7) $\frac{c^7-2c^5}{c^5-2c^3}$;

2) $\frac{a^{12}-a^{15}}{a^6-a^3}$; 4) $\frac{x^6-x^9}{x^6-x^8}$; 6) $\frac{c^8+c^6}{c^4-1}$; 8) $\frac{a^{20}+3a^{11}}{3a^{13}+a^{22}}$.

271. Знайдіть число, обернене до кореня рівняння:

1) $\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x-3}=\frac{1}{x}$; 3) $\frac{3}{x-2}+\frac{7}{x+2}=\frac{10}{x}$;

2) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x+3}$; 4) $\frac{4}{x+3}+\frac{3}{x-3}=\frac{7}{x}$.

272. Розв'яжіть задачу за допомогою системи рівнянь.

Одна сторона прямокутника на 10 см більша за другу. Якщо меншу сторону збільшити вдвічі, а більшу – втричі, то периметр нового прямокутника дорівнюватиме 120 см. Знайдіть сторони даного прямокутника.

273. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$, коли відомо, що:

1) $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$; 3) $x-\frac{1}{x}=\frac{15}{4}$;

2) $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$; 4) $x-\frac{1}{x}=\frac{24}{5}$.

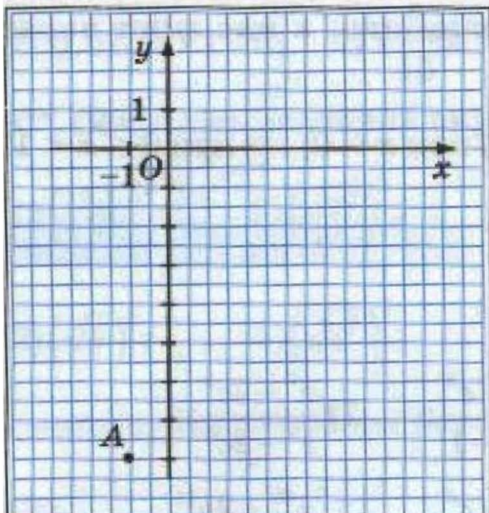
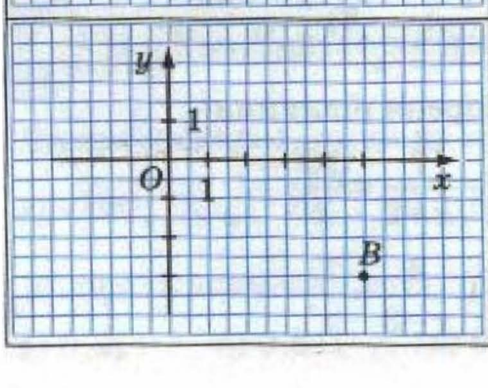
274. Знайдіть за допомогою мікрокалькулятора наближені значення коренів рівняння (відповідь округліть до сотих):

1) $(x-5)^2=2$; 3) $(x+1)^2=3$;

2) $(x-3)^2=5$; 4) $(x+2)^2=6$.

Чи можливо знайти таке точне значення числа t, щоб $t^2=2$, $t^2=3$, $t^2=5$, $t^2=6$?

275. Вставте число замість знака «?».

	$\sqrt{7x-2y}+x-\sqrt{-\frac{1}{2}y}$	0
	$\sqrt{\frac{2}{5}x-4\frac{2}{3}y}+\sqrt{-3y-x}$	?

§14. РАЦІОНАЛЬНІ, ІРРАЦІОНАЛЬНІ, ДІЙСНІ ЧИСЛА. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- про етапи розвитку числа;
- як виникли числові множини;
- які числа називаються ірраціональними;
- що називають множиною натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел;
- як визначити, до якої множини належить дане число;
- як перетворювати звичайний дріб у десятковий;
- який дріб є скінченним (нескінченним) десятковим періодичним (неперіодичним);
- які дії визначені для кожної з множин;
- як порівнювати дійсні числа.

Уявлення людини про число створювалося роками під впливом потреб життя: під час лічби, вимірювання величин, виконання перших арифметичних операцій тощо. Поняття «число» з'явилося тоді, коли люди відокремили його від реальних об'єктів та їх властивостей.

Математика вивчає *кількісні відношення* і *просторові форми реального світу*, для яких основним знаряддям є *число*.

Тому поняття «число» було й залишається одним з фундаментальних понять математики.

Натуральні числа. У курсі математики ми працювали з різними числами. Зокрема, з числами 1, 2, 3, 4, ..., які використовують при лічбі, – *натуральними числами*. Натуральних чисел безліч. Кожне натуральне число записують за допомогою десяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Отже, за допомогою десяти цифр можна зібрати числа, які використовують при лічбі, у деяку сукупність. Кажуть, що такі числа утворюють *множину натуральних чисел*. А самі числа називають її *елементами*.

Поняття «множина» належить до одного з первісних понять математики, яке не має означення. Множину можна собі уявити як сукупність, зібрання деяких предметів, об'єднаних за певною характеристичною властивістю, ознакою чи ознаками. Наприклад, множина учнів окремого класу чи однієї паралелі навчального закладу; множина букв алфавіту; множина точок на прямій тощо.

Предмети, з яких складається множина, називаються її елементами (наприклад, купюра номіналом 2 грн. – елемент множини купюр грошової системи України).

Елементи множини позначають малими буквами латинського або грецького алфавіту, а саму множину – великими. Наприклад, A, B, C – деякі множини, причому множина A складається з елементів α, β, γ, тобто $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. При цьому порядок запису елементів не має значення. Множину, що немає жодного елемента, називають *порожньою* і позначають $\varnothing$.

Належність елемента даній множині позначають символом «$\in$», якщо ж елемент не належить деякій множині, – символом «$\notin$». Наприклад, запис $\alpha \in A$ читається так: «елемент α належить множині A», або коротко: «α належить A». Запис $\delta \notin A$ читається: «елемент δ (δ – дельта) не належить множині A».

Множини бувають *скінченні* і *нескінченні*. Множини учнів класу, букв алфавіту, купюр грошових систем – скінченні, а множина точок прямої – нескінченна.

Множину задають двома способами: 1) переліком усіх її елементів; 2) описанням характеристичної властивості її елементів.

Кажуть, що натуральні числа 1, 2, 3, ... з'явилися в зв'язку з необхідністю підрахунку предметів, тобто з потребою відповісти на запитання: «Скільки елементів містить дана множина?» Термін «натуральне число» походить від латинського слова *Natura* – природа. Множину натуральних чисел позначають буквою N. $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – нескінченна множина. Те, що число належить чи не належить множині натуральних чисел, записують так: $15 \in N$, $27 \in N$, $0 \notin N$.

Цілі числа. При додаванні і множенні натуральних чисел завжди дістають натуральне число. Проте при їх відніманні не завжди отримують натуральне число. Так, у результаті віднімання $(3 - 5)$ чи $(5 - 5)$ отримують числа -2 і 0, які не є натуральними.

Щоб завжди виконувалася дія віднімання, додатково ввели *від'ємні числа й число нуль*. Таким чином множину натуральних чисел розширили до множини цілих чисел. Термін «ціле число» походить від німецького слова *Zahlen* – лічити; множина цілих чисел позначається буквою Z. $Z = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ – нескінченна множина.

Наприклад, $-834 \notin N$, однак $-834 \in Z$; $565 \in N$ і $565 \in Z$.

Таким чином, *натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль складають множину цілих чисел Z.*

Зауваження. Якщо до множини натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ приєднати число 0, то отримаємо нову множину, яку називають множиною невід'ємних цілих чисел і записують $Z^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Раціональні числа. При додаванні, множенні і відніманні цілих чисел завжди отримують цілі числа. Однак під час ділення двох цілих чисел не завжди матимемо ціле число.

Наприклад, $15 : 5 = 3$, але $16 : 5 = 3$ (остача 1), тобто ділення чисел 16 і 5 неможливо виконати в множині цілих чисел. Якщо розширити множину цілих чисел, доповнюючи її дробовими, то в цій розширеній множині вже будуть виконуватися чотири арифметичні дії.

Отже, унаслідок розширення поняття числа ми прийшли до такої числової множини, в якій містяться всі цілі й дробові (додатні і від'ємні) числа. Її називають множиною *раціональних чисел*. Термін «раціональне число» походить від латинського слова *Ratio* – відношення (частка); множину раціональних чисел позначають першою буквою ідентичного слова *Qvoti* (*Q*).

Число, яке можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне, називається *раціональним* числом.

Будь-яке раціональне число можна різними способами подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$. Наприклад: 1) $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\ldots=\frac{10}{50}=\ldots$; 2) $-\frac{2}{3}=-\frac{4}{6}=\ldots=-\frac{20}{30}=\ldots$; 3) $12=\frac{12}{1}=\frac{24}{2}=\ldots$.

Серед рівних дробів завжди можна вказати дріб, у якому знаменник найменший. Такий дріб називають *нескоротним*.

Прикладом множини раціональних чисел є множина $A=\{-25; -2; -1\frac{1}{5}; -1; 0; 4\}$. Деякі елементи цієї множини належать лише множині раціональних чисел, однак є й такі, які належать також множинам цілих чи натуральних чисел. Тобто,

$-1\frac{1}{5} \in Q$, але $-1\frac{1}{5} \notin Z$ і $-1\frac{1}{5} \notin N$; $-25 \in Q$, $-25 \in Z$, але $-25 \notin N$; $4 \in Q$, $4 \in Z$ і $4 \in N$.

Перетворюючи звичайний дріб $\frac{m}{n}$ у десятковий, використовують дію ділення $m : n$. Таким чином, маємо: $\frac{3}{5}=0,6$; $-\frac{7}{4}=-1,75$; $\frac{1}{3}=0,333\ldots$; $-\frac{9}{11}=-0,8181\ldots$.

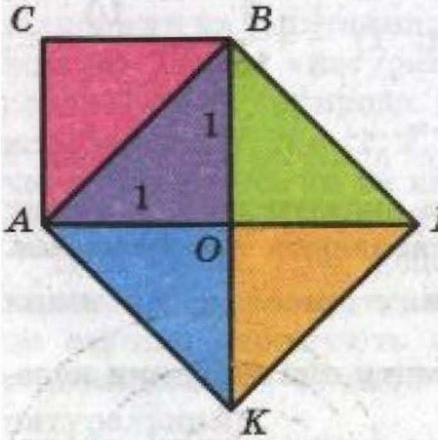
При цьому бувають випадки, коли ділення: 1) завершується через кілька кроків; 2) повторюється через кілька кроків; 3) перетворюється у нескінченне повторення однієї і тієї самої сукупності цифр. Те, що при діленні повторюються одні й ті самі остачі та одні й ті самі числа в частці, називають *періодичністю* *дробу*, а сукупність цифр, що повторюється, називають *періодом* дробу. У запису періодичних десяткових дробів період пишуть один раз, узявши його в круглі дужки:

$$\frac{1}{3}=0,(3);\quad -\frac{9}{11}=-0,(81);\quad \frac{7}{12}=0,58(3).$$

Ці записи читають так: 0 цілих 3 у періоді; мінус 0 цілих 81 у періоді; 0 цілих 58 сотих і 3 у періоді.

Взагалі, кожний дріб $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$, можна подати або у вигляді скінченного десяткового дробу, або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

З а у в а ж е н н я. Кожний скінченний десятковий дріб можна записати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, приписуючи до нього справа нескінченну кількість нулів ($2,7 = 2,7000... = 2,7(0)$).



Ірраціональні числа. Якщо за сторону деякого квадрата $ABDK$ взяти діагональ квадрата зі стороною 1 см, то його площа буде вдвічі більшою (2 см²). $S_{ACBO} = 1$ см², а $S_{ABDK} = 2$ см². Звідси довжина сторони квадрата $ABDK$ дорівнює $\sqrt{2}$ см.

Доведемо, що число $\sqrt{2}$ не є раціональним, використовуючи спосіб від супротивного.

Нехай $\sqrt{2}$ – раціональне число, тому його можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле, n – натуральне число. Тобто $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, звідси $\frac{m^2}{n^2}=2$ і $m^2 = 2n^2$. Остання рівність показує, що m^2 ділиться без остачі на 2, тому й m ділиться без остачі на 2 (квадрат непарного числа не може бути числом парним). Отже, $m = 2k$, тоді $4k^2 = 2n^2$, звідси $2k^2 = n^2$, тобто n – парне. Наше припущення привело до того, що числа m і n – парні, а це суперечить припущенню, що $\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб.

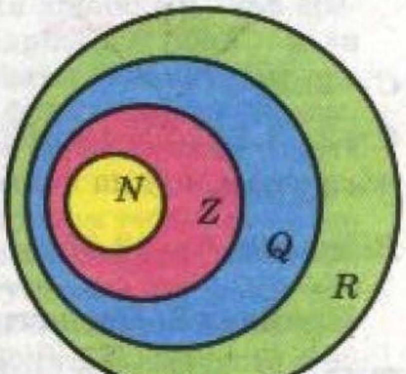
Отже, не існує такого раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Аналогічно можна довести, що не існує таких раціональних чисел, квадрат яких би дорівнював 3; 5; 7; 8; 10; 11, ...

$\sqrt{2}=1{,}4142135623...$, $\pi=3{,}1415926535...$ Це нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Їх називають *ірраціональними числами*.

Нескінченні десяткові дроби можуть бути періодичними і неперіодичними. Нескінченні періодичні десяткові дроби – це раціональні числа. Нескінченні неперіодичні десяткові дроби – це ірраціональні числа.

Дійсні числа. Множину всіх раціональних та ірраціональних чисел називають множиною *дійсних чисел*, а кожне її число – дійсним числом. Множину дійсних чисел позначають буквою R, від англійського слова *Real*, німецького *Reel* – дійсний. Прикладом множини дійсних чисел є множина $B=\{..., -3, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, 3, ...\}$. Деякі елементи цієї множини належать лише множині дійсних чисел, однак є й такі, які належать також множинам раціональних чисел, цілих чисел, натуральних чисел. Тобто $-\sqrt{3}\in R$, але $-\sqrt{3}\notin Q$, $-\sqrt{3}\notin Z$, $-\sqrt{3}\notin N$; $-\frac{1}{2}\in R$, $-\frac{1}{2}\in Q$, але $-\frac{1}{2}\notin Z$, $-\frac{1}{2}\notin N$; $0\in R$, $0\in Q$, $0\in Z$, але $0\notin N$. Зазначимо, що число 3 як елемент множини B належить усім відомим нам числовим множинам: $3\in R$, $3\in Q$, $3\in Z$ і $3\in N$.

Отже, якщо розширення поняття числових множин зобразити у вигляді перетину деяких кругів, то картина буде такою, як показано на малюнку 8.



Мал. 8

Множина дійсних чисел уміщає в себе множину раціональних чисел, множина раціональних чисел – множину цілих чисел, а множина цілих чисел – множину натуральних чисел.

Оскільки кожна точка числової прямої визначає якесь дійсне число і, навпаки, кожне дійсне число має місце на числовій прямій, то кажуть, що множина дійсних чисел R утворює *числову пряму*.

Зауважимо, що числова пряма – єдина (множина всіх дійсних чисел), а координатних прямих існує безліч.

У практичних обчисленнях дійсні числа записують у вигляді скінченних десяткових дробів, залишаючи після коми певну кількість знаків (точність). Наприклад, з точністю до тисячних: $3\frac{1}{6}\approx3{,}167$, $\sqrt{9{,}3}\approx3{,}050$, $\sqrt{10}\approx3{,}162$, $\pi\approx3{,}142$.

З дійсними числами, як і з раціональними, виконують усі арифметичні дії. Для цього їх записують у вигляді скінченних десяткових дробів з однаковою стабілізованою точністю (здійснюють наближення з недостачею і з надлишком до тих пір, поки якомога більше цифр будуть повторюватися (стабілізуватися), і вибирають одне з них).

Порівнюють дійсні числа за тими самими правилами, що й десяткові дроби.

Приклад 1. Підберіть два послідовних цілих числа, між якими міститься ірраціональне число $\sqrt{55}$.

Розв'язання

Як записати

$? < \sqrt{55} < ?$,

$49 < 55 < 64$,

$\sqrt{49} < \sqrt{55} < \sqrt{64}$,

$7 < \sqrt{55} < 8$.

Відповідь. $7 < \sqrt{55} < 8$.

Як пояснити

З означення арифметичного кореня маємо, що $\left(\sqrt{55}\right)^2 = 55$.

55 – ціле число, яке міститься між двома числами 49 і 64, які, у свою чергу, є квадратами цілих чисел 7 і 8.

Приклад 2. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює 7 м.

Розв'язання

Як записати

$C = 2\pi R$,

$C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 = 43{,}96$ (м),

$C \approx 43{,}96$ м.

Відповідь. $C \approx 43{,}96$ м.

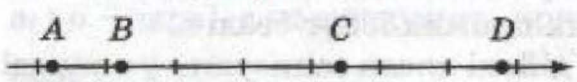
Як пояснити

За формулою $C = 2\pi R$, де C – довжина кола, R – радіус кола, виконуємо обчислення з точністю до 0,01. Тоді $\pi \approx 3{,}14$, а $R = 7$ м.

Приклад 3. Позначте на числовій прямій точки з координатами: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, $-\sqrt{8}$.

Розв'язання

Як записати



$A\left(-\sqrt{8}\right)$, $B\left(-\sqrt{3}\right)$, $C\left(\sqrt{2}\right)$, $D\left(\sqrt{15}\right)$.

Як пояснити

Використовуючи калькулятор, знаходимо значення: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $-\sqrt{3} \approx -1{,}7$; $\sqrt{15} \approx 3{,}9$; $-\sqrt{8} \approx -2{,}8$. Позначаємо наближено відповідні точки на числовій прямій.

Зауваження. За допомогою числової прямої легко записати дійсні числа у порядку зростання: $-\sqrt{8}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$ або в порядку спадання: $\sqrt{15}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{8}$, пам'ятаючи, що числа, які лежать на числовій прямій правіше, більші за числа, які лежать лівіше.

!? Доведіть самостійно, що:
1) сума двох додатних раціональних чисел є числом додатним;
2) коли добуток двох раціональних чисел дорівнює нулю, то хоча б одне з них дорівнює нулю.

Ріхард Дедекінд

Ще в Стародавній Греції в геометрії було зроблено відкриття значущої важливості. Суть якого полягала в тому, що не завжди існують відрізки, які точно можна виміряти іншими. Наприклад, діагональ квадрата і його сторона. Тобто не завжди довжина відрізка може бути виражена раціональним числом, якщо за одиницю прийняти другий відрізок. Такі відрізки назвали *несумірними*. Цей факт приписують Піфагору (580–500 рр. до н. е.). Проте цей факт не гальмував розвиток геометрії. Греками була розроблена теорія відношень, яка враховувала можливість несумірності відрізків. Вони вміли порівнювати такі відношення за величинами, виконувати над ними арифметичні дії – у геометричній формі. Одним словом, греки працювали з такими відношеннями, як із числами. Проте у них не виникало думки, що такі відношення відрізків можуть утворювати числа. Це було пов'язано з відривом теоретичної математики від прикладних питань. Пізніше, в працях Архімеда, з'явилися ідеї обчислення відношень несумірних відрізків, але не введено самої назви цих чисел. У XVII ст. англійським ученим Ісааком Ньютоном було визначено поняття «дійсного числа», а в 70-х роках XIX ст. поняття «дійсне число» було уточнено німецькими вченими Ріхардом Дедекіндом, Георгом Кантором і Карлом Вейєрштрассом.

Вправи для закріплення

276°. Заповніть таблицю, використовуючи числа: -80; $-15{,}6$; -5; $-\sqrt{47}$; $-3{,}5$; $-2\frac{1}{7}$; -1; 0; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $6{,}7$; 7; $17\frac{2}{3}$.

Множина			
натуральних чисел, N	цілих чисел, Z	раціональних чисел, Q	дійсних чисел, R

277°. Виберіть правильні твердження:

1) $12 \in N$; 5) $3{,}2 \in Q$; 9) $\sqrt{84} \notin Q$; 13) $0 \in R$;

2) $-27 \in Z$; 6) $-3 \notin Q$; 10) $\sqrt{56} \in R$; 14) $0 \notin N$;

3) $-109 \notin Z$; 7) $-8{,}7 \notin Q$; 11) $-\sqrt{24} \notin Z$; 15) $1{,}234 \in R$;

4) $-96 \in N$; 8) $5\frac{2}{7} \in Z$; 12) $-\sqrt{2{,}5} \in R$; 16) $-\sqrt{5} \notin N$.

278°. Подайте числа у вигляді дробу з найменшим натуральним знаменником:

$19;\ -25;\ -0{,}7;\ 1{,}3;\ 2\frac{1}{6};\ 5\frac{2}{3};\ -3\frac{1}{2};\ 5{,}4;\ -2{,}5.$

279°. Подайте числа у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне число:

$1\frac{1}{5};\ 3\frac{2}{7};\ -2\frac{2}{3};\ -5\frac{5}{6};\ -0{,}2;\ -0{,}3;\ -0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 3;\ 5;\ 0.$

280°. Подайте числа довільним способом у вигляді відношення цілого числа до натурального:

$1\frac{2}{7};\ 2\frac{3}{8};\ 3\frac{2}{5};\ 4\frac{1}{6};\ -2{,}3;\ -1{,}7;\ -15{,}4;\ -0{,}9;\ 0;\ 1;\ 64;\ 25\frac{1}{4}.$

281°. Виберіть числа, які належать до множини раціональних чисел:

$-15;\ -13\frac{1}{7};\ -\sqrt{13};\ -\sqrt{120{,}5};\ -13{,}5;\ 12{,}8;\ 0{,}0003;\ 0;\ 100;\ \sqrt{25}.$

282°. Подайте число у вигляді скінченного десяткового дробу:

1) $17\frac{1}{2}$; 3) $61\frac{1}{5}$; 5) $5\frac{3}{4}$; 7) $6\frac{3}{8}$;

2) $-23\frac{1}{4}$; 4) $-2\frac{1}{8}$; 6) $-3\frac{2}{5}$; 8) $-14\frac{6}{25}$.

283°. Подайте числа у вигляді нескінченного десяткового дробу, скориставшись мікрокалькулятором:

1) $\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{4}{7}$; 3) $\frac{5}{33},\ \frac{7}{33},\ \frac{13}{33},\ \frac{17}{33},\ \frac{23}{33},\ \frac{29}{33}$;

2) $\frac{1}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{7}{99},\ \frac{11}{99}$; 4) $\frac{1}{11},\ \frac{2}{11},\ \frac{3}{11},\ \frac{4}{11},\ \frac{7}{11},\ \frac{9}{11}$.

284°. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{12}$ і $\sqrt{15}$; 3) 4 і $\sqrt{15}$; 5) 4 і $\sqrt{17}$; 7) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ і $\sqrt{\frac{1}{3}}$;

2) $\sqrt{17}$ і $\sqrt{19}$; 4) 3 і $\sqrt{10}$; 6) 3 і $\sqrt{8}$; 8) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ і $\sqrt{\frac{1}{8}}$.

285°. Розташуйте у порядку спадання числа:

1) $\sqrt{24}, \sqrt{26}, 5, \sqrt{17}, 4$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{15}}, \sqrt{\frac{1}{10}}, \sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$;

2) $3, \sqrt{8}, \sqrt{6}, 4, \sqrt{11}$; 4) $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{11}}, \sqrt{\frac{2}{15}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{9}}$.

286•. Подайте число у вигляді нескінченного десяткового дробу:

1) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{22}{7}$; 5) $1\frac{57}{125}$; 7) $-1\frac{3}{40}$;

2) $-\frac{7}{9}$; 4) $-\frac{5}{8}$; 6) $-1\frac{23}{25}$; 8) $2\frac{3}{16}$.

287•. Обчисліть значення раціонального виразу:

1) $\dfrac{\frac{10}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{4}{3}}+5{,}1\cdot\frac{2}{17}$; 3) $\dfrac{\frac{19}{3}-\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}-8{,}7\cdot\frac{2}{29}$;

2) $\dfrac{\frac{16}{3}-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}+5{,}7\cdot\frac{3}{19}$; 4) $\dfrac{\frac{22}{3}+\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}}-6{,}9\cdot\frac{15}{23}$.

288•. Знайдіть два послідовних цілих числа, між якими міститься число:

1) $\sqrt{23}$; 3) $\sqrt{378}$; 5) $-\sqrt{264}$;

2) $\sqrt{126}$; 4) $-\sqrt{45}$; 6) $-\sqrt{932}$.

Порівняйте числа (289–291).

289•. 1) 2,653... і 2,563...; 4) −15,045... і −15,145...;

2) 0,123... і 0,112...; 5) −2,411... і −2,423...;

3) 3,257... і 3,259...; 6) −42,987... і −42,982... .

290•. 1) 13,56 і 13,(56); 3) 0,(75) і 0,2(75);

2) −7,45 і −7,(45); 4) 6,(754) і 6,5(754).

291•. 1) 12,08(3) і 12,0(6); 3) 47,2(6) і 47,4(6);
2) −14,7(3) і −14,8(6); 4) −36,(27) і −36,(45).

Розв'яжіть рівняння графічним способом (292–293). Відповідь запишіть наближеними раціональними та точними ірраціональними числами.

292•. 1) $x^2 = 2,4$; 2) $x^2 = 3,2$; 3) $x^2 = 5,6$; 4) $x^2 = 7,4$.

293•. 1) $x^2 = 4,4$; 2) $x^2 = 7,6$; 3) $x^2 = 8,2$; 4) $x^2 = 9,6$.

Порівняйте числа (294–295).

294••. 1) $1\frac{2}{3}$ і 1,6668; 4) $\sqrt{624}$ і 25;
2) −0,228 і −0,2(27); 5) $\sqrt{111}\cdot\sqrt{123}$ і $\sqrt{112}\cdot\sqrt{124}$;
3) 3,(14) і π; 6) $\frac{\sqrt{340}}{\sqrt{166}}$ і $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{166}}$.

295••. 1) 3,(18) і $\sqrt{10}$; 3) −4,8(6) і $-\sqrt{24}$;
2) 3,4(3) і $\sqrt{12}$; 4) −6,(1) і $-\sqrt{38}$.

296••. Запишіть у порядку зростання числа:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{11}$, $\sqrt{31}+\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{10}+\sqrt{3}$, $\sqrt{17}+\sqrt{3}$, $\sqrt{63}+\sqrt{3}$;

3) $\sqrt{24}-\sqrt{2}$, $\sqrt{24}-\sqrt{11}$, $\sqrt{24}-\sqrt{7}$, $\sqrt{24}-\sqrt{47}$, $\sqrt{24}-\sqrt{5}$;

4) $\sqrt{42}-\sqrt{26}$, $\sqrt{42}-\sqrt{43}$, $\sqrt{42}-\sqrt{28}$, $\sqrt{42}-\sqrt{54}$, $\sqrt{42}-\sqrt{96}$.

297••. Запишіть у порядку спадання числа:

1) $\sqrt{10}$; $3\frac{1}{9}$; $3\frac{1}{7}$; 3,2(1); 3,(2); 3) $6\frac{2}{9}$; 6,2(6); $6\frac{1}{13}$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{39}$;

2) 4,(27); $\sqrt{19}$; $\sqrt{21}$; $4\frac{13}{30}$; $4\frac{14}{31}$; 4) $\sqrt{28}$; $5\frac{1}{3}$; $\sqrt{30}$; 5,3(6); $5\frac{4}{15}$.

298••. Запишіть у порядку зростання числа:

1) $-1\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{7}$; $-1\frac{1}{9}$; $-\sqrt{1,2}$; $-\sqrt{1,3}$; −1,3(6); −1,(37);

2) $-2\frac{1}{8}$; −2,3(6); −2,(36); $-\sqrt{5,6}$; $-\sqrt{5,8}$; $-2\frac{5}{12}$; −2,36(1);

3) $-3\frac{1}{11}$; $-3\frac{1}{13}$; $-3\frac{2}{17}$; −3,08(3); −3,0(82); $-\sqrt{9,5}$; $-\sqrt{9,6}$;

4) $-7\frac{2}{9}$; −7,2(6); −7,(216); −7,26(1); $-7\frac{4}{19}$; $-\sqrt{49,4}$; $-\sqrt{49,6}$.

299••. Не використовуючи мікрокалькулятор, визначте, яке з чисел більше:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ чи $\sqrt{10}$; 5) $\sqrt{7}+\sqrt{12}$ чи $\sqrt{19}$;

2) $\sqrt{4}+\sqrt{8}$ чи $\sqrt{12}$; 6) $\sqrt{10}+\sqrt{11}$ чи $\sqrt{21}$;

3) $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ чи $\sqrt{13}$; 7) $\sqrt{12}+\sqrt{15}$ чи $\sqrt{27}$;

4) $\sqrt{6}+\sqrt{11}$ чи $\sqrt{17}$; 8) $\sqrt{14}+\sqrt{21}$ чи $\sqrt{35}$.

300••. Доведіть, що значення виразу є ірраціональним числом:

1) $\sqrt{\left(5-\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}$; 3) $\sqrt{\left(7-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(2-\sqrt{11}\right)^2+\left(\sqrt{10}\right)^2}$.

301••. Доведіть, що значення виразу є цілим числом:

1) $\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}$; 3) $\sqrt{\left(3-\sqrt{15}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(4-\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(4-\sqrt{18}\right)^2}+\sqrt{\left(5-\sqrt{18}\right)^2}$.

Скористайтеся зауваженням 2 параграфа 13.

Вправи для самооцінювання

1°. Укажіть множину, усі елементи якої належать множині раціональних чисел.

а) $M=\{-3,2;\ -2,1;\ -\sqrt{2};\ -\frac{1}{7};\ 0;\ 1\}$;

б) $N=\{-2,7;\ -1\frac{1}{9};\ -1;\ 0;\ 1;\ \sqrt{3}\}$;

в) $K=\{-3,3;\ -2\frac{1}{7};\ -\frac{11}{13};\ 0;\ 3;\ \pi\}$;

г) $P=\{-2,3;\ -1\frac{1}{7};\ -\frac{1}{3};\ 0;\ 1;\ 2\}$.

2°. Виберіть нескінченно періодичні дроби:

1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{7}{9}$; 3) $\frac{8}{11}$; 4) $\frac{7}{16}$; 5) $\frac{24}{25}$.

а) 1 і 3; б) 2 і 3; в) 2 і 4; г) 3 і 5.

3°. Розмістіть у порядку зростання числа: $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$.

а) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$; в) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$;

б) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$.

4•. Подайте кожне раціональне число (а–г) у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу (1–4).

а) $\frac{13}{9}$; 1) 1,(45);

б) $\frac{16}{11}$; 2) 1,(48);

в) $\frac{5}{3}$; 3) 1,(4);

г) $\frac{49}{33}$. 4) 1,(6).

а	
б	
в	
г	

5•. Виберіть правильну нерівність.

а) $-22{,}41 < -22{,}(41)$; в) $-14{,}92 < -14{,}(92)$;

б) $-3{,}(47) < -3{,}47$; г) $-0{,}(17) > -0{,}17$.

6•. Розмістіть у порядку спадання числа: 1,7; 1,(41); $\sqrt{2}$; $1\frac{1}{3}$; $\sqrt{3}$.

а) 1,7; 1,(41); $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $1\frac{1}{3}$; в) $\sqrt{3}$; 1,7; $\sqrt{2}$; 1,(41); $1\frac{1}{3}$;

б) $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; 1,7; 1,(41); $1\frac{1}{3}$; г) 1,7; $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; 1,(41); $1\frac{1}{3}$.

7••. Розташуйте на числовій прямій у порядку зростання числові значення виразів:

1) $\sqrt{\left(6-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}$; 3) $\sqrt{\left(9-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(11-\sqrt{5}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(13-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(12-\sqrt{5}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(8-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(7-\sqrt{5}\right)^2}$.

а) 1, 2, 3, 4; б) 2, 3, 1, 4; в) 1, 4, 3, 2; г) 2, 4, 1, 3.

8••. Ідентифікуйте умову і правильну відповідь.

а) $\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}-\left(\sqrt{10}\right)^2$; 1) $\sqrt{7}-7$;

б) $\sqrt{\left(10-\sqrt{7}\right)^2}-\left(\sqrt{3}\right)^2$; 2) $\sqrt{7}+7$;

в) $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}-\left(\sqrt{5}\right)^2$; 3) $-7-\sqrt{7}$;

г) $\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}+\left(\sqrt{8}\right)^2$. 4) $7-\sqrt{7}$.

а	
б	
в	
г	

9**. Визначте дві правильні нерівності.

а) $\sqrt{33}+\sqrt{27}>\sqrt{60}$; в) $\sqrt{61}+\sqrt{19}<\sqrt{80}$;

б) $\sqrt{51}+\sqrt{19}<\sqrt{70}$; г) $\sqrt{76}+\sqrt{14}>\sqrt{90}$.

Вправи для повторення

302. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{3a}{a-9}+\dfrac{26a}{81-18a+a^2}\right):\dfrac{3a-1}{a^2-81}+\dfrac{9(9+a)}{9-a}$;

2) $\left(\dfrac{3a}{a-4}+\dfrac{10a}{16-8a+a^2}\right):\dfrac{3a-2}{a^2-16}+\dfrac{4(4+a)}{4-a}$;

3) $\left(\dfrac{5a}{a+3}-\dfrac{14a}{a^2+6a+9}\right):\dfrac{5a+1}{a^2-9}+\dfrac{3(a-3)}{a+3}$;

4) $\left(\dfrac{4a}{a+5}-\dfrac{17a}{a^2+10a+25}\right):\dfrac{4a+3}{a^2-25}+\dfrac{5(a-5)}{a+5}$.

303. Доведіть, що значення виразу:

1) 8^6-4^7 кратне 6;

2) $25^{10}-5^{17}$ кратне 31;

3) 27^5-9^6 кратне 39;

4) 49^8-7^{13} кратне 19.

304. Розв'яжіть задачу за допомогою системи рівнянь.

Рухаючись 7 год за течією річки і 5 год – проти течії, пароплав подолав 220 км. А рухаючись 5 год за течією річки і 7 год – проти течії, він проплив 212 км. Знайдіть власну швидкість пароплава та швидкість течії річки.

305. Порівняйте значення виразів, користуючись мікрокалькулятором (відповідь округліть до десятих):

1) $\sqrt{20}-\sqrt{12}$ і $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{27}-\sqrt{18}$ і $3\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{75}-\sqrt{50}$ і $5\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

4) $\sqrt{80}-\sqrt{48}$ і $4\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

306. Знайдіть значення змінної x, при яких правильна рівність:

1) $\sqrt{4x^2-9}=0$;

2) $\sqrt{25x^2-4}=0$;

3) $\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{4}{25}}=0$;

4) $\sqrt{\dfrac{1}{25}x^2-\dfrac{4}{49}}=0$.

§15. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ З ДОБУТКУ І ДРОБУ. ДОБУТОК І ЧАСТКА КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- як знайти арифметичний квадратний корінь з добутку;
- як знайти арифметичний квадратний корінь з дробу;
- чому дорівнюють добуток і частка кількох арифметичних коренів;
- як знайти допустимі значення змінних, які містяться під знаком кореня.

Користуючись означенням арифметичного квадратного кореня, маємо: $\sqrt{a}$ – це таке число $x\left(\sqrt{a}=x\right)$, що $x^2=a(x\geqslant 0$ і $a\geqslant 0)$, тому $\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=xx=x^2=a$. Отже, для будь-якого невід'ємного числа a є справедливою тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, якою ми вже користувалися (див. зауваження 2 § 13). Наприклад: $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$; $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$.

Отже, $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ при $a\geqslant 0$.

Для перетворення виразів, що містять квадратні корені, існують ще кілька формул, які визначають або виражають властивості арифметичних квадратних коренів (АКК).

Властивість 1. Корінь з добутку	Для доведення досить довести	Обґрунтування кроку доведення
$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$	Крок 1: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geqslant 0$; крок 2: $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=ab$	Крок 1: згідно з означенням АКК $\sqrt{a}\geqslant 0$, $\sqrt{b}\geqslant 0$, тому $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geqslant 0$; крок 2: $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=$ $=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$
Арифметичний квадратний корінь з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів із цих множників		
Зауваження 1. Властивість 1 справедлива для довільної кількості невід'ємних множників: $\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}=\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_2}\cdot\sqrt{a_3}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a_n}$, $n\in N$		

Обернена властивість. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, де $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$	Щоб перемножити арифметичні квадратні корені, досить перемножити їх підкореневі вирази і з добутку добути квадратний корінь
Загальний випадок: $\sqrt{ab}=\sqrt{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{\lvert b\rvert}$, де $ab\geqslant 0$	

Зауваження 2. Чи буде формула $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ справедлива при $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$? Якщо $a\leqslant 0$ і $b\leqslant 0$, то $ab\geqslant 0$. Тому вираз $\sqrt{ab}$ має зміст, а вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ – змісту не мають. Однак $\sqrt{\lvert a\rvert}$, $\sqrt{\lvert b\rvert}$ – існують і $\sqrt{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{\lvert b\rvert}=\sqrt{\lvert ab\rvert}=\sqrt{ab}$ при $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$. Отже, формула $\sqrt{ab}=\sqrt{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{\lvert b\rvert}$ справедлива, якщо a і b мають однаковий знак. Наприклад: $\sqrt{(-4)(-25)}=\sqrt{\lvert -4\rvert}\cdot\sqrt{\lvert -25\rvert}=2\cdot 5=10$.

Приклад 1. Обчисліть $\sqrt{24\cdot 6}$.

Розв'язання

Як записати

$\sqrt{24\cdot 6}=\sqrt{4\cdot 6\cdot 6}=\sqrt{4\cdot 36}=$
$=\sqrt{4}\cdot\sqrt{36}=2\cdot 6=12$.

Відповідь. 12.

Як пояснити

Розкладаємо підкореневий вираз на множники так, щоб вони були точними квадратами деяких чисел, після чого використовуємо *властивість 1*.

Зауважуємо, що $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Приклад 2. Обчисліть $\sqrt{37^2-12^2}$.

Розв'язання

Як записати

$\sqrt{37^2-12^2}=\sqrt{(37-12)(37+12)}=$
$=\sqrt{25\cdot 49}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{49}=5\cdot 7=35$.

Відповідь. 35.

Як пояснити

Розкладаємо числовий вираз 37^2-12^2 на множники за допомогою формули різниці квадратів. Далі використовуємо *властивість 1*.

Зауважуємо, що можна було б обчислювати значення виразу, виконуючи спочатку піднесення до степеня, а після – знаходити різницю, тобто $37^2-12^2=1369-144=1225$. Але ці обчислення вимагають більших зусиль через те, що спосіб розв'язування «в лоб» не завжди є раціональним.

Властивість 2. **Корінь з дробу**	**Для доведення досить довести**	**Обґрунтування кроку доведення**
$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a\geqslant 0,\ b>0$	Крок 1: $\sqrt{a}\geqslant 0,\ \sqrt{b}>0$; крок 2: $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{a}{b}$	Крок 1: згідно з означенням АКК $\sqrt{a}\geqslant 0,\ \sqrt{b}>0$, але $b\neq 0$; крок 2: $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\dfrac{a}{b}$
Арифметичний квадратний корінь з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню з чисельника, поділеному на корінь із знаменника		
Обернена властивість. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, де $a\geqslant 0,\ b>0$	Щоб знайти частку арифметичних значень квадратних коренів, досить знайти частку від ділення підкореневих виразів і добути з неї квадратний корінь	
Загальний випадок: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{\lvert a\rvert}}{\sqrt{\lvert b\rvert}}$, $ab\geqslant 0,\ b\neq 0$		

Приклад 3. Обчисліть $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$.

Розв'язання

Як записати

$$\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$$

Відповідь. $1\dfrac{1}{4}$.

Як пояснити

Перетворюємо мішаний дріб $1\dfrac{9}{16}$ у неправильний $\dfrac{25}{16}$. Далі використовуємо *властивість 2*.

Зауважуємо, що $\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}\neq\sqrt{1}+\sqrt{\dfrac{9}{16}}$. Тобто $\sqrt{a^2+b^2}\neq\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$.

Вправи для закріплення

Обчисліть числові значення виразів (307–312).

307°. 1) $\sqrt{81\cdot 4}$; 3) $\sqrt{0{,}04\cdot 25}$; 5) $\sqrt{0{,}09\cdot 1{,}44}$;

2) $\sqrt{25\cdot 36}$; 4) $\sqrt{49\cdot 0{,}01}$; 6) $\sqrt{1{,}69\cdot 2{,}25}$.

308°. 1) $\sqrt{\frac{36}{49}}$; 3) $\sqrt{\frac{49}{196}}$; 5) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$;

2) $\sqrt{\frac{100}{169}}$; 4) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$; 6) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

309°. 1) $\sqrt{0,25\cdot 9\cdot 16}$; 3) $\sqrt{2500\cdot 0,16\cdot 1,96}$; 5) $\sqrt{10\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{169}}$;

2) $\sqrt{0,09\cdot 64\cdot 1600}$; 4) $\sqrt{2,25\cdot 10\,000\cdot 0,01}$; 6) $\sqrt{3\frac{6}{25}\cdot\frac{225}{81}}$.

310°. 1) $\sqrt{0,04\cdot 81\cdot 49}$; 3) $\sqrt{\frac{121}{144}\cdot 2\frac{1}{4}}$; 5) $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot 3\frac{1}{16}}$;

2) $\sqrt{36\cdot 400\cdot 0,64}$; 4) $\sqrt{2\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{25}}$; 6) $\sqrt{1\frac{17}{64}\cdot\frac{64}{121}}$.

311•. 1) $\sqrt{8\cdot 32}$; 3) $\sqrt{40\cdot 90}$; 5) $\sqrt{90\cdot 6,4}$;

2) $\sqrt{98\cdot 50}$; 4) $\sqrt{20\cdot 80}$; 6) $\sqrt{2,5\cdot 14,4}$.

312•. 1) $\sqrt{75\cdot 12}$; 3) $\sqrt{4,9\cdot 360}$; 5) $\sqrt{45\cdot 80}$;

2) $\sqrt{45\cdot 125}$; 4) $\sqrt{6,4\cdot 160}$; 6) $\sqrt{27\cdot 147}$.

Знайдіть значення виразів (313–314).

313•. 1) $\sqrt{5^2-4^2}$; 3) $\sqrt{26^2-24^2}$; 5) $\sqrt{3^2+4^2}$;

2) $\sqrt{13^2-12^2}$; 4) $\sqrt{10^2-8^2}$; 6) $\sqrt{6^2+8^2}$.

314•. 1) $\sqrt{37^2-12^2}$; 3) $\sqrt{30,5^2-5,5^2}$; 5) $\sqrt{12^2+5^2}$;

2) $\sqrt{101^2-20^2}$; 4) $\sqrt{74,5^2-25,5^2}$; 6) $\sqrt{30^2+40^2}$.

Обчисліть (315–316).

315•. 1) $\sqrt{1\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{13}}$; 3) $\sqrt{12\frac{1}{4}\cdot 4}$; 5) $\sqrt{1\frac{4}{9}\cdot 1\frac{3}{13}}$;

2) $\sqrt{2\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{51}}$; 4) $\sqrt{2\frac{7}{9}\cdot 9}$; 6) $\sqrt{3\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{5}}$.

316•. 1) $\sqrt{1\frac{5}{31}\cdot 3\frac{4}{9}}$; 2) $\sqrt{20\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{9}}$; 3) $\sqrt{5\frac{1}{3}\cdot 3}$; 4) $\sqrt{9\frac{1}{11}\cdot 44}$.

317•. Використовуючи властивості арифметичного квадратного кореня і таблицю квадратів, знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{28\,900}$; 5) $\sqrt{5{,}76}$;

2) $\sqrt{72\,900}$; 6) $\sqrt{9{,}61}$;

3) $\sqrt{260\,100}$; 7) $\sqrt{11{,}56}$;

4) $\sqrt{1\,690\,000}$; 8) $\sqrt{22{,}09}$.

$\sqrt{14\,400}=\sqrt{144}\cdot\sqrt{100}$,

$\sqrt{3{,}61}=\sqrt{\dfrac{361}{100}}=\dfrac{\sqrt{361}}{\sqrt{100}}$.

318•. Знайдіть значення добутку:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$; 5) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{4{,}5}$;

2) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$; 6) $\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{3\frac{1}{3}}$.

319•. Знайдіть значення частки:

1) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{98}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{49\,000}}{\sqrt{64\,000}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{162}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{4{,}9}}{\sqrt{6{,}4}}$.

320•. Використовуючи калькулятор, обчисліть значення добутку, округливши отриманий результат до десятих:

1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{1\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{5}$; 5) $\sqrt{7\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{2\frac{1}{2}}$;

2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}$; 4) $\sqrt{2\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{14}$; 6) $\sqrt{3\frac{2}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{16}{29}}$.

321••. Подайте вираз у вигляді добутку та вкажіть допустимі значення змінних, що входять у вираз:

1) $\sqrt{5a}$; 3) $\sqrt{100a}$; 5) $\sqrt{ab}$; 7) $\sqrt{16mn}$;

2) $\sqrt{19x}$; 4) $\sqrt{81y}$; 6) $\sqrt{xyt}$; 8) $\sqrt{9xy}$.

322••. Подайте вираз у вигляді частки та вкажіть допустимі значення змінних, що входять у вираз:

1) $\sqrt{\dfrac{x}{3}}$; 3) $\sqrt{\dfrac{m}{49}}$; 5) $\sqrt{\dfrac{25ab}{9}}$;

2) $\sqrt{\dfrac{9}{a}}$; 4) $\sqrt{1\frac{1}{3}y}$; 6) $\sqrt{\dfrac{mk}{4n}}$.

323••. Подайте вираз $\sqrt{\frac{a}{y}}$ у вигляді частки коренів, якщо:

1) $a > 0, y > 0$; 2) $a < 0, y < 0$.

324••. У скільки разів сторона квадрата з площею 36 дм² більша за сторону квадрата з площею 4 см²?

325••. Відношення площ двох кругів дорівнює $\frac{1}{9}$, а радіус більшого круга дорівнює 9 дм. Знайдіть радіус меншого круга.

Вправи для самооцінювання

1°. Обчисліть значення виразу $\sqrt{0,81 \cdot 100}$.

а) 900; б) 0,9; в) 9; г) 90.

2°. Виберіть вираз, значення якого дорівнює $2\frac{1}{3}$.

а) $\sqrt{\frac{64}{9}}$; б) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; в) $\sqrt{1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3}}$; г) $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{2}{9}}$.

3°. Укажіть два вирази, значення яких дорівнюють A, де $0 < A < 1$.

а) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$; б) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; в) $\sqrt{0,32} \cdot \sqrt{2}$; г) $\sqrt{0,03} \cdot \sqrt{0,27}$.

4•. Знайдіть вираз, тотожно рівний виразу $\sqrt{13^2 + 12^2}$.

а) $13 + 12$; б) $\sqrt{169 + 144}$; в) $\sqrt{(13-12)(13+12)}$; г) $\sqrt{(13+12)^2}$.

5•. Визначте, у скільки разів сторона одного квадрата більша за сторону другого, якщо їхні площі відповідно дорівнюють 0,25 см² і 0,09 см².

а) У $2\frac{7}{9}$ раза; б) у $\frac{25}{90}$ раза; в) у $\sqrt{\frac{5}{3}}$ раза; г) у $1\frac{2}{3}$ раза.

6•. При яких значеннях змінних має зміст вираз $\sqrt{5m^2n}$?

а) При $m \geqslant 0, n \geqslant 0$; в) при $n \geqslant 0, m \in R$;

б) при $mn \geqslant 0$; г) при $n \leqslant 0, m \in R$.

7••. Обчисліть значення виразу $\sqrt{45,8^2 - 44,2^2}$.

а) 12; б) 1,2; в) 1,6; г) 16.

8••. Знайдіть радіус більшого круга, якщо радіус меншого 4 см, а відношення їхніх площ дорівнює $\frac{1}{16}$.

а) 64 см; б) 16 см; в) 8 см; г) 12 см.

9••. Установіть відповідність між виразами та їхніми числовими значеннями.

а) $\sqrt{\dfrac{256}{144}}\cdot\sqrt{5\dfrac{19}{25}}$; 1) 3;

б) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$; 2) $\dfrac{1}{7}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3{,}6}\cdot\sqrt{8{,}1}}{\sqrt{3{,}24}}$; 3) 3,2;

г) $\sqrt{\left(1\dfrac{1}{16}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$. 4) $\dfrac{15}{16}$.

а	
б	
в	
г	

Вправи для повторення

326. Виконайте дії:

1) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{2}}\right)^4:\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{3}}\right)^5\cdot\left(\dfrac{b}{a^{-1}}\right)^{-2}:\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{4}}\right)^0$;

2) $\left(\dfrac{b^{-2}}{a^{-2}}\right)^{-3}:\left(\dfrac{b^{-2}}{a^{-3}}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-1}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{b^{-3}}{a^{4}}\right)^0$;

3) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-3}}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{b^{-2}}{a}\right)^3:\left(\dfrac{a^{-5}}{b^{6}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{a^{7}}{b^{16}}\right)^0$;

4) $\left(\dfrac{b^{-3}}{a^{-2}}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{b^{2}}{a^{-2}}\right)^{-2}:\left(\dfrac{b^{-1}}{a^{2}}\right)^5\cdot\left(\dfrac{a^{12}}{b^{9}}\right)^0$.

327. Розв'яжіть пару рівнянь:

1) $x^2=3$ і $\sqrt{x}=3$; 3) $x^2=9$ і $\sqrt{x}=9$;

2) $x^2=5$ і $\sqrt{x}=5$; 4) $x^2=10$ і $\sqrt{x}=10$.

328. Одна із сторін прямокутника на 4 см довша за другу. Знайдіть довжини сторін прямокутника, якщо його периметр дорівнює 22 см.

Обчисліть значення виразів (329–330).

329. 1) $\left(3\sqrt{7}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2$; 2) $\left(5\sqrt{3}\right)^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2$;

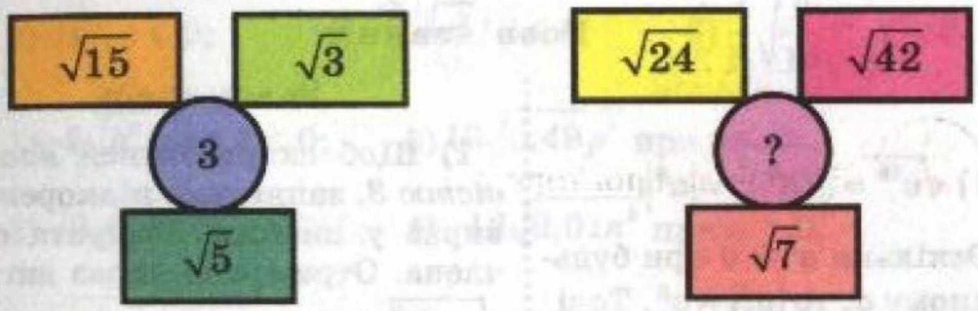
3) $\left(10\sqrt{5}\right)^2-\left(7\sqrt{7}\right)^2$; 4) $\left(12\sqrt{2}\right)^2-\left(8\sqrt{3}\right)^2$.

330. 1) $\sqrt{\left(9-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}$; 3) $\sqrt{\left(10-\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(8-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(11-\sqrt{17}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{17}\right)^2}$.

Використайте зауваження 2 § 13.

331. Вставте число замість знака «?».



§ 16. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ ІЗ СТЕПЕНЯ. ТОТОЖНІСТЬ $\sqrt{a^2}=|a|$

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як добути арифметичний корінь із степеня;**
- **як порівнювати числові значення виразів, що містять радикали;**
- **як здійснювати тотожні перетворення, використовуючи властивість кореня із степеня.**

Обчислимо значення двох виразів: $\sqrt{7^2}=\sqrt{49}=7$; $\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{49}=7$. У кожному з прикладів корінь із квадрата числа дорівнює модулю цього числа. Тобто $\sqrt{7^2}=|7|=7$ і $\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$.

!? Як довести, що $\sqrt{(-7)^2}\neq-7$?

Таким чином, справедливою є ще одна властивість квадратного кореня.

Властивість 3. Корінь із степеня	Доведення	
$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$ при будь-якому дійсному числі x ($x \in R$)	I випадок: $x \geqslant 0$	II випадок: $x \leqslant 0$
	За означенням квадратного кореня: $\sqrt{x^2}=x,\ x \geqslant 0$	За означенням квадратного кореня: $\sqrt{x^2}=-x,\ -x \geqslant 0$, або $x \leqslant 0$
	Оскільки $\lvert x\rvert = x$ при $x \geqslant 0$ і $\lvert x\rvert = -x$ при $x \leqslant 0$, то формула $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$ справедлива при будь-яких дійсних значеннях x	

Приклад. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{a^{16}}$; 2) $\sqrt{x^6}$.

Розв'язання

Як записати

1) $\sqrt{a^{16}}=\sqrt{\left(a^8\right)^2}=\left|a^8\right|$.

Оскільки $a^8 \geqslant 0$ при будь-якому a, то $|a^8| = a^8$. Тоді $\sqrt{a^{16}}=a^8$.

Відповідь. a^8.

2) $\sqrt{x^6}=\sqrt{\left(x^3\right)^2}=\left|x^3\right|$.

$|x^3| = x^3$ при $x \geqslant 0$;
$|x^3| = -x^3$ при $x \leqslant 0$.

Відповідь. x^3 при $x \geqslant 0$, $-x^3$ при $x \leqslant 0$.

Як пояснити

1) Щоб скористатися *властивістю 3*, записуємо підкореневий вираз у вигляді квадрата одночлена. Отримуємо вираз вигляду $\sqrt{\left(a^{2k}\right)^2}=\left|a^{2k}\right|, k \in N$. Оскільки степінь з парним показником невід'ємний, то $|a^{2k}| = a^{2k}$, $k \in N$.

2) Записуємо вираз $\sqrt{x^6}$ у вигляді $\sqrt{(x^3)^2}$. Використовуючи *властивість 3*, маємо: $\sqrt{x^6}=\left|x^3\right|$. Оскільки вираз x^3 може бути і невід'ємним, і від'ємним, то розкриваємо модуль у кожному з цих випадків.

Вправи для закріплення

332°. Обчисліть:

1) $\sqrt{5^2}$; 3) $\sqrt{(1,7)^2}$; 5) $2\cdot\sqrt{(-3)^2}$;

2) $\sqrt{(-0,3)^2}$; 4) $\sqrt{(-19)^2}$; 6) $\frac{1}{5}\cdot\sqrt{15^2}$.

333°. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{a^2}$ при $a = 0; -22; 17; 1$;

2) $3\sqrt{x^2}$ при $x=-4; -1\frac{7}{9}; 0; 7;$

3) $\frac{1}{4}\sqrt{y^2}$ при $y=-8; -2; 4; 8.$

334°. Запишіть тотожність, лівою частиною якої є вираз:

1) $2\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{25m^2}$; 3) $-\sqrt{5b^2}$; 4) $-0,3\sqrt{x^2}$.

Спростіть вирази (335–338).

335•. 1) $\sqrt{m^2}$, $m \geqslant 0$; 3) $5\sqrt{c^2}$, $c<0$; 5) $-\sqrt{49b^2}$, $b \geqslant 0$;

2) $\sqrt{t^2}$, $t \leqslant 0$; 4) $-\frac{1}{3}\sqrt{a^2}$, $a \leqslant 0$; 6) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{16}t^2}$, $t<0$.

336•. 1) $-5\sqrt{k^2}$ при $k<0$; 3) $10\sqrt{0,49p^2}$ при $p \leqslant 0$;

2) $\sqrt{0,64x^2}$ при $x \geqslant 0$; 4) $-12\sqrt{0,01n^2}$ при $n>0$.

337•. 1) $\sqrt{a^8}$; 3) $2\sqrt{t^{10}}$, $t>0$; 5) $\sqrt{a^{2008}}$;

2) $\sqrt{p^{14}}$, $p \leqslant 0$; 4) $-\sqrt{a^{20}}$; 6) $\frac{1}{2}\sqrt{400t^{18}}$, $t \geqslant 0$.

338•. 1) $\sqrt{m^{18}}$; 3) $5\sqrt{\frac{1}{25}t^{14}}$; 5) $\frac{\sqrt{16a^{24}}}{4}$;

2) $-\sqrt{a^{12}}$; 4) $-0,1\sqrt{900k^{22}}$; 6) $-\frac{2}{3}\sqrt{9b^{200}}$.

339••. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{10^8}$; 3) $\sqrt{(-1)^{16}}$; 5) $\sqrt{(-0,2)^4\cdot 5^2}$;

2) $\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^6}$; 4) $\sqrt{(-7)^4}$; 6) $\sqrt{(-3)^6\cdot 10^4}$.

340••. Обчисліть:

1) $\sqrt{(-3)^4}$; 3) $\sqrt{7^2\cdot 2^6}$; 5) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^4\cdot(-50)^2}$;

2) $-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^8}$; 4) $\sqrt{10^6\cdot 0,04^2}$; 6) $-\sqrt{(-1)^{60}\cdot(-5)^4}$.

341••. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{(-2)^{30}}$ і 0; 3) $\sqrt{4^2}$ і $\sqrt{(-4)^2}$; 5) $-\sqrt{2^4}$ і $-\sqrt{(-2)^6}$;

2) $-\sqrt{3^6}$ і 0; 4) $-\sqrt{2^6}$ і $-\sqrt{(-4)^6}$; 6) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$ і $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^4}$.

342••. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2}=4$; 4) $-\sqrt{x^2}=-3$;

2) $\sqrt{y^2}=5$; 5) $\sqrt{(x-2)^2}=9$;

3) $\sqrt{t^2}=-4$; 6) $\sqrt{(t+1)^2}=7$.

343*. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(x-3)^2}$ при $x>3$; 4) $\sqrt{a^2+6a+9}$ при $a\geqslant-3$;

2) $\sqrt{(x+10)^2}$ при $x<-10$; 5) $(b-5)\sqrt{\dfrac{3}{b^2-10b+25}}$ при $b>5$;

3) $\sqrt{x^2-2x+1}$ при $x\leqslant 1$; 6) $(a+b)\sqrt{\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}}$ при $a+b<0$.

Вправи для самооцінювання

1°. Обчисліть $\sqrt{(-0{,}8)^2}$.

а) 0,8; б) –0,8; в) 0,64; г) –0,64.

2°. Обчисліть значення виразу $-0{,}1\sqrt{400y^2}$ при $y=3$.

а) –60; б) 60; в) –6; г) 6.

3°. Спростіть вираз $-5\sqrt{c^2}$ при $c<0$.

а) $-5c$; б) $5c^2$; в) $-5c^2$; г) $5c$.

4•. Визначте вираз, значення якого дорівнює –5.

а) $\sqrt{(-5)^2}$; б) $0{,}6\sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2}$; в) $-\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2}$; г) $-\frac{11}{5}\sqrt{\left(-\frac{1}{11}\right)^2}$.

5•. Укажіть вираз, тотожно рівний виразу $0{,}8\sqrt{100y^{16}}$.

а) $8y^4$; б) $8y^8$; в) $80y^8$; г) $80y^4$.

6•. Обчисліть значення кореня $\sqrt{3^6\cdot(-5)^4}$.

а) –675; б) 675; в) –90; г) 90.

7••. Спростіть вираз $15\sqrt{0,16c^{12}}$.

а) $6c^6$; б) $6|c^6|$; в) $60c^6$; г) $60|c^6|$.

8••. Замініть вираз $-3\sqrt{9a^{22}\cdot b^{40}}$ тотожно рівним йому при $a \leqslant 0$.

а) $-6a^{11}b^{20}$; б) $6a^{11}b^{20}$; в) $-9a^{11}b^{20}$; г) $9a^{11}b^{20}$.

9••. Виберіть два вирази, тотожно рівні виразу $|a^3|\cdot b^6\cdot c^{1004}$.

а) $\sqrt{a^6b^{12}c^{2008}}$ при $c<0$; в) $\sqrt{a^6b^{12}c^{2008}}$ при $b \geqslant 0$;

б) $\sqrt{a^6b^{12}c^{2008}}$ при $a \geqslant 0$; г) $\sqrt{a^6b^{12}c^{2008}}$ при $a<0$.

Вправи для повторення

344. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{65}$ і $3\sqrt{7}$; 3) $4\sqrt{3}$ і $\sqrt{29}$;

2) $2\sqrt{13}$ і $\sqrt{48}$; 4) $5\sqrt{2}$ і $\sqrt{47}$.

345. Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{a-4}{a+4}-\frac{a+4}{a-4}\right):\frac{8a}{16-a^2}=2$; 3) $\left(\frac{a+5}{a-5}+\frac{a-5}{a+5}\right):\frac{4a^2+100}{a^2-25}=\frac{1}{2}$;

2) $\left(\frac{a-5}{a+5}-\frac{a+5}{a-5}\right):\frac{10a}{25-a^2}=2$; 4) $\left(\frac{a+4}{a-4}+\frac{a-4}{a+4}\right):\frac{4a^2+64}{a^2-16}=\frac{1}{2}$.

346. У першому бідоні міститься молоко, масова частка жиру якого становить 3 %, а в другому – вершки, жирністю 18 %. Скільки треба взяти молока і вершків, щоб отримати 15 л молока з масовою часткою жиру 4 %?

347. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}$; 3) $\left(\sqrt{7}+1\right)^2-2\sqrt{7}$;

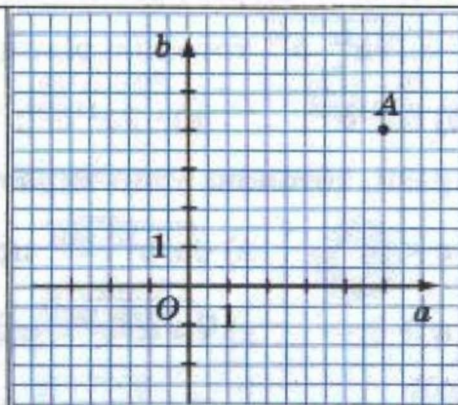
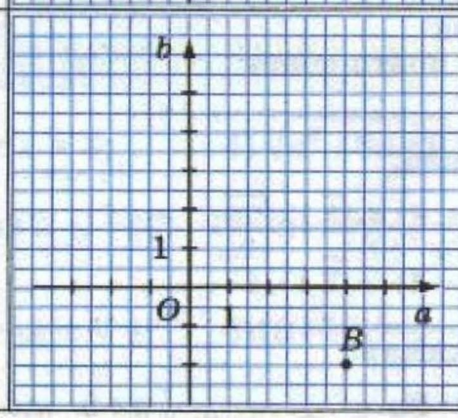
2) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$; 4) $\left(\sqrt{11}-1\right)^2+2\sqrt{11}$.

348. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{10}{\sqrt{6}}$; 5) $\frac{18}{\sqrt{3}}$; 7) $\frac{2}{\sqrt{18}}$;

2) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{16}{\sqrt{10}}$; 6) $\frac{24}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{3}{\sqrt{12}}$.

349. **Визначте, яке число треба записати замість знака «?».**

$\sqrt{a^2b}$		10
$-\frac{1}{2}\sqrt{ab^4}$		?

§17. ВИНЕСЕННЯ МНОЖНИКА З-ПІД ЗНАКА КОРЕНЯ. ВНЕСЕННЯ МНОЖНИКА ПІД ЗНАК КОРЕНЯ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як винести множник з-під знака кореня;**
- **як внести множник під знак кореня;**
- **як порівнювати довільні ірраціональні числові вирази.**

Порівняємо значення виразів $7\sqrt{2}$ і $\sqrt{97}$. Якщо обчислити наближені значення цих виразів, то отримаємо:

$$7\sqrt{2} = 9,899 \text{ і } \sqrt{97} \approx 9,849.$$

Виникає запитання: як порівняти значення цих виразів, не виконуючи наближених обчислень?

Перетворимо вираз: $7\sqrt{2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$.

Тоді залишається порівняти $\sqrt{98}$ і $\sqrt{97}$. Очевидно, $\sqrt{98} > \sqrt{97}$, тому $7\sqrt{2} > \sqrt{97}$. Указаний спосіб порівняння більш зручний та раціональний, ніж використання наближених обчислень. Крім того, шкільна математика намагається «обходитись» без калькулятора. Використане перетворення називають *внесенням множника під знак кореня*.

Для того щоб порівняти, наприклад, вирази $12\sqrt{5}$ і $\sqrt{288}$, зручніше перетворити вираз $\sqrt{288}$. Маємо: $\sqrt{288}=\sqrt{144\cdot 2}=12\sqrt{2}$. Це перетворення називається *винесенням множника з-під знака кореня*.

Тоді $12\sqrt{5}>12\sqrt{2}$, звідси $12\sqrt{5}>\sqrt{288}$.

Отже, залежно від ситуації, виносять з-під знака кореня множник або вносять його під знак кореня.

Приклад 1. Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{x^9}$.

Розв'язання

Як записати

$\sqrt{x^9}=\sqrt{x^8\cdot x}=\sqrt{x^8}\cdot\sqrt{x}=$
$=\sqrt{\left(x^4\right)^2\cdot x}=\left|x^4\right|\cdot\sqrt{x}.$

Оскільки $x^9\geqslant 0$, тобто $x\geqslant 0$, то $\left|x^4\right|\cdot\sqrt{x}=x^4\cdot\sqrt{x}$.

Таким чином, $\sqrt{x^9}=x^4\cdot\sqrt{x}$.

Відповідь. $x^4\cdot\sqrt{x}$.

Як пояснити

Заданий підкореневий вираз має зміст при $x^9\geqslant 0$ або $x\geqslant 0$. Подаємо вираз x^9 у вигляді добутку $x^8\cdot x$ так, щоб один із множників був одночленом парного степеня $x^8=\left(x^4\right)^2$.

Далі при спрощенні використовуємо властивості кореня квадратного із добутку та степеня, отримуючи вираз з модулем: $\sqrt{x^9}=\sqrt{x^8\cdot x}=\sqrt{x^8}\cdot\sqrt{x}=$ $=\left|x^4\right|\cdot\sqrt{x}$. Розкриваючи модуль при $x\geqslant 0$, маємо: $\sqrt{x^9}=x^4\cdot\sqrt{x}$.

Приклад 2. Внесіть множник під знак кореня у виразі $-5\sqrt{x^3}$.

Розв'язання

Як записати

$-5\sqrt{x^8}=-1\cdot 5\sqrt{x^3}=$
$=-1\cdot\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{x^3}=$
$=-1\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{x^3}=-\sqrt{25x^3}$.

Відповідь. $-\sqrt{25x^3}$.

Як пояснити

-5 – від'ємний множник, тому його неможливо внести під знак кореня. Подаємо -5 у вигляді: $-5=-1\cdot 5$. Тоді маємо вираз, у якому множник 5 $(5>0)$ можна вносити під знак кореня: $-1\cdot 5\cdot\sqrt{x^3}=-\sqrt{25x^3}$.

Вправи для закріплення

350°. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{20}$; 3) $\sqrt{27}$; 5) $\sqrt{48}$; 7) $\sqrt{363}$;
2) $\sqrt{50}$; 4) $\sqrt{300}$; 6) $\sqrt{162}$; 8) $\sqrt{450}$.

351°. Винесіть множник з-під знака кореня і спростіть отриманий вираз:

1) $\frac{2}{5}\sqrt{50}$; 3) $0{,}1\sqrt{20\,000}$; 5) $-7\sqrt{\frac{25}{490}}$;
2) $-\frac{1}{3}\sqrt{27}$; 4) $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{40}{9}}$; 6) $-\frac{1}{20}\sqrt{20\,000}$.

352°. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{80}$; 3) $-\frac{1}{4}\sqrt{112}$; 5) $-\frac{3}{26}\sqrt{16\,900}$;
2) $\sqrt{147}$; 4) $-0{,}3\sqrt{14\,400}$; 6) $-0{,}125\sqrt{196}$.

Внесіть множник під знак кореня (353–355).

353°. 1) $3\sqrt{5}$; 3) $2\sqrt{7}$; 5) $10\sqrt{a}$; 7) $2\sqrt{3x}$;
2) $7\sqrt{2}$; 4) $5\sqrt{2}$; 6) $5\sqrt{x}$; 8) $3\sqrt{2b}$.

354•. 1) $5\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $-\frac{1}{3}\sqrt{18}$; 5) $2\sqrt{\frac{a}{2}}$; 7) $-0{,}2\sqrt{10b}$;
2) $-2\sqrt{\frac{3}{8}}$; 4) $-10\sqrt{0{,}05}$; 6) $-\frac{1}{3}\sqrt{18y}$; 8) $0{,}7\sqrt{200}$.

355•. 1) $-9\sqrt{2}$; 3) $-2\sqrt{6}$; 5) $6\sqrt{\frac{1}{3}a}$; 7) $7\sqrt{\frac{n}{7}}$;
2) $3\sqrt{11}$; 4) $-10\sqrt{5}$; 6) $-0{,}2\sqrt{10x}$; 8) $\frac{1}{3}\sqrt{27a}$.

Порівняйте значення виразів (356–357).

356•. 1) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{44}$; 3) $4\sqrt{5}$ і $\sqrt{45}$; 5) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{3}$;
2) $\frac{1}{2}\sqrt{76}$ і $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 4) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{3}$; 6) $6\sqrt{2}$ і $2\sqrt{6}$.

357•. 1) $\frac{2}{5}\sqrt{75}$ і $\sqrt{10}$; 3) $-\frac{2}{3}\sqrt{72}$ і $-6\sqrt{\frac{2}{3}}$; 5) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ і $6\sqrt{\frac{1}{2}}$;
2) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$ і 1; 4) $\frac{1}{2}\sqrt{480}$ і $\sqrt{270}$; 6) $\frac{1}{7}\sqrt{98}$ і $\frac{1}{5}\sqrt{450}$.

358••. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{13c^2}$, де $c \leqslant 0$; 3) $\sqrt{7y^7}$, де $y \geqslant 0$; 5) $\sqrt{\dfrac{5y^3}{49}}$, де $y \geqslant 0$;

2) $\sqrt{16x^5}$, де $x \geqslant 0$; 4) $\sqrt{28b^{20}}$, де $b < 0$; 6) $\sqrt{2x^6}$, де $x < 0$.

359••. Внесіть множник під знак кореня. Укажіть допустимі значення змінних, які входять у вираз:

1) $m\sqrt{7}$, де $m \leqslant 0$; 3) $a\sqrt{-a}$; 5) $(m+n)\sqrt{m+n}$;

2) $x^3\sqrt{3}$, де $x < 0$; 4) $b\sqrt{\dfrac{5}{b}}$; 6) $(b-a)\sqrt{a-b}$.

360••. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{n^2-14n+49}}{n^2-49}$, де $n > 7$; 3) $\dfrac{9-m^2}{\sqrt{m^2+6m+9}}$, де $m < -3$;

2) $\dfrac{\sqrt{25-10a+a^2}}{a^2-25}$, де $a < 5$; 4) $\dfrac{2{,}25-x^2}{\sqrt{x^2-3x+2{,}25}}$, де $x > 1{,}5$.

Вправи для самооцінювання

1°. Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{112}$.

а) $2\sqrt{28}$; б) $4\sqrt{7}$; в) $-2\sqrt{28}$; г) $-4\sqrt{7}$.

2°. Внесіть множник під знак кореня у виразі $0{,}2\sqrt{1000}$.

а) $\sqrt{400}$; б) $\sqrt{4}$; в) $\sqrt{4000}$; г) $\sqrt{40}$.

3°. Виберіть правильну нерівність.

а) $2\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$; б) $\sqrt{15} < 2\sqrt{3}$; в) $\dfrac{1}{2}\sqrt{20} > 2\sqrt{2}$; г) $-2\sqrt{7} > -3\sqrt{3}$.

4•. Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{128m^{14}}$ при $m \leqslant 0$.

а) $8\sqrt{2}m^7$; б) $-8\sqrt{2}m^7$; в) $32\sqrt{2}m^7$; г) $-32\sqrt{2}m^7$.

5•. Укажіть вираз, що дорівнює $-7a^2b^3$.

а) $\sqrt{14a^4b^6}$, де $b \leqslant 0$; в) $\sqrt{49a^4b^6}$, де $b \leqslant 0$;

б) $-\sqrt{14a^4b^6}$, де $b \leqslant 0$; г) $-\sqrt{49a^4b^6}$, де $b \leqslant 0$.

6•. Обчисліть значення виразу $\sqrt{2^5 \cdot 3^3}$.

а) $7\sqrt{6}$; б) $12\sqrt{6}$; в) $6\sqrt{6}$; г) $5\sqrt{6}$.

7••. Укажіть множник, який винесли з-під знака кореня у виразі $\sqrt{175x^3y^{16}m^{22}}$, де $x < 0$, $m \geqslant 0$.

а) $-5xy^8m^{11}$; б) $-5xy^4m^{11}$; в) $5xy^8m^{11}$; г) $5xy^4m^{11}$.

8••. Визначте вираз, отриманий унаслідок внесення множника під знак кореня у виразі $-2x\sqrt{3ay^2}$ при $x < 0$.

а) $\sqrt{7ax^2y^2}$; б) $-\sqrt{7ax^2y^2}$; в) $-\sqrt{12ax^2y^2}$; г) $\sqrt{12ax^2y^2}$.

9••. Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{m^2-8m+16}}{4-m}$ при $m < 4$.

а) $\dfrac{|m-4|}{4-m}$; б) 1; в) -1; г) $\dfrac{|m+4|}{4-m}$.

Вправи для повторення

361. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}\right):\dfrac{4a}{a^2-1}$;

2) $\left(\dfrac{a-2}{a+2}-\dfrac{a+2}{a-2}\right):\dfrac{8a}{a^2-4}$;

3) $\left(\dfrac{a+3}{a-3}-\dfrac{a-3}{a+3}\right):\dfrac{12a}{a^2-9}$;

4) $\left(\dfrac{a-4}{a+4}-\dfrac{a+4}{a-4}\right):\dfrac{16a}{a^2-16}$.

362. При яких значеннях змінної x не має змісту вираз:

1) $\dfrac{7x}{x^2-4x}$;

2) $\dfrac{6x}{x^2-5x}$;

3) $\dfrac{5x}{x^2+7x}$;

4) $\dfrac{4x}{x^2+9x}$;

5) $\dfrac{x-2}{x^2-2x}$;

6) $\dfrac{x+3}{x^2+3x}$?

363. Скільки грамів 3-відсоткового і скільки грамів 8-відсоткового розчинів треба взяти, щоб отримати 520 г 5-відсоткового розчину?

364. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$.

365. Порівняйте значення виразів:

1) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{12}$;

2) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{18}$;

3) $5\sqrt{3}$ і $\sqrt{75}$;

4) $6\sqrt{2}$ і $\sqrt{72}$;

5) $10\sqrt{3}$ і $\sqrt{300}$;

6) $4\sqrt{6}$ і $\sqrt{96}$.

§ 18. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНІ КОРЕНІ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як виконувати дії з виразами, що містять однакові підкореневі вирази;**
- **як здійснювати перетворення виразів, що містять квадратні корені;**
- **як використовувати означення квадратного кореня та означення степеня для виразів, що містять радикали;**
- **як застосовувати формули скороченого множення до ірраціональних виразів;**
- **як звільнитися від ірраціональності у знаменнику чи чисельнику дробу.**

Спрощуючи вирази, які містять квадратні корені, доводиться часто використовувати низку тотожних перетворень, вивчених у попередніх параграфах. Зокрема, винесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня, корінь із добутку, частки, степеня, добуток і частку коренів тощо.

Виконуючи множення ірраціональних виразів, трапляються випадки, коли треба помножити різницю двох ірраціональних виразів на їх суму, тоді це відома нам формула – різниця квадратів. Наприклад, $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$. Так, вирази $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ називають *спряженими*.

Спряженим відносно ірраціонального виразу M називають такий вираз N, відмінний від 0, що добуток $M\cdot N$ не містить радикалів.

Таким чином, спряженим до виразу $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ є вираз $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, а спряженим до виразу $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ є вираз $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Розглянемо кілька прикладів, при розв'язуванні яких застосовують тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені.

Приклад 1. Спростіть вираз $\sqrt{45a}-\sqrt{80a}+12\sqrt{5a}$.

Розв'язання

Як записати	*Як пояснити*
$\sqrt{45a}-\sqrt{80a}+12\sqrt{5a}=$ $=\sqrt{9\cdot5a}-\sqrt{16\cdot5a}+12\sqrt{5a}=$	Розкладаємо кожний із підкореневих виразів на такі множники, щоб можна було винести

Продовження розв'язання прикладу 1

Як записати	Як пояснити
$=3\sqrt{5a}-4\sqrt{5a}+12\sqrt{5a}=11\sqrt{5a}.$ *Відповідь.* $11\sqrt{5a}.$	стільний множник з-під знака кореня. Далі отримуємо вираз, у якому доданки мають спільний множник $\sqrt{5a}$. Зводимо їх, як подібні доданки.

Приклад 2. Виконайте множення $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$\left(3\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=$ $=\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=$ $=9\cdot 5-2=45-2=43.$ *Відповідь.* 43.	Виконувати множення почленно (за відомим правилом) нераціонально, оскільки вирази – спряжені. Використовуючи формулу різниці квадратів, маємо: $\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=43.$

Приклад 3. Зведіть дріб $\dfrac{81}{\sqrt{3}}$ до знаменника, який не містить радикала.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$\dfrac{81}{\sqrt{3}}=\dfrac{81\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=$ $=\dfrac{81\cdot\sqrt{3}}{3}=27\sqrt{3}.$ *Відповідь.* $27\sqrt{3}.$	Використовуємо основну властивість дробу: домножуємо чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt{3}$. Таким чином, за означенням квадратного кореня у знаменнику отримуємо таке число $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)=3$, що задовольняє умову.

Умову прикладу 3 можна сформулювати й іншим способом, наприклад: *Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу*.

Вправи для закріплення

366°. Спростіть вираз:

1) $7\sqrt{a}-\sqrt{a}+5\sqrt{a}$; 2) $-3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-12\sqrt{x}$;

3) $5\sqrt{y}-2\sqrt{y}+7\sqrt{y}$; 5) $\sqrt{100m}-\sqrt{4m}-\sqrt{64m}$;

4) $\sqrt{9x}+\sqrt{16x}-\sqrt{49x}$; 6) $-\sqrt{25t}-\sqrt{81t}+\sqrt{100t}$.

367°. Виконайте дії:

1) $\sqrt{50}-\sqrt{48}+\sqrt{75}$; 3) $\sqrt{98}+\sqrt{72}-\frac{1}{2}\sqrt{8}$;

2) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{363}$; 4) $\sqrt{242}-\sqrt{200}+\sqrt{32}$.

368°. Спростіть вираз:

1) $3\sqrt{c}+10\sqrt{c}-9\sqrt{c}$; 3) $\sqrt{4x}+\sqrt{64x}-\sqrt{81x}$;

2) $\sqrt{27a}-\sqrt{48a}+\sqrt{75a}$; 4) $\sqrt{12y}-0{,}5\sqrt{48y}+2\sqrt{108y}$.

Виконайте дії (369–370).

369°. 1) $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{20}\right)$; 3) $\sqrt{24}-\left(\sqrt{12}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}$;

2) $\left(2\sqrt{24}-5\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{6}$; 4) $-\sqrt{300}-4\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{27}\right)$.

370°. 1) $\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{48}\right)$; 3) $3\sqrt{2}\left(2-5\sqrt{32}\right)-2\sqrt{18}$;

2) $\left(5\sqrt{7}-\sqrt{63}+\sqrt{14}\right)\cdot\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{12}-\left(\sqrt{15}-3\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}$.

371•. Спростіть вираз:

1) $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-5\right)$; 3) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)$;

2) $\left(7+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$; 4) $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{5}\right)-\sqrt{135}$.

Перетворіть добуток у суму, використовуючи формули скороченого множення (372–373).

372•. 1) $\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)$; 5) $\left(9+\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$; 6) $\left(1-4\sqrt{3}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{11}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+11\right)$; 7) $\left(2\sqrt{10}-3\sqrt{2}\right)^2$;

4) $\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{7}\right)$; 8) $\left(4\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)^2$.

373•. 1) $\left(1-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}+4\right)$; 4) $\left(3+\sqrt{7}\right)^2-6\sqrt{7}$;

2) $\left(19-\sqrt{3}\right)\left(19+\sqrt{3}\right)-58$; 5) $\left(4\sqrt{6}+2\sqrt{18}\right)^2-48\sqrt{3}$;

3) $\left(4\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2}+4\sqrt{5}\right)+20$; 6) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2+\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

374•. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) $\sqrt{3}+3$; 4) $a-2\sqrt{a}$; 7) $\sqrt{7m}+\sqrt{5m}$;

2) $\sqrt{7}-7$; 5) $\sqrt{12}+\sqrt{6}$; 8) $\sqrt{3x}-\sqrt{7x}$;

3) $x+\sqrt{x}$; 6) $\sqrt{22}-\sqrt{2}$; 9) $\sqrt{12a}+\sqrt{8a}$.

Використайте тотожність: $a=(\sqrt{a})^2$, $a \geqslant 0$.

Розкладіть многочлени на множники, використовуючи формулу різниці квадратів (375–376).

375•. 1) x^2-5; 3) $4m^2-7$; 5) $m-4$, де $m \geqslant 0$;

2) t^2-3; 4) $10-9y^2$; 6) $a-b$, де $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

376•. 1) c^2-2; 3) $11-y^2$; 5) $a-9$, де $a \geqslant 0$;

2) $5-x^2$; 4) $7-4x^2$; 6) $9x^2-y$, де $y \geqslant 0$.

377•. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9}$; 5) $\dfrac{14+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$;

2) $\dfrac{5-m^2}{m+\sqrt{5}}$; 4) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

Звільніться від ірраціональності у знаменниках дробів (378–379).

378•. 1) $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$; 5) $\dfrac{70}{2\sqrt{7}}$; 7) $\dfrac{8}{\sqrt{3}-1}$;

2) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$; 4) $\dfrac{15}{\sqrt{10}}$; 6) $\dfrac{24}{3\sqrt{3}}$; 8) $\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

379•. 1) $\dfrac{a}{\sqrt{x}}$; 3) $\dfrac{5}{4\sqrt{m}}$; 5) $\dfrac{7}{4\sqrt{14}}$; 7) $\dfrac{9}{3-2\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{x}{3\sqrt{3}}$; 6) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$; 8) $\dfrac{26}{2\sqrt{3}+5}$.

380••. Виконайте дії:

1) $\sqrt{8}-\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}$; 4) $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$;

2) $\sqrt{48}-2\sqrt{3}\left(2-5\sqrt{12}\right)$; 5) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{12}+2\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}-\sqrt{150}$; 6) $\left(\sqrt{2\sqrt{6}+7}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$.

381.** Спростіть вираз:

1) $\left(3\sqrt{3}-\sqrt{13}\right)\left(3\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)+16$; 3) $\left(\sqrt{5\sqrt{2}-1}+\sqrt{5\sqrt{2}+1}\right)^2$;

2) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{32}\right)^2-11$; 4) $\left(\sqrt{10+\sqrt{51}}-\sqrt{10-\sqrt{51}}\right)^2$.

Скоротіть дроби (382–384).

382.** 1) $\frac{4m^2-3}{\left(2m+\sqrt{3}\right)\cdot 5}$; 3) $\frac{10-2\sqrt{x}}{x-25}$; 5) $\frac{\sqrt{10}+6\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$;

2) $\frac{3x-3\sqrt{2}}{x^2-2}$; 4) $\frac{3-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; 6) $\frac{x\sqrt{5}+\sqrt{x}}{5x-1}$.

383.** 1) $\frac{a^2-3}{a-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c}$; 5) $\frac{6-a^2}{3\sqrt{2}+\sqrt{3a}}$;

2) $\frac{\sqrt{7}-y}{7-y^2}$; 4) $\frac{4a-9b}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{75}-2x\sqrt{5}}{4x^2-15}$.

384*. 1) $\frac{a^2-2a\sqrt{2}+2}{a^2-2}$; 3) $\frac{a-b}{a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b}$;

2) $\frac{y^2-5}{y^2+2\sqrt{5}y+5}$; 4) $\frac{4m+4\sqrt{mn}+n}{4m-n}$.

$m^2-2m\sqrt{3}+3=$
$=m^2-2\cdot m\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=$
$=\left(m-\sqrt{3}\right)^2$.

Вправи для самооцінювання

1°. Обчисліть суму $0{,}2\sqrt{200}+10\sqrt{8}$.

а) $42\sqrt{2}$; б) $22\sqrt{2}$; в) $40\sqrt{2}$; г) $60\sqrt{2}$.

2°. Порівняйте ірраціональні вирази $0{,}5\sqrt{300}$ і $5\sqrt{12}$.

а) $0{,}5\sqrt{300}<5\sqrt{12}$; в) $0{,}5\sqrt{300}=5\sqrt{12}$;

б) $0{,}5\sqrt{300}>5\sqrt{12}$; г) визначити неможливо.

3°. Виконайте множення $\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

а) $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$; б) $\sqrt{2ab}$; в) $a+b$; г) $\sqrt{ab(a+b)}$.

4*. Знайдіть значення виразу x^2-6 при $x=1+\sqrt{5}$.

а) 12; б) $12+2\sqrt{5}$; в) $2\sqrt{5}$; г) 0.

5•. Укажіть правильну рівність.

а) $\sqrt{x}+x=x\left(\sqrt{x}+1\right)$; в) $\sqrt{33}+\sqrt{22}x=\sqrt{11}\left(3+2x\right)$;

б) $\sqrt{14}-\sqrt{7}=\sqrt{7}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)$; г) $\frac{1}{2}a-5\sqrt{a}=\frac{1}{2}\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-10\right)$.

6•. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}$.

а) $\frac{3\sqrt{10}}{20}$; б) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; в) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; г) $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

7••. Визначте тотожність.

а) $\frac{\sqrt{x}-5}{25-x}=\frac{1}{5-\sqrt{x}}$; в) $\frac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\sqrt{b}-\sqrt{a}$;

б) $\frac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}=-\frac{1}{5}$; г) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

8••. Знайдіть значення числового виразу

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)^2-30+\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2.$$

а) -6; б) -4; в) 8; г) -16.

9••. Обчисліть 2,5 % від числа $A=\left(\sqrt{3\sqrt{30}-7}+\sqrt{3\sqrt{30}+7}\right)^2-3\sqrt{120}$.

а) $\frac{\sqrt{221}}{20}$; б) $\frac{\sqrt{221}}{25}$; в) $\frac{\sqrt{221}}{40}$; г) $\frac{\sqrt{221}}{125}$.

Вправи для повторення

385. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(x^2+3\right)^2-\left(x^2+2\right)\left(x^2-8\right)=73$;
2) $\left(x^2+4\right)^2-\left(x^2-5\right)\left(x^2+2\right)=70$;
3) $\left(x^2+5\right)^2-\left(x^2-4\right)\left(x^2+3\right)=81$;
4) $\left(x^2+6\right)^2-\left(x^2-7\right)\left(x^2+1\right)=115$.

386. Доведіть, що:

1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$; 3) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{7}-1$;

2) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$; 4) $\sqrt{12-2\sqrt{11}}=\sqrt{11}-1$.

387. У першому бідоні міститься молоко з масовою часткою жиру 4,8 %, а в другому – 3,3 %. Скільки треба взяти молока з кожного бідона, щоб отримати 30 л молока з масовою часткою жиру 4 %?

388. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y=2x+3$, $y=\frac{1}{2}x-1{,}5$ та $y=x$;

2) $y=2x+5$, $y=\frac{1}{2}x-2{,}5$ та $y=x$;

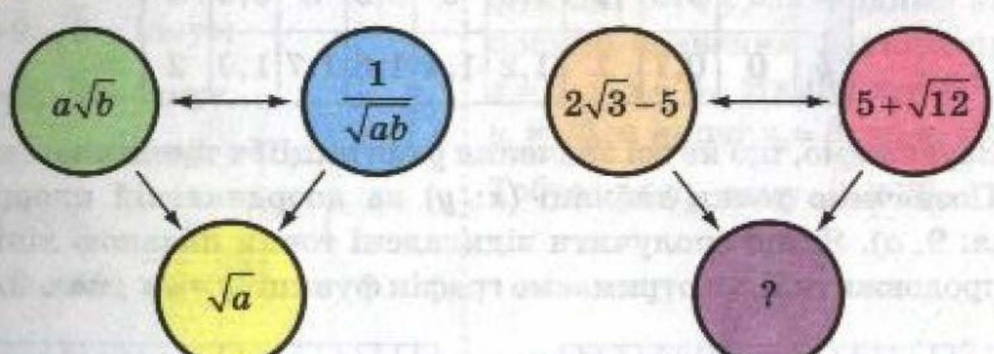
3) $y=-2x+4$, $y=-\frac{1}{2}x+2$ та $y=x$;

4) $y=3x+6$, $y=\frac{1}{3}x-2$ та $y=x$.

389. Залежність між довжиною сторони квадрата a і його площею S задано формулою $a=\sqrt{S}$. Заповніть таблицю.

S, см^2	0,01	0,04	0,25	1,21	2,25	4	4,84	6,25	7,84	9	12,25
a, см											

390. Визначте, яке число треба записати замість знака «?».



§19. ФУНКЦІЯ $y=\sqrt{x}$, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як побудувати графік функції $y=\sqrt{x}$;**
- **які властивості має функція $y=\sqrt{x}$;**
- **як використовувати властивості функції $y=\sqrt{x}$ для порівняння ірраціональних чисел виду $\sqrt{a}$, де $a\geqslant 0$;**
- **як знаходити наближені значення квадратних коренів.**

Для кожного значення площі S (см^2) можна вказати відповідне єдине значення сторони a (см) (див. № 389). Розглянувши таблицю таких значень, приходимо до висновку, що коли площа квадрата дорівнює M см^2, то його сторона дорівнюватиме $\sqrt{M}$ см, а якщо площа квадрата дорівнює S см^2, то його сторона – $\sqrt{S}$ см.

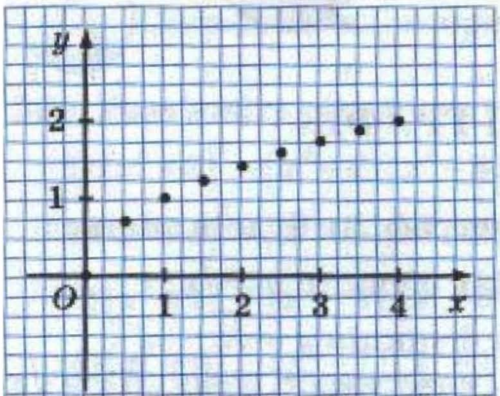
Таким чином, залежність сторони квадрата (a) від його площі (S) можна записати у загальному вигляді: $a=\sqrt{S}$. Згідно з означенням функції, така залежність є функціональною: кожному допустимому значенню змінної S (площі квадрата) відповідає єдине значення змінної a (довжини сторони квадрата). Тобто незалежною змінною є S (площа), а залежною – a (сторона).

Якщо ж традиційно позначити незалежну змінну через x, а залежну – через y, то отримаємо нову формулу $y=\sqrt{x}$, якою задається функція. Для побудови графіка функції $y=\sqrt{x}$ та встановлення її властивостей складемо таблицю невід'ємних значень x та y з кроком 0,5.

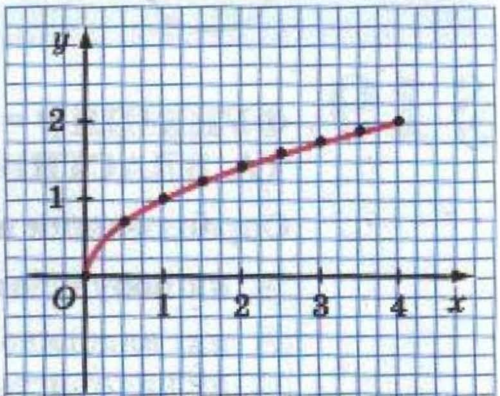
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0	0,7	1	1,2	1,4	1,6	1,7	1,9	2

Зауважимо, що не всі значення y (функції) є точними.

Позначимо точки таблиці (x; y) на координатній площині (мал. 9, *а*). Якщо сполучити відкладені точки плавною лінією та продовжити її, то отримаємо графік функції $y=\sqrt{x}$ (мал. 9, *б*).



а



б

Мал. 9

За формулою та побудованим графіком сформулюємо деякі властивості функції $y=\sqrt{x}$:

1) якщо $x=0$, то $y=0$. Тобто точка $O(0; 0)$ належить графіку, або графік функції проходить через початок координат;

2) $x \geqslant 0$ (оскільки для $x<0$ значення $\sqrt{x}$ не існує). Тобто областю визначення функції є множина невід'ємних чисел;

3) $y \geqslant 0$. Тобто областю значень функції є множина невід'ємних чисел;

4) збільшуючи значення x, збільшуються і значення y. Таким чином, якщо $x_2 > x_1$, то й $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$;

5) графіком функції $y=\sqrt{x}$ є ліва гілка параболи $y=x^2$ з початком у точці $O(0;\ 0)$, повернута на 90° вправо.

Приклад 1. Порівняйте числа: 1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{8}$; 2) $-\sqrt{2}$ і $-1{,}5$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
1) $\sqrt{3}\ ?\ \sqrt{8}$. $3>0, \sqrt{3}$ – існує; $8>0, \sqrt{8}$ – існує. Оскільки $3<8$, то $\sqrt{3}<\sqrt{8}$. *Відповідь.* $\sqrt{3}<\sqrt{8}$.	1) Користуючись графіком функції $y=\sqrt{x}$, знаходимо відповідні значення функції при $x=3$ і $x=8$. Якщо $x_1=3$, то $y_1=\sqrt{3}$, а якщо $x_2=8$, то $y_2=\sqrt{8}$. Тобто $y_1<y_2$, тому $\sqrt{3}<\sqrt{8}$.
2) $-\sqrt{2}\ ?\ -1{,}5$. $2>0, \sqrt{2}$ – існує. $1{,}5=\sqrt{2{,}25},\ \ -1{,}5=-\sqrt{2{,}25}$. $2{,}25>0,\ \sqrt{2{,}25}$ – існує. $\left\|-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2},\ \left\|-\sqrt{2{,}25}\right\|=\sqrt{2{,}25}$. Звідси $\sqrt{2}<\sqrt{2{,}25}$, а значить $-\sqrt{2}>-\sqrt{2{,}25}=-1{,}5$. *Відповідь.* $-\sqrt{2}>-1{,}5$.	2) Запишемо число $-1{,}5$ як значення квадратного кореня: $-1{,}5=-\sqrt{2{,}25}$. Тепер порівнюємо модулі: $\left\|-\sqrt{2}\right\|$ і $\left\|-\sqrt{2{,}25}\right\|$. За графіком функції $y=\sqrt{x}$ маємо $\sqrt{2}<\sqrt{2{,}25}$, а за правилом порівняння двох від'ємних чисел визначаємо знак порівняння між числами. Отже, $-\sqrt{2}>-1{,}5$.

Приклад 2. Запишіть усі цілі числа, які розміщені між двома заданими: 1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{32}$; 2) $-\sqrt{27}$ і $-3\sqrt{2}$.

Розв'язання

Як записати

1) $\sqrt{5}<\sqrt{9}<\sqrt{32}$,

$\sqrt{9}=3$;

$\sqrt{5}<\sqrt{16}<\sqrt{32}$,

$\sqrt{16}=4$;

$\sqrt{5}<\sqrt{25}<\sqrt{32}$,

$\sqrt{25}=5$.

Відповідь. 3; 4; 5.

2) $-3\sqrt{2}=-\sqrt{9\cdot 2}=-\sqrt{18}$.

$-\sqrt{27}<-\sqrt{18}$,

$-\sqrt{27}<-\sqrt{25}<-\sqrt{18}$,

$-\sqrt{25}=-5$.

$(-\sqrt{16}>-\sqrt{18}; -\sqrt{36}<-\sqrt{27})$.

Відповідь. -5.

Як пояснити

1) Порівнюючи за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$, маємо, що $\sqrt{5}<\sqrt{32}$. Очевидно, що більшими за $\sqrt{5}$ і меншими за $\sqrt{32}$ є числа $\sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots, \sqrt{31}$. Серед них є такі значення, для яких корінь є точним. Це $\sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}$.

2) Аналогічно до завдання 1) здійснюємо порівняння ірраціональних чисел $-\sqrt{27}$ і $-\sqrt{18}$ $(-3\sqrt{2}=-\sqrt{18})$. Далі записуємо числа, що містяться між ними: $-\sqrt{26}, -\sqrt{25}, -\sqrt{24}, \ldots, -\sqrt{19}$ – і вибираємо цілі значення, тобто $-\sqrt{25}=-5$.

Вправи для закріплення

Задайте формулами залежності (391–393).

391°. 1) Площі квадрата (S) від його сторони (m);
2) довжини сторони квадрата (k) від його площі (S).

392°. 1) Площі поверхні куба (S) від довжини його ребра (x);
2) довжини ребра куба (a) від площі його поверхні (S).

393°. 1) Радіуса круга (r) від його площі (S);
2) діаметра круга (d) від його площі (S).

Формули площі круга:
$S=\pi r^2, S=\dfrac{\pi d^2}{4}$.

394°. Площа поверхні кулі обчислюється за формулою $S=4\pi R^2$, де R – радіус кулі (мал. 10). Задайте формулою залежність радіуса кулі (R) від площі її поверхні (S).

Мал. 10

395°. Об'єм циліндра можна знайти за формулою $V=\pi R^2 H$, де R – радіус основи циліндра, H – висота циліндра (мал. 11). Виразіть змінну R через V і H.

Мал. 11

396°. Використовуючи графік функції $y=\sqrt{x}$, знайдіть значення:

1) $\sqrt{x}$, якщо $x=2,8$; $x=5,6$; $x=7,4$;
2) x, якому відповідає $\sqrt{x}=1,3$; $\sqrt{x}=2,1$; $\sqrt{x}=2,5$.

397°. Визначте, чи належить графіку функції $y=\sqrt{x}$ точка:

1) $A(-3;\ 9)$; 3) $C(4;\ 2)$; 5) $K(1;\ 1)$;
2) $B(9;\ -3)$; 4) $M(25;\ -5)$; 6) $F(-1;\ -1)$.

398°. Виберіть серед точок $C(1;\ -1)$, $K(5;\ 25)$, $M(16;\ 4)$, $O(0;\ 0)$, $P\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right)$, $D\left(\frac{9}{49};\ \frac{3}{7}\right)$ ті, які належать графіку функції $y=\sqrt{x}$.

399•. За допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ порівняйте числа:

1) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{6}$ і $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{6,5}$; 4) $\sqrt{0,1}$ і $\sqrt{0,9}$.

400•. Визначте, що більше:

1) $\sqrt{0,5}$ чи $\sqrt{0,8}$; 3) 7 чи $\sqrt{50}$; 5) 1,4 чи $\sqrt{2}$;
2) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ чи $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 4) $\sqrt{170}$ чи 13; 6) $-\sqrt{7}$ чи -3.

401•. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{27}$ і $3\sqrt{3}$; 3) 5 і $\sqrt{24}$; 5) $0,5\sqrt{121}$ і $\frac{1}{3}\sqrt{300}$;
2) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ і $\sqrt{\frac{1}{6}}$; 4) 10 і $3\sqrt{10}$; 6) -8 і $-\sqrt{60}$.

402••. Розташуйте у порядку зростання числа:

1) 6; $\sqrt{21}$; 5; $\sqrt{40}$; $\sqrt{35,8}$; 2) 0,25; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{0,5}$; $\sqrt{0,3}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

403••. Розташуйте у порядку спадання числа:

1) $\sqrt{15}$; 3; $\sqrt{16{,}5}$; 4; $\sqrt{19}$; 2) $\frac{1}{4}$; $\sqrt{0{,}1}$; 0,2; $\sqrt{\frac{1}{11}}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Визначте цілі числа, які розміщені на числовій прямій між двома заданими (404–405).

404••. 1) $\sqrt{3{,}5}$ і $\sqrt{5}$; 3) 7 і $\sqrt{70}$; 5) $\sqrt{10}$ і $\sqrt{110}$;

2) -5 і $-\sqrt{5}$; 4) $-\sqrt{3{,}5}$ і 0; 6) $-\sqrt{26}$ і $\sqrt{3{,}9}$.

405••. 1) $\sqrt{2{,}5}$ і 6; 3) $\sqrt{20}$ і $\sqrt{60}$; 5) $-\sqrt{17}$ і $-\sqrt{12}$;

2) 8 і $\sqrt{90}$; 4) -4 і $-2\sqrt{2}$; 6) $-\sqrt{10}$ і $-\sqrt{5}$.

406••. Визначте, чи перетинає графік функції $y=\sqrt{x}$ пряма:

1) $y=2$; 3) $y=-3$; 5) $y=-x-2$; 7) $x=-2$;

2) $y=2x$; 4) $y=-x$; 6) $y=x+5$; 8) $x=4$.

407••. Укажіть, які із заданих прямих перетинають графік функції $y=\sqrt{x}$:

1) $y=5$; 3) $y=\frac{1}{3}x$; 5) $y=x-5$; 7) $x=2{,}6$;

2) $y=-2$; 4) $y=-0{,}8x$; 6) $y=-x+1$; 8) $x=-2008$.

Вправи для самооцінювання

1°. Задайте формулою залежність довжини ребра куба (l) від площі його поверхні (S), якщо площа поверхні куба обчислюється за формулою $S=6l^2$.

а) $l=\sqrt{6S}$; б) $l=\sqrt{S-6}$; в) $l=\sqrt{\frac{S}{6}}$; г) $l=\sqrt{\frac{6}{S}}$.

2°. Виберіть трійку точок, що належать графіку функції $y=\sqrt{x}$.

а) $O(0;\ 0)$, $M(1;\ 1)$, $K(2;\ 4)$; в) $O(0;\ 0)$, $M(1;\ 1)$, $D(9;\ -3)$;

б) $O(0;\ 0)$, $M(1;\ 1)$, $B(25;\ 5)$; г) $O(0;\ 0)$, $M(1;\ 1)$, $C(-4;\ 2)$.

3°. Виберіть правильні математичні твердження.

а) $\sqrt{0{,}5}>\sqrt{0{,}25}$; в) $\sqrt{0{,}9}=\sqrt{0{,}3^2}$;

б) $\sqrt{0{,}04}=\sqrt{0{,}2^2}$; г) $\sqrt{0{,}36}>\sqrt{0{,}6}$.

4•. Виразіть змінну m через a і b, якщо $a=25bm^2$, де $m>0$, $b>0$.

а) $m=\dfrac{\sqrt{a}}{5\sqrt{b}}$; б) $m=\dfrac{a}{25b}$; в) $m=\dfrac{\sqrt{a}}{5b}$; г) $m=\sqrt{a-25b}$.

5•. Укажіть точку перетину графіків функцій $y=\sqrt{x}$ та $y=x-2$.

а) $M(1;\ -1)$; б) $K(2;\ 4)$; в) $P(-1;\ 1)$; г) $Q(4;\ 2)$.

6•. Виберіть цілі числа, що розміщені на числовій прямій між $-\sqrt{10}$ і $\sqrt{8}$.

а) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$; в) $-2, -1, 0, 1, 2, 3$;
б) $-3, -2, -1, 0, 1, 2$; г) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

7••. Визначте випадок, у якому розміщено числа у порядку зростання.

а) $\frac{2}{3}\sqrt{18},\ 5\sqrt{3},\ 2\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\sqrt{24}$; в) $2\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\sqrt{24},\ 5\sqrt{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{18}$;

б) $5\sqrt{3},\ 2\sqrt{5},\ \frac{2}{3}\sqrt{18},\ \frac{1}{2}\sqrt{24}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt{24},\ \frac{2}{3}\sqrt{18},\ 2\sqrt{5},\ 5\sqrt{3}$.

8••. Визначте кількість розв'язків рівняння $\sqrt{x}=\frac{1}{2}x-1$.

а) Два; б) один; в) жодного; г) неможливо визначити.

9••. Знайдіть значення виразу $\left(1+3\sqrt{x_0}\right)^2-\left(x_0^2-x_0\right)$, де x_0 – розв'язок рівняння $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$. (Розв'язок рівняння знайдіть графічним способом.)

а) $17+\sqrt{2}$; б) $17+3\sqrt{2}$; в) 37; г) 5.

Вправи для повторення

408. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)^2}$; 3) $\sqrt{\left(\sqrt{17}-3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{17}-16\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(7-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(13-2\sqrt{3}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(\sqrt{11}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{11}-9\right)^2}$.

409. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу не залежить від x:

1) $\left(\dfrac{8x}{x^2-4}+\dfrac{2x}{6-3x}+\dfrac{2x}{x+2}\right):\dfrac{4x}{3x-6}$;

2) $\left(\dfrac{18x}{x^2-9}+\dfrac{3x}{6-2x}+\dfrac{3x}{x+3}\right):\dfrac{3x}{2x-6}$;

3) $\left(\dfrac{x}{x^2-9}-\dfrac{x}{x^2-6x+9}\right)\cdot\dfrac{(3-x)^2}{2x}+\dfrac{3}{x+3}$;

4) $\left(\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-4x+4}\right)\cdot\dfrac{(2-x)^2}{4x}+\dfrac{1}{x+2}$.

410. Вкладник поклав на два різні рахунки 10 200 грн. По одному з рахунків банк виплачує 6 % річних, а по другому – 8 % річних. Через рік вкладник отримав 716 грн. відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на кожний рахунок?

411. Знайдіть коефіцієнт k $(k=0)$ функції $y=\dfrac{k}{x}$, якщо її графік проходить через точку:

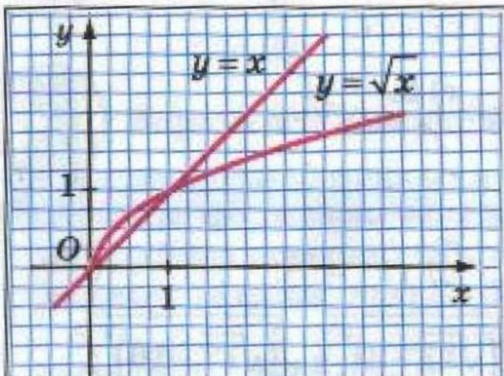
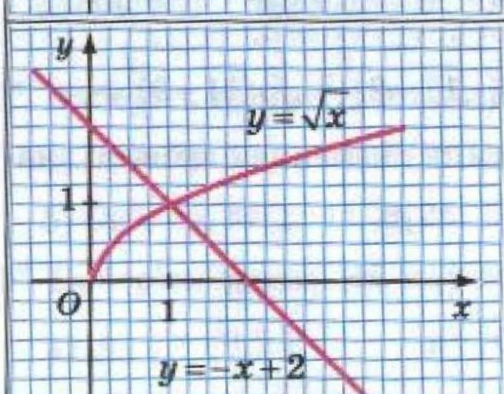
1) $M\left(2k^2;\ 2k\right)$; 2) $P\left(\dfrac{1}{3}k^2;\ 27k\right)$; 3) $Q\left(\dfrac{1}{2}k;\ \dfrac{1}{8}k^2\right)$; 4) $R\left(\dfrac{1}{4}k;\ \dfrac{1}{9}k^2\right)$.

412. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2}{x+5}-\dfrac{5x}{x+5}=0$; 3) $\dfrac{5x+x^2}{10+x}=\dfrac{5x+9}{10+x}$;

2) $\dfrac{x^2}{4-x}-\dfrac{4x}{x-4}=0$; 4) $\dfrac{7x+x^2}{16-x}=\dfrac{7x+81}{16-x}$.

413. Визначте, яке число треба записати замість знака «?».

	$\left(\sqrt{2x_1}+\sqrt{3x_2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-x_2\right)^2-2\sqrt{5}$	-3
	$\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{5}x_0-3\right)^2+2\sqrt{5}-\dfrac{5}{9}x_0$	?

Готуймося до тематичного оцінювання

«Квадратні корені. Дійсні числа»

Запитання для самоконтролю

1. Що є графіком функцій $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$ і як їх будувати?

2. Які властивості мають функції $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$?

3. Який алгоритм розв'язування рівнянь графічним способом?

4. Які переваги і які недоліки графічного способу розв'язування рівнянь?

5. Чим відрізняється квадратний корінь від арифметичного квадратного кореня з невід'ємного числа?

6. До якого рівняння зводиться знаходження квадратного кореня з невід'ємного числа a?

7. Які числа називаються натуральними; цілими; раціональними; ірраціональними; дійсними?

8. Як порівнюють дійсні числа?

9. Які властивості має арифметичний квадратний корінь?

10. Чому під час перетворення ірраціональних виразів важливо володіти тотожністю $\sqrt{a^2} = |a|$?

11. Як порівняти числові значення виразів, що містять радикали?

12. За яким алгоритмом виносять множник з-під знака кореня та вносять множник під знак кореня?

Завдання в тестовій формі

1°. Виберіть, користуючись графічним способом, рівняння, коренями якого є числа 2 і −2.

А) $x^2 = 2$; Б) $x^2 = -2$; В) $x^2 = 4$; Г) $x^2 = -4$; Д) $x^2 = 0$.

2°. Розмістіть у порядку зростання числа: $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{5}$, 5.

А) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 2, 3, 5$; Г) $5, 3, 2, \sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$;

Б) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3, 5$; Д) $5, 3, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}, \sqrt{2}$.

В) $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}, 2, 3, 5$;

3°. Виберіть вирази, значення яких рівні:

1) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{0{,}25}$; 3) $\sqrt{900} \cdot \sqrt{0{,}01}$; 5) $\sqrt{400} \cdot \sqrt{0{,}04}$.

2) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{2{,}25}$; 4) $\sqrt{100} \cdot \sqrt{0{,}64}$;

А) 1 і 2; Б) 1 і 3; В) 2 і 4; Г) 2 і 5; Д) 3 і 5.

4°. Виберіть три вирази, що не мають змісту.

А) $\sqrt{(-10)^2}$; Б) $\sqrt{(-5)^3}$; В) $\sqrt{(-8)\cdot(-2)}$; Г) $\sqrt{-9\cdot 16}$; Д) $\sqrt{-64}$.

5°. Виберіть раціональне обчислення виразу $\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{35}$.

А) $\left(\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}\right)\left(\sqrt{15}\cdot\sqrt{35}\right)=\sqrt{84}\cdot\sqrt{525}$;

Б) $\left(\sqrt{6}\cdot\sqrt{35}\right)\left(\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}\right)=\sqrt{210}\cdot\sqrt{210}$;

В) $\left(\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}\right)=\sqrt{90}\cdot\sqrt{490}$;

Г) $\sqrt{6\cdot 14\cdot 15\cdot 35}=\sqrt{44\,100}$;

Д) $\sqrt{2\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}$.

6°. Розмістіть у порядку спадання числа: $2\sqrt{3}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{2}$.

А) $2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{2}$; Г) $5\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{5}, 2\sqrt{3}$;

Б) $2\sqrt{3}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{2}$; Д) $3\sqrt{5}, 5\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$.

В) $7\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$;

7°. Виберіть два вирази, які спрощено правильно.

А) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}=38\sqrt{2}$; Г) $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{200}=9\sqrt{2}$;

Б) $\sqrt{75}-\sqrt{12}+\sqrt{27}=6\sqrt{3}$; Д) $\sqrt{300}-\sqrt{108}+\sqrt{48}=12\sqrt{3}$.

В) $\sqrt{245}+\sqrt{45}-\sqrt{20}=8\sqrt{5}$;

8°. Визначте три правильні числові тотожності.

А) $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)=1$; Г) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)=-1$;

Б) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=2$; Д) $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)=-2$.

В) $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+3\right)=7$;

9°. Визначте правильні переходи від виразу з ірраціональним знаменником дробу до виразу, в якому звільнились від ірраціональності в знаменнику:

1) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$; 3) $\dfrac{1}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{20}$; 4) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$; 5) $\dfrac{1}{9\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{27}$.

А) 1, 3 і 5; Б) 2, 3 і 5; В) 1, 3 і 4; Г) 1, 4 і 5; Д) 2, 4 і 5.

10°. Виберіть таку функцію (А–В), графік якої проходив би через чотири задані точки (1–5), і таку, графік якої не проходив би через жодну з них.

А) $y = x^2$;
Б) $y = \sqrt{x}$;
В) $y = \dfrac{8}{x}$.

1) $M(-2;\ 4)$;
2) $K(81;\ 9)$;
3) $P(100;\ 10)$;
4) $Q(1;\ 1)$;
5) $Z(0{,}25;\ 0{,}5)$.

А				
Б				
В				

11•. Знайдіть 3 функції, графіки яких мають одну спільну точку:

1) $y = x^2$; 2) $y = \dfrac{5}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = -5x$; 5) $y = -\dfrac{5}{x}$.

А) 1, 2 і 3; Б) 1, 3 і 4; В) 2, 3 і 5; Г) 2, 4 і 5; Д) 1, 4 і 5.

12•. Укажіть вирази, значення яких є протилежними цілими числами:

1) $\dfrac{1}{3}\sqrt{0{,}36} + \dfrac{1}{4}\sqrt{0{,}64}$;
4) $10\sqrt{0{,}01} - 0{,}2\sqrt{100}$;
2) $\dfrac{2}{5}\sqrt{0{,}25} + \dfrac{1}{2}\sqrt{0{,}04}$;
5) $\dfrac{3}{4}\sqrt{0{,}16} + 0{,}1\sqrt{49}$.
3) $5\sqrt{0{,}09} - 2\sqrt{0{,}81}$;

А) 1 і 3; Б) 2 і 3; В) 3 і 4; Г) 4 і 5; Д) 2 і 5.

13•. Визначте три правильні тотожності.

А) $\sqrt{\left(7-\sqrt{13}\right)^2} = 7 - \sqrt{13}$;
Г) $\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2} = 4 - \sqrt{15}$;
Б) $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} = 2 - \sqrt{7}$;
Д) $\sqrt{\left(10-\sqrt{99}\right)^2} = 10 - \sqrt{99}$.
В) $\sqrt{\left(5-\sqrt{27}\right)^2} = 5 - \sqrt{27}$;

14•. Знайдіть рівносильні рівняння:

1) $\dfrac{1}{3}x^2 = 2{,}7$; 3) $(0{,}1x)^2 = 9$; 5) $(0{,}3x)^2 = 81$.

2) $5x^2 = 4{,}05$; 4) $(x - 0{,}1)^2 = 1$;

А) 1 і 3; Б) 1 і 4; В) 2 і 4; Г) 2 і 5; Д) 3 і 5.

15•. Розмістіть у порядку зростання числа: π; $\sqrt{9,2}$; 3,141; $3\frac{1}{9}$.

А) $3\frac{1}{9}$; $\sqrt{9,2}$; 3,141; π; Г) $\sqrt{9,2}$; $3\frac{1}{9}$; π; 3,141;

Б) $3\frac{1}{9}$; $\sqrt{9,2}$; π; 3,141; Д) $\sqrt{9,2}$; 3,141; $3\frac{1}{9}$; π.

В) $\sqrt{9,2}$; $3\frac{1}{9}$; 3,141; π;

16•. Укажіть трійку правильно спрощених виразів.

1) $\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)=30$; 4) $\left(5\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)=-6$;

2) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)=2$; 5) $\left(2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)=30$.

3) $\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)=19$;

А) 1, 3 і 5; Б) 1, 2 і 4; В) 2, 3 і 5; Г) 2, 3 і 4; Д) 2, 4 і 5.

17•. Знайдіть значення виразу $\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{2}-3}-\frac{4}{3\sqrt{2}+3}}$.

А) 0; Б) $\frac{\sqrt{2}-2}{5}$; В) $\frac{4\sqrt{2}}{2}$; Г) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; Д) $\frac{24}{9}$.

18•. Спростіть $\sqrt{16a^9b^{11}}+2ab\sqrt{9a^7b^9}-a^3b^3\sqrt{4a^3b^5}$, якщо $a\geqslant 0, b\geqslant 0$.

А) $2a^3b^4\sqrt{ab}\,(2b+3a-ab)$; В) $12a^3b^4\sqrt{ab}$; Д) $8a^4b^5\sqrt{ab}$.

Б) $2a^4b^4\sqrt{ab}\,(2b+3ab-a)$; Г) $a^4b^5\sqrt{56ab}$;

19•. Доберіть до кожного дробу рівний йому скорочений.

А) $\frac{a\sqrt{a}+8}{a-2\sqrt{a}+4}$; В) $\frac{a-3\sqrt{a}+9}{27+a\sqrt{a}}$; Д) $\frac{a-4}{a+4\sqrt{a}+4}$.

Б) $\frac{a-9}{\sqrt{a}+3}$; Г) $\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a-1}$;

1) $\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}$; 2) $\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$; 3) $\sqrt{a}-3$; 4) $\frac{1}{\sqrt{a}+3}$; 5) $\sqrt{a}+2$.

20•. Знайдіть рівносильні рівняння:

1) $x^2=\sqrt{\sqrt{41}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{41}+4}$; 4) $x^2=\sqrt{\sqrt{61}-5}\cdot\sqrt{\sqrt{61}+5}$;

2) $x^2=\sqrt{\sqrt{37}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{37}+1}$; 5) $x^2=\sqrt{\sqrt{73}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{73}+3}$.

3) $x^2=\sqrt{\sqrt{53}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{53}+2}$;

А) 1 і 3; Б) 1 і 4; В) 2 і 4; Г) 2 і 5; Д) 3 і 5.

21••. Ідентифікуйте до кожної умови (А–Д) відповідну точку $K(m; n)$, яка не збігається з початком координат і належить графіку функції $y=\sqrt{x}$.

А) $m=7n$; Б) $m=9n$; В) $m=\frac{1}{4}n$; Г) $m=1{,}5n$; Д) $m=\frac{4}{3}n$.

1) $K(81; 9)$; 2) $K(49; 7)$; 3) $K\left(\frac{16}{9}; \frac{4}{3}\right)$; 4) $K\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right)$; 5) $K\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

22••. Розмістіть у порядку спадання числа: $-\pi$; $-3\frac{1}{7}$; $-\sqrt{9{,}9}$; $-\sqrt{9{,}1}$; $-\sqrt{9{,}7}$; $-3\frac{1}{8}$.

А) $-3\frac{1}{7}$; $-3\frac{1}{8}$; $-\sqrt{9{,}1}$; $-\sqrt{9{,}7}$; $-\sqrt{9{,}9}$; $-\pi$;

Б) $-\sqrt{9{,}9}$; $-\sqrt{9{,}7}$; $-\sqrt{9{,}1}$; $-\pi$; $-3\frac{1}{7}$; $-3\frac{1}{8}$;

В) $-3\frac{1}{8}$; $-\sqrt{9{,}9}$; $-\sqrt{9{,}7}$; $-3\frac{1}{7}$; $-\pi$; $-\sqrt{9{,}1}$;

Г) $-\sqrt{9{,}9}$; $-3\frac{1}{7}$; $-\pi$; $-3\frac{1}{8}$; $-\sqrt{9{,}7}$; $-\sqrt{9{,}1}$;

Д) $-\sqrt{9{,}1}$; $-\sqrt{9{,}7}$; $-3\frac{1}{8}$; $-3\frac{1}{7}$; $-\pi$; $-\sqrt{9{,}9}$.

23••. Визначте вираз, значення якого є ірраціональним числом.

А) $\sqrt{61+28\sqrt{3}}+\sqrt{61-28\sqrt{3}}$; Г) $\sqrt{79+30\sqrt{6}}-\sqrt{79-30\sqrt{6}}$;

Б) $\sqrt{48+24\sqrt{3}}-\sqrt{48-24\sqrt{3}}$; Д) $\sqrt{56+24\sqrt{5}}+\sqrt{56-24\sqrt{5}}$.

В) $\sqrt{55+14\sqrt{6}}+\sqrt{55-14\sqrt{6}}$;

24••. Утворіть із правих частин заданих функцій рівняння, розв'язками якого є два числа різних знаків:

1) $y=x^2$; 2) $y=\sqrt{x}$; 3) $y=-\frac{8}{x}$; 4) $y=3x-6$; 5) $y=-8x-2$.

А) 1 і 3; Б) 1 і 4; В) 2 і 4; Г) 3 і 5; Д) 2 і 5.

25••. Доберіть до умови залежності між змінними x та y відповідну точку, яка належить графіку функції $y=\sqrt{x}$, якщо $k>0$.

А) $x=ky$; Б) $y=kx$; В) $x=\frac{y}{k^2}$; Г) $y=\frac{x}{k^2}$; Д) $x=k^3y$.

1) $M\left(\frac{1}{k^4};\ \frac{1}{k^2}\right)$; 2) $P\left(k^4;\ k^2\right)$; 3) $Q\left(k^2;\ k\right)$; 4) $R\left(k^6;\ k^3\right)$; 5) $S\left(\frac{1}{k^2};\ \frac{1}{k}\right)$.

26••. Обчисліть $\sqrt{\sqrt{\left(4\sqrt{5}-4\right)\left(4\sqrt{5}+4\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}}$.

А) 3; Б) $2\sqrt{2}$; В) 8; Г) 9; Д) $4\sqrt{6}$.

27••. Спростіть вираз $\frac{1}{2}\sqrt{72}-\sqrt{216}+\frac{1}{2}\sqrt{54}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{150}+\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)$.

А) $4\sqrt{2}-5\sqrt{6}$; В) $2\sqrt{2}+14\sqrt{6}$; Д) $3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$.

Б) $\sqrt{2}-5\sqrt{6}$; Г) $4\sqrt{2}-7\sqrt{6}$;

28••. Укажіть вирази, значення яких є взаємно оберненими раціональними числами:

1) $\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{1\frac{3}{32}}\cdot\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{35}}\cdot\sqrt{1\frac{6}{15}}\cdot\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{\frac{15}{28}}\cdot\sqrt{\frac{9}{20}}\cdot\sqrt{2\frac{1}{3}}$.

2) $\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{1\frac{17}{18}}\cdot\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{\frac{8}{15}}\cdot\sqrt{\frac{28}{35}}\cdot\sqrt{1\frac{1}{2}}$;

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4; Д) 2 і 5.

29••. Обчисліть $\left(\frac{1}{a}\sqrt{ab}-\frac{1}{b}\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, якщо $a>0$, $b>0$.

А) $\frac{b^2-a^2}{ab}$; Б) $\frac{a^2-b^2}{ab}$; В) $\frac{(a-b)^2}{ab}$; Г) $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$; Д) $\frac{a^2+b^2}{ab}-2$.

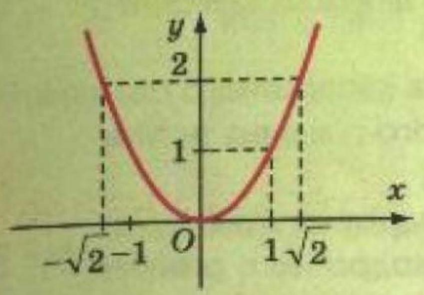
30••. Визначте вираз, числове значення якого є найбільшим.

А) $\sqrt{\frac{3^8\cdot 0{,}01^4}{0{,}0004}}$; В) $\sqrt{\frac{0{,}3^{10}\cdot 4^5}{1{,}44^5}}$; Д) $\sqrt{\frac{5^6\cdot 0{,}001^2}{0{,}04}}$.

Б) $\sqrt{\frac{0{,}2^6\cdot 25^3}{0{,}5^8}}$; Г) $\sqrt{\frac{0{,}2^9\cdot 125^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^8}}$;

Розділ II. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Функція $y = x^2$

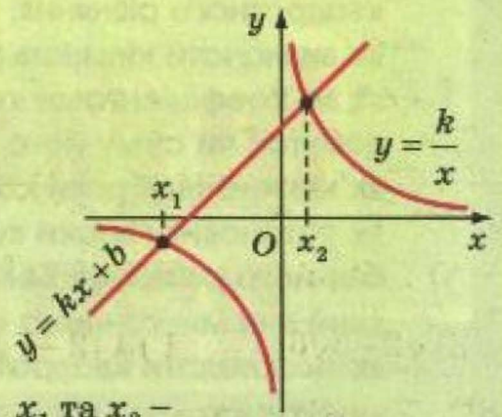


$D(y)$: x – будь-яке число

$E(y)$: $y \geqslant 0$

Графік – парабола, гілки якої симетричні відносно осі Oy

Графічний спосіб розв'язування рівнянь



x_1 та x_2 – корені рівняння $\frac{k}{x} = kx + b$

Квадратні корені

4 і –4 – квадратні корені з числа 16

4 – арифметичний квадратний корінь із числа 16 (АКК). $\sqrt{16} = 4$

$$\sqrt{a} = b \quad \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \\ a = b^2 \end{cases}$$

Властивості АКК

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$,

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a \geqslant 0$, $b > 0$,

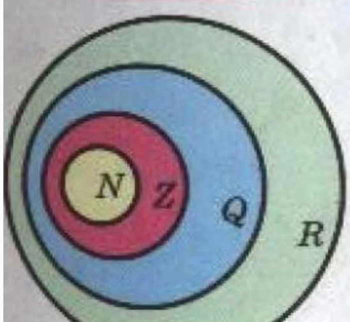
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geqslant 0$

$\sqrt{a^2} = |a|$, a – будь-яке число

$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$, $ab \geqslant 0$,

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$, $b \neq 0$, $ab \geqslant 0$

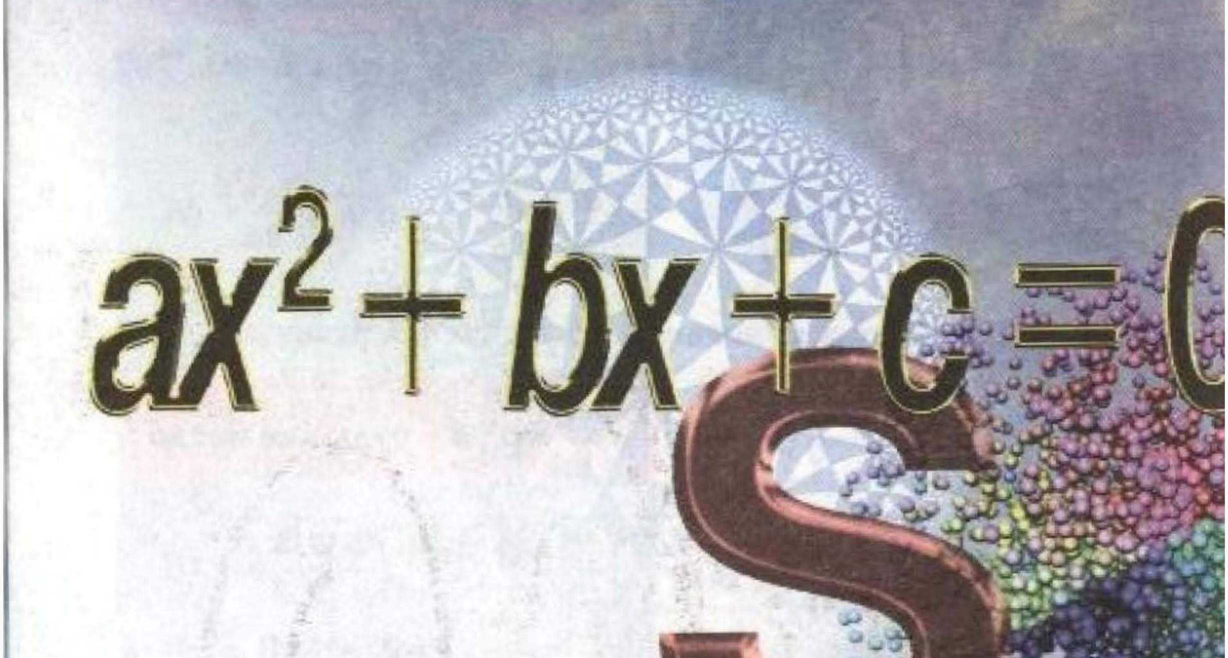
Дійсні числа



Множина:
N – натуральних чисел;
Z – цілих чисел;
Q – раціональних чисел;
R – дійсних чисел

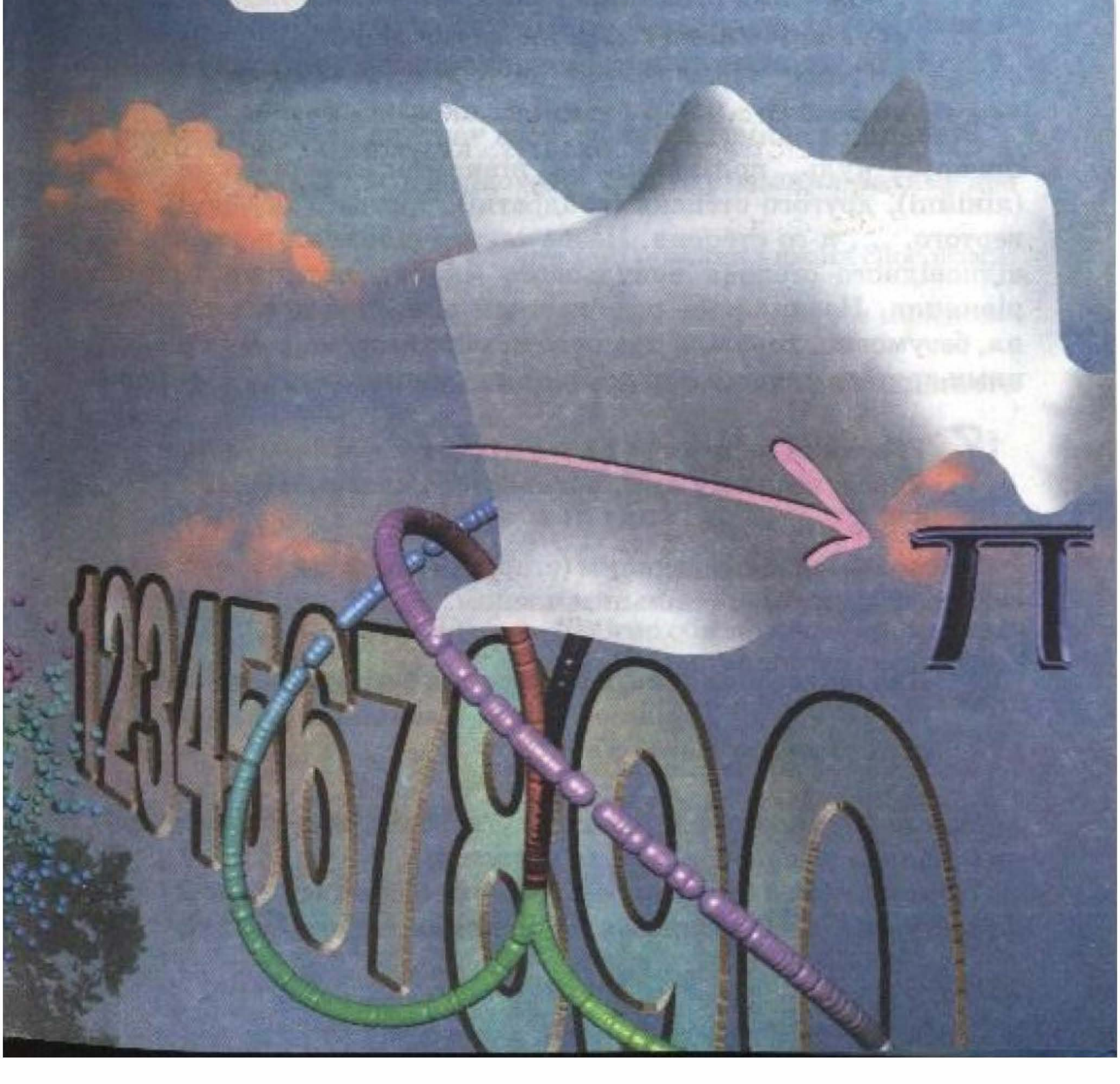
Опрацювавши цей розділ, ви будете знати:

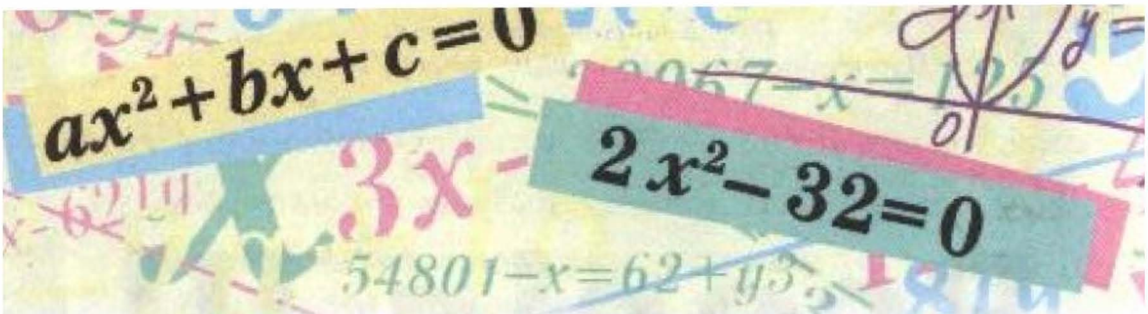
- які рівняння називаються квадратними;
- як розрізняти види квадратних рівнянь;
- яку формулу використовувати для розв'язування квадратного рівняння;
- як визначати кількість розв'язків квадратного рівняння;
- як за коефіцієнтами квадратного рівняння знайти добуток чи суму його коренів;
- як можна підібрати корені квадратного рівняння;
- як установити знаки коренів квадратного рівняння без його розв'язування;
- який вид многочлена є квадратним тричленом;
- як розкладати квадратний тричлен на лінійні множники;
- як знайти корені квадратного тричлена;
- які рівняння називаються дробово-раціональними;
- як розв'язувати дробово-раціональні рівняння;
- які текстові задачі можна розв'язувати за допомогою квадратного рівняння або рівняння, що зводиться до квадратного.



Розділ III

Квадратні рівняння





§ 20. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ. НЕПОВНІ КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ, ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як визначають назву рівнянь, ліва частина яких многочлен, а права – нуль;**
- **які рівняння називаються квадратними;**
- **які рівняння називаються неповними квадратними;**
- **як розв'язувати неповні квадратні рівняння.**

Рівняння з однією змінною, ліва частина яких многочлен, а права – нуль, поділяють на рівняння: першого степеня (лінійні), другого степеня (квадратні), третього (кубічні), четвертого, ..., n-го степеня. Назва такого рівняння походить від відповідного степеня ненульового многочлена лівої частини рівняння. Навчившись розв'язувати рівняння першого степеня, безумовно, хочеться працювати з іншими, зокрема з рівняннями другого степеня, які по-іншому називають ***квадратними***.

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x – змінна, a, b, c – числа, причому $a\neq0$, називається *квадратним*.

Число a називають першим (старшим) коефіцієнтом, b – другим коефіцієнтом, c – вільним членом.

Квадратне рівняння, в якому хоча б один із коефіцієнтів (b або c) дорівнює нулю, називають *неповним квадратним рівнянням*.

Розглянемо кожний із випадків утворення неповних квадратних рівнянь та способи їх розв'язування.

1) Якщо $c=0$, $b\neq0$, то $ax^2+bx+0=0$, тобто квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ зводиться до рівняння вигляду $ax^2+bx=0$,

яке має два корені: 0 і $-\frac{b}{a}$. Розв'язують такі рівняння, як правило, розкладанням їх лівої частини на множники.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $3x^2-12x=0$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$3x^2-12x=0$, $3x(x-4)=0, \mid :3$ $x(x-4)=0$, $x=0$ або $x-4=0$, $x_1=0$; $x_2=4$. *Відповідь.* 0; 4.	Розкладаємо ліву частину рівняння на множники та використовуємо відоме правило: $A\cdot B=0$, коли $A=0$ або $B=0$.

2) Якщо $b=0$, $c\neq 0$, то $ax^2+0+c=0$, тобто квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ зводиться до рівняння вигляду $ax^2+c=0$, або $x^2=-\frac{c}{a}$. Очевидним є те, що якщо $-\frac{c}{a}<0$, то рівняння не матиме розв'язку ($x^2\geqslant 0$). Якщо ж $-\frac{c}{a}>0$, то рівняння матиме два корені: $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Розв'язують такі рівняння двома способами:

а) розкладаючи многочлен лівої частини рівняння на множники;

б) використовуючи властивості арифметичного квадратного кореня.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $4x^2-9=0$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$4x^2-9=0, \mid :4, \quad x^2-\frac{9}{4}=0$, $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$, $x-1{,}5=0$ або $x+1{,}5=0$, $x_1=1{,}5$; $x_2=-1{,}5$. *Відповідь.* $\pm 1{,}5$.	Ділимо обидві частини рівняння на 4 і, використовуючи формулу різниці квадратів, розкладаємо ліву частину рівняння на множники, після чого отримуємо добуток, який дорівнює 0, тому кожний із множників може дорівнювати 0.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{2}x^2-8=0$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$\frac{1}{2}x^2-8=0, \mid \cdot 2$ $x^2-16=0,$ $x^2=16,$ $\sqrt{x^2}=\sqrt{16},$ $\lvert x\rvert=4,$ $x=\pm4.$ *Відповідь.* ±4.	Використовуючи властивості рівнянь (множення обох частин рівняння на число, відмінне від нуля, та перенесення членів рівняння з однієї частини в іншу), отримуємо рівняння $x^2=16$. Оскільки $x^2\geqslant 0$ і $16>0$, причому $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$, а $\sqrt{16}=4$, то отримуємо рівняння з модулем: $\lvert x\rvert=4$, звідси $x=\pm4$.

3) Якщо $b=0$ і $c=0$, то $ax^2+0+0=0$, тобто квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ зводиться до рівняння вигляду $ax^2=0$, коренем якого є число 0.

Узагальнимо розв'язування неповних квадратних рівнянь за допомогою таблиці.

$ax^2+bx+c=0$		
1) $b\neq0,\ c=0$	2) $b=0,\ c\neq0$	3) $b=c=0$
$ax^2+bx=0,$ $x(ax+b)=0,$ $x=0$ або $ax+b=0,$ $ax=-b,$ $x=-\frac{b}{a}.$ *Відповідь.* $x_1=0,$ $x_2=-\frac{b}{a}.$	$ax^2+c=0,$ $ax^2=-c,$ $x^2=-\frac{c}{a}$ а) $-\frac{c}{a}>0,$ то $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ б) $-\frac{c}{a}<0,$ то рівняння розв'язків не має.	$ax^2=0, \mid : a,\ a\neq0.$ Звідси $x^2=0,$ $x=0.$ *Відповідь.* $x=0.$

Зауваження. Квадратне рівняння може мати не більше двох коренів.

Вправи для закріплення

414°. Чи є квадратним рівняння:

1) $9{,}2x^2-1=0$; 3) $7x^2-\frac{5}{3}+x=0$; 5) $\frac{1}{7}x^2=8x$;

2) $5x^2-6x+12=0$; 4) $8-\frac{5}{x}=0$; 6) $7x-\frac{2}{x}=0$?

415°. Укажіть квадратні рівняння та назвіть їх коефіцієнти:

1) $5y^2-12y-\frac{1}{y}=0$; 3) $7x^2+10x+11=0$; 5) $10x^2-50=0$;

2) $-\frac{1}{2}x^2=3$; 4) $-9x^2+10x=0$; 6) $5y+\frac{2}{y}-4=0$.

416°. Зведіть рівняння до виду $ax^2+bx+c=0$:

1) $(3x-1)(x+2)=x(x+5)$;

2) $(8x-1)(8x+1)=3(15x^2-1)+3x$;

3) $(2x+5)^2=3(x-1)(1+x)+25$;

4) $4\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{1}{2}x-3\right)-1=(2x+3)^2-12x$.

417°. Розв'яжіть рівняння:

1) $9x^2-10x=0$; 3) $8x^2+16=0$; 5) $11x^2=0$;

2) $-\frac{1}{2}x^2+6x=0$; 4) $\frac{1}{3}x^2-3=0$; 6) $-\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{10}x=0$.

Розв'яжіть рівняння (418–420).

418•. 1) $2x^2+6x=0$; 3) $-\frac{2}{3}x^2=0$; 5) $15-5x^2=0$;

2) $1{,}8x^2-0{,}6x=0$; 4) $0{,}6x^2+24=0$; 6) $10x+20x^2=0$.

419•. 1) $(4x+7)^2-40x+1=3x(5x+9)+50$;

2) $(3x-5)(5+3x)=(x-5)(x+5)-16x$;

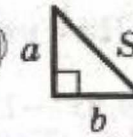
3) $(3-2x)(3+x)=9-\frac{1}{2}x^2$;

4) $(5x+2)(x-2)-(x-1)(x+1)=4x-3$.

420•. 1) $(x+1)(x-2)=0$; 3) $9x^2-1=0$; 5) $x^2=3x$;

2) $x(x+0,5)=0$; 4) $3x-2x^2=0$; 6) $x^2+2x-3=2x+6$.

421•. Знайдіть довжини катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює 18 см^2.



$S=\dfrac{ab}{2}$.

422•. Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює 6,28 м^2 ($\pi\approx3,14$).

423••. Роз'яжіть рівняння:

1) $3(x-0,2)\left(x+\dfrac{1}{7}\right)=0$; 3) $\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{4}{27}=0$; 5) $6z^3-\dfrac{3}{10}z=0$;

2) $0,2x^3-1,8x=0$; 4) $1,2y^2-3,6=0$; 6) $6m-0,3m^3=0$.

424••. Знайдіть, якщо це можливо, корені рівняння:

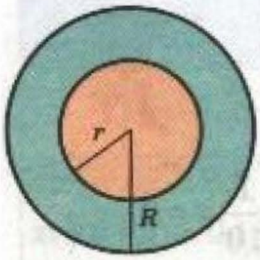
1) $(m+9)^2=0$; 3) $(n-2)^2=4$; 5) $(x-10)^2-1=0$;

2) $(y+1)^2+5=0$; 4) $(y+5)^2=9$; 6) $(x+3)^2-25=0$.

425••. Розв'яжіть рівняння:

1) $(m-1)^2=100$; 3) $(x+6)^2=1$; 5) $(x-0,1)^2=0,09$;

2) $(y+4)^2-9=0$; 4) $(t-9)^2-4=0$; 6) $(y+0,7)^2=1,44$.



Мал. 12

426••. Радіус одного з концентричних кіл у 2 рази більший за радіус іншого (мал. 12). Знайдіть радіус зовнішнього кола, якщо площа кільця становить 27π см^2.

Концентричні кола мають спільний центр.

427••. Якщо від квадрата «відрізати» прямокутний рівнобедрений трикутник, катет якого у 3 рази менший за сторону квадрата, то площа частини квадрата, що залишилася, дорівнюватиме 17 см^2. Знайдіть периметр квадрата.

428••. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо добуток найменшого та найбільшого з них на 1 менший, ніж квадрат середнього числа. Скільки розв'язків має задача?

Вправи для самооцінювання

1°. Укажіть рівняння, яке є квадратним.

а) $9x^2-\dfrac{1}{x}+3=0$; б) $5x^2-x^3+2=0$;

в) $\frac{1}{7}x^2-18x+\frac{5}{4}=0$; г) $-\frac{8}{x^2}=0$.

2°. Використовуючи формулу загального вигляду квадратного рівняння, укажіть коефіцієнти рівняння $34x+5x^2-22=0$.

а) $a=5,\ b=34,\ c=-22$; в) $a=34,\ b=5,\ c=-22$;

б) $a=-22,\ b=34,\ c=5$; г) $a=34,\ b=-22,\ c=5$.

3°. Виберіть корені рівняння $x^2-10x=0$.

а) $\pm0{,}1$; б) 0; 10; в) ±10; г) -10; 0.

4•. Знайдіть суму коренів рівняння $5(x-1{,}4)\left(x+\frac{2}{5}\right)=0$.

а) 6,8; б) 6; в) 1,8; г) 1.

5•. Знайдіть корені рівняння $2x-(x+1)^2=3x^2-6$.

а) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $x_{1,2}=\pm\frac{5}{4}$; в) коренів немає; г) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$.

6•. Знайдіть корені рівняння $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{36}=0$.

а) Коренів немає; в) $x_{1,2}=\pm2\sqrt{3}$;

б) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}$; г) $x_1=0,\ x_2=2\sqrt{3}$.

7••. Визначте рівняння, рівносильне рівнянню $(x-7)(x+3)=0$.

а) $(x-2)^2=-17$; в) $(x-2)^2=25$;

б) $(x-2)^2=-25$; г) $(x-2)^2=17$.

8••. Знайдіть розв'язки рівняння $x^2-6x+5=0$, утворюючи рівносильне йому рівняння вигляду $(x-a)^2=m^2$.

а) $x_1=7,\ x_2=-1$; б) $x_1=5,\ x_2=1$; в) $x_{1,2}=\pm2$; г) $x_{1,2}=3\pm\sqrt{11}$.

9••. Знайдіть додатне значення t, коли відомо, що добуток двох чисел, одне з яких на 2 менше, а інше на 2 більше, ніж t, дорівнює 4.

а) Такого значення не існує; б) 8; в) 2; г) $2\sqrt{2}$.

Вправи для повторення

429. Знайдіть значення змінної x, при якому не має змісту вираз:

1) $\frac{-5x+15}{x+3}$; 2) $\frac{x+7}{49-x^2}$; 3) $\frac{x^3+11x}{x^2-11x}$;

4) $\dfrac{x^3+1}{1-x^2}$; 5) $\dfrac{2x+6}{x^2+6x+9}$; 6) $\dfrac{x^3-27}{9x-x^3}$.

430. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\dfrac{3}{16-12c}-\dfrac{1}{4c-3c^2}$ при $c=-\dfrac{1}{20}$;

2) $\dfrac{1}{4a^2-3a}+\dfrac{4}{9-12a}$ при $a=-\dfrac{1}{15}$;

3) $\dfrac{4}{25-20b}+\dfrac{1}{4b^2-5b}$ при $b=-\dfrac{1}{25}$;

4) $\dfrac{1}{5m^2-2m}+\dfrac{5}{4-10m}$ при $m=-\dfrac{1}{10}$.

431. В яку суму перетвориться банківський вклад у 1000 грн. через 4 роки, якщо він збільшується щороку на 7 %? Відповідь округліть до цілих.

432. Розв'яжіть рівняння, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $(3x-1)^2-4=0$; 3) $\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)^2-1=0$;

2) $(5x+7)^2-9=0$; 4) $\left(\dfrac{1}{3}x+5\right)^2-16=0$.

433. Розв'яжіть рівняння, звівши його до вигляду $(x\pm b)^2-c^2=0$:

1) $x^2+8x+15=0$; 3) $x^2-4x-5=0$;

2) $x^2-12x+32=0$; 4) $x^2-2x-15=0$.

434. Визначте, яке неповне квадратне рівняння має бути записане замість знака «?».

$3x-5=7$	$13+2x=5$	$a^2-16=0$
$2x-6=2(x-3)+x$	$9+5x=15(x-1)+4$	?

§ 21. ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **про новий термін «дискримінант» та його роль при розв'язуванні квадратних рівнянь;**
- **як розв'язувати повне квадратне рівняння за допомогою загальної формули коренів;**
- **як визначати за знаком дискримінанта, чи має рівняння розв'язки;**
- **які квадратні рівняння називаються зведеними і як спрощується їх розв'язання;**
- **як спрощується розв'язання, коли другий коефіцієнт є парним числом.**

Розв'язуючи рівняння вигляду $(x-2)(x-3)=0$, ми використовували правило про добуток, який дорівнює 0. Однак, перемножуючи многочлени $(x-2)$ і $(x-3)$, ми отримуємо рівносильне рівняння, яке є квадратним: $x^2-5x+6=0$. Такі рівняння були для нас складними, тому ми намагалися їх ліву частину перетворити на добуток, а після – розв'язувати за відомими правилами (алгоритмами). Якщо ж розглядати рівняння вигляду $(x-5)^2=9$ (*), то його зводять до рівняння з модулем: $|x-5|=3$, звідки отримують два рівняння: $x-5=3$, $x-5=-3$ та їх відповідні розв'язки: $x_1=8$, $x_2=2$. Однак, виконуючи рівносильні перетворення у рівнянні (*), ми отримуємо квадратне рівняння: $x^2-10x+16=0$ (**), яке ми зможемо розв'язати, лише утворюючи в його лівій частині квадрат двочлена. Тобто: $x^2-2\cdot 5x+5^2-5^2+16=0$, $(x-5)^2-9=0$ і $(x-5)^2=9$. Отже, при розв'язуванні квадратного рівняння можна використовувати спосіб виділення квадрата двочлена. Використаємо цей спосіб при розв'язуванні квадратного рівняння у загальному вигляді:

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (1)$$

Оскільки $a \neq 0$, то помножимо обидві частини рівняння на $4a$ та виконаємо рівносильні перетворення, отримуючи при цьому рівносильні йому рівняння:

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$
$$(2ax)^2+2\cdot(2ax)\cdot b+b^2-b^2+4ac=0,$$
$$(2ax+b)^2=b^2-4ac, \text{ де } b^2-4ac \geqslant 0,$$
$$(2ax+b)^2=\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2.$$

Якщо позначити вираз $b^2 - 4ac$ через D, то дане рівняння набуде вигляду: $(2ax+b)^2 = (\sqrt{D})^2$, тобто $|2ax+b| = \sqrt{D}$, $2ax+b = \pm\sqrt{D}$, $2ax = -b \pm \sqrt{D}$, звідси

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Формула (2) є загальною формулою обчислення коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ за його коефіцієнтами.

Очевидно, що розв'язки рівняння залежать від знака виразу $D = b^2 - 4ac$. Якщо $D \geqslant 0$, то арифметичне значення кореня існує, тому рівняння (1) *матиме два корені*. Якщо ж $D < 0$, то арифметичне значення кореня не існує, тому рівняння (1) *не матиме коренів*. Однак слід виділити випадок, коли $D = 0$. Тоді корені рівняння (1) будуть рівними, тобто $x = -\frac{b}{2a}$ – єдине число, що визначає два рівні корені рівняння. Або ще кажуть, що рівняння має один розв'язок.

Узагальнимо встановлення коренів повного квадратного рівняння таблицею.

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$		
При $D < 0$ рівняння не має коренів	При $D = 0$ рівняння має два рівні корені $x = -\frac{b}{2a}$	При $D > 0$ рівняння має два різні корені $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$

Отже, за виразом D розрізняють три випадки встановлення коренів квадратного рівняння. Позначення $D = b^2 - 4ac$ є невипадковим, оскільки D – перша буква слова *discriminant*, що в перекладі означає *той, що розрізняє*, а сам вираз називають *дискримінантом*.

Значно спрощується розв'язання рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, коли старший коефіцієнт $a = 1$. Тоді повне квадратне рівняння набуде вигляду $x^2 + bx + c = 0$ і $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$, а $D = b^2 - 4c$. Таким чином, рівняння вигляду $x^2 + bx + c = 0$ ($a = 1$!) виділяють окремою назвою: *зведені квадратні рівняння*.

Квадратне рівняння, старший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають *зведеним*.

!? **Зауваження.** 1) Якщо коефіцієнти a і c – різних знаків, то рівняння $ax^2+bx+c=0$ *завжди* має корені;

2) якщо другий коефіцієнт парне число, тобто $b=2k$, то при розв'язуванні квадратного рівняння можна користуватись формулою: $x=\dfrac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$, де $k=\dfrac{1}{2}b$, $D_1=k^2-ac$. **(3)**

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $-3x^2+7x-4=0$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$-3x^2+7x-4=0, \mid \cdot(-1)$ $3x^2-7x+4=0$, $a=3,\ b=-7,\ c=4$, $D=(-7)^2-4\cdot3\cdot4=1$, $x=\dfrac{7\pm\sqrt{1}}{6},\ x=\dfrac{7\pm1}{6}$, $x_1=\dfrac{4}{3},\ x_2=1$. *Відповідь.* $\dfrac{4}{3}$; 1.	Працювати з від'ємним коефіцієнтом a незручно, тому множимо обидві частини рівняння на (-1) і знаходимо його корені за відомими формулами: спочатку дискримінант $D=b^2-4ac$, а потім корені рівняння $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2}$.

Приклад 2. Знайдіть корені рівняння $x^2-8x+10=0$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$x^2-8x+10=0$, $a=1,\ k=-4,\ c=10$, $D_1=16-10=6$, $x=4\pm\sqrt{6}$, $x_1=4-\sqrt{6},\ x_2=4+\sqrt{6}$. *Відповідь.* $4\pm\sqrt{6}$.	У заданому рівнянні коефіцієнт $b=-8$, тобто парне число, тому раціональніше використати формулу (3) $x=\dfrac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$, де $k=\dfrac{1}{2}b,\ D_1=k^2-ac$. Враховуючи, що $a=1$, маємо: $x=-k\pm\sqrt{D_1},\ \ D_1=k^2-c,\ \ k=\dfrac{1}{2}b$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $5x^2+3x+6,5=0$.

Розв'язання

Як записати	*Як пояснити*
$5x^2+3x+6,5=0$, $a=5$, $b=3$, $c=6,5$, $D=9-4\cdot5\cdot6,5=-121$, $D<0$, тому $\sqrt{D}$ – не існує. Отже, рівняння коренів не має. *Відповідь.* $\varnothing$.	Підраховуючи дискримінант, отримуємо від'ємне число, тобто $b^2-4ac<0$. Таке рівняння не має розв'язків. Однак слід пам'ятати, що розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або показати, що їх немає.

Вправи для закріплення

435°. Розв'яжіть рівняння, виділивши квадрат двочлена:

1) $x^2-4x+3=0$; 3) $x^2+4x-5=0$; 5) $2x^2-6x-8=0$;
2) $y^2+6y-16=0$; 4) $y^2-2y-1=0$; 6) $2y^2+6y-8=0$.

436°. Знайдіть корені рівняння, попередньо виділивши квадрат двочлена в його лівій частині:

1) $x^2+12x+20=0$; 3) $x^2-6x+5=0$; 5) $x^2-8x+12=0$;
2) $y^2-8y-9=0$; 4) $y^2+10y+24=0$; 6) $y^2+14y+13=0$.

437°. Знайдіть дискримінант квадратного рівняння та визначте кількість коренів рівняння:

1) $5x^2-4x-1=0$; 3) $3x-x^2+10=0$; 5) $-0,5x^2+x+1=0$;
2) $x^2-6x+9=0$; 4) $2x+3+2x^2=0$; 6) $5x^2-11x+1=0$.

438°. Визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $6x^2-8x+13=0$; 3) $x^2-4x+5=0$; 5) $2x^2-2x+0,5=0$;
2) $x^2+4-4x=0$; 4) $x^2-4x-5=0$; 6) $3+5x^2-7x=0$.

Розв'яжіть рівняння (439–440).

439•. 1) $2x^2-9x+10=0$; 3) $y^2+y-90=0$; 5) $18+3y^2-y=0$;
2) $x^2-10x-24=0$; 4) $4x^2+x-33=0$; 6) $1-18y+81y^2=0$.

440•. 1) $5m^2-8m+3=0$; 3) $9y^2-30y+25=0$; 5) $2x^2+67+x=0$;
2) $35x^2+2x-1=0$; 4) $4y^2-y-5=0$; 6) $-2x^2+3x+5=0$.

Розв'яжіть рівняння, попередньо звівши їх до виду $ax^2 + bx + c = 0$ (441 – 442).

441•. 1) $7 = 0,4y + 0,2y^2$; 3) $0,5x^2 - 7 = 2,5x$;

2) $x^2 - 1,6x = 0,36$; 4) $\frac{t^2}{4} + \frac{t}{9} = 1\frac{2}{9}$.

442•. 1) $0,2m^2 = 10m - 125$; 3) $\frac{1}{3}x^2 - 9 = -2x$;

2) $z^2 - 1,2 = 2,6z$; 4) $\frac{y^2}{49} = \frac{2}{7}y - 1$.

Розв'яжіть рівняння, враховуючи парність другого коефіцієнта (443–444).

443••. 1) $3x^2 - 14x + 16 = 0$; 3) $7y^2 - 20y + 14 = 0$; 5) $y^2 - 10y - 25 = 0$;

2) $m^2 + 2m - 80 = 0$; 4) $4x^2 - 36x + 4,5 = 0$; 6) $x^2 + 6x - 19 = 0$.

444••. 1) $x^2 - 8x - 84 = 0$; 3) $8x^2 - 14x + 5 = 0$; 5) $36t^2 - 12t + 1 = 0$;

2) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $3x^2 + 32x + 80 = 0$; 6) $5x^2 + 26x - 24 = 0$.

445••. При якому значенні m один із коренів квадратного рівняння $3x^2 - mx - 6 = 0$ дорівнює -2?

446••. При якому значенні m один із коренів квадратного рівняння $2x^2 - x - m = 0$ дорівнює -3?

447••. Визначте, при яких значеннях a рівняння $x^2 + 2x + 16a = 0$:

1) має два рівні корені;
2) має два різні корені;
3) не має жодного кореня.

448••. Визначте значення p, при яких рівняння $x^2 + 3x - 4p = 0$:

1) має два різні корені;
2) не має жодного кореня;
3) має два рівні корені.

449••. Визначте, при яких значеннях a квадратне рівняння $ax^2 + 5x + 2 = 0$:

1) має два рівні корені; 2) не має жодного кореня.

450*. Знайдіть значення a, при яких рівняння $4x^2 - ax + 25 = 0$:

1) має два рівні корені;
2) має два різні корені;
3) не має жодного кореня.

451*. Знайдіть, при яких значеннях m рівняння $9x^2-2mx+16=0$:

1) має два рівні корені;
2) має два різні корені;
3) не має жодного кореня.

Вправи для самооцінювання

1°. Виберіть пару чисел, які є коренями рівняння $6x^2-5x-1=0$.

а) $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$; б) 1 і $-\frac{1}{6}$; в) 1 і $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$ і $-\frac{1}{6}$.

2°. Укажіть рівняння, коренями якого є числа 2 та −4.

а) $x^2+6x+8=0$; в) $x^2+2x-8=0$;
б) $2x^2-3x=44$; г) $x(x-2)=8$.

3°. Визначте коефіцієнти $\{a;\ b;\ c\}$ у рівнянні $x-2x^2+7=0$.

а) $\{1; -2; 7\}$; б) $\{-2; 1; 7\}$; в) $\{0; -2; 7\}$; г) $\{2; 1; 7\}$.

4•. Зведіть рівняння $2{,}5x^2-3\frac{7}{12}x+1\frac{1}{4}=0$ до виду $ax^2+bx+c=0$, де a – натуральне число, b, c – раціональні числа.

а) $5x^2-7\frac{1}{6}x+2\frac{1}{2}=0$; в) $5x^2-6\frac{14}{12}x+2\frac{2}{4}=0$;

б) $5x^2-6\frac{7}{12}x+2\frac{1}{4}=0$; г) $5x^2-3\frac{14}{12}x+1\frac{2}{4}=0$.

5•. Виберіть рівняння, дискримінант якого дорівнює 81.

а) $3x^2-10x-1=0$; в) $4x^2-7x+2=0$;
б) $2x^2-7x+4=0$; г) $-4x^2+7x+2=0$.

6•. Знайдіть суму коренів рівняння $2x^2-5x+2=0$.

а) −2,5; б) 2,5; в) 5; г) −5.

7••. Відомо, що коренем рівняння $4x^2+cx-16=0$ є число −4. Знайдіть значення c.

а) 12; б) −12; в) −8; г) 8.

8••. Знайдіть значення a, при яких двочлен $2a^2-1{,}6a$ дорівнює тричлену $1{,}8a^2+0{,}4a+5$.

а) 5; б) таких значень не існує; в) $2\pm2\sqrt{2}$; г) $5\pm5\sqrt{2}$.

9••. Знайдіть значення a, при яких рівняння $ax^2+3x+6=0$ має два рівні корені.

а) $a=2\frac{2}{3}$; б) $a=\frac{3}{8}$; в) $a=0, a=\frac{3}{8}$; г) $a=0$.

Вправи для повторення

452. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; 3) $\dfrac{n+2\sqrt{5n}+5}{n-5}$; 5) $\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{8}\right)^2}}{\sqrt{24}-\sqrt{18}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$; 4) $\dfrac{n-2\sqrt{3n}+3}{n-3}$; 6) $\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2}}{\sqrt{12}-\sqrt{10}}$.

453. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\left(\dfrac{7ab}{a-5}-\dfrac{35b}{a-5}\right)^{-1}$ при $a=\sqrt{5},\ b=\dfrac{1}{7}$;

2) $\left(\dfrac{5ck}{k+4}+\dfrac{20c}{4+k}\right)^{-1}$ при $k=\sqrt{15},\ c=\dfrac{1}{5}$;

3) $\left(\dfrac{3ab}{b-2}-\dfrac{6a}{b-2}\right)^{-2}$ при $a=-\dfrac{1}{3},\ b=\sqrt{2}$;

4) $\left(\dfrac{4bc}{c+3}+\dfrac{12b}{c+3}\right)^{-2}$ при $b=-\dfrac{1}{4},\ c=\sqrt{3}$.

454. Упродовж року завод двічі збільшував випуск продукції на одну й ту саму кількість відсотків. Знайдіть це число, коли відомо, що на початку року завод щомісяця випускав 600 деталей, а наприкінці року став випускати 726 деталей.

455. Порівняйте добуток коренів рівняння з вільним членом:

1) $t^2-3t+2=0$; 3) $w^2-2w-3=0$; 5) $5v^2-6v+1=0$;

2) $z^2-7z+10=0$; 4) $2u^2+5u-3=0$; 6) $3r^2+8r-3=0$.

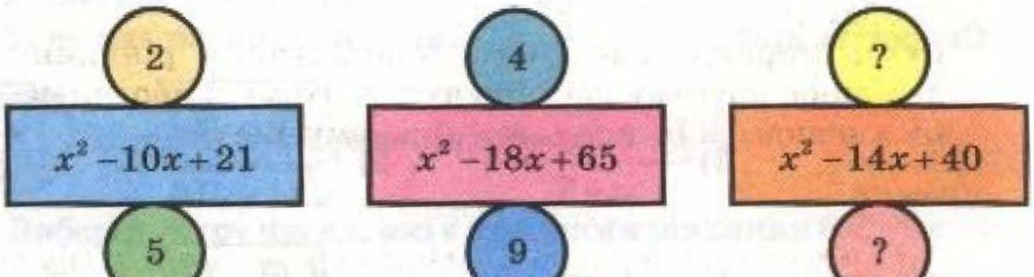
456. Порівняйте модуль суми коренів рівняння ($|x_1+x_2|$) та модуль другого коефіцієнта ($|b|$):

1) $t^2-4t+3=0$; 3) $w^2+7w+12=0$; 5) $3v^2-10v+3=0$;

2) $z^2-6z+8=0$; 4) $2u^2-9u+4=0$; 6) $4r^2-11r-3=0$.

!? Спробуйте зробити висновок про добуток і суму коренів для зведеного та повного квадратних рівнянь.

457. Визначте, які числа мають бути записані замість знаків «?».



§ 22. ТЕОРЕМА ВІЄТА

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- як формулюється теорема Вієта;
- як формулюється твердження, обернене до теореми Вієта;
- як знайти суму і добуток коренів за теоремою Вієта;
- як скласти квадратне рівняння, маючи його корені;
- як визначити знаки коренів квадратного рівняння, не розв'язуючи його.

Розглянемо кілька зведених квадратних рівнянь і проаналізуємо зв'язок між коренями рівнянь та коефіцієнтами відповідних квадратних рівнянь.

№	Рівняння	Корені x_1, x_2	Другий коефіцієнт (b)	Вільний член (c)	Сума коренів	Добуток коренів
1	$x^2-2x-3=0$	$x_1=3$, $x_2=-1$	-2	-3	2	-3
2	$x^2+4x-5=0$	$x_1=-5$, $x_2=1$	4	-5	-4	-5
3	$x^2+10x+24=0$	$x_1=-4$, $x_2=-6$	10	24	-10	24
4	$x^2-9x+20=0$	$x_1=4$, $x_2=5$	-9	20	9	20

Легко помітити, що в указаних рівняннях вільний член дорівнює добутку коренів, а число, протилежне коефіцієнту b, є сумою коренів квадратного рівняння. Насправді такою властивістю володіє будь-яке зведене квадратне рівняння, яке має корені. Ця властивість має спеціальну назву – теорема Вієта, названа на честь французького математика Франсуа Вієта.

Теорема 1 (теорема Вієта).
Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а їх добуток – вільному члену.

Доведення

Розглянемо рівняння $x^2+px+q=0$, де $1, p, q$ – його коефіцієнти. Нехай це рівняння має два різні корені, тобто $D=p^2-4q>0$, тому коренями є: $x_1=\dfrac{-p+\sqrt{D}}{2}$, $x_2=\dfrac{-p-\sqrt{D}}{2}$. Знайдемо їх суму та добуток: $x_1+x_2=\dfrac{-p+\sqrt{D}}{2}+\dfrac{-p-\sqrt{D}}{2}=\dfrac{-p+\sqrt{D}-p-\sqrt{D}}{2}=-p$.

Отже, $x_1+x_2=-p$.

Тобто *сума коренів – другий коефіцієнт рівняння, взятий з протилежним знаком.*

$$x_1\cdot x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{\sqrt{D}-p}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{D}+p}{2}\right)=$$

$$=-\frac{D-p^2}{4}=\frac{p^2-D}{4}=\frac{p^2-\left(p^2-4q\right)}{4}=q.$$ Отже, $x_1\cdot x_2=q$.

Тобто *добуток коренів – вільний член рівняння.* Що й вимагалося довести.

Перевірте виконання теореми Вієта для випадку, коли $D=0$, тобто коли $x_1=x_2$.

Справедливим є твердження, що за допомогою теореми Вієта можна виразити суму і добуток коренів довільного квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$. Оскільки $a\neq0$, то поділимо обидві частини рівняння на a. Утворилося зведене квадратне рівняння $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$, у якому коефіцієнти відповідно дорівнюють $1, \dfrac{b}{a}$ і $\dfrac{c}{a}$.

Отже, для повного квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ також справедлива теорема Вієта:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Теорема 2 (теорема, обернена до теореми Вієта). **Якщо числа m і n такі, що їх сума дорівнює $-p$, а добуток дорівнює q, то ці числа є коренями рівняння $x^2+px+q=0$.**

Доведення

За умовою $m+n=-p$ і $m\cdot n=q$. Підставимо у рівняння $x^2+px+q=0$ замість p і q ці вирази. Отримаємо:

$$x^2+(-(m+n))x+mn=0,$$
$$x^2-(m+n)x+mn=0.$$

$m+n=-p$, звідси $p=-(m+n)$.

Щоб довести, що m є коренем заданого рівняння, досить підставити його у рівняння замість x і довести, що отримана рівність буде правильною. Отже, при $x=m$ матимемо:

$$m^2-(m+n)m+mn=0,$$
$$m^2-m^2-mn+mn=0,$$
$$0=0 \text{ (рівність правильна).}$$

Тому $x=m$ є коренем рівняння. Аналогічно доводять, що число n є також коренем заданого рівняння. Отже, теорему доведено.

Приклад 1. **Знайдіть суму і добуток коренів рівняння $2x^2-3x+1=0$.**

Розв'язання

Як записати

$2x^2-3x+1=0,$

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1>0.$

Тоді за теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{3}{2}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Відповідь. $\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{1}{2}$.

Як пояснити

З'ясовуємо спочатку, чи має рівняння $2x^2-3x+1=0$ корені. $D=1>0$. Тепер застосовуємо теорему Вієта для повного квадратного рівняння: маємо, що сума коренів дорівнює $\dfrac{3}{2}$, а їх добуток дорівнює $\dfrac{1}{2}$.

Приклад 2. Підберіть корені рівняння $x^2-10x-24=0$.

Розв'язання

Як записати

$x^2-10x-24=0$.

$a=1$, $c=-24$, тому $ac<0$.

Отже, дане рівняння

має корені.

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1+x_2=10, \\ x_1\cdot x_2=-24. \end{cases}$$

Таким чином, $x_1=12$, $x_2=-2$.

Відповідь. $x_1=12$, $x_2=-2$.

Як пояснити

Оскільки коефіцієнти a і c різних знаків, то рівняння обов'язково має корені різних знаків. Позначимо їх x_1 та x_2. Тоді за теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1+x_2=10, \\ x_1\cdot x_2=-24. \end{cases}$$

Підберемо цілі числа, які будуть розв'язками системи. Корені рівняння є дільниками числа -24. Можливі пари модулів коренів: 1 і 24, 2 і 12, 3 і 8, 4 і 6. Оскільки сума коренів дорівнює 10, то підбором визначаємо, що коренями є числа 12 і -2.

Вправи для закріплення

Знайдіть суму та добуток коренів рівняння (458–459).

458°. 1) $x^2-20x+11=0$; 3) $m^2-4m-2=0$; 5) $-7x^2-2x+11=0$;

2) $x^2+5x+2=0$; 4) $t^2+2t+3=0$; 6) $9y^2-2y-1=0$.

459°. 1) $2x^2-x-1=0$; 4) $\frac{1}{3}t^2-17t-100=0$;

2) $-3m^2+2m+1=0$; 5) $-16m^2+m+2008=0$;

3) $15x^2-12x+1=0$; 6) $9\frac{1}{7}t^2+\frac{2}{5}t+112=0$.

460°. Не розв'язуючи рівняння, вкажіть знаки його коренів:

1) $t^2+t-1=0$; 3) $2t^2+6t-1=0$; 5) $x^2-2x-1=0$;

2) $m^2-4m+1=0$; 4) $3x^2+9x+2=0$; 6) $5x^2-7x+2=0$.

461°. Розв'яжіть рівняння та виконайте перевірку за теоремою Вієта:

1) $x^2+9x-22=0$; 3) $5x^2+9x+4=0$; 5) $15y^2-22y-37=0$;

2) $y^2-12y+32=0$; 4) $x^2+2x-80=0$; 6) $3p^2-10p+3=0$.

462•. Знайдіть «підбором» корені рівняння:

1) $x^2-6x+8=0$; 4) $z^2+5z+6=0$; 7) $t^2+t+1=0$;

2) $x^2-2x-15=0$; 5) $y^2+7y-8=0$; 8) $m^2+2m+4=0$;

3) $x^2-15x+36=0$; 6) $y^2-10y-39=0$; 9) $t^2-7t+13=0$.

463•. Підберіть корені рівняння:

1) $x^2-x-56=0$; 4) $t^2+10t+25=0$; 7) $m^2-m+5=0$;

2) $m^2+12m-45=0$; 5) $x^2-16x+64=0$; 8) $t^2+4t+6=0$;

3) $t^2+2t-63=0$; 6) $p^2+20p+100=0$; 9) $x^2-2x+2008=0$.

464•. Один із коренів квадратного рівняння дорівнює 3. Знайдіть другий корінь рівняння:

1) $x^2-21x+54=0$; 2) $9x^2-20x-21=0$.

465•. Один із коренів квадратного рівняння дорівнює −2. Знайдіть другий корінь рівняння:

1) $x^2+17x+30=0$; 2) $7x^2+11x-6=0$.

466••. Один із коренів квадратного рівняння дорівнює −2. Знайдіть другий корінь рівняння та коефіцієнт k:

1) $x^2+5x+k=0$; 3) $x^2+kx-16=0$;

2) $5x^2-7x+k=0$; 4) $3x^2+kx+10=0$.

467••. Один із коренів квадратного рівняння дорівнює −3. Знайдіть коефіцієнт k та другий корінь рівняння:

1) $x^2-5x+k=0$; 3) $x^2+kx+18=0$;

2) $3x^2+8x+k=0$; 4) $5x^2+kx-12=0$.

468••. Запишіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

1) 5 і 4; 4) 13 і 5 7) −3 і 0,5; 10) $\frac{3}{5}$ і −5;

2) 12 і −8; 5) 10 і −20; 8) 0 і 6; 11) $-2\frac{1}{2}$ і 2;

3) −2 і 8; 6) 8 і −8; 9) 1 і $\frac{1}{2}$; 12) −0,6 і $1\frac{2}{3}$.

469.** Відомо, що x_1 та x_2 – корені рівняння:

а) $x^2-9x-17=0$; в) $3x^2+x-1=0$; д) $5x^2+10x+4=0$;

б) $x^2+11x+20=0$; г) $3x^2-5x+1=0$; е) $2x^2-7x+4=0$.

Знайдіть, не розв'язуючи його:

1) x_1+x_2; 5) $x_1^2+x_2^2$;

2) x_1x_2; 6) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$;

3) $(x_1+x_2)^2$; 7) $x_1^3+x_2^3$;

4) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; 8) $|x_1-x_2|^3$.

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, звідси $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

Кожний із виразів, значення яких є шуканими, зведіть до таких виразів, які містили б (x_1+x_2) та (x_1x_2).

470.** Не розв'язуючи рівняння, визначте кількість його коренів:

1) $x^2+\sqrt{17}x+2=0$; 4) $y^2+\sqrt{7}y+10=0$;

2) $2y^2+\sqrt{19}y+27=0$; 5) $5x^2-\sqrt{5}x-5\sqrt{3}=0$;

3) $\sqrt{2}y^2+y-1=0$; 6) $11x^2-9x+7-5\sqrt{2}=0$.

471*. Нехай x_1 та x_2 – корені рівняння $x^2+7x-11=0$. Запишіть квадратне рівняння, коренями якого будуть числа $\dfrac{1}{x_1}$ та $\dfrac{1}{x_2}$.

Вправи для самооцінювання

1°. Укажіть суму коренів рівняння $2x^2-5x+3=0$.

а) 5; б) –5; в) 2,5; г) –2,5.

2°. Визначте, яке з чисел дорівнює добутку коренів рівняння $3x^2+x-5=0$.

а) 5; б) –5; в) $\dfrac{5}{3}$; г) $-\dfrac{5}{3}$.

3°. Підберіть корені рівняння $x^2+21x+54=0$.

а) 18 і 3; б) –18 і –3; в) –1 і –54; г) 1 і 54.

4•. Не розв'язуючи рівняння $7x^2-11x-6=0$, знайдіть другий корінь, якщо перший дорівнює 2.

а) $-\dfrac{3}{7}$; б) –3; в) 3; г) $\dfrac{11}{14}$.

5•. Визначте знаки коренів рівняння $-3x^2+23x-21=0$.

а) $x_1<0,\ x_2<0$; б) $x_1>0, x_2<0$; в) $x_1<0, x_2>0$; г) $x_1>0, x_2>0$.

6•. Запишіть квадратне рівняння, коренями якого є $\frac{2}{5}$ і $-\frac{5}{2}$.

а) $x^2-2{,}1x-1=0$; в) $x^2+2{,}9x-1=0$;

б) $x^2+2{,}1x-1=0$; г) $x^2-2{,}9x-1=0$.

7••. Один із коренів квадратного рівняння $5x^2+kx-12=0$ дорівнює -3. Знайдіть коефіцієнт k та другий корінь рівняння.

а) $k=11,\ x_2=0{,}8$; в) $k=7,\ x_2=-4$;

б) $k=-1,\ x_2=4$; г) $k=-11,\ x_2=5{,}2$.

8••. Різниця коренів квадратного рівняння $x^2-12x+q=0$ дорівнює 2. Знайдіть $\frac{1}{q}$.

а) $-\frac{1}{35}$; б) -35; в) $\frac{1}{35}$; г) 35.

9••. Не розв'язуючи рівняння $4x^2-9x-2=0$, знайдіть значення виразу $x_1^3x_2+x_1x_2^3$.

а) $-1\frac{1}{8}$; б) $-2\frac{17}{32}$; в) $-2\frac{1}{32}$; г) $-3\frac{1}{32}$.

Вправи для повторення

472. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{a+7}{\sqrt{a+7}}$; 3) $\frac{14}{\sqrt{17}+\sqrt{3}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+1}$;

2) $\frac{b-5}{\sqrt{b-5}}$; 4) $\frac{35}{\sqrt{37}+\sqrt{2}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}+2}$.

473. Побудуйте в одній системі координат різним кольором графіки двох функцій:

1) $f(x)=\frac{6}{x}$ та $f(x)=\frac{x+6}{x}$;

2) $f(x)=-\frac{6}{x}$ та $f(x)=\frac{x-6}{x}$;

3) $f(x)=\frac{8}{x}$ та $f(x)=\frac{x+8}{x}$;

4) $f(x)=-\frac{8}{x}$ та $f(x)=\frac{x-8}{x}$.

Скористайтесь правилом додавання (віднімання) дробів:

$$\frac{A\pm B}{A}=\frac{A}{A}\pm\frac{B}{A}=1\pm\frac{B}{A}.$$

474. У шкільному буфеті продається квас у маленьких пляшках вартістю 30 к. Порожню пляшку можна повернути, отримавши за неї 20 к. Яку найбільшу кількість пляшок квасу можна випити, якщо при собі мати 1 грн.?

475. Знайдіть значення многочлена другого степеня:

1) $x^2+8x-33$ при $x=-11$; $x=3$;

2) $x^2+3x-28$ при $x=-7$; $x=4$;

3) $7x^2+6x-1$ при $x=-1$; $x=\frac{1}{7}$;

4) $5x^2-8x-4$ при $x=2$; $x=-\frac{2}{5}$.

Перевірте за теоремою, оберненою до теореми Вієта, чи будуть числа у кожному з випадків коренями квадратного рівняння, ліва частина якого – заданий многочлен.

476. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+2x-8=0$ та $(x-2)(x+4)=0$;

2) $y^2-y-12=0$ та $(y+3)(y-4)=0$;

3) $2z^2-11z+5=0$ та $2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-5)=0$;

4) $3x^2-8x-3=0$ та $3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)=0$.

Чи можна сказати, що ліві частини рівнянь у кожному випадку тотожно рівні?

!? Запишіть таку тотожність у загальному вигляді.

Готуймося до тематичного оцінювання

«Квадратні рівняння. Теорема Вієта»

Запитання для самоконтролю

1. Які рівняння називаються квадратними?
2. Які рівняння називаються неповними квадратними рівняннями?
3. Які способи використовують для розв'язування неповних квадратних рівнянь?
4. Скільки розв'язків має рівняння вигляду $(x-a)^2=c^2$ і як їх знайти?

5. Що впливає на кількість розв'язків повного квадратного рівняння?

6. Як знайти дискримінант для повного квадратного рівняння?

7. Як знайти розв'язки повного квадратного рівняння?

8. Як спрощується пошук розв'язків рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, якщо b – парне число?

9. Які квадратні рівняння називаються зведеними?

10. Як перевірити за теоремою Вієта знайдені корені для зведеного квадратного рівняння?

11. Як підібрати корені зведеного квадратного рівняння за теоремою, оберненою до теореми Вієта?

12. Як використати теорему Вієта для обчислення раціональних виразів, у яких змінними є корені деякого квадратного рівняння?

Завдання в тестовій формі

1°. Укажіть серед нижченаведених квадратні рівняння.

А) $x^2+\frac{1}{x}-2=0$; Г) $15{,}3x^2=0$;

Б) $2x^2-3x+1=0$; Д) $x^3+2x^2+1=0$.

В) $5x-7x^2=0$;

2°. Доберіть до кожного квадратного рівняння (А–Д) його числові коефіцієнти (1–5).

А) $5x^2-7x+3=0$; 1) $a=3,\ b=5,\ c=7$;

Б) $7x^2-5x-3=0$; 2) $a=-7,\ b=-3,\ c=5$;

В) $-3x^2+7x-5=0$; 3) $a=5,\ b=-7,\ c=3$;

Г) $-7x^2-3x+5=0$; 4) $a=-3,\ b=7,\ c=-5$;

Д) $3x^2+5x+7=0$. 5) $a=7,\ b=-5,\ c=-3$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

3°. Виберіть два рівняння, коренями яких є два протилежні числа.

А) $5x^2-25x=0$; Г) $x^2-4x+4=0$;

Б) $49-x^2=0$; Д) $x^2=17$.

В) $\frac{1}{5}x^2=5x$;

4°. Виберіть рівняння, одним із коренів яких є число 0:

1) $x^2-3x+2=0$;
2) $0,25x^2+0,5x=0$;
3) $0,25x^2-1=5$;
4) $x^2-0,0001=0$;
5) $0,0001x^2+x=x$.

А) 1 і 3;
Б) 2 і 5;
В) 4 і 5;
Г) 2 і 4;
Д) 3 і 5.

5°. Виберіть рівняння, які не мають розв'язку:

1) $12x^2+5=0$;
2) $5x^2-12=0$;
3) $-12x^2-5=0$;
4) $5x^2+12=0$;
5) $-12x^2+5=0$.

А) 1, 2 і 5;
Б) 2, 3 і 4;
В) 1, 3 і 4;
Г) 1, 3 і 5;
Д) 2, 4 і 5.

6°. Ідентифікуйте парами рівняння і його дискримінант.

А) $2x^2+x-6=0$;
Б) $2y^2-5y+2=0$;
В) $z^2-9z+14=0$;
Г) $7t^2+6t-1=0$;
Д) $5u^2-6u+1=0$.

1) $D=64$;
2) $D=25$;
3) $D=9$;
4) $D=16$;
5) $D=49$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

7°. Виберіть зведене квадратне рівняння.

А) $x-2x^2+1=0$;
Б) $x+5+3x^2=0$;
В) $-x^2-2x+3=0$;
Г) $x^2-5+4x=0$;
Д) $2x^2-3x-5=0$.

8°. Укажіть випадок, у якому для квадратного рівняння $x^2-3x-10=0$ правильно застосовано теорему Вієта.

А) $x_1+x_2=3,\ x_1\cdot x_2=-10$;
Б) $x_1+x_2=3,\ x_1\cdot x_2=10$;
В) $x_1+x_2=-3,\ x_1\cdot x_2=-10$;
Г) $x_1+x_2=10,\ x_1\cdot x_2=3$;
Д) $x_1+x_2=-10,\ x_1\cdot x_2=-3$.

9°. Визначте рівняння, корені яких мають різні знаки:

1) $2x^2-x-3=0$;
2) $x^2-9x+14=0$;
3) $0,2x^2+x-10=0$;

А) 1, 2 і 4;
Б) 2, 3 і 4;
В) 1, 4 і 5;

4) $2x^2-5x+2=0$; Г) 2, 4 і 5;

5) $6x^2+x-7=0$. Д) 1, 3 і 5.

10°. Розв'яжіть рівняння.

А) $x^2-4x+3=0$; 1) $\{-1{,}5;\ 2\}$;

Б) $x^2+16x=0$; 2) $\{1;\ 3\}$;

В) $2x^2-x-6=0$; 3) $\{-1;\ 3{,}5\}$;

Г) $2x^2-18=0$; 4) $\{0;\ -16\}$;

Д) $2x^2-5x+7=0$. 5) $\{-3;\ 3\}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

11•. Визначте два рівняння, в яких дискримінант від'ємний.

А) $2x^2-11x+5=0$; Г) $3x^2+16x+80=0$;

Б) $2y^2+17y+30=0$; Д) $12x^2+16x+3=0$.

В) $9t^2-30t+25=0$;

12•. Ідентифікуйте квадратне рівняння, в якому другий коефіцієнт парне число, і відповідний квадратний корінь із його дискримінанта D_1.

А) $x^2-24x-81=0$; 1) $\sqrt{D_1}=20$;

Б) $x^2-12x-253=0$; 2) $\sqrt{D_1}=22$;

В) $x^2-26x-231=0$; 3) $\sqrt{D_1}=17$;

Г) $x^2+30x-351=0$; 4) $\sqrt{D_1}=15$;

Д) $x^2+38x-123=0$. 5) $\sqrt{D_1}=24$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

13•. Доберіть до кожного квадратного рівняння з парним коефіцієнтом «вихідну» формулу знаходження коренів.

А) $x^2-8x+15=0$; 1) $x=-8\pm\sqrt{100}$;

Б) $x^2+8x-20=0$; 2) $x=4\pm\sqrt{1}$;

В) $x^2-14x+40=0$; 3) $x=-13\pm\sqrt{289}$;

Г) $x^2+16x-36=0$; 4) $x=7\pm\sqrt{9}$;

Д) $x^2+26x-120=0$. 5) $x=-4\pm\sqrt{36}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

14•. Виберіть два рівняння, коренями яких є два рівні числа.

А) $5y^2-11y+2=0$; В) $36x^2-12x+1=0$; Д) $9t^2-30t+25=0$.

Б) $4p^2+7p-15=0$; Г) $7u^2+2u-5=0$;

15•. **Визначте рівносильні квадратні рівняння:**

1) $7{,}5x^2+3{,}5x-2=0;$	А) 1 і 4;
2) $6y^2+7y-10=0;$	Б) 2 і 5;
3) $6t^2+3{,}5t-2{,}5=0;$	В) 1 і 3;
4) $2r^2+7r-30=0;$	Г) 2 і 4;
5) $12v^2+7v-5=0.$	Д) 3 і 5.

16•. **Утворіть із многочленів (А–Д) та (1–5) правильні рівності.**

А) $x^2-2x-8;$	1) $(x-3)^2-4;$	А	
Б) $9x^2-12x+3;$	2) $(x-1)^2-9;$	Б	
В) $x^2-6x+5;$	3) $(2x-1)^2-16;$	В	
Г) $4x^2-4x-15;$	4) $(3x+2)^2-7;$	Г	
Д) $9x^2+12x-3.$	5) $(3x-2)^2-1.$	Д	

17•. **Доберіть до кожного квадратного рівняння його розв'язок.**

А) $x^2-6x+1=0;$	1) $x=3\pm\sqrt{5};$	А	
Б) $x^2-6x-1=0;$	2) $x=3\pm\sqrt{10};$	Б	
В) $x^2-6x+2=0;$	3) $x=3\pm2\sqrt{2};$	В	
Г) $x^2-6x-2=0;$	4) $x=3\pm\sqrt{7};$	Г	
Д) $x^2-6x+4=0.$	5) $x=3\pm\sqrt{11}.$	Д	

18•. **Визначте рівняння, відношення коренів яких $\frac{x_1}{x_2}$ дорівнює 40 %, де $x_1<x_2$.**

А) $x^2-8x+15=0;$ Г) $x^2-3{,}5x+3=0;$

Б) $2x^2-9x+10=0;$ Д) $2x^2-7x+5=0.$

В) $0{,}5x^2-6x+10=0;$

19•. **Знайдіть вільний член зведеного квадратного рівняння $x^2-3x+q=0$, коли відомо, що один із його коренів дорівнює 5.**

А) 2; Б) −2; В) 10; Г) −10; Д) −15.

20•. **Знайдіть значення виразу $(x_1-x_2)^2$, якщо x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $x^2-13x+5=0$.**

А) 164; Б) 159; В) 154; Г) 149; Д) 144.

21••. **Визначте рівняння, квадрат суми коренів якого дорівнює 16 %.**

А) $2x^2-5x=0$; Г) $\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{2}x=0$;

Б) $4x^2-5x=0$; Д) $5x^2-2x=0$.

В) $5x^2-4x=0$;

22••. **Укажіть квадратне рівняння, коренями якого є спряжені вирази.**

А) $x^2-5x+4=0$; Г) $x^2-4x+1=0$;

Б) $x^2+5x-6=0$; Д) $x^2+x-6=0$.

В) $x^2-4x-5=0$;

23••. **Знайдіть значення другого коефіцієнта для кожного квадратного рівняння, якщо один із коренів дорівнює 11.**

А) $x^2+mx-165=0$; 1) $m=1$;

Б) $x^2+mx-132=0$; 2) $m=2$;

В) $x^2+mx-187=0$; 3) $m=8$;

Г) $x^2+mx-143=0$; 4) $m=6$;

Д) $x^2+mx-209=0$. 5) $m=4$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

24••. **Знайдіть розв'язок неповного квадратного рівняння**

$$3x^2-7-4\sqrt{3}=0.$$

А) $\sqrt{\frac{7\pm2\sqrt{3}}{3}}$; В) $\pm\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; Д) $\pm\frac{7+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Б) $\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}}$; Г) $\pm\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;

25••. **Визначте рівняння, коренями яких є два раціональні взаємно обернені числа:**

1) $5x^2+11x+5=0$; А) 1 і 3;

2) $6x^2-13x+6=0$; Б) 2 і 4;

3) $7x^2-25x+7=0$; В) 3 і 5;

4) $20x^2+41x+20=0$; Г) 1 і 4;

5) $15x^2-34x+15=0$. Д) 2 і 5.

a, b – взаємно обернені, якщо $a\cdot b=1$.

26••. Установіть, не розв'язуючи квадратного рівняння, відповідність між виразами(А–Д) та їх значеннями (1–5), якщо x_1, x_2 – корені рівняння $4x^2-5x-13=0$.

А) $x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2$; 1) $-\dfrac{65}{16}$;

Б) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $\dfrac{233}{16}$;

В) $x_1^3 + x_2^3$; 3) $\dfrac{129}{16}$;

Г) $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$; 4) $-\dfrac{23}{4}$;

Д) $\left(x_1 - x_2\right)^2$. 5) $\dfrac{1105}{64}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

27••. Знайдіть значення b рівняння $x^2-5x+b=0$, коли x_1, x_2 – його корені, що задовольняють умову $2x_1+3x_2=6$.

А) –12; Б) –36; В) –84; Г) –120; Д) –180.

28••. Знайдіть усі значення параметра a, при яких сума коренів рівняння $x^2-(a^2-5a)x+5a-1=0$ дорівнює (–6).

А) $a=2$ і $a=3$; Г) $a=-2$;

Б) $a=2$; Д) $a=-3$.

В) $a=3$;

Використайте теорему Вієта і виконайте перевірку.

29••. Знайдіть значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння $x^2-ax+2a=0$ дорівнює 5.

А) $a=-1$ і $a=5$; В) $a=-1$; Д) $a=1$ і $a=5$.

Б) $a=-5$ і $a=1$; Г) $a=-5$;

30••. Знайдіть значення параметра a, при яких рівняння $x^2+2(a+1)x+2a+5=0$ матиме два рівні корені.

А) ±2; Б) ±1; В) ±4; Г) ±3; Д) ±5.

§ 23. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН, ЙОГО КОРЕНІ. РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **що називається квадратним тричленом;**
- **що називається коренем квадратного тричлена;**
- **як розкласти квадратний тричлен на лінійні множники.**

Розв'язуючи повне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, ми зазначали, що лівою частиною рівняння є многочлен другого степеня, однак він має ще й спеціальну назву – *квадратний тричлен*.

Квадратним тричленом називається многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$.

Очевидно, що числове значення квадратного тричлена залежить від значення x. Наприклад, якщо $x = -2$, то значення квадратного тричлена $3x^2 - 5x + 2$ підраховують, підставляючи замість x його числове значення 2:

$3x^2 - 5x + 2 = 3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = 12 + 10 + 2 = 24$. Але, якщо $x = 1$, то $3x^2 - 5x + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$ або $x = \frac{2}{3}$, то $3x^2 - 5x + 2 = \frac{4}{3} - \frac{10}{3} + 2 = 0$.

Отже, при певних значеннях змінної значення квадратного тричлена може дорівнювати нулю. Такі значення змінної називають *коренями квадратного тричлена*.

Коренем квадратного тричлена називається значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю.

Таким чином, для того щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Залежно від знака дискримінанта рівняння може зовсім не мати коренів, може мати два рівні або два різні корені.

Досить часто доводиться розкладати многочлен на множники. Крім відомих нам способів – винесення спільного множника за дужки, групування, формул скороченого множення, – є ще один спосіб, який значно спрощує процес розкладання на множники квадратного тричлена.

Теорема. Якщо x_1 та x_2 – корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Доведення

Оскільки корені квадратного тричлена x_1 та x_2 є коренями відповідного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то за теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \end{cases} \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} \dfrac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \\ \dfrac{c}{a} = x_1 \cdot x_2. \end{cases}$$

Таким чином,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) =$$
$$= a(x^2 - x \cdot x_1 - x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) =$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2),$$

що й треба було довести.

Отже, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. (1)

Тотожність (1) – формула *розкладання квадратного тричлена на лінійні множники*.

Приклад. Розкладіть на множники квадратний тричлен $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

Розв'язання

Як записати	Як пояснити
$\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = 0, \mid \cdot 6$ $x^2 + 3x + 2 = 0,$ $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1,$ $x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2;\quad x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1.$	Перетворюємо рівняння до простішого: множимо обидві його частини на 6. Отримуємо рівносильне йому рівняння $x^2 + 3x + 2 = 0$, корені якого $x_1 = -2$ та $x_2 = -1$.
Тоді $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(x+2)(x+1).$ *Відповідь.* $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(x+2)(x+1).$	Підставляємо у формулу (1) знайдені корені й отримуємо добуток $\frac{1}{6}(x+2)(x+1)$, тотожно рівний тричлену $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

Зауваження. Якщо квадратний тричлен не має коренів, то він завжди або додатний, або від'ємний (одного знаку). Слід пам'ятати, що в цьому разі знак квадратного тричлена збігається зі знаком старшого коефіцієнта. Наприклад, $x^2 + 2x + 11 > 0$ при будь-яких значеннях $x \in R$, оскільки коренів немає і старший коефіцієнт $a = 1 > 0$; $-2t^2 + t - 8 < 0$ при будь-яких значеннях $x \in R$ $(a = -2 < 0)$.

Вправи для закріплення

477°. Визначте, які з чисел: -2; 0; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2; $\sqrt{3}$ є коренями квадратного тричлена $3x^2 - 7x + 2$.

478°. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 - 6x + 5$; 3) $-2x^2 + x - 1$; 5) $4x^2 - 4x + 1$;

2) $x^2 + x - 6$; 4) $x^2 + 5x + 6$; 6) $\frac{1}{25}x^2 + 0{,}4x + 1$.

479°. Визначте, чи має квадратний тричлен корені. Якщо має, то знайдіть їх:

1) $x^2 + x + 10$; 3) $9x^2 - 12x + 4$; 5) $3x^2 + 6x + 3$;

2) $3x^2 - 2x - 1$; 4) $\frac{1}{4}x^2 - x - 3$; 6) $x^2 + 9x + 20$.

480•. Визначте знак квадратного тричлена, використовуючи зауваження § 23:

1) $m^2 - m + 1$; 3) $x^2 - 4x + 5$; 5) $-2t^2 + t - 1$;

2) $3x^2 - 2x + 5$; 4) $-3 + m - m^2$; 6) $100m^2 + 20m + 3$.

481•. Порівняйте з нулем знак квадратного тричлена:

1) $-x^2 + 5x - 13$; 3) $-t^2 + t - 5$; 5) $16a^2 + 8a + 5$;

2) $13x^2 + x + 1000$; 4) $-7 + 2t - t^2$; 6) $t^2 - t + \frac{3}{4}$.

482•. Визначте, чи можна розкласти на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $t^2 + 2t - 3$; 3) $7x^2 + x + 1$; 5) $-3x^2 - 2x + 20$;

2) $x^2 - x - 5$; 4) $5x^2 + 2x + 6$; 6) $-\frac{1}{2}x^2 + x - 3$.

Розкладіть квадратні тричлени на множники (483–484).

483•. 1) x^2-2x-8; 3) $-x^2-8x+9$; 5) $2x^2-5x+3$;

2) x^2+6x-7; 4) $-y^2+16y-15$; 6) $-2x^2+5x+7$.

484•. 1) $-9x^2+12x-4$; 3) $6x^2-13x+6$; 5) $2x^2-7x+3$;

2) $16t^2+24t+9$; 4) $10x^2+19x-2$; 6) $3x^2-x-10$.

485••. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2+8x-9}{2x+18}$; 4) $\dfrac{2a^2-5a+2}{4-a^2}$;

2) $\dfrac{3x+6}{x^2+12x+24}$; 5) $\dfrac{m^2-11m+10}{20+8m-m^2}$;

3) $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-16}$; 6) $\dfrac{3t^2+16t-12}{10-13t-3t^2}$.

Перед скороченням дробу його чисельник і знаменник розкладають на множники.

486••. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{2a-1}{10a^2-a-2}$; 2) $\dfrac{6a^2-5a+1}{1-4a^2}$; 3) $\dfrac{2-x-x^2}{2-5x+3x^2}$; 4) $\dfrac{3a^2+5a-2}{1-6a+9a^2}$.

487••. Знайдіть значення дробу:

1) $\dfrac{m^3+2m^2-8m}{m^2+4m}$ при $m=-1$; $m=2$; $m=0{,}5$; $m=0$;

2) $\dfrac{t^3-27}{-t^2+9}$ при $t=0$; $t=1$; $t=-2$; $t=-1$.

488••. Виділіть квадрат двочлена у тричлені:

1) $-x^2+4x-3$; 3) $-x^2-10x-23$; 5) $-4x^2-12x-4$;

2) $-x^2-2x-2$; 4) $-x^2+8x-11$; 6) $-9x^2+6x-3$.

489••. Визначте, при якому значенні змінної тричлен набуває найбільшого (найменшого) значення:

1) $t^2-4t+10$; 4) $3t^2-12t+48$;

2) x^2-6x-2; 5) x^2+3x-1;

3) $2x^2-4x+12$; 6) $\dfrac{1}{2}x^2+x-6$.

1) $(x-2)^2+3$ має найменше значення 3 при $x=2$;
2) $-(x+6)^2+1$ має найбільше значення 1 при $x=-6$.

Вправи для самооцінювання

1°. Виберіть числа, які є коренями квадратного тричлена $4x^2-4x-3$.

а) $\frac{3}{2}$ і $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{3}{2}$ і $\frac{1}{2}$; в) 3 і -1; г) -3 і 1.

2°. Укажіть квадратний тричлен, який має корені $-1{,}5$ та 6.

а) $2x^2-9x-18$; в) $x^2+7{,}5x+9$;

б) $x^2+4{,}5x-9$; г) $2x^2-15x+18$.

3°. Знайдіть корені квадратного тричлена $-4x^2-11x-6$.

а) -2 і $-\frac{3}{4}$; б) коренів немає; в) $\frac{3}{4}$ і 2; г) -4 і $-\frac{3}{2}$.

4•. Укажіть, який із виразів є спільним множником чисельника та знаменника дробу $\frac{16-b^2}{b^2-12-b}$.

а) $b+4$; б) $b-4$; в) $4-b$; г) $b+3$.

5•. Скоротіть дріб $\frac{20+x-x^2}{3x-15}$.

а) $\frac{1}{3}(x+4)$; б) $-\frac{1}{3}(x-4)$; в) $-\frac{1}{3}(x+4)$; г) $\frac{1}{3}(x-5)$.

6•. Укажіть дріб, при скороченні якого отримаємо дріб $\frac{1+x}{x-3}$.

а) $\frac{x^2+x+2}{x^2-5x+6}$; б) $\frac{x^2-2-x}{x^2+6+5x}$; в) $\frac{x^2+x-2}{x^2-5x+6}$; г) $\frac{x^2-2-x}{6-5x+x^2}$.

7••. Визначте, при якому значенні x квадратний тричлен $2x^2-4x+7$ набуває найменшого значення.

а) При $x=0$; б) при $x=1$; в) при $x=-1$; г) при $x=2$.

8••. Знайдіть значення дробу $\frac{2m^2-5m+2}{mn-2n-3m+6}$ при $m=-10$, $n=-0{,}5$.

а) 6; б) -6; в) $-8{,}4$; г) $8{,}4$.

9••. Визначте значення b, при яких можна скоротити дріб $\frac{4x^2-9x+2}{x+2b}$.

а) $\frac{1}{8}$ і 1; б) $-\frac{1}{8}$ і 1; в) $-\frac{1}{8}$ і -1; г) $\frac{1}{8}$ і -1.

Вправи для повторення

490. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{32}{5-3\sqrt{5}}+\frac{32}{5+3\sqrt{5}}$;
3) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2$;
2) $\frac{4}{12-5\sqrt{6}}+\frac{4}{12+5\sqrt{6}}$;
4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2$.

491. Спростіть вираз:

1) $\frac{2k}{2k+t}-\frac{4k^2-t^2}{4k^2+t^2+4kt}$;
2) $\frac{3m}{3m+2n}-\frac{9m^2-4n^2}{9m^2+12mn+4n^2}$;
3) $\frac{3q+2}{q^2-2q+1}-\frac{20}{(q^2-1)^2}+\frac{2-3q}{q^2+2q+1}$;
4) $\frac{2d+3}{d^2-4d+4}-\frac{112}{(d^2-4)^2}+\frac{3-2d}{d^2+4d+4}$.

492. Із двох земельних ділянок, виділених агролабораторією для дослідів, зібрали 14,7 ц зерна. Наступного року, після використання нових методів агротехніки, урожай на першій ділянці підвищився на 80 %, а на другій – на 24 %. У результаті з двох ділянок було зібрано 21,42 ц зерна. Скільки центнерів зерна зібрали з кожної ділянки після використання нових методів агротехніки?

493. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{x+2}=\frac{4x-3}{x+2}$;
3) $\frac{z^2-z}{z+1}=\frac{2}{z+1}$;
2) $\frac{y^2+2}{y-2}=\frac{3y}{y-2}$;
4) $\frac{t}{t+2}=\frac{2-t^2}{t+2}$.

494. Розв'яжіть рівняння двома способами: а) розкриваючи дужки; б) вводячи заміну $t=2x-1$. Установіть, який із способів раціональніший:

1) $(2x-1)^2+3(2x-1)+2=0$;
3) $(2x-1)^2-7(2x-1)+10=0$;
2) $(2x-1)^2+4(2x-1)+3=0$;
4) $(2x-1)^2-6(2x-1)+8=0$.

§ 24. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- **як звести рівняння до квадратного;**
- **які рівняння називаються цілими раціональними;**
- **які рівняння називаються дробово-раціональними.**

У § 1 і § 7 ми ознайомилися з цілими та дробовими раціональними виразами. Серед рівнянь є також цілі раціональні та дробові раціональні. Якщо обидві частини рівняння – цілі вирази, то таке рівняння називається *цілим раціональним*, якщо ж одна з частин рівняння – дробовий вираз, то рівняння називається *дробово-раціональним*. Значна частина рівнянь, як цілих, так і дробових, зводиться до квадратних. Будь-яке раціональне рівняння можна замінити на його області визначення рівносильним йому цілим рівнянням, ліва частина якого – многочлен стандартного вигляду, а права – нуль.

Нагадаємо, що коли рівняння з однією змінною записано у вигляді $P(x)=0$, де $P(x)$ – многочлен стандартного вигляду, то степінь цього многочлена називають степенем рівняння. Наприклад, $\frac{1}{2}x^3-8x+5=0$ – рівняння третього степеня.

Степенем довільного цілого рівняння вважають степінь рівносильного йому рівняння вигляду $P(x)=0$, де $P(x)$ – многочлен стандартного вигляду. Можна довести, що рівняння третього степеня мають не більше як три корені, четвертого – не більше як чотири корені і т. д. Взагалі, рівняння n-го степеня має не більше як n коренів. Це доведення досить складне, з його доведенням ви ознайомитеся пізніше.

Зауважимо, що рівняння третього й четвертого степенів мають свої формули коренів, але вони також складні. Для рівнянь степенів, вищих за четвертий степінь, таких загальних формул немає.

У практиці часто трапляються рівняння, які за допомогою спеціальних прийомів зводяться до розв'язування квадратних рівнянь.

Зупинимось на найпоширеніших:

1) рівняння, що зводяться до добутку, який дорівнює 0;

2) рівняння, що розв'язуються способом введення нової змінної;

3) дробово-раціональні рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $3x^3-x^2+18x-6=0$.

Розв'язання

Як записати

$3x^3-x^2+18x-6=0,$

$3x^3-x^2+(18x-6)=0,$

$x^2(3x-1)+6(3x-1)=0,$

$(3x-1)(x^2+6)=0,$

$3x-1=0$ або $x^2+6=0,$

$x=\frac{1}{3};$ коренів немає.

Відповідь. $x=\frac{1}{3}$.

Як пояснити

Використовуємо рівносильні перетворення: розкладаємо ліву частину даного рівняння на множники способом групування. Отримуємо $(3x-1)(x^2+6)=0$. Відомо, що добуток дорівнює нулю, якщо один з його множників дорівнює нулю. Звідси лінійне рівняння $3x-1=0$ має єдиний корінь $x=\frac{1}{3}$, а квадратне рівняння $x^2+6=0$ не має коренів.

Таким чином, $x=\frac{1}{3}$.

Зауваження. Якщо ціле раціональне рівняння має вигляд $P(x)=0$, де $P(x)$ – многочлен стандартного вигляду, то зручно розкладати ліву частину рівняння на множники (якщо це можливо).

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $x^4-8x^2-9=0$.

Розв'язання

Як записати

$x^4-8x^2-9=0.$

Нехай $x^2=t$ $(t\geqslant 0)$.

Тоді $t^2-8t-9=0,$

$D_1=(-4)^2-4\cdot(-9)=25,$

$t=4\pm 5,\ t_1=-1,\ t_2=9.$

1) $x^2=-1$ або 2) $x^2=9,$

коренів немає; $x=\pm 3.$

Відповідь. $x=\pm 3$.

Як пояснити

Дане рівняння четвертого степеня легко розв'язується за допомогою введення нової змінної. Позначаємо $x^2=t$, отримуємо квадратне рівняння $t^2-8t-9=0$, корені якого -1 і 9. Враховуючи заміну, маємо рівняння $x^2=-1$ та $x^2=9$. Перше з них не має розв'язків, а коренями другого є числа 3 і -3. Таким чином, $x=\pm 3$.

Рівняння, розв'язане у прикладі 2, можна записати в загальному вигляді: $a\cdot x^4+b\cdot x^2+c=0$, де $a\neq 0$. При введенні нової змінної $x^2=t$, де $t\geqslant 0$, його зводять до квадратного $at^2+bt+c=0$. Повертаючись до заміни, знову отримують неповне квадратне рівняння, тому такі рівняння отримали назву *біквадратні рівняння* (*bi* – двічі).

Традиційним способом розв'язування дробово-раціональних рівнянь є зведення до спільного знаменника всіх доданків, які в більшості випадків переносять у ліву частину рівняння, і використовують умову рівності дробу нулю, тобто *дріб* $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ *тоді і тільки тоді, коли* $P(x)=0$, а $Q(x)\neq 0$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x}$.

Розв'язання

Як записати

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x},$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{8}{x(x-2)(x+2)}.$$

ОДЗ: $x\neq 0,\ x\neq -2,\ x\neq 2.$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x(x-2)}-\frac{8}{x(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{x^2-2x+x+2-8}{x(x-2)(x+2)}=0,\quad x^2-x-6=0,$$

$x=3$ або $x=-2$

($x=-2$ не задовольняє ОДЗ).

Відповідь. $x=3$.

Як пояснити

Розкладаємо кожний із знаменників на множники. Знаходимо ОДЗ рівняння: $x\neq 0$ та $x\neq \pm 2$. Переносимо всі доданки в ліву частину рівняння, зводимо їх до спільного знаменника. Виконавши рівносильні перетворення, отримуємо дробове рівняння: $\frac{x^2-x-6}{x(x-2)(x+2)}=0$. Звідси корені рівняння $x^2-x-6=0$ є можливими коренями заданого рівняння. Враховуючи ОДЗ, маємо, що $x=3$ – єдиний корінь.

Вправи для закріплення

495°. Визначте степінь рівняння:

1) $3x^2-x+5=0$; 2) $3x+1=0$; 3) $7x^3-2x-1=0$;

4) $2x^4-5x+x^{10}=0$; 5) $\frac{1}{3}x+\frac{2x^5}{3}=x^2$; 6) $x^6-\left(x^3-2\right)^2=0$.

496°. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x(x-3)+4(x-3)=0$; 5) $(x-3)(x+3)=5x-13$;

2) $(3x-1)(x+5)-2(x+5)=0$; 6) $(x+4)(2x-1)=x(3x+11)$;

3) $x^2-16=0$; 7) $-x(4x+1)=(x+2)(x-2)$;

4) $81-x^2=0$; 8) $7(1-x)=(2x+3)(1-x)$.

497°. Розв'яжіть біквадратне рівняння:

1) $x^4+5x^2-36=0$; 3) $x^4+17x^2-18=0$; 5) $x^4-8x^2+16=0$;

2) $x^4-13x^2+36=0$; 4) $x^4-8x^2-9=0$; 6) $25x^4-40x^2+16=0$.

498°. Знайдіть корені біквадратного рівняння, якщо це можливо:

1) $x^4-26x^2+25=0$; 3) $9x^4-32x^2-16=0$; 5) $x^4+25-10x^2=0$;

2) $x^4+8x^2-9=0$; 4) $100x^4-41x^2+4=0$; 6) $16x^4-72x^2+81=0$.

Розв'яжіть рівняння (499–501).

499•. 1) $\frac{x^2-x}{3}=\frac{2x+4}{5}$; 3) $\frac{x^2+2x}{2}=\frac{x^2+24}{7}$;

2) $\frac{x^2-3}{2}-6x=5$; 4) $\frac{3x^2+x}{4}-\frac{2-7x}{5}=\frac{3x^2+17}{10}$.

500•. 1) $(-x-1)(x-4)=x(4x+11)$; 4) $(8x-1)(2x-3)-(4x-1)^2=38$;

2) $5(x-2)=(3x+2)(x-2)$; 5) $\frac{x^2-4}{3}+4x=3$;

3) $-x\left(\frac{1}{3}-x\right)=-(1+x)(1-x)$; 6) $\frac{4x^2+x}{3}-\frac{5x-1}{6}=\frac{x^2+17}{9}$.

501•. 1) $x^4-x^2=\frac{\left(1+2x^2\right)\left(2x^2-1\right)}{4}$; 2) $0{,}5y^3-0{,}5y(y+1)(y-3)=7$.

502•. Доведіть, що рівняння:

1) $3x^6+2x^4+7x^2+1=0$ не має коренів;

2) $2x^8+x^6+5x^2=0$ не має ні додатних, ні від'ємних коренів;

3) $7x^5+3x^3+x-0{,}1=0$ не має від'ємних коренів.

Проаналізуйте знак лівої частини рівняння.

503°. Розв'яжіть рівняння, використовуючи введення нової змінної:

1) $(2x^2+3)^2-5(2x^2+3)+4=0$;
2) $(y^2-2y)^2-7(y^2-2y)-8=0$;
3) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$;
4) $(2x^2+x-1)(2x^2+x-4)+2=0$.

Розв'яжіть рівняння (504–506).

504°. 1) $(y^2+3)^2=28(y^2+3)-171$;
2) $(t^2+4t)^2-(t^2+4t)=20$;
3) $(m^2+m)(m^2+m-5)=84$;
4) $2(x^2-x+1)^2-3(x^2-x+1)-2=0$.

505°. 1) $\frac{x^2}{3-x}=\frac{2x}{3-x}$;
2) $\frac{x^2-1}{x+5}=\frac{5-x}{x+5}$;
3) $\frac{x^2+3x}{x-4}=\frac{x^2-x}{4-x}$;
4) $\frac{x^2-6x}{3x-1}=\frac{3x-4}{1-3x}$.

506°. 1) $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{3x+2}{x}$;
2) $\frac{y+3}{y-3}=\frac{2y+3}{y}$;
3) $\frac{4t+1}{t-3}=\frac{3t-8}{t+1}$;
4) $\frac{5a-2}{2a+1}=\frac{3a+2}{a+3}$.

507°. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{x^2-2x}{x+4}=\frac{x-2}{4+x}$;
2) $\frac{x^2-2x}{2x-1}=\frac{4x-3}{1-2x}$;
3) $\frac{5x-2}{x+2}=\frac{6x-21}{x-3}$;
4) $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$.

Розв'яжіть рівняння (508–509).

508°. 1) $\frac{4x^2-11x-3}{3-x}=0$;
2) $\frac{2x^2+x-1}{2x-1}=2$;
3) $\frac{3}{x-2}=2x+1$;
4) $\frac{2y^2+5y+2}{y^2-4}=1$.

509°°. 1) $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-5)=3$;
2) $(t^2+5t-23)^2-2(t^2+5t-23)=-1$;

3) $(x^2-x-16)(x^2-x+2)=88;$

4) $(2x^2+7x-8)(2x^2+7x-3)-6=0.$

Розв'яжіть рівняння (510–511), розклавши ліву частину на множники.

510••. 1) $t^5+t^4-5t^3-5t^2+4t+4=0;$

2) $y^5-y^4-6y^3+6y^2-7y+7=0.$

511••. 1) $x^3-x^2-4(x-1)^2=0;$ 3) $6x^3-31x^2-31x+6=0;$

2) $2y^3+2y^2=(y+1)^2;$ 4) $5x^3-19x^2-38x+40=0.$

Розв'яжіть рівняння (512–515).

512••. 1) $\frac{3x^2-5x-2}{2-x}=0;$ 3) $\frac{9}{x+3}=2x-1;$

2) $\frac{3y^2+y-24}{9-y^2}=-2;$ 4) $\frac{4x+2}{1+2x}=x-6.$

513••. 1) $\frac{3x-9}{x-1}+\frac{x+6}{x+1}=3;$ 3) $\frac{3}{x+2}-\frac{3}{2-x}=\frac{12}{x^2-4};$

2) $\frac{3y-1}{2y-3}-\frac{6y+16}{2y+3}=1;$ 4) $\frac{2y-8}{y-5}+\frac{10}{y^2-25}=\frac{y+4}{y+5}.$

514••. 1) $\frac{x-7}{x-2}+\frac{x+4}{x+2}=1;$ 3) $\frac{4}{x+5}-\frac{2}{x-5}=\frac{3}{25-x^2};$

2) $\frac{3y-3}{3y-2}+\frac{6+2y}{3y+2}-2=0;$ 4) $\frac{2t-2}{t+3}+\frac{18}{9-t^2}=\frac{t-6}{t-3}.$

515••. 1) $\frac{5}{x-2}+1=\frac{14}{x^2-4x+4};$

2) $\frac{1}{3x+1}-\frac{1}{9x^2+6x+1}=2;$

3) $\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{9}{(x+3)^2}-\frac{6}{x^2-9}=0;$

4) $\frac{3}{1-4y^2}+\frac{4}{2y^2+y}=\frac{3}{4y^2+1+4y}.$

516.** **Знайдіть суму коренів рівняння:**

1) $\dfrac{5}{y+3}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{2+y}{y^2+3y}$; 2) $\dfrac{2x-7}{x-4}-\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x+6}{(x-4)(x+1)}$.

Розв'яжіть рівняння (517–518).

517.** 1) $\dfrac{7a-6}{a^3+27}=\dfrac{2}{a^2-3a+9}-\dfrac{1}{a+3}$;

2) $\dfrac{y+3}{9y^2+3y+1}+\dfrac{3}{27y^3-1}=\dfrac{1}{3y-1}$;

3) $\dfrac{1-x}{x^3-3x^2-4x+12}-\dfrac{2}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-2}$;

4) $\dfrac{1}{x^3-x}+\dfrac{1}{x^3+x}-\dfrac{2}{x^4-1}=0$.

518*. 1) $x^2+3x=\dfrac{8}{x^2+3x-2}$;

2) $(x-2)(x+7)=\dfrac{19}{(x+1)(x+4)}$;

3) $\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$;

4) $\left(x^2-5x\right)(x+3)(x-8)+108=0$.

Можлива заміна:
$x^2+3x=y$;
$x^2+5x=t$;
$x^2+2x=m$;
$x^2-5x=y$.

Вправи для самооцінювання

1°. Укажіть рівняння, степінь якого дорівнює 5.

а) $2x^5-2\left(x^5-1\right)+x^4-x=3$;

б) $x^6+3x^5-\left(x^3-2\right)^2=0$;

в) $x^5-2\left(x^2-1\right)=x^5$;

г) $\left(x^2-1\right)\left(x^3+2\right)-\left(x^2+4\right)\left(x^3-1\right)=3$.

2°. Визначте натуральні корені рівняння $0{,}5x^3-72x=0$.

а) 0 і 12; б) −12 і 12; в) −12; г) 12.

3°. Розв'яжіть біквадратне рівняння $5x^4-7x^2+2=0$.

а) 1 і $\dfrac{2}{5}$; б) ±1; в) ±1 і $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$; г) $\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

4•. Знайдіть суму коренів цілого рівняння $(6-x)(6+x)-(x-11)x=18$.

а) 5,5; б) 9; в) −5,5; г) −9.

5•. Визначте, яке з цілих рівнянь не має дійсних розв'язків.

а) $x(x-2)(x-3)(x+5)(6-2x)=0$; в) $2x\left(x^2+5x-6\right)=0$;

б) $\left(m^2+4\right)^2+6m^2+11=0$; г) $m^{14}+m^5-2=0$.

6•. Укажіть числа, які не можуть бути розв'язками рівняння

$$\frac{18}{4x^2+4x+1}-\frac{1}{2x^2-x}=\frac{6}{4x^2-1}.$$

а) 0 і $\pm\frac{1}{2}$; б) 0 і $-\frac{1}{2}$; в) $\pm\frac{1}{2}$; г) 0 і $\frac{1}{2}$.

7••. Знайдіть добуток коренів рівняння у завданні 6.

а) $-1{,}4$; б) $1{,}4$; в) $0{,}05$; г) $-0{,}05$.

8••. Розв'яжіть рівняння $\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2-11x}=\frac{4-x}{11-x}$.

а) 0 і 7; б) 2 і 5; в) коренів немає; г) 10 і -3.

9••. Знайдіть суму коренів рівняння $4\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+5\left(\frac{x+1}{x}\right)+1=0$.

а) $-1{,}3$; б) $-0{,}7$; в) $-1{,}25$; г) $0{,}3$.

Вправи для повторення

519. Розв'яжіть систему рівнянь двома способами: а) способом підстановки; б) за допомогою теореми, оберненої до теореми Вієта, якщо $x_1=x$, $x_2=y$, де x_1, x_2 – корені деякого квадратного рівняння.

1) $\begin{cases}x+y=-1,\\xy=-12;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=-5,\\xy=-14;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x+y=-2,\\xy=-15;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=-2,\\xy=-8.\end{cases}$

520. Знайдіть, при якому значенні b рівняння:

1) $x^2-bx+15=0$ має корінь $x_0=3$;

2) $t^2-bt+12=0$ має корінь $t_0=4$;

3) $y^2-by+30=0$ має корінь $y_0=5$;

4) $z^2-bz+24=0$ має корінь $z_0=6$.

521. Визначте корені рівняння та зробіть перевірку:

1) $\dfrac{u^2-25}{u^3-4u^2-25}=0;$ 3) $\dfrac{r^2-1}{3r^3-4r^2+1}=0;$

2) $\dfrac{n^2-9}{n^3+2n^2-45}=0;$ 4) $\dfrac{p^2-4}{2p^3-3p^2-4}=0.$

$\dfrac{A}{B}=0$, якщо $\begin{cases}A=0,\\B\neq 0,\end{cases}$ де A, B – многочлени.

522. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x^2-xy=6,\\2x+y=3;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2-xy=12,\\3x+y=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-xy=20,\\4x+y=15;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2-xy=30,\\5x+y=24.\end{cases}$

Перевіркою переконайтеся, що $x=0$ не є коренем першого рівняння системи, а отже, не є розв'язком і самої системи рівнянь. Помноживши обидві частини другого рівняння на x, отримаєте протилежні вирази: $-xy$ та xy. Тому в результаті використання способу додавання знайдете одразу квадратне рівняння.

!? Описаний спосіб поширюється і на складніші системи рівнянь. Наприклад:

1) $\begin{cases}x^2-4xy=12,\\2x+y=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2-6xy=-32,\\2x+3y=13.\end{cases}$

523. Складіть математичну модель задачі, ввівши одну змінну:

1) сума двох чисел дорівнює 10, а добуток – 21;

2) одне з двох натуральних чисел на 13 більше за друге, а їх добуток дорівнює 90;

3) півпериметр деякого прямокутника дорівнює 17 см, а площа – 70 см^2;

4) довжина ділянки прямокутної форми на 3 м більша за її ширину, а площа дорівнює 54 м^2.

!? Який вид рівнянь є математичними моделями заданих задач?

§ 25. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ ТА РІВНЯНЬ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

Опрацювавши цей параграф, ви будете знати:

- як скласти математичну модель задачі;
- як розв'язати задачу за допомогою рівняння;
- як проаналізувати отриманий розв'язок рівняння.

Те, що рівняння можуть слугувати математичними моделями реальних ситуацій, вам відомо. Цілий ряд відповідних прикладів ми розглянули ще в 7-му класі. Розглянемо кілька прикладів застосування розглянутих у попередніх параграфах раціональних рівнянь до розв'язування задач.

Задача 1. Відстань між двома населеними пунктами становить 60 км. Перед відправкою поїзд затримали на 5 хв. Щоб запобігти аварійності та прийти у призначений пункт за розкладом, машиніст збільшив швидкість поїзда на 10 км/год. З якою швидкістю їхав поїзд?

Розв'язання

Як записати

	v, км/год	s, км	t, год
За розкладом	x	60	$\frac{60}{x}$
Фактично	$x+10$	60	$\frac{60}{x+10}$ на 5 хв менше

Позначимо швидкість, з якою поїзд мав рухатися за розкладом, через x км/год, тоді фактична швидкість $(x+10)$ км/год. Поїзд мав проїхати відстань 60 км за $\frac{60}{x}$ год, але через затримку затратив $\frac{60}{x+10}$ год, що на 5 хв $=\frac{5}{60}$ год $=\frac{1}{12}$ год менше, ніж запланований час.

Як пояснити

Складаючи математичну модель задачі, приходимо до дробово-раціонального рівняння $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{12}$. Виконуємо рівносильні перетворення, після чого отримуємо рівняння:

$$\frac{x^2+10x-7200}{12x(x+10)}=0.$$

Використовуючи умову рівності дробу нулю, маємо: $x_1=-90$, $x_2=80$, причому $x(x+10)\neq 0$, тобто $x\neq 0$, $x\neq -10$.

Оскільки швидкість не може бути від'ємним числом, то розв'язком може бути

Продовження розв'язання задачі 1

Як записати

Складаємо рівняння:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{12},$$

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}-\frac{1}{12}=0,$$

$$\frac{720(x+10)-720x-x(x+10)}{12x(x+10)}=0,$$

$$\frac{720x+7200-720x-x^2-10x}{12x(x+10)}=0,$$

$$\begin{cases}x^2+10x-7200=0,\\ x\neq 0,\ x\neq -10.\end{cases}$$

$x^2+10x-7200=0$, звідси

$x_1=-90<0$ (не задовольняє умову задачі),

$x_2=80$. Отже, $x+10=90$.

Відповідь. 90 км/год.

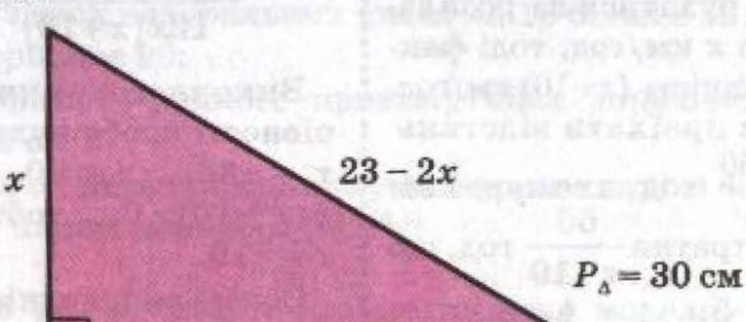
Як пояснити

лише $x_2=80$. Перевіркою переконуємося, що $x_2=80$ задовольняє умову $x(x+10)\neq 0$. Тому швидкість поїзда за розкладом мала бути 80 км/год, а рухався він зі швидкістю на 10 км/год більше, тобто зі швидкістю 90 км/год.

Зауважуємо, що розв'язувати складене рівняння можна будь-яким відомим вам способом, проте записи введення змінної, процесу створення математичної моделі (рівняння), його розв'язання та відповідь є обов'язковими.

З а у в а ж е н н я. При розв'язуванні задач за допомогою рівнянь не обов'язково знаходити ОДЗ рівняння. Досить проаналізувати, що згідно з умовою задачі $x>0$, тому $x+10>0$. Таким чином, жодний із знаменників не перетворюється на нуль, і отримані додатні розв'язки рівняння задовольняють умову задачі.

Задача 2. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а один із катетів на 7 см менший, ніж другий. Знайдіть сторони трикутника.



Розв'язання

Як записати	Як пояснити
Нехай менший катет трикутника дорівнює x см, тоді більший катет – $(x+7)$ см, а гіпотенуза дорівнює $P_\Delta-(x+x+7)=(23-2x)$ см. З теореми Піфагора маємо рівняння: $x^2+(x+7)^2=(23-2x)^2$, $x^2+x^2+14x+49=$ $=529-92x+4x^2$, $2x^2-106x+480=0, \mid :2$, $x^2-53x+240=0$. Звідси $x_1=5$, $x_2=48$. Однак $x_2=48>P_\Delta$ (не задовольняє умову задачі). Отже, $x=5$, $x+7=12$, $23-2x=13$. *Відповідь.* 5 см, 12 см, 13 см.	Традиційно сторони прямокутного трикутника позначають: a і b – катети, c – гіпотенуза. При $a<b$ позначимо $a=x$, $b=x+7$ і $c=P_\Delta-(a+b)=$ $=P_\Delta-(x+x+7)=30-(2x+7)=$ $=23-2x$. За теоремою Піфагора: $c^2=a^2+b^2$ або $(23-2x)^2=x^2+(x+7)^2$. (1) Коренями квадратного рівняння, до якого зводиться рівняння (1), є $x=5$ та $x=48$. Однак $x=48$ не задовольняє умову задачі, бо довжина сторони трикутника не може бути більшою за його периметр. Отже, $x=5$. Тому катети трикутника дорівнюють 5 см і 12 см, а гіпотенуза – 13 см.

Вправи для закріплення

Розв'яжіть задачі за допомогою рівнянь (524–553).

524°. 1) Сума двох чисел дорівнює 80, а добуток 1200. Знайдіть ці числа.

2) Різниця двох чисел дорівнює 15, а добуток 1000. Знайдіть суму цих чисел.

525°. Чи вистачить 70 м сітки для огорожі парканом ділянки прямокутної форми, ширина якої на 13 м менша, ніж довжина, якщо площа ділянки дорівнює 300 м^2?

526°. Знайдіть довжину і ширину прямокутника, якщо їх різниця становить 6 дм, а площа прямокутника дорівнює 280 дм^2.

527°. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 505 більший за їх суму. Знайдіть ці числа.

528°. Квадрат суми двох послідовних натуральних чисел на 13 більше потроєного квадрата більшого з них. Знайдіть ці числа.

529°. 1) Відстань між двома містами річкою дорівнює 80 км. На подолання цієї відстані туди і назад катер затрачає 9 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки 2 км/год.

2) На здійснення рейсу між містами A і B та B і A теплохід затрачає 20 год. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо відстань між містами дорівнює 198 км, а швидкість течії річки становить 2 км/год.

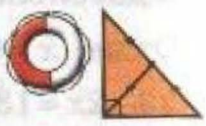
530°. 1) Відомо, що один із мулярів затрачає на виконання деякої кладки на 5 год більше, ніж другий. Знайдіть час, який потрібний кожному муляру окремо для здійснення цієї кладки, якщо обидва муляри, працюючи разом, можуть її зробити за 6 год.

2) Майстер з учнем виконують деяку роботу за 12 год. Працюючи окремо, майстер виконує цю роботу на 10 год швидше, ніж учень. Знайдіть час, який потрібний для виконання цієї роботи майстру й учню.

531°. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 14 см, а діагональ 5 см.

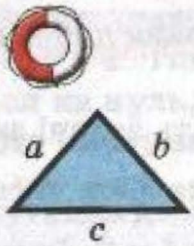
532°. 1) Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо один із його катетів на 4 см, а другий на 2 см менші, ніж гіпотенуза.

2) Знайдіть медіану прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо периметр трикутника дорівнює 60 см, а різниця катетів становить 14 см.



533°. Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 77.

534•. Підберіть такі три числа, які можуть бути довжинами сторін деякого трикутника, якщо одне з них на 4 менше, ніж друге, а третє – на 3 більше, ніж друге.



Нерівність трикутника

$a+b>c$

$a+c>b$

$b+c>a$

535•. У залі кінотеатру кількість рядів на 16 менше, ніж кількість місць у ряду. Чи можна в цьому залі розмістити 6 класів учнів для перегляду кінофільму, якщо в кожному з них 32 учні?

536•. 1) Дві друкарки, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 2 год 24 хв. Знайдіть час, який потрібний кожній друкарці для виконання цієї самої роботи окремо, якщо половину роботи друга друкарка виконує на 1 год швидше, ніж перша.

2) Дві бригади, працюючи разом, виконують деяку роботу за 3 год 36 хв, а працюючи окремо, половину цієї самої роботи перша бригада виконує на 1,5 год швидше, ніж друга. За який час може виконати цю роботу кожна бригада, працюючи окремо?

537*. 1) Щоб ліквідувати затримку в 1 год на відстані 720 км, автомобіль збільшив заплановану швидкість на 10 км/год. Знайдіть швидкість, з якою мав рухатись автомобіль.

2) Поїзд затримався в дорозі на 4 хв. Щоб ліквідувати запізнення на перегоні в 20 км, було збільшено швидкість поїзда на 10 км/год. Знайдіть швидкість, з якою мав рухатись поїзд.

538*. Моторний човен пройшов 28 км проти течії річки і 16 км за течією, затративши на весь шлях 3 год. Знайдіть швидкість моторного човна в стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 1 км/год.

539.** Із пункту A в пункт B велосипедист проїхав однією дорогою, довжина якої 24 км, а повертався іншою, яка коротша від першої на 6 км. На зворотній дорозі велосипедист збільшив швидкість на 2 км/год і затратив на 54 хв менше. Знайдіть швидкість, з якою велосипедист повертався назад.

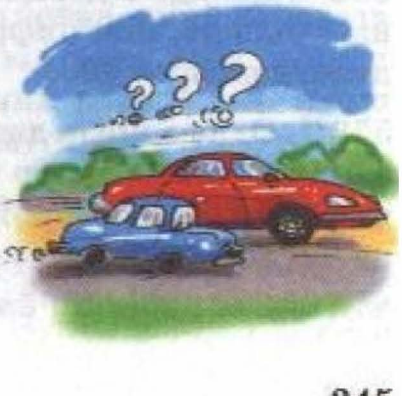
540.** Відстань 48 км між селищем і містом однією дорогою мотоцикліст проїжджає за певний час. Назад, повертаючись іншою дорогою в селище, яка коротша від першої на 8 км, він збільшує швидкість на 4 км/год і затрачає на 1 год менше, ніж на дорогу в місто. З якою швидкістю рухався мотоцикліст, повертаючись назад?

541.** Катер проходить 12 км проти течії річки і 5 км за течією. При цьому він на весь шлях затратив стільки само часу, скільки йому потрібно було б, якби він ішов 18 км озером. Яка власна швидкість катера, коли відомо, що швидкість течії річки становить 3 км/год?

542.** Катер пройшов 15 км проти течії річки і 6 км за течією, затративши на весь шлях стільки часу, скільки потрібно для проходження 22 км озером. Знайдіть власну швидкість катера, коли відомо, що швидкість течії річки становить 2 км/год.

543.** Теплохід пройшов униз річкою 144 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 8,5 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода в стоячій воді становить 34 км/год.

544.** Два автомобілі вирушають одночасно з одного міста в інше. Швидкість першого на 20 км/год більша, ніж швидкість другого, тому він прибув на місце на 2 год 24 хв раніше, ніж другий. З якою швидкістю їхав перший автомобіль, якщо відстань між містами дорівнює 420 км?



545••. Знаменник звичайного нескоротного дробу на 3 більший, ніж чисельник. Якщо до чисельника цього дробу додати 5, а до знаменника – 9, то додатний дріб збільшиться на 0,1. Знайдіть цей дріб.

546••. Знайдіть дріб, обернений до звичайного нескоротного дробу, чисельник якого на 5 більший від знаменника, причому, якщо від чисельника дробу відняти 3, а до знаменника додати 9, то отриманий дріб буде менший за початковий на $\frac{17}{18}$.

547••. Різниця кубів двох натуральних чисел становить 1603. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 7.

548••. Сума кубів двох натуральних чисел становить 1547. Знайдіть, скільки відсотків складає менше число від більшого, якщо їх сума дорівнює 17.

$\frac{a}{b}\cdot 100\,\% = m\,\%.$

Цей запис означає, що a складає m % від b.

549••. Дві труби, відкриті одночасно, можуть наповнити басейн водою за 3 год 45 хв. Якщо відкрити лише першу трубу, то вона наповнить весь басейн водою на 4 год швидше, ніж у разі наповнення басейну лише другою трубою. Скільки часу потрібно кожній трубі для наповнення водою басейну?

550••. Один робітник може виконати певну роботу на 24 год швидше, ніж другий. Працюючи разом, вони виконують її за 35 год. Скільки часу потрібно кожному з робітників, щоб виконати певну роботу, працюючи самостійно?

551••. Висота h (у м), на якій через t секунд опиниться тіло, яке підкинули вертикально вгору, обчислюється за формулою $h = v_0 t - 5t^2$, де v_0 – початкова швидкість (у м/с). Чи буде тіло на висоті:

1) 240 м, якщо за 2 с воно піднялося вгору на 120 м;

2) 250 м, якщо за 1 с воно піднялося вгору на 75 м?

552••. Знайдіть двоцифрове число, якщо цифра його десятків на 2 більша, ніж цифра одиниць, а добуток числа і суми його цифр дорівнює 900.

553••. Одна з цифр двоцифрового числа на 3 менша за іншу, а сума квадратів цього числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, дорівнює 1877. Знайдіть це число.

Вправи для самооцінювання

1°. Виберіть рівняння, за допомогою якого можна знайти розв'язок задачі. Визначте два додатних числа, сума яких дорівнює 40, а добуток – 256.

а) $x(20-x)=256$; в) $x(40-x)=256$;

б) $x(40-x)=256-40$; г) $x(20-x)=256-40$.

2°. Виберіть два оптимальні мотки сітки з нижчевказаною довжиною для огорожі ділянки землі прямокутної форми, довжина якої на 10 м більша, ніж ширина, а площа дорівнює 600 м^2.

а) 110 м; б) 100 м; в) 90 м; г) 80 м.

3°. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо один з його катетів на 1 см, а другий на 8 см менші за гіпотенузу.

а) 65 см^2; б) 60 см^2; в) 32,5 см^2; г) 30 см^2.

4•. Укажіть два рівняння, які є математичною моделлю задачі. Мотоцикліст запланував відстань у 240 км подолати за деякий час. Однак, збільшивши швидкість на 12 км/год, він її подолав на 1 год швидше. Знайдіть швидкість, з якою мав їхати мотоцикліст.

а) $\frac{240}{x}-\frac{240}{x+12}=1$; в) $\frac{240}{x+12}-\frac{240}{x}=1$;

б) $\frac{240}{x}-\frac{240}{x+1}=12$; г) $\frac{240}{x+1}-\frac{240}{x}=12$.

5•. У актовій залі школи кількість рядів на 4 більша, ніж кількість стільців у ряду. Знайдіть два числа, які можуть визначати кількість місць актової зали.

а) 160; б) 192; в) 221; г) 255.

6•. Знайдіть власну швидкість моторного човна, який курсував по річці між двома пристанями, відстань між якими дорівнює 60 км, затрачаючи на повний рейс 9 год, якщо швидкість течії річки становить 1,5 км/год.

а) 12 км/год; б) 13,5 км/год; в) 15 км/год; г) 16,5 км/год.

7••. Два майстри, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 2 год 24 хв. Знайдіть час, який потрібно затратити

кожному майстру, працюючи окремо, коли відомо, що один із них виконує цю роботу на 2 год швидше, ніж другий.

а) 3 год і 5 год; в) 4 год і 6 год;

б) 5 год і 7 год; г) 6 год і 8 год.

8••. Ідентифікуйте до кожної умови (а–г), де задано різницю і суму квадратів деяких чисел a і b, відповідне зведене квадратне рівняння (1–4), за допомогою якого знаходять числа a і b.

а) $\begin{cases} a+b=5, \\ a^2+b^2=625; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a+b=4, \\ a^2+b^2=58; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a+b=5, \\ a^2+b^2=433; \end{cases}$

г) $\begin{cases} a+b=4, \\ a^2+b^2=346. \end{cases}$

1) $x^2-5x-204=0;$

2) $x^2-5x-300=0;$

3) $x^2-4x-165=0;$

4) $x^2-4x-21=0.$

а	
б	
в	
г	

9••. Катер пройшов 32 км проти течії річки і 10 км за течією, затративши стільки само часу, якби він рухався по озеру 45 км. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

а) 22 км/год; б) 20 км/год; в) 18 км/год; г) 16 км/год.

Вправи для повторення

554. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-5}}\right)^{-2}\cdot\left(a^{-3}b^{4}\right)^{3}:\left(\dfrac{a^{3}}{b^{2}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{a^{-4}}{b^{-5}}\right)^{0};$

2) $\left(\dfrac{b^{-3}}{a^{-4}}\right)^{-3}\cdot\left(a^{-2}b^{2}\right)^{-3}:\left(\dfrac{a^{6}}{b^{3}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{b^{-3}}{a^{-7}}\right)^{0};$

3) $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-2}}\right)\cdot\left(a^{-3}b^{2}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{b^{-2}}{a^{-3}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{b^{-4}}{a^{-3}}\right)^{0};$

4) $\left(\dfrac{b^{-2}}{a^{-3}}\right)^{-3}:\left(a^{-2}b^{3}\right)^{4}\cdot\left(\dfrac{b^{-6}}{a}\right)^{-1}:\left(\dfrac{a^{-5}}{b^{-4}}\right)^{0}.$

555. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 3) $\dfrac{a-2\sqrt{3a}+3}{a-3}$; 5) $\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2}}{\sqrt{12}-\sqrt{10}}$;

2) $\dfrac{a-b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}$; 4) $\dfrac{5-2\sqrt{5a}+a}{a-5}$; 6) $\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)^2}}{\sqrt{21}-\sqrt{18}}$.

556. Турист спланував, що відстань, яка дорівнює 40 км, він подолає до сутінків. Однак, збільшивши швидкість на 1 км/год, він прибув у запланований пункт на 2 год раніше. З якою швидкістю рухався турист?

557. Не розв'язуючи рівняння:

1) $x^2+10x+6=0$; 3) $x^2-8x+7=0$;

2) $x^2+6x-13=0$; 4) $x^2+4x-9=0$,

знайдіть значення виразу:

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; в) $x_1^3+x_2^3$, де x_1, x_2 – корені кожного з рівнянь.

558. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2+5x-14$; 3) $x^2+5x+14$;

2) $-x^2-5x+14$; 4) $x^2-5x-14$.

Готуймося до тематичного оцінювання

«Задачі та рівняння, які зводяться до квадратних»

Запитання для самоконтролю

1. Що називається квадратним тричленом?

2. Що називається коренем квадратного тричлена?

3. Як розкласти квадратний тричлен на лінійні множники?

4. Які завдання вимагають використання розкладу квадратного тричлена на множники?

5. Які рівняння називаються цілими раціональними?

6. Які рівняння називаються дробово-раціональними?

7. Які рівняння називаються біквадратними і як їх розв'язують?

8. Який алгоритм розв'язування рівнянь за допомогою введення нової змінної?

9. Як розв'язують рівняння вигляду $P(x)=0$, де $P(x)$ – многочлен стандартного вигляду?

10. Які способи розв'язування дробово-раціональних рівнянь вам відомі?

11. Як скласти математичну модель задачі?

12. Чим відрізняється розв'язок задачі від розв'язків рівняння як математичної моделі задачі?

Завдання в тестовій формі

1°. Виберіть квадратний тричлен, коренями якого є числа –2 і 7.

А) $x^2+5x-14$; В) $-x^2-5x+14$; Д) $x^2-14x-5$.

Б) $x^2+5x+14$; Г) $x^2-5x-14$;

2°. Доберіть до кожного квадратного тричлена його корені.

А) x^2-6x+5; 1) $\{2;\ 3\}$;

Б) x^2-4x+3; 2) $\{3;\ 4\}$;

В) x^2-5x+6; 3) $\{2;\ 4\}$;

Г) $x^2-7x+12$; 4) $\{1;\ 5\}$;

Д) x^2-6x+8. 5) $\{1;\ 3\}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

3°. Виберіть два квадратні тричлени, які правильно розкладено на множники.

А) $x^2+5x-36=(x-9)(x+4)$; Г) $x^2+5x-6=(x+6)(x+1)$;

Б) $x^2+5x-14=(x-2)(x+7)$; Д) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

В) $x^2+5x-24=(x-3)(x-8)$;

4°. Укажіть дві правильні рівності раціональних дробів.

А) $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2+2x-8}=\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x-4)(x-2)}$; Г) $\dfrac{x^2-9x+10}{x^2-15x+50}=\dfrac{(x-10)(x+1)}{(x-10)(x-5)}$;

Б) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+9x+18}=\dfrac{(x-7)(x+3)}{(x+3)(x+6)}$; Д) $\dfrac{x^2+10x-16}{x^2-10x+16}=\dfrac{(x+8)(x-2)}{(x-8)(x-2)}$.

В) $\dfrac{x^2-7x-6}{x^2+5x-6}=\dfrac{(x-6)(x+1)}{(x+6)(x-1)}$;

5°. Виберіть квадратне рівняння, яке рівносильне рівнянню

$$(3x-1)(x+2)-20=0.$$

А) $3x^2+5x-22=0$; В) $3x^2+7x-22=0$; Д) $3x^2+6x-20=0$.

Б) $3x^2-7x-18=0$; Г) $3x^2+5x-18=0$;

6°. Укажіть біквадратне рівняння.

А) $x^4-x+3=0$; В) $x^4-x^2-2=0$; Д) $x^4+x^3-8=0$.

Б) $x^4+x^3-x=0$; Г) $x^4-16=0$;

7°. Складіть математичну модель текстової задачі.
Відомо, що одна сторона прямокутника на 3 см менша за другу, а його площа дорівнює 70 см^2.

А) $(x+3)\cdot x=70$; В) $(x+3x)\cdot 2=70$; Д) $x(x+3)=35$.

Б) $x\cdot 3x=70$; Г) $x(x-3)=70$;

8°. Укажіть два правильні переходи до квадратного рівняння за допомогою введення допоміжної змінної.

А) $2x^4-9x^2+4=0,\ 2y^2-9y^2+4=0$, де $y=x^2$;

Б) $x^4-3x^2-4=0,\ t^2-3t-4=0$, де $t=x^2$;

В) $(x-1)^4-2(x-1)-3=0,\ z^4-2z^2-3=0$, де $z=(x-1)^2$;

Г) $(2x^2-x)^2+2x^2-x+3=0,\ p^2-p+3=0$, де $p=2x^2-x$;

Д) $5x-11\sqrt{x}+2=0,\ 5r^2-11r+2=0$, де $r=\sqrt{x}$.

9°. Визначте квадратне рівняння, до якого зводиться дробово-раціональне рівняння $\dfrac{x-2}{x+4}+\dfrac{5}{x-4}=\dfrac{30}{x^2-16}$.

А) $x^2-11x-30=0$; В) $x^2-x-2=0$; Д) $x^2-x-12=0$.

Б) $x^2+x-2=0$; Г) $x^2+x-12=0$;

10°. Виберіть рівняння, яке є математичною моделлю задачі. Знайдіть катети прямокутного трикутника, коли відомо, що один із катетів на 2 см менший від другого, а гіпотенуза дорівнює 10 см.

А) $x^2+(x-2)^2=(10-2)^2$; Г) $x^2+(2-x)^2=10^2$;

Б) $x^2+(10-x)^2=(10+2)^2$; Д) $x^2+(2x)^2=10^2$.

В) $x^2+(x+2)^2=10^2$;

11•. Виберіть дріб, який отримали при скороченні $\frac{3x^2-7x+4}{9x^2-8x-1}$.

А) $\frac{3x+4}{9x+1}$; Б) $\frac{3x-4}{9x+1}$; В) $\frac{3x-4}{9x-1}$; Г) $\frac{3x+4}{9x-1}$; Д) $\frac{x+4}{3x-1}$.

12•. Ідентифікуйте парами рівносильні рівняння (А–Д) та (1–5).

А) $(x+3)^2=(2x-1)^2$; 1) $3x^2-16x+5=0$;

Б) $(3x+1)^2=(x-2)^2$; 2) $3x^2+10x+8=0$;

В) $(2x+3)^2=(x+1)^2$; 3) $3x^2-10x-8=0$;

Г) $(3x-2)^2=(2x+1)^2$; 4) $8x^2+10x-3=0$;

Д) $(2x-3)^2=(x+2)^2$. 5) $5x^2-16x+3=0$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

13•. Визначте серед умов (А–В) таку, яка задовольняє чотири із п'яти заданих рівнянь (1–5), і таку, що не задовольняє жодного з них.

А) $x=\pm4$; 1) $x^4-x^2-12=0$;

Б) $x=\pm1$; 2) $x^4-26x^2+25=0$;

В) $x=\pm2$. 3) $x^4+3x^2-28=0$;

4) $x^4-5x^2+4=0$;

5) $x^4-13x^2+36=0$.

А				
Б				
В				

14•. Доберіть до кожної встановленої залежності (А–Д) між сторонами (a і b) прямокутника його відповідний периметр (P), коли відомо, що площа цього прямокутника дорівнює 96 см².

А) $a:b=1:24$; 1) $P=44$ см;

Б) $a-b=29$; 2) $P=100$ см;

В) $a=6b$; 3) $P=40$ см;

Г) $b=a+10$; 4) $P=70$ см;

Д) $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$. 5) $P=56$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

15•. Утворіть квадратне рівняння, виконуючи рівносильні перетворення на всій області визначення дробово-раціонального рівняння $\frac{3x+11}{x+2}+\frac{2x-9}{x-4}=7$.

А) $7x^2-8x+6=0$; В) $x^2+4x-15=0$; Д) $2x^2-10x+6=0$.

Б) $5x^2+8x-6=0$; Г) $x^2-4x+3=0$;

16•. Визначте рівняння, розв'язками яких є протилежні числа:

1) $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4x+4}=1$; 3) $\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}=1$; 5) $\frac{3x^2-2x-4}{2x^2-3x-2}=1$.

2) $\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}=1$; 4) $\frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}=1$;

А) 1 і 3; Б) 3 і 5; В) 2 і 4; Г) 1 і 4; Д) 2 і 5.

17•. Знайдіть катети прямокутного трикутника, коли відомо, що їх сума дорівнює 14 см, а гіпотенуза – 10 см.

А) 4 см і 10 см; В) 2 см і 12 см; Д) 5,5 см і 8,5 см.
Б) 6 см і 8 см; Г) 4,5 см і 9,5 см;

18•. Знайдіть власну швидкість катера, якщо на рух від пристані *А* до *В* та від *В* до *А*, відстань між якими 80 км, затрачено 9 год, а швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

А) 16 км/год; В) 20 км/год; Д) 24 км/год.
Б) 18 км/год; Г) 22 км/год;

19•. Виберіть два рівняння, що задовольняють умову задачі. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 4 дні. Перший робітник може виконати цю роботу на 6 днів швидше, ніж другий. Скільки днів затратить на цю роботу перший робітник?

А) $\frac{1}{x}+\frac{1}{6x}=\frac{1}{4}$; В) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{6}$; Д) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{6}$.

Б) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$; Г) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{4}$;

20•. Знайдіть добуток коренів рівняння $\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3(x-2)}{x^2+x-2}$.

А) –6; Б) –3; В) 3; Г) 6; Д) –2.

21••. Виберіть заміну, яка зводить рівняння

$\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{5}{12}$ до вигляду $\frac{1}{t-a}+\frac{1}{t+a}=\frac{5}{12}$.

А) $t=x^2+2x+1$; В) $t=x^2+2x+3$; Д) $t=x^2$.

Б) $t=x^2+2x+2$; Г) $t=x^2+2x$;

22••. Укажіть рівняння, яке є математичною моделлю єгипетського трикутника.

А) $(x-7)^2+x^2=(x+1)^2$; Г) $(x-8)^2+x^2=(x+2)^2$;

Б) $x^2+(x+2)^2=(x+4)^2$; Д) $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$.

В) $(x-8)^2+(x-4)^2=x^2$;

23••. Визначте рівняння, що підпорядковуються умові: корінь одного рівняння є арифметичним значенням кореня другого:

1) $5x+2\sqrt{x}-7=0$; 3) $2y-3\sqrt{y}-2=0$; 5) $3r+\sqrt{r}-52=0$.

2) $t-3\sqrt{t}-10=0$; 4) $3u-2\sqrt{u}-21=0$;

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4; Д) 2 і 5.

24••. Визначте квадратне рівняння, яке отримали, вводячи деяку підстановку, при розв'язуванні рівняння

$$(x^2+3x+5)^2-x^2-3x-11=0:$$

1) $t^2-t-11=0$; 3) $(t+5)^2-t-16=0$; 5) $t^2-t+6=0$.

2) $(t+5)^2-t-11=0$; 4) $t^2-t-6=0$;

А) 1 і 2; Б) 1 і 3; В) 3 і 4; Г) 2 і 4; Д) 4 і 5.

25••. Визначте рівняння, добуток коренів яких є протилежними числами:

1) $\dfrac{x+23}{x+3}+\dfrac{2x-14}{x-4}=10$; 4) $\dfrac{2x-1}{x-1}+\dfrac{x+19}{x+5}=6$;

2) $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{3x+41}{x+3}=10$; 5) $\dfrac{x+3}{3x-9}+\dfrac{x+2}{x+4}=-1$.

3) $\dfrac{2x+9}{x+2}+\dfrac{x-17}{x+4}=1$;

А) 1 і 2; Б) 2 і 3; В) 2 і 5; Г) 1 і 4; Д) 2 і 4.

26••. Укажіть рівняння, в яких раціонально виконано групування:

1) $((x-4)(x-7))\cdot((x-5)(x-6))=360$; А) 1 і 3;

2) $(x(x-1))\cdot((x-2)(x-1))=24$; Б) 1 і 4;

3) $((2x-3)(x+1))\cdot((2x-1)(x+2))=36$; В) 2 і 4;

4) $((2x+1)(x-3))\cdot((2x-3)(x+1))=-15$; Г) 2 і 5;

5) $((x+7)(x-3))\cdot((x+5)(x-1))=192$. Д) 1 і 5.

27••. Знайдіть периметр прямокутного трикутника, коли відомо, що точка дотику, вписаного в нього кола, ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 5 см і 12 см.

А) 38 см; Б) 39 см; В) 40 см; Г) 41 см; Д) 42 см.

28••. Визначте рівняння, що відповідає умові задачі.
Два оператори, працюючи разом, можуть виконати набір рукопису за 24 год. Якщо половину рукопису набиратиме перший оператор, а решту – другий, то робота буде виконана за 50 год. За скільки годин може набрати цей рукопис кожний оператор, працюючи окремо?

А) $\frac{1}{x}+\frac{1}{24-x}=\frac{1}{50}$; В) $\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{24}$; Д) $\frac{1}{x}+\frac{1}{25-x}=\frac{1}{12}$.

Б) $\frac{1}{x}+\frac{1}{12-x}=\frac{1}{50}$; Г) $\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{12}$;

29••. Теплохід пройшов 100 км за течією річки і 64 км проти течії, затративши на весь шлях 9 год. Швидкість течії річки дорівнює 2 км/год. Знайдіть відстань, яку зможе подолати теплохід по озеру за 12 год.

А) 192 км; Б) 216 км; В) 240 км; Г) 264 км; Д) 168 км.

30••. Ідентифікуйте парами дробово-раціональне рівняння та відповідне йому квадратне рівняння, яке отримали введенням допоміжної змінної.

А) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$; 1) $z^2+7z+12=0$;

Б) $\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(x+\frac{2}{x}\right)-8=0$; 2) $4z^2+12z-55=0$;

В) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)+10=0$; 3) $y^2-y-12=0$;

Г) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$; 4) $t^2+t-6=0$;

Д) $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-47=0$. 5) $2u^2-7u+5=0$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

Розділ III. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Неповні квадратні рівняння

$ax^2+bx=0$,
$x(ax+b)=0$,
$x_1=0,\ x_2=-\dfrac{b}{a}$

$ax^2=0$,
$x=0$

$ax^2+c=0$,
$x^2=-\dfrac{c}{a}$

при $ac<0$ $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

при $ac>0$ коренів немає

Повні квадратні рівняння

$ax^2+bx+c=0$

універсальна формула
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,
де $D=b^2-4ac$

якщо $b=2k$, тобто b – парне число, то
$x=\dfrac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$,
де $D_1=k^2-ac$,
$k=\dfrac{b}{2}$

Теорема Вієта

$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$

Якщо x_1, x_2 – корені рівняння (1), то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Дослідження кількості коренів квадратного рівняння

$D>0$ 2 різні корені: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

$D=0$ 2 рівні корені: $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$;

$D<0$ коренів немає

Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,
де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена

ДОДАТКОВІ МАТЕРІАЛИ

ВПРАВИ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ ВИВЧЕНОГО В КУРСІ АЛГЕБРИ 8-го КЛАСУ

Вправи до розділу I

559•. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x}{x-1}$ при $x=\dfrac{1}{2}$;   3) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$ при $x=\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{1}{3}$;

2) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-5}{x}$ при $x=\dfrac{5}{2}$;   4) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ при $x=\dfrac{4}{7},\ y=\dfrac{3}{7}$.

560••. Знайдіть значення змінної x, при яких не існує вираз:

1) $\dfrac{3}{x-\dfrac{1}{x}}+\dfrac{5}{x-\dfrac{4}{x}}$;   2) $\dfrac{x-2}{x-\dfrac{4}{x}}+\dfrac{x+3}{x-\dfrac{9}{x}}$;   3) $\dfrac{x+4}{x-\dfrac{16}{x}}+\dfrac{x-6}{x-\dfrac{36}{x}}$.

Скоротіть дроби (561–562).

561•. 1) $\dfrac{a^2-5a-7a+35}{2a-10}$;   2) $\dfrac{2-2a^2}{4a^2-8a+4}$;   3) $\dfrac{2a^2-8a+8}{16-4a^2}$.

562••. 1) $\dfrac{a^3-3a^2+2a-6}{a^3-27}$;   3) $\dfrac{a^3+64}{a^3+4a^2-3a-12}$;

2) $\dfrac{a^3-8}{a^3-2a^2+a-2}$;   4) $\dfrac{a^3-5a^2+3a-15}{a^3-125}$.

563•. Запишіть вираз у вигляді нескоротного дробу:

1) $\dfrac{2x+17}{49-x^2}+\dfrac{x+10}{x^2-49}$;   3) $\dfrac{7-y}{4-y^2}-\dfrac{y^2-3+5y}{y^2-4}$;

2) $\dfrac{3-2x}{x^2-25}+\dfrac{8-x}{25-x^2}$;   4) $\dfrac{11-2y}{y^2-9}-\dfrac{y^2+8y-2}{9-y^2}$.

564••. Перетворіть раціональний вираз на раціональний дріб:

1) $\dfrac{2x^2}{2x(x^2-1)}+\dfrac{x(x+1)}{2x(1-x^2)}$;   2) $\dfrac{3x^2}{3x(x^2-4)}+\dfrac{2x(x+1)}{3x(4-x^2)}$;

3) $\dfrac{4x^2}{5x(x^2-9)}+\dfrac{3x(x+1)}{5x(9-x^2)}$; 4) $\dfrac{5x^2}{6x(x^2-16)}+\dfrac{4x(x+1)}{6x(16-x^2)}$.

565••. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\dfrac{7a^2}{7ab-b^2}-\dfrac{b}{49a-7b}$; 3) $\dfrac{a^2}{a^3-9a}+\dfrac{1}{6-2a}$;

2) $\dfrac{9a^2}{9ab-b^2}-\dfrac{b}{81a-9b}$; 4) $\dfrac{x^2}{x^3-25x}+\dfrac{1}{2(5-x)}$.

566••. Доведіть, що раціональний вираз дорівнює нулю при будь-яких допустимих значеннях змінних:

1) $\dfrac{a}{a^2+2a+4}+\dfrac{1}{2-a}+4\cdot\dfrac{a+1}{a^3-8}$;

2) $\dfrac{a}{a^2+a+1}+\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1+2a}{a^3-1}$;

3) $\dfrac{1}{(a-b)(a-1)}-\dfrac{1}{(a-b)(b-1)}+\dfrac{1}{(a-1)(b-1)}$;

4) $\dfrac{1}{(a-b)(a+2)}-\dfrac{1}{(a-b)(b+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(b+2)}$.

567••. Знайдіть натуральні значення n, при яких вираз набуває цілих значень:

1) $\dfrac{2n-12}{2n}$; 2) $\dfrac{3n+18}{3n}$; 3) $\dfrac{4n-24}{4n}$; 4) $\dfrac{5n+30}{5n}$.

568••. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{8b-a}{a}$, якщо $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{5a-4b}{a}$, якщо $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$;

2) $\dfrac{a+4b}{2a}$, якщо $\dfrac{a}{b}=4$; 4) $\dfrac{12a+15b}{3a}$, якщо $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{11}$.

569•. Виконайте дії:

1) $\left(\dfrac{2ab^2}{3c^3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3c^4}{2ab^2}\right)^2\cdot\dfrac{3}{ab}$; 3) $\dfrac{a^2-a+1}{a^2-1}:\dfrac{1+a^3}{a-1}$;

2) $\left(\dfrac{3a^2}{2b^3c}\right)^3\cdot\left(\dfrac{4b^2c}{9a}\right)^2\cdot\dfrac{3b^5}{a^3}$; 4) $\dfrac{a^2-1}{a^2+a+1}:\dfrac{a+1}{a^3-1}$.

570••. Доведіть, що значення виразу не залежить від значень змінних:

1) $\frac{a^2-121}{a^2+ab-11a-11b}:\frac{a^2+ab+11a+11b}{a^2+2ab+b^2}$;

2) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-5a+5b}:\frac{a^2-ab+5a-5b}{a^2-25}$;

3) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-1}:\frac{x^2+2x+1}{3x-3}$;

4) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{3x^2-3}:\frac{x+1}{x^2-2x+1}$.

Використайте формули:

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + {}$
${}+ 3ab^2 \pm b^3$.

571•. Спростіть вираз:

1) $\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

2) $\left(a-b+\frac{2ab}{a-b}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

3) $\frac{a-4}{3a-1}+\frac{4a^2-9}{9a^2-6a+1}:\frac{2a-3}{3a-1}$;

4) $\frac{a+3}{2a-1}-\frac{9a^2-4}{4a^2-4a+1}:\frac{3a-2}{2a-1}$.

572••. Виконайте дії:

1) $\frac{9x^2-y^2}{x^2y-2xy^2}:\left(\frac{9x}{2y^2-xy}-\frac{y}{2xy-x^2}\right)$;

2) $\frac{x^2-25y^2}{2x^2y-xy^2}:\left(\frac{25y}{2x^2-xy}-\frac{x}{2xy-y^2}\right)$;

3) $\frac{x^3-125}{x+5}:\left(\frac{x^2-5x}{x^2-10x+25}+\frac{25}{x^2-25}\right)$;

4) $\frac{x^3+64}{x-4}:\left(\frac{x^2+4x}{x^2+8x+16}+\frac{16}{x^2-16}\right)$.

573••. Доведіть похідні пропорції, коли відомо, що $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

1) $\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$;

2) $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}$;

3) $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{c}{d}$;

4) $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}$;

5) $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$;

6) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

574•. Знайдіть значення x, при якому значення функції:

1) $y=\frac{5x-1}{x+1}$ дорівнює 4; 3) $y=\frac{9-4x}{3x-13}$ дорівнює 7;

2) $y=\frac{2x+7}{x-1}$ дорівнює 3; 4) $y=\frac{7-3x}{2x-9}$ дорівнює 5.

575••. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-3}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{2x^2+7x-20}{x^2+2x}$; 3) $\frac{x}{x-4}-\frac{2}{x+4}=\frac{2x+24}{x^2-16}$;

2) $\frac{3x+1}{x}+\frac{5}{x-2}=\frac{3x^2+5x-12}{x^2-2x}$; 4) $\frac{x}{x+3}-\frac{4}{x-3}=\frac{9-7x}{x^2-9}$.

576•. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(-\frac{2}{3}a^{-2}b^3\right)^{-2}\cdot 8\cdot\left(\frac{b^2}{a}\right)^2$, якщо $a=\frac{1}{2}$, $b=3$;

2) $\left(\frac{5a}{b}\right)^3\cdot\left(-\frac{5}{3}a^3b^{-2}\right)^{-3}$, якщо $a=-3$, $b=-1$;

3) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\cdot\left(\frac{a-b}{ab}\right)^{-1}$, якщо $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$;

4) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1}$, якщо $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$.

577••. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a^{-2}-1}{a^{-2}+1}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{a^{-2}+1}{a^{-2}-1}\right)^{-2}$; 3) $\left(\frac{1-a^{-3}}{1+a^{-3}}\right)^{-1}$; 4) $\left(\frac{a^{-3}+1}{a^{-3}-1}\right)^{-1}$.

578•. Відомо, що густина повітря дорівнює $1{,}29\cdot 10^{-3}$ г/см³ при температурі 0 °С. Знайдіть масу повітря при заданому об'ємі:

1) 1500 см³; 3) 2500 дм³;

2) 1500 дм³; 4) 2500 м³.

579••. Подайте число у стандартному вигляді:

1) $208\cdot 10^{-5}\cdot 152\cdot 10^{-2}$; 3) $0{,}00512\cdot 10^{6}\cdot 0{,}05\cdot 10^{4}$;

2) $5302\cdot 10^{-8}\cdot 25\cdot 10^{-1}$; 4) $0{,}0375\cdot 10^{5}\cdot 0{,}024\cdot 10^{4}$.

580••. Спростіть вираз при натуральному значенні n:

1) $\frac{3^{n-2}\cdot 9^{n+3}}{27^n}$; 3) $\frac{21^n}{3^{n+1}\cdot 7^{n-1}}$; 5) $\frac{1+2^n}{1-2^{-n}}$;

2) $\frac{3^{n-1}\cdot 5^{n+1}}{15^n}$; 4) $\frac{5^{n-3}\cdot 25^{n+2}}{125^n}$; 6) $\frac{1-3^n}{3^{-n}-1}$.

581•. Побудуйте графік функції:

1) $y=-\frac{18}{x}$; 2) $y=\frac{18}{x}$; 3) $y=\frac{30}{x}$; 4) $y=-\frac{30}{x}$.

Знайдіть за побудованим графіком:

а) значення функції, якщо: $x=6$; $x=-6$;

б) значення x, якщо значення функції дорівнює: 3; (−3);

в) серед точок: $M\left(9;-\frac{10}{3}\right)$, $K\left(-9;\frac{10}{3}\right)$, $P\left(-4;\frac{9}{2}\right)$, $Q\left(4;-\frac{9}{2}\right)$ такі, які належать графіку цієї функції.

582••. Знайдіть значення k деякої функції $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0,\ x\neq 0)$, коли відомо, що графік цієї функції проходить через точку:

1) $M(k^3; 4)$; 2) $K\left(-k^3;-\frac{1}{9}\right)$; 3) $P(0{,}5; 2k^3)$; 4) $Q(-0{,}125; -2k^3)$.

Вправи до розділу II

583•. Чи належить графіку функції $y=x^2$ точка:

1) $M\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{9}\right)$; 3) $P(-1{,}1; -2{,}2)$; 5) $N(-2{,}5; 6{,}25)$;

2) $K\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$; 4) $Q(1{,}5; 3)$; 6) $Z(-1{,}2; -1{,}44)$?

584•. Побудуйте графік функції $y=x^2$, попередньо склавши таблицю з кроком 0,5, і знайдіть значення:

1) y, якщо $x=-1{,}5; 0{,}5; 1{,}5$; 3) y, якщо $1\leqslant x\leqslant 4$;

2) x, якщо $y=6; 3; 2$; 4) x, якщо $0\leqslant y\leqslant 4$.

585••. Побудуйте графік функції $y=-x^2$. За побудованим графіком знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: −2,5; −1,5; 1,5; 2,5;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює: -4; $-2{,}5$; -1; $-0{,}5$;

3) значення функції, якщо $-2 \leqslant x \leqslant -0{,}5$;

4) значення аргументу, якщо $-4 \leqslant y \leqslant 0$.

586••. Побудуйте графік функції $|y| = x^2$ та знайдіть значення:

1) x, для яких $-4 \leqslant y \leqslant 4$;
3) x, для яких $y \geqslant 1$;
2) y, для яких $0 \leqslant x \leqslant 3$;
4) y, якщо $x = 1{,}3; 2{,}1; 3{,}5; 4{,}5$.

587•. Установіть, без побудови графіків функцій, кількість розв'язків рівнянь:

1) $y = \dfrac{15}{x}$ та $y = 2x + 5$;
4) $y = x^2$ та $y = -\dfrac{1}{2}x - 7$;

2) $y = -\dfrac{27}{x}$ та $y = -3x$;
5) $y = x^2$ та $y = \dfrac{32}{x}$;

3) $y = x^2$ та $y = -\dfrac{5}{x}$;
6) $y = -\dfrac{50}{x}$ та $y = 17x$.

588•. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = x + 2$. Знайдіть координати точок перетину графіків. Складіть рівняння, розв'язками якого були б абсциси цих точок.

589••. Зобразіть графічно розв'язання рівнянь $\dfrac{k}{x} = bx + c$ та $x^2 = bx + c$, де b і c – деякі числа, для випадків, коли вони мають:

1) два розв'язки; 2) один розв'язок; 3) не мають розв'язків.

Наведіть приклади до кожного з випадків.

Розв'яжіть графічно рівняння (590–591).

590••. 1) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
3) $x - 5 = -\dfrac{6}{x}$;

2) $x^2 - 3x - 4 = 0$;
4) $x + 5 = \dfrac{6}{x}$.

591••. 1) $x^2 - 18 = 0$;
3) $\dfrac{16}{5}x^2 - 45 = 0$;
5) $\dfrac{9}{5}x^2 - 20 = 0$;

2) $x^2 - 0{,}81 = 0$;
4) $\dfrac{4}{3}x^2 - 12 = 0$;
6) $\dfrac{25}{12}x^2 - 27 = 0$.

592••. Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{27}\right)^2$;
3) $\left(\sqrt{0{,}2} + \sqrt{0{,}8}\right)^2$;
5) $\left(\sqrt{0{,}009} + \sqrt{0{,}025}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{27} - \sqrt{3}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{0{,}9} - \sqrt{0{,}4}\right)^2$;
6) $\left(\sqrt{0{,}018} - \sqrt{0{,}008}\right)^2$.

593••. Доведіть, що значення виразу є цілим числом:

1) $\sqrt{\left(7-4\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(3-4\sqrt{3}\right)^2}$;   3) $\sqrt{\left(5-7\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(17-7\sqrt{5}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(16-9\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(12-9\sqrt{2}\right)^2}$;   4) $\sqrt{\left(4-6\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(11-6\sqrt{3}\right)^2}$.

594•. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0,01\cdot 0,04\cdot 0,09\cdot 0,16\cdot 10^4}$;

2) $\sqrt{4,2\cdot 1,8\cdot 2,7\cdot 7\cdot 10^3}$;

3) $\sqrt{0,2\cdot 0,3\cdot 0,4\cdot 0,5\cdot 1,2\cdot 10^6}$;

4) $\sqrt{0,4\cdot 0,5\cdot 0,6\cdot 0,7\cdot 2,1\cdot 10^8}$.

595•. Обчисліть значення виразу, використовуючи властивості арифметичного кореня:

1) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{56}}$;   3) $\dfrac{\sqrt{28\ 000}}{\sqrt{70}}$;   5) $\dfrac{\sqrt{47}}{\sqrt{4700}}\cdot\dfrac{\sqrt{99\ 900}}{\sqrt{111}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{1300}}$;   4) $\dfrac{\sqrt{0,0017}}{\sqrt{17}}$;   6) $\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{85}}\cdot\dfrac{\sqrt{68}}{\sqrt{145}}$.

596••. Обчисліть:

1) $\sqrt{0,25^2-0,24^2}$;

2) $\sqrt{1,53^2-0,72^2}$;

3) $\sqrt{\left(3,13^2-3,12^2\right)\left(8,2^2-1,8^2\right)}$;

4) $\sqrt{\left(6,13^2-6,12^2\right)\left(5,8^2-4,2^2\right)}$;

5) $-\dfrac{4}{19}\sqrt{\dfrac{324^2-37^2}{287}}-\dfrac{1}{17}\sqrt{\dfrac{246^2-43^2}{203}}$;

6) $-\dfrac{17}{26}\sqrt{\dfrac{528^2-148^2}{380}}-\dfrac{13}{24}\sqrt{\dfrac{441^2-135^2}{306}}$.

597•. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{200x^5y^2}$, якщо $x>0$, $y<0$;   4) $\sqrt{x^2(x-8)^2}$, якщо $x\geqslant 8$;

2) $\sqrt{300x^8y^3}$, якщо $x<0$, $y>0$;   5) $\sqrt{x^{13}(5-x)^2}$, якщо $x>5$;

3) $\sqrt{(15-x)^2}$, якщо $x\geqslant 15$;   6) $\sqrt{x^5(x-3)^2}$, якщо $0<x<3$.

598•. Внесіть множник під знак кореня:

1) $x^3\sqrt{13x}$, якщо $x < 0$;

2) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{5x^5}$, якщо $x < 0$;

3) $(3-x)\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$, якщо $x > 3$;

4) $(x-5)\sqrt{\dfrac{x}{5-x}}$, якщо $0 < x < 5$;

5) $(2x+1)\sqrt{\dfrac{x+3}{4x^2+4x+1}}$, якщо $x > -\dfrac{1}{2}$;

6) $(2x-5)\sqrt{\dfrac{3-x}{4x^2-20x+25}}$, якщо $x < 2{,}5$.

599•. Запишіть цілі числа, які розміщені на числовій прямій між числами:

1) $\sqrt{18}$ і $7\sqrt{2}$;

2) $0{,}2\sqrt{200}$ і $4\sqrt{8}$;

3) $2{,}5\sqrt{32}$ і $4{,}5\sqrt{28}$;

4) $\dfrac{2}{3}\sqrt{72}$ і $\dfrac{3}{2}\sqrt{52}$.

600••. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(2a-b)^2}$, якщо $a > \dfrac{1}{2}b$;

2) $\sqrt{(2a-3b)^2}$, якщо $a < 1{,}5b$;

3) $\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{9}}$, якщо $x < 1\dfrac{1}{3}$;

4) $\sqrt{16x^2-48x+36}$, якщо $x < 1{,}5$.

601••. Визначте значення змінних x та y, при яких має зміст вираз:

1) $\sqrt{xy}$; 2) $\sqrt{-xy}$; 3) $\sqrt{x^2y}$; 4) $\sqrt{x^2y^2}$; 5) $\sqrt{-xy^2}$; 6) $\sqrt{-x^4y^4}$.

602•. Доведіть, що:

1) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{19+8\sqrt{3}} = 4+\sqrt{3}$;

4) $\sqrt{28-10\sqrt{3}} = 5-\sqrt{3}$.

603•. Знайдіть значення виразу:

1) x^2-4, якщо $x=1+\sqrt{3}$;

2) $x^2+20\sqrt{3}$, якщо $x=5-2\sqrt{3}$;

3) x^2-4x, якщо $x=2-\sqrt{2}$;

4) x^2-10x, якщо $x=5-\sqrt{5}$;

5) x^2-6x-1, якщо $x=3+\sqrt{3}$;

6) $x^2-3x+2{,}25$, якщо $x=1{,}5+\sqrt{2}$.

604•. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{90}-\sqrt{30}}{\sqrt{45}-\sqrt{15}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{96}-\sqrt{40}}{\sqrt{24}-\sqrt{10}}$; 5) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{30}-\sqrt{50}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{108}-\sqrt{126}}{\sqrt{12}-\sqrt{14}}$; 6) $\dfrac{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}-\sqrt{2}}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу при допустимих значеннях змінних (605–606).

605•. 1) $\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$; 7) $\dfrac{2-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; 4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}$; 8) $\dfrac{3+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$.

606••. 1) $\dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

2) $\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

3) $\dfrac{a+2\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2}$; 7) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$;

4) $\dfrac{a-3\sqrt{a}+9}{\sqrt{a}-3}$; 8) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$.

607••. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+5\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}+\dfrac{\sqrt{a}-5\sqrt{b}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}$;

2) $\left(\dfrac{a-3\sqrt{b}}{a-b}+\dfrac{a+3\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\right):\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

3) $\left(\dfrac{2\sqrt{a}}{a-2\sqrt{a}+1}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}\,(a-1)}{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}+\dfrac{1}{1-\sqrt{a}}$;

4) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$.

608••. Доведіть, що значення виразу є раціональним числом:

1) $\sqrt{26-8\sqrt{10}}+\sqrt{19-6\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt{32-10\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$; 4) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

609•. Чи належить графіку функції $y=\sqrt{x}$ точка:

1) $A(0{,}081;\ 0{,}9)$; 5) $M(1{,}96;\ 1{,}4)$;

2) $B(12{,}1;\ 1{,}1)$; 6) $P(-1{,}69;\ -1{,}3)$;

3) $C(2{,}25;\ 1{,}5)$; 7) $Q(2{,}56;\ 1{,}6)$;

4) $D(1{,}2;\ 1{,}44)$; 8) $R(3{,}61;\ -1{,}9)$?

610•. Відомо, що графік функції $y=\sqrt{x}$ проходить через точки: $A(k;\ 3)$, $B(k;\ 4)$, $C(k;\ 1{,}5)$, $D(k;\ 0{,}5)$, $O(k;\ 0)$. Знайдіть значення k та запишіть координати цих точок.

611•. Знайдіть значення функції $y=\sqrt{x}$, користуючись її графіком, якщо значення аргументу дорівнює:

1) 2,6; 2) 3,6; 3) 4,8; 4) 5,8; 5) 6,3.

612••. Розв'яжіть графічним способом рівняння:

1) $\sqrt{x}=2x-3$; 2) $\sqrt{x}=\dfrac{2}{x}$; 3) $\sqrt{x}=x-4$; 4) $\sqrt{x}=\dfrac{5}{x}$.

Вправи до розділу III

613•. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{7}x^2-7x=0$; 4) $\dfrac{1}{5}x^2+5x=0$;

2) $0{,}1x^2+0{,}001x=0$; 5) $5-(4x+1)(5-x)=x^2$;

3) $0{,}3x^2-0{,}027x=0$; 6) $x^2-(2x-7)(1-x)=7$.

614•. Знайдіть корені рівняння:

1) $x-3=\frac{16}{x+3}$; 3) $x-5=\frac{144}{x+5}$; 5) $x-\sqrt{3}=\frac{13}{x+\sqrt{3}}$;

2) $x+6=\frac{64}{x-6}$; 4) $x+15=\frac{64}{x-15}$; 6) $x+\sqrt{7}=\frac{29}{x-\sqrt{7}}$.

615••. Розв'яжіть рівняння, розкладаючи його ліву частину на множники:

1) $(2x+3)^2-5(2x+3)=0$; 3) $(2x-1)^2-2+4x=0$;
2) $(3x+10)^2-2(3x+10)=0$; 4) $(3x+1)^2-2-6x=0$.

616••. Знайдіть значення змінної x, при якому правильна рівність:

1) $\frac{8x^2-3}{5}-\frac{5-9x^2}{4}=2$; 3) $\frac{7x^2+5}{3}+\frac{5x^2-8}{4}=14$;

2) $\frac{5x^2-2}{3}-\frac{6-x^2}{2}=5$; 4) $\frac{3x^2-7}{2}+\frac{4-5x^2}{5}=1{,}8$.

Розв'яжіть рівняння (617–620).

617••. 1) $\frac{1}{9}x^2=4\pi^2-4\pi+1$; 3) $\frac{1}{4}x^2=9\pi^2-6\pi+1$;

2) $4x^2=16\pi^2-8\pi+1$; 4) $9x^2=9\pi^2-18\pi+4$.

618•. 1) $(x-2)(x+8)=6x$; 4) $(x-5)(x+3)=-16$;
2) $(x-9)(x+1)=-8x$; 5) $(x+7)(x+3)=21$;
3) $(x+3)(x-1)=-4$; 6) $(x-4)(x-3)=12$.

619•. 1) $\frac{18}{x}=x-3$; 3) $\frac{28}{x}=x+3$; 5) $\frac{x-5}{x+5}=x-5$;

2) $\frac{15}{x}=x-2$; 4) $\frac{x+4}{x-4}=x+4$; 6) $\frac{2x-5}{2x+5}=2x-5$.

620••. 1) $\frac{(x-5)(x+1)}{x^2-4x-5}=1$; 3) $\frac{x^2-1}{3x^2-4x+1}=0$;

2) $\frac{x^2-x-6}{(x+2)(x-3)}=1$; 4) $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=0$.

621••. Розв'яжіть пару рівнянь та визначте вид числових значень їх коренів:

1) $12x^2+7x+1=0$ та $x^2+7x+12=0$;
2) $6y^2-5y-1=0$ та $y^2-5y-6=0$;

3) $5t^2 - 6t + 1 = 0$ та $t^2 - 6t + 5 = 0$;

4) $8u^2 - 9u + 1 = 0$ та $u^2 - 9u + 8 = 0$.

622•. Знайдіть дискримінант для рівняння:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$; 5) $6x^2 - 10x + 4 = 0$;

2) $2x^2 - 10x + 12 = 0$; 6) $12x^2 - 10x + 2 = 0$;

3) $3x^2 - 10x + 8 = 0$; 7) $24x^2 - 10x + 1 = 0$;

4) $4x^2 - 10x + 6 = 0$; 8) $48x^2 - 10x + 0{,}5 = 0$.

Яку закономірність ви помітили у процесі розв'язування цих рівнянь? Запам'ятайте її.

623••. Складіть квадратне рівняння, знаючи його корені:

1) -3 і $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ і $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 5) $2-\sqrt{3}$ і $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$;

2) -2 і $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ і $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; 6) $\sqrt{5}-2$ і $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$.

624••. Знайдіть значення q, використовуючи додаткову умову:

1) $x^2 - 4x + q = 0$, $x_1 = -3$; 3) $x^2 - 7x + q = 0$, $x_2 - x_1 = 1$;

2) $x^2 - 10x + q = 0$, $x_1 = 6$; 4) $x^2 - 8x + q = 0$, $x_2 - x_1 = 2$.

625•. Знайдіть значення p, використовуючи додаткову умову:

1) $x^2 - px + 35 = 0$, $x_1 = 5$; 3) $2x^2 + px - 9 = 0$, $x_1 + x_2 = \frac{3}{4}$;

2) $5x^2 - px + 3 = 0$, $x_1 = 1$; 4) $2x^2 + px + 6 = 0$, $x_1 + x_2 = \frac{7}{4}$.

626••. При якому значенні a рівняння:

1) $x^2 + ax + 12 = 0$ має два різні корені, один з яких на 4 більший за другий;

2) $x^2 - 22x + a = 0$ має два різні корені, один з яких у 10 разів менший за другий?

627••. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 4ax + a = 0$, складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) протилежні кореням даного рівняння;

2) обернені до коренів даного рівняння.

628•. Розкладіть квадратний тричлен на лінійні множники:

1) $6t^2 - 5t - 6$; 3) $5p^2 + 23p - 10$; 5) $-x^2 + 5x - 4$;

2) $10m^2 - 17m + 3$; 4) $7r^2 - 8r + 1$; 6) $-y^2 - 6y - 5$.

Виконайте скорочення раціональних дробів (629–630).

629•. 1) $\frac{a^2-3a+2}{a^2-a-2}$; 3) $\frac{c^2+2c-15}{c^2-7c+12}$;

2) $\frac{b^2+b-2}{b^2+3b+2}$; 4) $\frac{t^2+6t-7}{t^2+8t+7}$.

630••. 1) $\frac{2m^2+5m-3}{3m^2+10m+3}$; 3) $\frac{3q^2-q-2}{5q^2-8q+3}$;

2) $\frac{4k^2-7k-2}{2k^2-5k+2}$; 4) $\frac{4p^2-9p-9}{7p^2-25p+12}$.

Розв'яжіть рівняння (631–636).

631••. 1) $(5x+3)^2=(3x+5)^2$; 4) $(5x+4)^2=4(5x+1)^2$;

2) $(6x+1)^2=(3x+2)^2$; 5) $(3x-8)^2=3x^2-8x$;

3) $(4x+5)^2=4(x+5)^2$; 6) $(4x+5)^2=4x^2+5x$.

632••. 1) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$; 4) $\frac{2x-2}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}-5=0$;

2) $\frac{2}{3(3x+1)}+\frac{x+3}{9x^2-3x+1}=\frac{1}{27x^3+1}$; 5) $x-\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{3}{x}$;

3) $\frac{10}{x^2-4}-\frac{3}{2x-4}=\frac{1}{2}$; 6) $x-\frac{x^2-19}{x+5}=\frac{3}{x}$.

633•. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 5) $x^4+5x^2+4=0$;

2) $x^4-3x^2+2=0$; 6) $x^4-6x^2+8=0$;

3) $x^4-4x^2-5=0$; 7) $x^4-26x^2+25=0$;

4) $x^4-8x^2-9=0$; 8) $x^4-13x^2+36=0$.

634•. 1) $(x-1)^2-28(x-1)+27=0$;

2) $(x+2)^2-82(x+2)+81=0$;

3) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$;

4) $(x^2-3x)^2-17(x^2-3x)-18=0$.

635••. 1) $(2x^2-x-6)^2+3(2x^2-x-6)-10=0$;

2) $(3x^2-x-1)^2-6(3x^2-x-1)+5=0$;

3) $(x^2-5x+5)^2+7(x^2-5x+5)+6=0$;

4) $(x^2-7x+14)^2-6(x^2-7x+14)+8=0$.

636*. 1) $(x^2-5x+7)^2-5(x^2-5x+7)+7=x$;

2) $(x^2+4x-6)^2+4(x^2+4x-6)-6=x$.

637•. Поїзд затримався на 15 хв. Щоб прибути на станцію за розкладом, він пройшов решту шляху, що становила 120 км, збільшивши швидкість в 1,2 раза. Знайдіть швидкість поїзда, з якою він пройшов ці 120 км.

638•. Велосипедист з'їздив до райцентру і повернувся назад у село. На зворотному шляху він збільшив швидкість на 1 км/год і був у дорозі на 8 хв менше. З якою швидкістю їхав велосипедист до райцентру, якщо відстань між селом і райцентром дорівнює 32 км?

639•. Моторний човен пройшов 88 км за течією річки і 70 км проти течії, затративши на весь шлях 8 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

640•. Човен пропливає 9 км за течією річки та 1 км проти течії за такий самий час, який потрібний плоту, щоб проплисти 4 км по цій річці. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна становить 8 км/год.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

641. Доведіть, що при $x + y + z = 0$ виконується рівність

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4).$$

Використайте формулу: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$.

642. Доведіть, що при $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ і $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ виконується рівність $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Піднесіть ліву частину рівності $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ до квадрата та проаналізуйте отриману суму.

643. Доведіть, що при будь-якому значенні m число $m^3 + 3m^2 + 2m$ ділиться на 6.

Утворіть добуток трьох послідовних чисел.

644. Доведіть, що при будь-якому значенні n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.

Утворіть добуток п'яти послідовних чисел.

645. Доведіть, що коли a, b, c – додатні числа, то хоча б одне з чисел $(a+b+c)^2-8ac$, $(a+b+c)^2-8bc$, $(a+b+c)^2-8ab$ – додатне.

646. Побудуйте графік:

1) $y=x\cdot|y|$; 2) $x^2-5xy=0$; 3) $yx-|y|=0$.

647. Відомо, що a, b, c – цілі числа, сума яких ділиться на 6. Доведіть, що a^5+b^3+c також ділиться на 6.

648. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+8}=64.$$

649. Подайте число 19 у вигляді різниці кубів двох натуральних чисел. Доведіть, що це число єдине.

650. Знайдіть усі значення a, при яких числа x та y такі, що задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3. \end{cases}$

651. Доведіть нерівність:

1) $a^2+b^2+c^2+2 \geqslant 2(a+b)$; 2) $a^2+b^2+c^2+3 \geqslant 2(a+b+c)$.

652. Якщо двозначне число поділити на добуток його цифр, то неповна частка дорівнюватиме 3, а остача – 9. Якщо ж від квадрата суми цифр цього числа відняти добуток його цифр, то отримаємо задане число. Знайдіть це число.

653. Периметр основи прямокутної будови дорівнює 70 м. Навколо цієї будови на однаковій відстані від її сторін поставлено огорожу прямокутної форми. Площа ділянки, обмеженої огорожею, на 156 $м^2$ більша від площі, яку займає будова. Знайдіть відстань між огорожею та будовою.

654. Заготовлену в кар'єрі крейду перша машина може вивезти на 3 год швидше, ніж друга. Якщо третину крейди вивезе перша машина, а потім решту – друга, то буде затрачено на $7\frac{1}{3}$ год більше, ніж при одночасній роботі обох машин. За який час може вивезти крейду кожна машина?

655. Доведіть, що добуток чотирьох послідовних цілих чисел, збільшений на одиницю, є повним квадратом.

656. Доведіть, що добуток суми трьох додатних чисел на суму обернених до них чисел не менший за 9.

657. Батько в 5 разів старший за сина. Батько закінчив інститут у 22 роки. З тих пір пройшов час, що дорівнює половині того, який потрібен синові, щоб йому стало 22 роки. Скільки років зараз синові і скільки – батькові?

658. При яких значеннях x дріб $\dfrac{x^2}{1+x^2}$ матиме найменше значення? Відповідь поясніть.

659. Турнір з футболу, в якому беруть участь 16 команд, проходить у 2 круги, тобто кожні дві команди зустрічаються між собою двічі. За перемогу присуджують 2 очки, за перші 10 нічиїх дають по 1 очку, за кожну наступну нічию і за поразку команда не отримує очок. Яке найменше число очок може отримати переможець?

660. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y+z=7, \\ x+y+v=11, \\ x+z+v=15, \\ y+z+v=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x+y-z=1, \\ 3x-y+z=4, \\ 4x-y-z=-1. \end{cases}$

661. Вершник і пішохід одночасно вирушили з пункту A в пункт B. Вершник, прибувши у B на 50 хв раніше за пішохода, повернувся назад. На зворотному шляху він зустрівся з пішоходом за 2 км від пункту B. На весь шлях вершник затратив 1 год 40 хв. Знайдіть відстань від A до B і швидкість вершника та пішохода.

662. Від села до міста 24 км. Із села виїхала вантажна машина, яка проходила 1 км за $2\frac{1}{2}$ хв. Через 15 хв після виїзду машини з міста в село виїхав велосипедист зі швидкістю вдвічі меншою, ніж швидкість вантажівки. Через який час після свого виїзду велосипедист зустрінеться з вантажівкою?

663. Доведіть нерівність $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ для додатних чисел x, y, z.

664*. Доведіть, що число $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ натуральне.

$\sqrt[3]{a}=x,\ x^3=a,\ a\in R,$

$x\in R;\ \sqrt[3]{a^3}=a,\ a\in R.$

665. Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}\right)^2;$

2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$.

666. Чи правильна рівність $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)=8$?

667. Доведіть що числа $\frac{2}{\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$ і $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$ взаємно обернені.

668. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2+1+a\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{5}{\sqrt{a^2+1}}$; 2) $\sqrt{\frac{a+b^2}{b}+2\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+b^2}{b}-2\sqrt{a}}$.

669. Доведіть, що число $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ірраціональне.

670. Звільніть від ірраціональності знаменник дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}}$.

Використайте формули $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

671. Доведіть, що при $a=0$, $b=0$ і $a^2=b$ справджується рівність:

1) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

2) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

672. Доведіть, що число $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ є натуральним.

673. Якщо $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$, то чому дорівнює $\sqrt{(8-a)(5+a)}$? (Саме число a знаходити не потрібно!)

674. Обчисліть:

1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$; 2) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

675. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^2+8a+16}-|a-4|-8$ при $a<-4$;

2) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ при $1\leqslant x\leqslant 2$.

676. Доведіть тотожність $\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}=2$.

677. Не розв'язуючи рівняння $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=10$, доведіть, що воно не має коренів.

678. Доведіть, що вираз $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}}$ є цілим числом.

679. Знайдіть усі дійсні розв'язки рівняння

$$2x^2+2y^2+z^2-8x-4y-4z+14=0.$$

680. Господар має три бочки A, B і C. Бочка A наповнена квасом, бочки B і C порожні. Якщо квасом з бочки A наповнити бочку B, то в бочці A залишиться $\frac{2}{5}$ її місткості. Якщо ж квасом з бочки A наповнити бочку C, то в бочці A залишиться $\frac{5}{9}$ її місткості. Щоб наповнити обидві бочки B і C квасом з бочки A, потрібно додати ще 4 відра квасу. Скільки відер квасу вміщує кожна бочка?

681. Знайдіть найменше значення виразу

$$(2a-1)(2a+1)+3b(b-4a).$$

682. Доведіть, що при будь-яких значеннях t вираз t^4-t+2 додатний.

683. При яких значеннях a і b тричлен $16x^2+144x+(a+b)$ є повним квадратом, якщо $b-a=-7$?

684. В якій точці функція $y=1+\sqrt{(x-1)^2}$ набуває найменшого значення?

685. Не розв'язуючи рівняння $x^2+9x+5=0$, знайдіть суму кубів його коренів.

686. Знайдіть дискримінант зведеного квадратного рівняння, корені якого дорівнюють кубам коренів рівняння $x^2-5x+6=0$.

687. Чому дорівнює сума всіх коренів біквадратного рівняння?

688. Складіть біквадратне рівняння, якщо тільки числа $\sqrt{2}-1$ і $\sqrt{2}+1$ є його коренями.

689. Який вигляд матиме рівняння $ax^2+bx+c=0$, якщо його розв'язками будуть числа $(a-b)$ і $(a+b)$?

690. Знайдіть найменше значення p, при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2+px+3=0$ дорівнює 19.

691. При якому цілому значенні k один з коренів рівняння $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втроє менший від другого?

692. При якому додатному значенні c один з коренів рівняння $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$ дорівнює квадрату другого?

693. Знайдіть таку залежність між коефіцієнтами рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, при якій сума його коренів вдвічі більша за їхню різницю.

694. Човен пропливає за течією річки 10 км, а потім – проти течії 6 км. Швидкість течії річки дорівнює 1 км/год. В яких межах має знаходитися власна швидкість човна, щоб на всю дорогу затрачалося від 3 до 4 год?

695. У змаганнях з футболу зіграно 78 ігор. Скільки команд брало участь у змаганнях, якщо кожна команда зіграла з усіма іншими по одному разу?

696. Чи може дискримінант квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнювати 23?

697. Доведіть, що не існує цілих чисел x та y, які б задовольняли рівняння $15x^2 - 7y^2 = 9$.

698. Спочатку катер ішов a км по озеру, а потім половину цього шляху по річці, яка впадає в озеро. Весь рейс тривав 1 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює c км/год.

699. Змагаються три бригади лісорубів. Перша і третя бригади разом заготовили деревини вдвічі більше, ніж друга, а друга і третя – втричі більше, ніж перша. Яка бригада перемогла в цьому змаганні?

700. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52.$$

701. Знайдіть усі трицифрові числа, якщо при діленні кожного з них на 11 отримуємо частку, що дорівнює сумі квадратів значень окремих цифр даного числа.

702. Доведіть, що коли в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ сума коефіцієнтів дорівнює нулю, тобто $a + b + c = 0$, то число 1 є коренем цього рівняння.

Довідничок з алгебри за 7-й клас

Тема 1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Рівняння – рівність, що містить змінну.

Приклади рівнянь: 1) $\underbrace{6x-5}_{\text{ліва частина}}=\underbrace{3x+4}_{\text{права частина}}$; 3) $(x-5)(2x+6)=0$;

2) $\dfrac{2x-5}{3}=\dfrac{3x+1}{2}$; 4) $x^2=2x+3$.

Корінь (розв'язок) рівняння – число, що перетворює рівняння в правильну рівність.

Властивості рівносильних рівнянь

$kx+b=ax+c$ →

1) $ax+c=kx+b$
2) $kx+b+(-c)=ax+c+(-c)$
3) $kx-ax=c-b$
4) $(k-a)x=c-b$
5) $\dfrac{kx+b}{n}=\dfrac{ax+c}{n}$, $n\neq 0$

$kx+b=0$ – лінійне рівняння, де k – коефіцієнт (число), b – вільний член (число).

№	Рівняння вигляду	Кількість розв'язків
1	$kx+b=kx$ $(b\neq 0)$	Жодного (рівняння не має розв'язків)
2	$kx+b=b+kx$	Безліч
3	$kx+b=0$ $(k\neq 0)$	Один
4	$kx+b=0$	Один, безліч або жодного

Рівняння виду $kx+b=0$ при			
$k\neq 0, b\neq 0$	$k\neq 0, b=0$	$k=0, b\neq 0$	$k=0, b=0$
$kx=-b$ $\boxed{x=-\dfrac{b}{k}}$ має єдиний розв'язок	$kx+0=0$ $\boxed{x=0}$ має єдиний розв'язок	$0\cdot x+b=0$ $0\cdot x=-b$ розв'язків не має	$0\cdot x+0=0$ $0=0$ має безліч розв'язків

Тема 2. ЦІЛІ ВИРАЗИ. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Цілий вираз →
- **додавання**
- **віднімання**
- **множення**
- **ділення на число (крім 0)**

Степінь

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, n – натуральне число.

a^n – степінь;
a – основа степеня;
n – показник степеня;
$a^0 = 1$;
$a^1 = a$.

Властивості:

$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$;
$a^{n-m} = a^n : a^m$, де $n > m$;
$(a^m)^n = a^{mn}$;
$(ab)^n = a^n b^n$;
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Тема 3. ОДНОЧЛЕНИ. МНОГОЧЛЕНИ

Одночлен – добуток чисел і змінних:

$\underline{8}at$; $\underline{-7}x^2y$; $\underline{-5}$

↓ ↓ ↓

коефіцієнт одночлена

$-8a^3x^7y$ – стандартний вигляд одночлена; $3 + 7 + 1 = 11$ – степінь одночлена	$-2ax \cdot 5ax^3y$ – нестандартний вигляд одночлена
$-7x^3y$ і $5yx^3$ – подібні одночлени	$8xy$ і $-2xy^2$ – одночлени не є подібними

Многочлен – сума одночленів:

$$\underbrace{6x^2y^2}_{\text{степінь } 4} + \underbrace{5xy^2}_{\text{степінь } 3} - \underbrace{8x^3y^5}_{\text{степінь } 8}$$

степінь многочлена 8

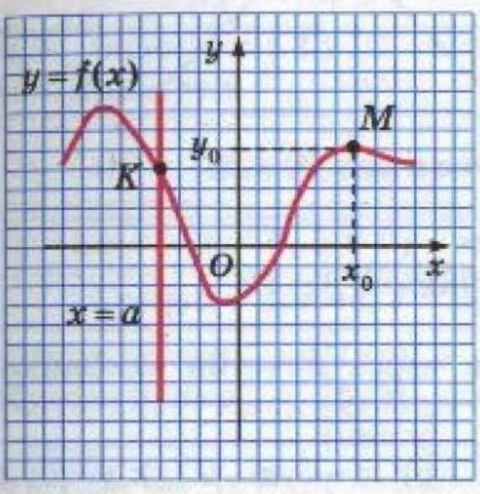
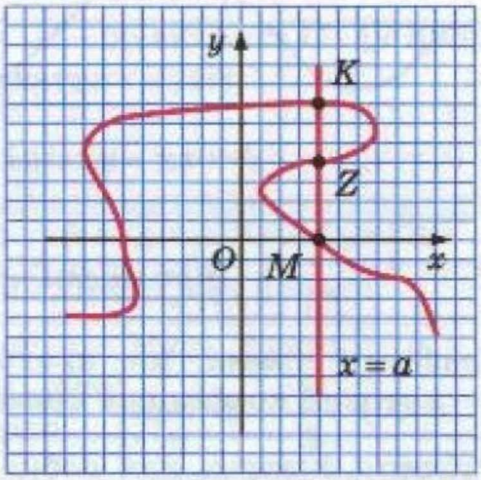
Стандартний вигляд многочлена: $9x^3+5x^2-7x+3$	Нестандартний вигляд многочлена: $5x\cdot x^3-10xa\cdot x^6-12x^4+6$
Двоцифрове число: $\overline{ab}=10a+b$	Трицифрове число: $\overline{abc}=100a+10b+c$
A – многочлен	$-A$ – многочлен, протилежний до A
Множення одночлена на многочлен: $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	Множення многочленів: $(a+b)(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$
$(8-n)(a-3)=(n-8)(3-a)=-(n-8)(a-3)=-(8-n)(3-a)$	

Тема 4. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Розкласти многочлен на множники – записати його у вигляді добутку		
Способи розкладання на множники		
Винесення спільного множника за дужки: $ax+ay+az=$ $=a(x+y+z)$	Спосіб групування: $ax+by+bx+ay=$ $=(ax+ay)+(bx+by)=$ $=a(x+y)+b(x+y)=$ $=(x+y)(a+b)$	Використання формул скороченого множення: 1) $a^2-b^2=$ $=(a-b)(a+b)$; 2) $a^2\pm 2ab+b^2=$ $=(a\pm b)^2$; 3) $a^3\pm b^3=$ $=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ – куб суми; $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ – куб різниці		
$(a-b)^2=(b-a)^2$	$(-a-b)^2=(a+b)^2$	

Тема 5. ФУНКЦІЯ. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

$y = f(x)$. y – функція, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.
x – незалежна змінна (аргумент),
y – залежна змінна (значення функції)

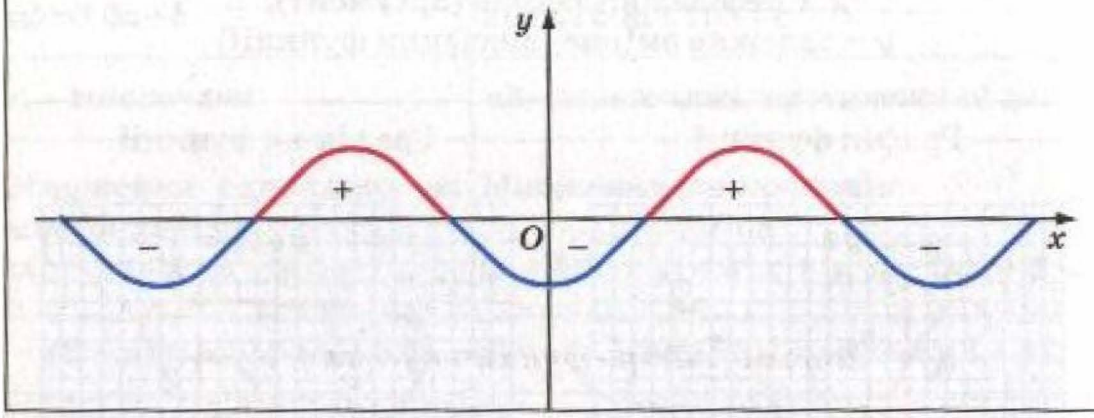
Графік функції	Графік не функції
	
$M(x_0; y_0)$ – точка графіка функції. Довільна пряма $x = a$ перетинає криву в одній точці	Довільна пряма $x = a$ перетинає криву в кількох точках, наприклад у трьох точках: K, Z, M

$M(x_0; y_0)$ – точка графіка функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0) = y_0$ (перетворює формулу в правильну числову рівність)

Функція $y = f(x)$	
Область визначення функції $D(y)$: усі можливі значення незалежної змінної (аргументу)	Область значень функції $E(y)$: усі можливі значення функції (залежної змінної)

Нулі функції $y = f(x)$ – корені рівняння $f(x) = 0$, абсциси точок перетину графіка з віссю абсцис

Визначення знака функції $y = f(x)$:	
«+» – значення змінної, при яких $f(x) > 0$. Графік **вище** осі Ox	«–» – значення змінної, при яких $f(x) < 0$. Графік **нижче** осі Ox



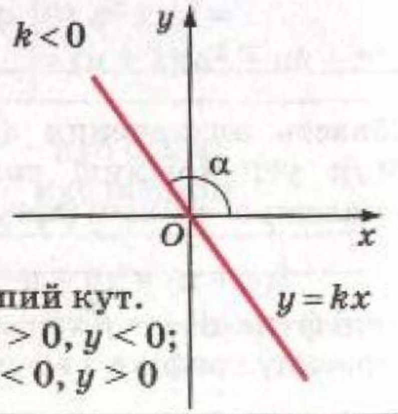
Відомості про функцію $y = kx$

Графік – пряма, що проходить через початок координат, k – кутовий коефіцієнт прямої		
Таблиця значень для побудови прямої:	$D(y)$: x – будь-яке число	$E(y)$: y – будь-яке число

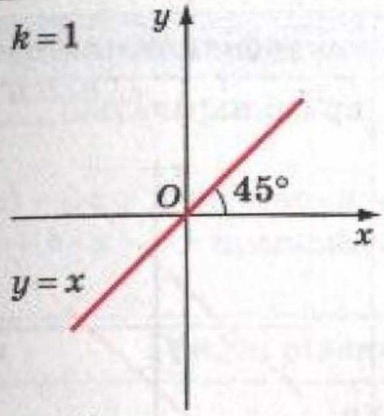
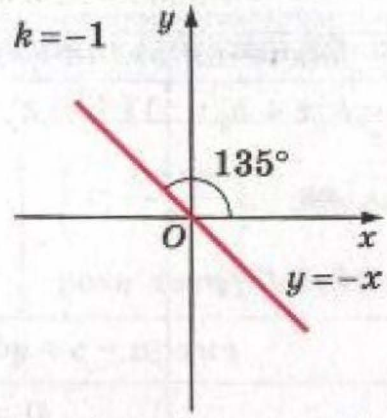
x	y
0	0
x_1	kx_1

Нуль функції: $y = 0$ при $x = 0$

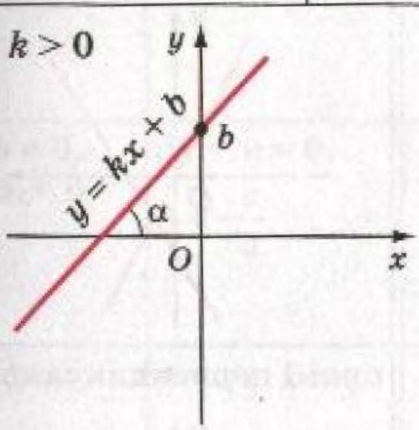
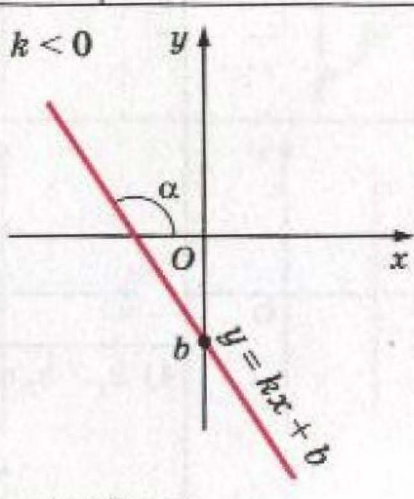
α – гострий кут.
При $x > 0$, $y > 0$;
при $x < 0$, $y < 0$



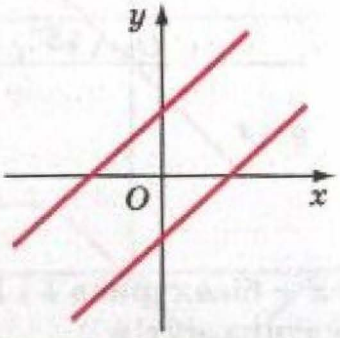
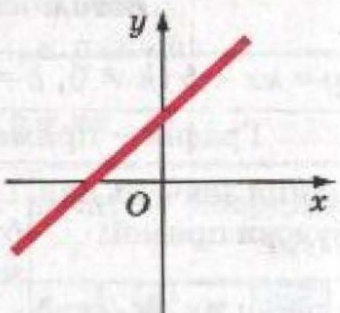
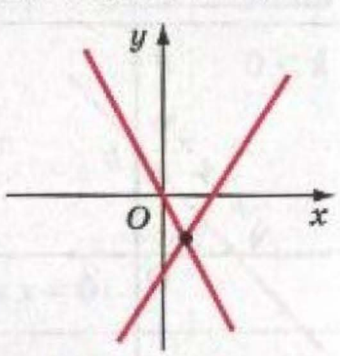
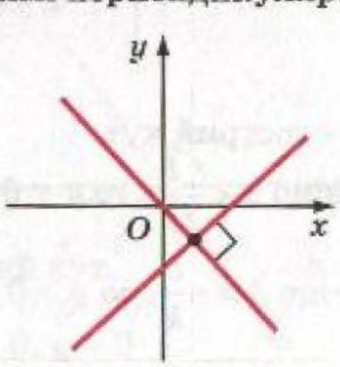
α – тупий кут.
При $x > 0$, $y < 0$;
при $x < 0$, $y > 0$

<table>
<tr><th colspan="2">Окремі випадки</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$y = x$ – бісектриса I і III координатних кутів</td><td>$y = -x$ – бісектриса II і IV координатних кутів</td></tr>
</table>

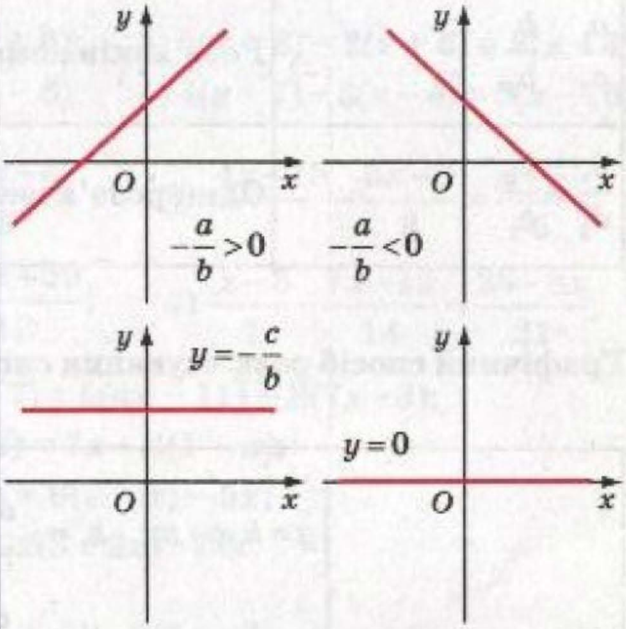
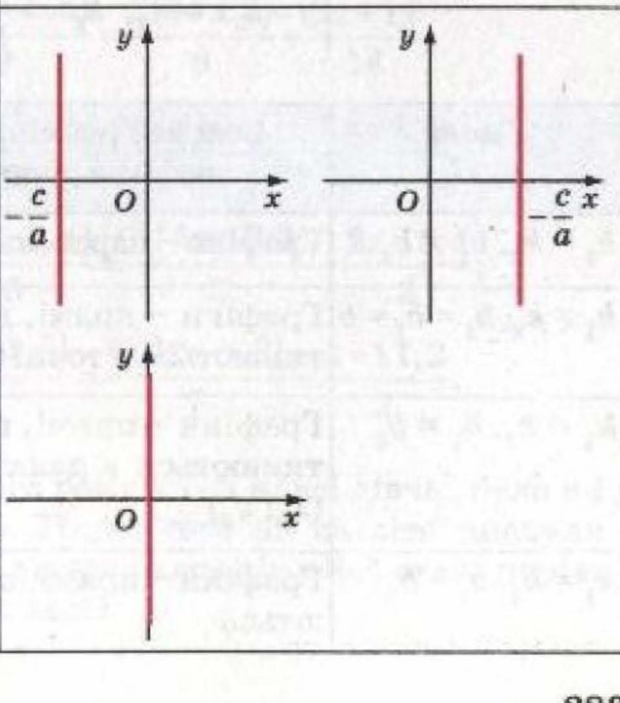
Відомості про функцію $y = kx + b$

<table>
<tr><th colspan="4">$y = kx + b$ ($k \neq 0$, $b \neq 0$) – загальний вид лінійної функції</th></tr>
<tr><th colspan="4">Графік – пряма, k – кутовий коефіцієнт прямої</th></tr>
<tr><td>Таблиця значень для побудови прямої:<table><tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td></tr><tr><td>y</td><td>y_1</td><td>y_2</td></tr></table></td><td>$D(y)$: x – будь-яке число</td><td>$E(y)$: y – будь-яке число</td><td>Нуль функції: $y = 0$ при $x = -\frac{b}{k}$. $(0;\ b)$ – точка перетину з віссю Oy</td></tr>
<tr><td colspan="2">α – гострий кут.
Якщо $x < -\frac{b}{k}$, то $y < 0$;
якщо $x > -\frac{b}{k}$, то $y > 0$</td><td colspan="2">α – тупий кут.
Якщо $x < -\frac{b}{k}$, то $y > 0$;
якщо $x > -\frac{b}{k}$, то $y < 0$</td></tr>
</table>

Розміщення графіків двох лінійних функцій

Лінійні функції	Аналітична умова	Графічний висновок
$y_1 = k_1x + b_1$ та $y_2 = k_2x + b_2$	1) $k_1 = k_2,\ b_1 \neq b_2$	прямі паралельні 
	2) $k_1 = k_2,\ b_1 = b_2$	прямі збігаються 
	3) $k_1 \neq k_2$	прямі перетинаються 
	4) $k_1 \cdot k_2 = -1$	прямі перпендикулярні 

Тема 6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

$ax + by = c$ – лінійне рівняння з двома змінними, яке має безліч розв'язків		
$(m; n)$ – розв'язок рівняння, $a \cdot m + b \cdot n = c$ – правильна рівність	$\left(x; \frac{c-ax}{b}\right)$ – довільний розв'язок рівняння	
Графік рівняння $ax + by = c$ – пряма		
$ax + by + c = 0$		
$b \neq 0$	$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ – лінійна функція	
$b = 0$, $a \neq 0$	$ax + c = 0$, $x = -\frac{c}{a}$	

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ – система лінійних рівнянь з двома змінними
$(m;\ n)$ – розв'язок СЛР, то рівності $a_1m+b_1n=c_1$ і $a_2m+b_2n=c_2$ – правильні

Аналітична умова	Висновок	Графічна інтерпретація
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	Безліч розв'язків	Прямі збігаються
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	Розв'язків немає	Прямі паралельні
$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	Один розв'язок	Прямі перетинаються

Графічний спосіб розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=k_1x+m_1,\ k_1=-\frac{a_1}{b_1},\ m_1=\frac{c_1}{b_1}, \\ y=k_2x+m_2,\ k_2=-\frac{a_2}{b_2},\ m_2=\frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

Умова	Взаємне розміщення графіків рівнянь	Розв'язки системи лінійних рівнянь
$k_1=k_2,\ b_1\neq b_2$	Графіки – паралельні прямі	Розв'язків немає
$k_1\neq k_2,\ b_1=b_2=b$	Графіки – прямі, що перетинаються в точці $(0;\ b)$	Єдиний розв'язок $(0;\ b)$
$k_1\neq k_2,\ b_1\neq b_2$	Графіки – прямі, що перетинаються в деякій точці $(x_0;\ y_0)$	Єдиний розв'язок $(x_0;\ y_0)$
$k_1=k_2,\ b_1=b_2$	Графіки – прямі, що збігаються	Безліч розв'язків

Вправи для повторення курсу алгебри за 7-й клас

Тема 1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Розв'яжіть рівняння та виберіть серед них рівносильні (703–707).

703°. 1) $0,33x + 1,75 = -2,67x + 7,75$;
2) $1,47x - 2,25 = -2,53x + 5,75$;
3) $\frac{1}{7}x - \frac{1}{49} = \frac{3}{7}x - \frac{5}{49}$;
4) $\frac{2}{9}x + \frac{4}{27} = \frac{7}{9}x + \frac{19}{27}$.

704°. 1) $2(x - 3) + 2x = 3(x + 6)$;
2) $3(x + 7) + 7x = 4(x - 6)$;
3) $5(x - 2) - 2(x + 5) = 7(x - 4)$;
4) $4(x + 7) - 3(x - 4) = 5(x - 16)$.

705•. 1) $\frac{3x+5}{2} + \frac{x+13}{4} = \frac{16x-3}{8}$;
2) $\frac{2x-7}{3} + \frac{5x+1}{4} = \frac{20x+59}{12}$;
3) $\frac{4x+15}{4} - \frac{5x-8}{8} = \frac{x+11}{6}$;
4) $\frac{x-3}{7} - \frac{7x-12}{14} = \frac{23-8x}{21}$.

706•. 1) $3(2x - 5) - 4(16x - 7) = 5(4x - 11) - 8(7x - 3)$;
2) $6(10 - x) - 2(x + 13) = 7x - 4(1 - x)$;
3) $3(x - 4) - 4(5 - 2x) = 6(2 - x) - 5x$;
4) $15x + 6x(2 - 3x) = 9x(5 - 2x) - 36$.

707••. 1) $\frac{5(2x-0,4)}{3} - \frac{4(3x-2,5)}{9} = \frac{2(5x+2)}{6} + \frac{3x+17}{18}$;
2) $\frac{2(x+0,8)}{4} - \frac{4(3x-1,2)}{6} = \frac{5(2x+1,7)}{3} - \frac{5x-1,4}{2}$;
3) $\frac{3(5x+3,6)}{4} - \frac{4(3x-3,4)}{10} = \frac{6(4x+2,3)}{5} - \frac{2x-5,4}{2}$;
4) $\frac{(3x-2,8)}{14} - \frac{3(4x-1,6)}{4} = \frac{6(2x-4,2)}{7} - \frac{x-17,2}{2}$.

708°. На кінець навчального року в 7-А класі дівчат було в 1,5 раза більше, ніж хлопців. Після того як за літо прибули 2 хлопці і вибули 3 дівчини, дівчат і хлопців у 8-А стало порівну. Скільки було дівчат у 7-А класі?

709°. У першому букеті троянд у 3 рази більше, ніж у другому. Якщо перекласти 15 троянд із першого букета в другий, то троянд у букетах стане порівну. Скільки троянд було в букетах?

710•. У двох тренувальних командах була однакова кількість гравців. Після того як з другої команди в першу перейшло 6 гравців, у ній залишилось у 2 рази менше гравців, ніж у першій. Скільки гравців було в кожній команді спочатку?

711•. В одному банку було 880 млн гривень, а в другому – 720 млн гривень. Перший банк видавав щодня кредити по 16 млн гривень, а другий банк щоденно приймав на зберігання 48 млн гривень. Через скільки днів у другому банку стане грошей у 2 рази більше, ніж у першому?

712••. У двох коробках було по 15 кг цукерок. Після того як з першої коробки продали цукерок у 3 рази більше, ніж з другої, у першій коробці залишилося в 2 рази менше цукерок, ніж у другій. Скільки кілограмів цукерок продали з кожної коробки?

Тема 2. ЦІЛІ ВИРАЗИ. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Знайдіть значення виразів (713–714).

713°. 1) $(3 - 5x) - (3x - 7)$, якщо $x = \frac{1}{4}$;

2) $(5 - 3x) - (5x - 11)$, якщо $x = \frac{1}{2}$;

3) $(7 - 4x) - (2x - 5)$, якщо $x = \frac{1}{3}$;

4) $(9 - 2x) - (4x - 3)$, якщо $x = \frac{1}{6}$.

714°. 1) $2(a^3 - b^2) + 1$, якщо $a = 3$, $b = 4$;

2) $2(a^4 - b^3) - 1$, якщо $a = 4$, $b = 3$;

3) $3(a^2 - b^4) + 72$, якщо $a = 5$, $b = -3$;

4) $3(a^4 - b^2) - 92$, якщо $a = 3$, $b = -5$.

715•. Укажіть знак числа:

1) $\dfrac{(-24)^{10}\cdot(-5)^{3}}{(-27)^{4}\cdot(-9)^{2}}$; 3) $\dfrac{(-19)^{7}\cdot(-4)^{9}}{(-17)^{5}\cdot(-2)^{6}}$; 5) $\dfrac{(-16)^{6}\cdot(-5)^{8}}{(-19)^{4}\cdot(-5)^{7}}$;

2) $\dfrac{(-21)^{3}\cdot(-13)^{5}}{(-25)^{6}\cdot(-8)^{4}}$; 4) $\dfrac{(-10)^{6}\cdot(-6)^{5}}{(-11)^{9}\cdot(-15)^{7}}$; 6) $\dfrac{(-7)^{3}\cdot(-8)^{5}}{(-9)^{4}\cdot(-15)^{6}}$.

716•. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\dfrac{3a+3b}{8a^3b^3}\right)^2$, якщо $a+b=5,\ 2ab=-3$;

2) $\left(\dfrac{25a+25b}{27a^3b^3}\right)^3$, якщо $a+b=3,\ 3ab=-5$;

3) $\left(\dfrac{27b-27a}{5a^4b^4}\right)^2$, якщо $a-b=-7,\ ab=-3$;

4) $\left(\dfrac{48b-48a}{2a^4b^4}\right)^3$, якщо $a-b=8,\ ab=-4$.

717••. Доведіть тотожність:

1) $1,5(5x-3y-1)+1,25(0,4x+1,2y-2)-2\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{7}x-1\dfrac{2}{7}y-3\right)=7x+3$;

2) $1,75(4-6x+10y)-2,5(17x-3y-12)+1\dfrac{2}{3}(36x-15y-24)=7x-3$;

3) $1\dfrac{1}{3}(7,5x+12y+3)-3,5(x-3y+2)-3,25(2x+6y-4)=7y+10$;

4) $2\dfrac{1}{3}(4,5x-6y+9)-1,25(5,6x-2,8y+4)-3,5(x-y+2)=9-7y$.

Тема 3. ОДНОЧЛЕНИ. МНОГОЧЛЕНИ

718°. Запишіть одночлен у стандартному вигляді:

1) $5a^2b\cdot a^3b^5$; 3) $17(a^2)^3(b^7)^2$; 5) $-(1,4ab^5)^2$; 7) $(0,2a^4b^5)^3$;

2) $2a^3\cdot 7b^2$; 4) $(-1,2a^5b)^2$; 6) $(-0,1a^2b^3)^3$; 8) $10a^2b^4\cdot 0,5a^5b^3$.

719°. Знайдіть суму та різницю многочленів A і K, якщо $A=3x-5y+2z-1$, $K=2x+3y-2z+4$.

720•. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x(x-3)=2x^2+12$;
2) $3x(x-4)=3x^2+12$;
3) $5x(2-x)=20-5x^2$;
4) $7x(1-x)=14-7x^2$.

721•. Обчисліть значення виразу, попередньо спростивши його:

1) $(3a^2-ab+4b^2)-(3b^2-ab+2a^2)$, якщо $a=-\frac{3}{5}$, $b=\frac{4}{5}$;

2) $(5a^2+2ab-b^2)-(3b^2+2ba+a^2)$, якщо $a=2{,}4$, $b=-2{,}6$;

3) $(2a^2-3ab+7b^2)-(2b^2-3ab-3a^2)$, якщо $a=-1{,}2$, $b=-1{,}6$;

4) $(6a^2-ab-5b^2)-(3a^2-ab-2b^2)$, якщо $a=-\frac{5}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$.

722••. Знайдіть площу квадрата, коли відомо, що:

1) при збільшенні однієї його сторони на 3 см і зменшенні другої на 5 см площа утвореного прямокутника зменшилася на 45 см^2;

2) при зменшенні однієї його сторони на 3 см і збільшенні другої на 9 см площа утвореного прямокутника збільшилася на 93 см^2;

3) при збільшенні однієї його сторони на 20 % і зменшенні другої на 40 % площа утвореного прямокутника зменшилася на 112 см^2;

4) при зменшенні однієї його сторони на 15 % і збільшенні другої на 25 % площа утвореного прямокутника збільшилася на 100 см^2.

Тема 4. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

723°. Розкладіть многочлен на множники, використовуючи формули скороченого множення:

1) $4x^2-4x+1$;
2) $9x^2-12x+4$;
3) $x^2+x+\frac{1}{4}$;
4) $25x^2+20xy+4y^2$;
5) $9x^2+30x+25$;
6) $81x^2-180xy+100y^2$.

724°. Розкладіть многочлен на множники способом групування:

1) $a^2+10a+ab+10b$;
2) $a^2-5a+a-5$;
3) $10a-5b+2a^2-ab$;
4) $4a^2-20ab+5ab-25b^2$;
5) $2a+5a^2-4b-10ab$;
6) $ab-5b^2+5a^2-25ab$.

725•. Знайдіть корені рівняння, попередньо розклавши його ліву частину на множники:

1) $x(x-1)^2-(x^3-1)=0$;
2) $(x^3-8)-x(x-2)^2=0$;

3) $900x^2 - (25x^2 + 9)^2 = 0$;
4) $3x^2 + 6x - 2x - 4 = 0$;
5) $(x^2 - 5x) + x - 5 = 0$;
6) $(x - 5)^2 + 5 - x = 0$.

726•. Розкладіть многочлен на множники:

1) $3x^4 - 12x^3y + 12x^2y^2$;
2) $12a^2b - 4b - 12a + 4ab^2$;
3) $\frac{16}{49}x^2 - \left(\frac{3}{7}x - 1\right)^2$;
4) $\frac{16}{25}x^2 - \left(\frac{2}{5}x - 1\right)^2$.

727••. Знайдіть сторону квадрата, коли відомо, що різниця площ квадратів, зі стороною на 3 см більшою і на 2 см меншою, ніж даний, дорівнює 55 см^2.

Тема 5. ФУНКЦІЯ. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

728°. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 2x - 5$ та $y = 2x + 5$. Як розміщені ці графіки?

729°. Визначте точки, через які проходить графік функції $y = x + 3$:

1) $A(2; 5)$;
2) $B(-3; 3)$;
3) $C(-1; 2)$;
4) $D(2,5; -0,5)$;
5) $K(-5; -2)$;
6) $Q(0; 3)$;
7) $M(-3; 0)$.

730•. Знайдіть область значень функції $y = 5x - 2$, якщо:

1) $2 \leqslant x \leqslant 5$;
2) $3 \leqslant x \leqslant 8$;
3) $-3 \leqslant x \leqslant 0$;
4) $-2 \leqslant x \leqslant 6$;
5) $-4 \leqslant x \leqslant 4$;
6) $0 \leqslant x \leqslant 7$.

731•. Знайдіть точку перетину графіків функцій $y = 3x - 4$ та $y = -2x + 6$.

732••. Знайдіть значення k функції $y = kx - 7$, графік якої проходить через точку $Q(3; 2)$.

733••. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x - 3| - 2$;
2) $y = |x + 4| - 3$.

Тема 6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

734°. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=11; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=13, \\ x-y=7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y=57, \\ x+y=43; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=17, \\ x+y=23; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-y=33, \\ x+y=65. \end{cases}$

735°. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} 4x-3y=0, \\ 2x-y=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+4y=0, \\ x-2y=11; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x+5y=25, \\ 3x-2y=13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+2y=0, \\ 2x+3y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+5y=0, \\ x+2y=-1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x-5y=14, \\ 3x+4y=-25. \end{cases}$

736•. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x+y=7, \\ 3x-y=-2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x=4y, \\ 6x+5y=-39; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=\frac{34}{15}, \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{5}y=\frac{16}{15}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+4y=-3, \\ y-3x=18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-y=27, \\ \frac{x+3}{5}=\frac{y+8}{11}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x+10}{6}=\frac{y+9}{13}, \\ 3y-7x=28. \end{cases}$

Розв'яжіть задачі (737–738).

737•. 1) Знайдіть ціну 1 пачки печива та 1 плитки шоколаду, якщо 5 пачок печива дорожчі за 3 плитки шоколаду на 3 грн., а 7 пачок такого самого печива і 6 плиток шоколаду коштують 45 грн.

2) Знайдіть ціну 1 зошита та 1 олівця, якщо за 12 зошитів і 8 олівців заплатили 52 грн., а 7 зошитів дорожчі за 4 олівці на 13 грн.

738••. 1) За роздрібними цінами 4 теніски та 3 шортів коштують 380 грн. Оптові ціни дають знижку на теніски 12 %, а на шорти 15 %, тому при закупці 50 тенісок і 30 шортів заплатили 3730 грн. Скільки коштує 1 теніска і 1 шорти за роздрібними цінами?

2) При покупці за роздрібними цінами за 8 ручок і 3 олівці треба заплатити 15 грн., а за оптовими цінами, зі знижками на ручки 16 % і на олівці 10 %, за 200 ручок і 150 олівців – 387 грн. Скільки коштує 1 ручка та 1 олівець за роздрібними цінами?

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ВІДПОВІДІ

8. -19. **10.** $t=\frac{30}{v+3}+\frac{26}{v-3}$. **13.** 1) 7; 2) 2; 3) -5; 4) 1; 5) 0 і 1; 6) 0 і -2.

14. 1) 10; 2) -7; 3) ±16; 4) 1 і ±4. **19.** 1) 3; 2) -4; 3) 4; 4) 0. **20.** 1) $-26{,}4$; 2) 15,4. **21.** 2) Жодного; 3) безліч; 4) один. **24.** 1) $\frac{25}{7}$; 2) $\frac{10}{7}$; 3) $\frac{1}{10}$; 4) $\frac{1}{2}$.

28. 1) $\frac{m}{2x^2}$; 2) $\frac{8a}{b^3}$; 3) $\frac{1}{2cy}$; 4) $\frac{3}{a}$; 5) $\frac{n}{a}$; 6) $\frac{80a^2}{x}$. **30.** 1) $\frac{m}{5}$, $m\neq3$; 2) $\frac{7}{x}$, $a\neq-4$. **32.** 1) $\frac{m-3}{2}$; 2) $\frac{x+7}{3}$; 3) $\frac{2}{2m-1}$; 4) $\frac{2}{3-4x}$; 5) $\frac{x-3}{2}$; 6) $\frac{3}{2m-5}$. **35.** 1) $a-1$; 2) $d+2$; 3) $\frac{2}{t+3}$; 4) $\frac{2c+5}{2}$; 5) $\frac{10-t}{10+t}$; 6) $\frac{9-n}{9+n}$.

39. 1) $\frac{1}{4}$; 2) -3; 3) $\frac{1}{49}$; 4) $-\frac{1}{125}$. **44.** 1) 4; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{8x-4y}{2x+y}$; 5) 9; 6) 9; 9) 25.

49. 3) $A+B=0$; $A+B=\frac{9x^2+4y^2}{12}$. **52.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{7}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. **54.** 1) $x+3$; 2) $-x-5$; 3) $\frac{1}{m-a}$; 4) $\frac{1}{t-5}$; 5) $\frac{2}{x-3}$; 6) $\frac{4}{a+2b}$. **56.** 1) $\frac{6x-4}{2x-3}$; 2) $\frac{3a-m}{4a-2m}$; 3) $7x-1$; 4) $5a-3$; 5) $2a-3m$; 6) $5x-9y$. **62.** 1) $t^3-\frac{1}{t^2}$; 2) $\frac{1}{x^2}-x^2$; 3) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$; 4) $1-\frac{7b}{a^2}$; 5) $\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{3a^2}$; 6) $9-\frac{m}{t}$. **65.** 1) 0. **69.** 1) $\frac{a^2+m^2}{am}$; 2) $\frac{65}{6x}$; 3) $\frac{3}{35a}$; 4) $\frac{1}{72x}$. **70.** 1) $\frac{5m-12}{12m}$; 2) $\frac{4x-23}{30x}$; 3) $\frac{1}{4m}$; 4) $\frac{k^2-4}{16k}$.

73. 1) $\frac{-3x^2+3y^2}{x^2y^2}$; 2) $\frac{5a^2-5b^2}{a^2b^2}$; 3) $\frac{m^2+n^2}{n^2m^2}$; 4) $\frac{a^3-m^3}{a^3m^3}$. **76.** 1) $\frac{(x-1)^2}{x^2}$; 2) $\frac{(b+3)^2}{b^2}$; 3) $\frac{7b}{2a+b}$; 4) $\frac{5y}{2x+y}$. **77.** 1) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; 3) $\frac{a-20}{a^2-16}$; 4) $\frac{4y}{4y^2-x}$.

79. 3) $\frac{7a}{12a-24}$; 4) $\frac{9y}{20(y-4)}$. **81.** 1) 40 000; 2) 625. **82.** 25 см; 10 см; на 20 %. **83.** 1) a^8; 2) $0{,}25b^3$; 3) $(x+y)^3$; 4) $(x-y)^2$. **84.** 1) $-6{,}5$; 2) 14; 3) 11; 4) 244. **85.** 1) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{a}{3b}$; 5) $\frac{2a}{x}$. **86.** 2) $-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{5a^2}{4n}$; 6) $3a^2b$.

87. 1) $\frac{4}{5}ay^3$; 2) $\frac{2}{3ax}$. **88.** 1) $\frac{7}{a^2}$; 2) $\frac{a^2}{q^3}$. **89.** 2) $\frac{49a^2}{4m^4}$; 4) $\frac{m^{30}n^{20}x^{60}}{t^{40}y^{90}}$.

90. 1) $\frac{b^{20}}{a^{40}}$; 2) $-\frac{27x^6}{y^{36}}$. **91.** 1) $\frac{3a^5}{b^2}$; 2) $\frac{27n}{8m}$; 3) $\frac{y}{3x}$; 4) $-\frac{1}{2ab}$. **92.** 1) $2xy$; 2) $-\frac{b}{4a}$. **93.** 1) $\frac{2x}{t^6}$; 2) $\frac{4a}{b}$. **94.** 1) $\frac{a}{c}$; 2) $2ax$. **95.** 1) $\frac{y^2}{8}$; 2) $\frac{b}{32a}$; 3) $-2b$; 4) $-\frac{5y}{3}$; 5) $\frac{y+3}{3y}$; 6) $-\frac{x+7}{3x^2}$. **97.** 1) $\frac{a-5}{5m}$; 2) $\frac{b-1}{10}$; 3) $\frac{a^2x^2}{44}$; 4) $-5at$; 5) $\frac{9}{4m}$; 6) $\frac{3m^2}{5at}$. **98.** 1) $2ax$; 2) $\frac{2-2m}{3}$; 3) $-\frac{2x}{m^3}$; 4) $\frac{5t}{a^5}$; 5) $\frac{5}{2b}$; 6) $\frac{10t}{3x^2}$. **99.** 1) $\frac{3(a+2)}{a+2b}$; 2) $\frac{2(t-7)}{t-5x}$; 3) $\frac{4-5x}{2x}$; 4) $-3x(a+7m)$. **100.** 1) $\frac{5(x+2)}{x-2y}$; 2) $\frac{a(a-4)}{a+3m}$; 3) $-\frac{a+10t}{3m}$; 4) $-2x(4t+3x)$. **101.** 1) $\frac{c^2+c+6}{10}$; 2) $\frac{x^2-9}{3}$; 3) $\frac{3a+b}{a+2b}$; 4) $\frac{a-2b}{5}$.

102. 1) $\frac{2a-2b}{b}$; 3) $-\frac{c}{c+d}$; 4) $\frac{1+2y}{3-2y}$. **103.** 1) $\frac{2(m-3)}{3(n+2)}$; 2) $\frac{2(p-7)}{p-5x}$; 3) $\frac{2y}{x-y}$; 4) $\frac{3b+4}{b-2}$. **104.** 1) $\frac{2}{3}(a+3b)$; 2) $\frac{3}{2}(y^2-2x)$; 3) $\frac{3x-y}{x-3y}$; 4) $\frac{x+2a}{x-2a}$.

105. 1) $\frac{x^2-a^2}{(x-b)^2}$; 2) $\frac{y^2-c^2}{(y-a)^2}$. **106.** 1) 1; 2) 1. **107.** 1) $\frac{49}{144}$; 2) $-\frac{8}{27}$; 3) $\frac{1}{1000}$; 4) $\frac{16}{81}$; 5) 128; 6) 243. **108.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{2}{5}$. **109.** 25 учнів.

110. 1) $-\frac{2c}{a}$; 2) $a-m$; 3) $-m$; 4) $\frac{1-7c}{1+7c}$. **111.** 1) $4x^2+4x+1$; 2) $9x^2-12xy+4y^2$; 3) x^2-y^2; 4) $4x^2-y^2$. **112.** 1) $\frac{x+y}{x-y}$; 2) $\frac{m-n}{m+n}$; 3) $\frac{x-y}{xy}$; 4) $\frac{m+n}{n}$. **113.** 1) 4; 2) -2; 3) $-x$; 4) $-2x$. **115.** 1) $\frac{x-y}{x+y}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$; 3) 4; 4) $\frac{1}{3}$. **116.** 1) $\frac{b-a}{b+a}$; 3) $\frac{y-x}{x+y}$.

118. 1) $2b$; 2) $-2b$; 3) $2(m+n)$; 4) $\frac{1}{3+x}$. **119.** 1) x; 2) $\frac{6}{2+m}$; 3) 1; 4) 0.

120. 1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{2c-m}{m}$; 3) $\frac{3m}{4}$; 4) $\frac{3}{a}$. **121.** 1) t; 2) p; 3) 4; 4) 2. **122.** 1) $-x$; 2) $-\frac{3y}{y+3}$; 3) $\frac{x}{3-y}$; 4) $\frac{a}{b-4}$. **123.** 1) $\frac{2a}{3a-b}$; 2) $\frac{2x}{2x+y}$. **125.** 1) $\frac{m-1}{m+1}$; 2) 1; 3) $\frac{m-n}{mn}$; 4) $\frac{ab}{a+b}$. **126.** 1) $\frac{5n+m}{5n-m}$; 2) $\frac{x+t-m}{x-t+m}$; 3) -1; 4) mt. **128.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) 7.

129. 1) 1; 2) −1. **130.** 1) $\frac{m}{2}-\frac{n}{2}$; 2) $\frac{a}{2}-2b$; 3) $\frac{2}{m}-m$; 4) $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$; 5) $\frac{m}{n^2}+\frac{n}{m^2}$; 6) $a-\frac{1}{a}$. **131.** 1) $\frac{x+1}{x-1}$; 2) 0; 3) $\frac{8}{x+2}$; 4) $\frac{4a}{3(a+2)}$. **132.** $3x-3y$. **133.** 1) Усі x, крім $1\frac{2}{3}$; 2) усі x, крім 9; 3) усі x, крім −5; 4) усі x, крім $\frac{4}{5}$, $-1\frac{1}{4}$; 5) усі x, крім $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. **134.** 1) −20; 2) 30; 3) −0,2; 4) −5. **135.** 1) 8; 2) −6; 3) −2; 4) −12. **136.** 1) −1; 2) 1; 3) −7; 4) 9. **137.** 1) −11; 2) 2; 3) $-\frac{11}{3}$; 4) −1. **138.** 1) 8; 2) −1; 3) $\frac{2}{9}$; 4) −3. **140.** 1) $-\frac{1}{5}$; 2) $\frac{2}{9}$; 3) 0; 4; 4) 0; 12,5; 5) −2; 2; 6) коренів немає. **141.** 1) Коренів немає; 2) коренів немає; 3) коренів немає; 4) 7. **142.** 1) 4; 2) 0; 3) −90; 4) −3. **143.** 1) 0 і 4; 2) коренів немає; 3) коренів немає; 4) 0 і 22. **144.** 1) $\frac{2}{9}$. **145.** $\frac{10}{23}$. **146.** $\frac{5}{3}$. **147.** $\frac{7}{5}$. **148.** 4 км/год; 5 км/год. **149.** 60 км/год; 120 км/год. **150.** 12 год. **151.** 6 год. **152.** 1) −1; 2) 1; 3) $2b-3a$; 4) $\frac{1}{3a-2b}$; 5) $3a+2b$; 6) 1. **155.** 1) 64; 2) $\frac{1}{36}$; 3) 25; 4) $\frac{1}{243}$. **156.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{1}{10}$; 4) $\frac{1}{1000}$. **157.** 1) $\frac{1}{10^5}$; 2) $\frac{1}{7^9}$; 3) $\frac{1}{x^{24}}$; 4) $\frac{1}{a^{2008}}$; 5) $\frac{1}{(4y)^{10}}$; 6) $\frac{1}{(2at)^{40}}$; 7) $\frac{1}{(7x+y)^4}$; 8) $\frac{5}{y^3}$; 9) $\frac{1}{2t^5}$. **158.** 1) 10^{-5}; 2) 2^{-35}; 3) a^{-13}; 4) 2008^{-10}; 5) 2^{-3}; 6) a^{-1}; 7) $9ay^{-8}$; 8) $12xy^{-3}$. **159.** 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{7}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{27}$; 5) 1; 6) −1; 7) $-\frac{27}{8}$; 8) $\frac{16}{25}$. **160.** 1) 1 000 000; 2) $\frac{16}{25}$; 3) $-\frac{1}{25}$; 4) $-\frac{1}{8}$; 5) −125; 6) −125; 7) $\frac{1}{25}$; 8) $-\frac{27}{64}$; 9) $-\frac{1}{16}$; 10) $-\frac{4}{25}$. **162.** 1) 2; 2) $-\frac{1}{5}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{17}{72}$; 5) 16; 6) 8; 7) 11; 8) −11. **163.** 1) 1; 2) $\frac{119}{144}$; 3) −3; 4) 125; 5) 0; 6) 10. **164.** 1) $\frac{1}{64}$; 2) $-\frac{1}{27}$; 3) 1; 4) $\frac{2187}{16\,384}$; 5) $-\left(\frac{10}{99}\right)^9$; 6) $\left(\frac{10}{99}\right)^8$; 7) $-\left(\frac{5}{2}\right)^{2007}$; 8) $\left(\frac{13}{14}\right)^{2008}$. **165.** 1) Більше 0; 2) менше 0; 3) більше 0;

4) менше 0; 5) менше 0; 6) менше 0. **166.** 1) $\frac{9}{a^3}$; 2) $-\frac{5}{y^9}$; 3) $\frac{1}{x^2y^3}$;

4) $\frac{1}{2a^2b^3}$; 5) $\frac{b}{a^2}$; 6) $\frac{2x}{y^4}$; 7) $\frac{1}{x^2y^3}$; 8) $\frac{1}{a^8b^9}$; 9) $\frac{8}{(x-t)^3}$; 10) $\frac{5a}{(2-t)^4}$.

167. 1) $5x^{-3}$; 2) $3^{-1}ab^{-2}$; 3) $7xy^{-4}$; 4) $9^{-1}a^3b^2$; 5) $m^{-2}n^{-3}$; 6) $4xy^{-2}t^{-4}$;

7) $3x(a-5)^{-4}$; 8) $3(2x+1)^2(a-m)^{-7}$. **168.** 1) 13; 2) 50; 3) 3; 4) 1.

169. 1) $\frac{b^8}{a^{32}}$; 2) 1; 3) a^3; 4) $\frac{1}{a^{16}}$. **170.** 1) $\frac{2}{x-2}$; 3) $\frac{3}{x-4}$. **172.** 2) $-a^3+3a^2-a+2$;

4) $3a^3b^2-16a^3b$. **173.** 1) $31{,}5\cdot10^{10}$; 2) $22{,}5\cdot10^{10}$; 3) $121{,}5\cdot10^{20}$; 4) 6.

174. 1) $2{,}5\cdot10^{10}$; 2) 10^{25}; 3) $6\cdot10^{11}$; 4) $7{,}2\cdot10^{10}$. **175.** 1) $8{,}2\cdot10^{3}$;

2) $3{,}7\cdot10^{5}$; 3) $5{,}23\cdot10^{5}$; 4) $1{,}624\cdot10^{8}$; 5) $2{,}63\cdot10^{11}$; 6) $7{,}25\cdot10^{8}$.

179. 1) $0{,}6\cdot10^{22}$; 2) $0{,}1\cdot10^{-10}$; 3) $0{,}1\cdot10^{3}$; 4) $1{,}7\cdot10^{-21}$; 5) $7{,}35\cdot10^{19}$.

180. 1) $1{,}1\cdot10^{2}$; 2) $7{,}8\cdot10^{-5}$; 3) $1{,}5\cdot10^{3}$; 4) $8{,}2\cdot10^{-3}$. **181.** 1) $1{,}82\cdot10^{5}$;

3) $1{,}5\cdot10^{27}$; 4) $9\cdot10^{-9}$. **183.** $3{,}96\cdot10^{10}$ км. **185.** $\approx 2{,}4\cdot10^{-4}$. **186.** 1) -10;

2) -15; 3) 10^{10}; 4) -45; 5) -29; 6) 2. **188.** 1) $5{,}2\cdot10^{9}$; 2) $1{,}7\cdot10^{-2}$;

3) $8{,}13\cdot10^{12}$; 4) $6{,}21\cdot10^{-13}$. **189.** 1) 0; 2) 0; 3) -6; 4) -2. **193.** 1) $y=-2x$;

2) $y=-\frac{1}{3}x$; 3) $y=-3x$; 4) $y=-\frac{1}{2}x$. **194.** $\frac{n}{n+m}$. **198.** 1) $y=\frac{0{,}6}{x}$; 2) $y=\frac{3{,}5}{x}$;

3) $y=\frac{-0{,}6}{x}$; 4) $y=\frac{-1{,}5}{x}$. **200.** $y=-200$; $x=-1{,}6$. **209.** 1) -81; 2) 18; 3) 20;

4) -24. **210.** 1) 8 см; 2) 4 см. **217.** 1) $\frac{4y^6}{x^4}$; 2) $\frac{27x^6}{y^6}$; 3) $5x^2y^6$; 4) $2x^2y^4$;

5) $\frac{x^2}{4}$; 6) $\frac{27}{x^4}$. **218.** 1) -3; 2) -4; 3) коренів немає; 4) коренів немає.

220. 1) ±2; 5; 2) 2,5; ±5; 3) 6; ±9; 4) 4,5; ±10. **222.** Шестикутник.

228. 1) ±2; 2) ±1; 3) ±1; 4) ±6; 5) 8; 6) 27; 7) ±5; 8) $\frac{1}{49}$. **229.** Симетричні відносно осі Ox. **231.** $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant-1$, $1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$. **234.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-(x+y)^2$;

3) $\frac{4-m}{m+4}$; 4) $\frac{p-5}{p+5}$. **235.** 1) -16; 2) -16; 3) 8; 4) 8. **236.** $\frac{600-60t}{t}$ км/год.

243. 1) Один; 2) один; 3) жодного; 4) жодного. **248.** 1) Один; 2) один;

3) два; 4) жодного. **251.** 1) $\frac{2-y}{2x-2y}$; 2) $\frac{5x+y}{4a+2b}$; 3) $\frac{1-2xy}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$.

252. 1) $x=\frac{yz}{z-y}$; 2) $y=\frac{xz}{z+x}$; 3) $z=\frac{xy}{x-y}$. **253.** $\frac{1}{3}$. **254.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **258.** 1) 5; 2) 6; 3) 100; 4) 120; 5) 0,4; 6) 0,7. **259.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{9}{8}$; 3) $1\frac{3}{7}$; 4) $\frac{6}{11}$; 5) $\sqrt{\frac{53}{29}}$; 6) $4\frac{1}{2}$. **260.** 1) ±1; 2) ±12; 3) $\pm\sqrt{15}$; 4) 0; 5) коренів немає; 6) коренів немає; 7) $\pm\sqrt{19}$; 8) $\pm\sqrt{2}$. **261.** 1) 5,2; 2) 77; 3) 1,7; 4) 10; 5) −10; 6) −3,6. **262.** 1) 0; 2) $4\frac{1}{10}$; 3) 2,5; 4) 30. **264.** 1) а) 6; б) 1; в) 1; 2) а) $\sqrt{41}$; б) 6; в) 2; 3) а) 0; б) 20; в) 1,44; г) 3660; 4) а) 5; б) 3; в) 6. **266.** 1) Існує; 2) існує; 3) не існує; 4) не існує; 5) існує; 6) не існує. **267.** 1) $\pm0{,}2$; 2) ±6; 3) ±7; 4) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; 5) коренів немає; 6) ±3; 7) коренів немає; 8) коренів немає. **268.** 4) $\pm\frac{7}{4}$. **269.** 1) 25; 2) 4; 3) 49; 4) 9; 5) $1\frac{9}{16}$; 6) $\frac{25}{49}$. **270.** 1) $\frac{1}{t^4}$; 2) $-a^9$; 3) $-y^2$; 4) $-x^3$; 5) $\frac{c^4}{c^2+1}$; 6) $\frac{c^6}{c^2-1}$; 7) c^2; 8) $\frac{1}{a^2}$. **271.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{21}$. **272.** 6; 16. **273.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $9\frac{1}{9}$; 3) $16\frac{1}{16}$; 4) $25\frac{1}{25}$. **274.** 1) $\approx5\pm1{,}41$; 2) $\approx3\pm2{,}24$; 3) $\approx-1\pm1{,}73$; 4) $\approx-2\pm2{,}45$. **278.** $\frac{19}{1}$; $-\frac{25}{1}$; $-\frac{7}{10}$; $\frac{13}{10}$; $\frac{13}{6}$; $\frac{17}{3}$; $-\frac{7}{2}$; $\frac{27}{5}$; $-\frac{5}{2}$. **283.** 1) 0,(3); 2) 0,1(6); 3) 0,(142757); 4) 0,(1); 5) 0,(6); 6) 0,8(3); 7) 0,(571427); 8) 0,(7). **286.** 1) 1,(3); 2) −0,(7); 3) 3,(142857); 4) −0,625(0); 5) 1,456(0); 6) −123,(0); 7) −1,075(0); 8) 2,1875(0). **287.** 1) $\frac{46}{35}$; 2) 23,9; 3) 0,4; 4) 0,5. **288.** 2) 11 і 12; 3) 18 і 19; 5) −17 і −16. **296.** 1) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; $\sqrt{2}+\sqrt{6}$; $\sqrt{2}+\sqrt{7}$; $\sqrt{2}+\sqrt{11}$; $\sqrt{2}+\sqrt{31}$; 3) $\sqrt{24}-\sqrt{47}$; $\sqrt{24}-\sqrt{11}$; $\sqrt{24}-\sqrt{7}$; $\sqrt{24}-\sqrt{5}$; $\sqrt{24}-\sqrt{2}$. **297.** 1) $3\frac{1}{9}$, $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$, 3,2(1), 3,(2). **300.** 2) $10-\sqrt{5}$; 4) $8+\sqrt{11}$. **301.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **304.** 20 км/год; 16 км/год. **307.** 1) 18; 2) 30; 4) 48; 5) 1; 6) 0,7; 7) 0,36; 8) 1,95. **308.** 1) $\frac{6}{7}$; 2) $\frac{10}{13}$; 3) $\frac{7}{14}$; 4) $\frac{11}{5}$; 5) $\frac{13}{9}$; 6) $\frac{9}{4}$. **309.** 1) 6; 2) 96; 3) 26; 4) 15; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 3. **310.** 1) 12,6; 2) 96; 3) $1\frac{3}{8}$; 4) $\frac{8}{15}$; 5) $2\frac{1}{3}$; 6) $\frac{9}{11}$.

311. 1) 16; 2) 70; 3) 60; 4) 40; 5) 240; 6) 6. **312.** 1) 30; 2) 75; 3) 42; 4) 32; 5) 60; 6) 63. **313.** 1) 3; 2) 5; 3) 10; 4) 6; 5) 5; 6) 10. **314.** 1) 35; 2) 99; 3) 30; 4) 70; 5) $\sqrt{313}$; 6) 50. **315.** 1) 1; 2) 1; 3) 7; 4) 5; 5) $1\frac{1}{3}$; 6) 2. **316.** 1) 2; 2) 4; 3) 4; 4) 40. **317.** 1) 170; 2) 270; 3) 510; 4) 1300; 5) 2,4; 6) 3,1; 7) 3,4; 8) 4,7. **318.** 1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 26; 5) 15; 6) $12\sqrt{6}$; 7) 15; 8) 2. **319.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{1}{9}$; 4) $\frac{2}{5}$. **321.** 1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{a}$, $a \geqslant 0$; 5) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. **322.** 1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$, $x \geqslant 0$; 2) $\frac{3}{\sqrt{a}}$, $a > 0$; 6) $\frac{\sqrt{mk}}{2\sqrt{n}}$, $m \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $n > 0$. **324.** У 30 разів. **325.** 3 дм. **326.** 1) a^5b^5; 2) 1; 3) $\frac{1}{b^{24}}$; 4) b^{10}. **328.** 3,5 см; 7,5 см. **330.** 1) 7; 2) 7; 3) 7; 4) 7. **332.** 1) 5; 2) 0,3; 3) 1,7; 4) 19; 5) 6; 6) 3. **334.** 1) $|m|$; 2) $2|a|$; 3) $-\sqrt{5}|b|$; 4) $-0,3|x|$; 5) $5|m|$; 6) $6|y|$; 7) $\frac{-2}{3|n|}$; 8) $\frac{5}{|a|}$. **335.** 1) m; 3) $-5c$. **336.** 1) $5k$; 4) $-1,2n$. **337.** 1) a^4; 3) $2t^5$; 4) $-a^{10}$; 5) a^{1004}. **338.** 1) $|m^9|$; 2) $-a^6$; 3) $|t^7|$; 4) $-3|k^{11}|$; 5) a^{12}; 6) $-2b^{100}$. **339.** 1) 36; 2) 32; 3) 10 000; 4) $\frac{1}{125}$; 5) 1; 6) 49; 7) 0,2; 8) 2700. **340.** 1) 81; 2) 64; 3) $-\frac{1}{16}$; 4) -49; 5) 56; 6) 40; 7) $12\frac{1}{2}$; 8) -25. **342.** 1) ± 4; 2) ± 5; 3) коренів немає; 4) ± 3; 5) -7; 11; 6) -8; 6. **343.** 1) $x-3$; 2) $-x-10$; 5) $\sqrt{3}$; 6) 1. **346.** 1 л (18 %), 14 л (3 %). **347.** 1) 9; 2) 4; 3) 8; 4) 12. **350.** 1) $2\sqrt{5}$; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $3\sqrt{3}$; 4) $10\sqrt{3}$; 5) $4\sqrt{3}$; 6) $9\sqrt{2}$. **351.** 1) $2\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $10\sqrt{20}$; 4) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$; 5) $-\frac{\sqrt{10}}{2}$; 6) $60\sqrt{2}$. **352.** 1) $4\sqrt{5}$; 2) $7\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{7}$; 4) -36; 5) -15; 6) $-1,125\sqrt{2}$. **353.** 1) $\sqrt{45}$; 2) $\sqrt{343}$; 3) $\sqrt{28}$; 4) $\sqrt{50}$; 5) $\sqrt{100a}$; 6) $\sqrt{25x}$. **354.** 1) $\sqrt{5}$; 3) $-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2a}$; 7) $-\sqrt{0,4b}$. **355.** 1) $\sqrt{98}$; 2) $\sqrt{99}$; 3) $-\sqrt{24}$; 4) $-\sqrt{500}$; 5) $\sqrt{12a}$; 6) $-\sqrt{0,4x}$; 7) $\sqrt{7n}$; 8) $\sqrt{3a}$. **358.** 1) $c\sqrt{13}$; 2) $4x^2\sqrt{x}$; 3) $|y^3|\sqrt{7y}$; 4) $2b^{10}\sqrt{7}$; 6) $-x^3\sqrt{2}$. **359.** 1) $-\sqrt{7m^2}$; 2) $-\sqrt{3x^6}$; 3) $\sqrt{-a^3}$, $a \leqslant 0$; 4) $\sqrt{5b}$, $b > 0$; 5) $\sqrt{(m+3)^8}$, $m+n > 0$; 6) $\sqrt{(a-b)^3}$, $a-b \geqslant 0$. **361.** 1) 1; 2) -1; 3) 1; 4) -1. **362.** 1) 0; 4; 2) 0; 5; 3) -7; 0; 4) -7; 0. **363.** 208 г (8 %), 312 г (3 %).

364. 1) 16; 2) 16; 3) 8; 4) 8. **369.** 1) −5; 2) −30; 3) $\sqrt{6}-6$; 4) $12-10\sqrt{3}$.

370. 1) −3; 2) $14-7\sqrt{2}$; 3) −120; 4) $15-3\sqrt{3}$. **371.** 2) $5\sqrt{3}-1$; 5) $10+5\sqrt{6}$; 6) −17.

372. 1) $a-4$; 2) −2; 3) −1; 4) 17; 5) $83+18\sqrt{2}$; 6) $49-8\sqrt{3}$; 7) $58-24\sqrt{5}$; 8) $32-16\sqrt{15}$. **373.** 1) $12+6\sqrt{3}-3\sqrt{6}$; 2) $-\sqrt{5}-11$; 3) 314; 4) 2; 5) 16; 6) $168+48\sqrt{3}$; 7) $\dfrac{5-2\sqrt{6}}{6}$; 8) $6\sqrt{10}$. **374.** 1) $\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$; 2) $\sqrt{7}(1-\sqrt{7})$; 3) $\sqrt{x}(1+\sqrt{x})$; 4) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$. **375.** 1) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$; 2) $(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$; 4) $(\sqrt{10}-3y)(\sqrt{10}+3y)$. **380.** 1) $5-3\sqrt{2}$; 2) 60; 3) $12-3\sqrt{6}$; 4) 2; 5) 2; 6) 4.

384. 2) $\dfrac{y-\sqrt{5}}{y+\sqrt{5}}$; 4) $\dfrac{2\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2\sqrt{m}-\sqrt{n}}$. **385.** 1) ±2. **404.** 1) 2; 3) 8. **406.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **407.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **408.** 1) 1; 2) 6; 3) 13; 4) 7. **410.** 5000 грн. (6 %), 5200 грн. (8 %). **412.** 1) 0; 2) −4; 0; 3) ±3; 4) ±9. **418.** 1) 0 і 11; 2) 0 і −2; 4) 0 і 3. **423.** 1) 0,2 і $-\dfrac{1}{7}$; 4) 0 і $\pm\sqrt{3}$. **425.** 3) −1 і −7; 4) 11 і 7. **427.** $12\sqrt{2}$ см. **431.** ≈1311 грн. **435.** 1) 1 і 3; 2) −8 і 2; 3) −5 і 1; 4) $1\pm\sqrt{2}$. **439.** 5) Коренів немає. **441.** 4) $-\dfrac{22}{9}$ і 2. **445.** $m=3$. **450.** 1) $a=\pm 20$; 3) $-20<a<20$. **453.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **454.** 10 %. **464.** 1) 3 і 18; 2) 3 і $-\dfrac{7}{9}$. **466.** 1) $k=6$; 2) $k=-34$; 3) $k=-6$; 4) $k=11$. **470.** 1) Два; 2) жодного. **483.** 3) $(x+9)(1-x)$. **485.** 1) $\dfrac{x-1}{2}$; 2) $\dfrac{3}{x+6}$; 3) $\dfrac{x+2}{x+4}$; 4) $\dfrac{1-2a}{2+a}$. **488.** 1) 6 при $t=2$; 2) −11 при $x=3$; 3) 10 при $x=1$; 4) 36 при $t=2$. **492.** 10,26 ц і 11,16 ц. **500.** 1) −2 і 0, 4; 2) 1 і 2. **506.** 2) $3\pm3\sqrt{2}$; 4) 2 і 4. **510.** 1) ±1; ±2. **513.** 1) −3 і 4; 4) 2. **515.** 3) 6. **516.** 1) 0,4; 2) 4. **517.** 1) 1; 2) 0,5; 3) $-1\pm2\sqrt{2}$; 4) 1 і $-\dfrac{1}{4}$. **525.** Ні. **528.** 5 і 6. **532.** 24 см^2. **535.** Так. **536.** 4 год і 6 год. **542.** 22 км/год. **547.** 12 і 5. **548.** $5\dfrac{5}{11}$%. **553.** 14 і 41. **559.** 1) 2; 2) 6; 3) 3; 4) 7. **560.** 1) $x\neq 0$, $x\neq\pm1$, $x\neq\pm2$; 2) $x\neq0$, $x\neq\pm2$, $x\neq\pm3$; 3) $x\neq0$, $x\neq\pm4$, $x\neq\pm6$. **561.** 1) $\dfrac{a-7}{2}$; 2) $\dfrac{a+1}{2-2a}$; 3) $\dfrac{2-a}{2a+4}$. **562.** 1) $\dfrac{a^2+2}{a^2+3a+9}$; 2) $\dfrac{a^2+2a+4}{a^2+1}$; 3) $\dfrac{a^2-4a+16}{a^2-3}$; 4) $\dfrac{a^2+3}{a^2+5a+25}$. **564.** 1) $\dfrac{1}{2x+2}$; 2) $\dfrac{1}{3x+6}$; 3) $\dfrac{1}{5x+15}$; 4) $\dfrac{1}{6x+24}$. **567.** 1) ±1, ±2, ±3, ±6.

568. 1) 15; 2) 1; 3) −1; 4) 15. **570.** 1) 1; 3) 3. **571.** 1) $a-b$; 2) $a+b$; 3) 1; 4) −1. **572.** 1) −1; 2) −1; 3) $(x-5)^2$; 4) $(x+4)^2$. **575.** 1) 2; 2) коренів немає; 3) коренів немає; 4) коренів немає. **576.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 5; 4) −1. **577.** 1) $\frac{a^4+2a^2+1}{a^4-2a^2+1}$; 3) $\frac{a^3+1}{a^3-1}$. **578.** 1) 1,935 г; 2) $1{,}935\cdot 10^3$ г. **580.** 1) 81; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{7}{3}$; 4) 5. **582.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) ±3; 3) ±1; 4) ±2. **584.** 3) $1\leqslant y\leqslant 16$; 4) $-2\leqslant x\leqslant 2$. **592.** 1) 48; 2) 12; 3) 1,8; 4) 0,1; 5) 0,064; 6) 0,002. **595.** 1) 0,5; 2) 0,1; 3) 20; 4) 0,01. **596.** 1) 0,07; 2) 13,5; 3) 2; 4) 1,4. **597.** 1) $-10x^2y\sqrt{2x}$; 2) $10x^4y\sqrt{3y}$. **598.** 1) $-\sqrt{13x^7}$; 3) $-\sqrt{x}$. **600.** 1) $2a-b$; 2) $3b-2a$. **603.** 6) 2. **604.** 1) $\sqrt{2}$; 3) 2; 4) 3. **607.** 1) $\frac{2a+10b}{a-b}$. **613.** 1) −1,5 і 1; 2) $-\frac{10}{3}$ і $-\frac{8}{3}$; 3) $\pm\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{3}$ і 1. **616.** 1) ±1; 2) ±2; 3) ±2; 4) ±3. **617.** 1) $\pm 3(2\pi-1)$; 2) $\pm\frac{1}{2}(4\pi-1)$. **618.** 1) ±4; 2) ±3; 3) −1; 4) 1; 5) 0; 10; 6) 0; 7. **620.** 1) Будь-яке число, крім −1 і 5; 3) −1; 4) 0,5. **625.** 1) −21; 2) 8; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) $-\frac{7}{2}$. **628.** 1) $(2t-3)(3t+2)$; 3) $(p+5)(5p-2)$. **631.** 1) ±1; 2) $\pm\frac{1}{3}$; 3) $\pm\frac{5}{2}$; 4) $\pm\frac{2}{5}$. **632.** 1) 2; 2) $-\frac{1}{7}$ і −1; 4) −6 і 5. **635.** 1) 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{65}}{4}$; 2) 3, −2, $\frac{1\pm\sqrt{73}}{6}$. **639.** 20 км/год. **640.** 3,2 км/год. **648.** (1; 57), (2; 27). **649.** 3^3-2^3. **650.** 3 і 1,5. **653.** 2 м. **654.** 12 год, 15 год. **657.** 6 років, 30 років. **658.** 0. **659.** 12. **660.** 1) (9; −3; 1; 5); 2) (1; 2; 3). **661.** 10 км, 6 км/год, 4 км/год. **662.** 30 хв. **673.** 6. **675.** 1) −16; 2) 2. **679.** $x=2$, $y=1$, $z=2$. **680.** 90 відер, 54 відра, 40 відер. **691.** 2. **692.** $\frac{1}{3}$. **694.** Від 4 км/год до $\frac{8+\sqrt{61}}{3}$ км/год. **699.** Третя. **700.** (1; 44), (5; 4). **701.** 550. **707.** 1) 3,8; 3) −1,012. **708.** 15 дівчат і 10 хлопців. **712.** 9 кг і 3 кг. **722.** 1) 225 см²; 2) 400 см²; 3) 400 см²; 4) 1600 см². **727.** 5 см. **732.** $k=3$. **736.** 1) (1; 5); 3) (−4; −3); 5) (5; 3). **738.** 1) 50 грн. і 60 грн.; 1) 1,5 грн. і 1 грн.

ЗМІСТ

Розділ III. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Навчальне видання

БІЛЯНІНА Ольга Ярославівна
КІНАЩУК Наталія Леонідівна
ЧЕРЕВКО Ігор Михайлович

АЛГЕБРА

Підручник для 8-го класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактор *Н. Дашко*
Макет *В. Волкова*
Художнє оформлення і обкладинка *С. Железняк*
Технічні малюнки *Ю. Лебедєва*
Технічний редактор *В. Олійник*
Коректори *І. Іванюсь, Л. Леуська*
Комп'ютерна верстка *К. Шалигіної*

Степінь з від'ємним показником

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0,\ n\in N;\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n},\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ n\in N$$

Властивості степеня з цілим показником

$(a\neq 0,\ b\neq 0,\ n\in Z,\ m\in Z)$

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};$$

$$a^m:a^n=a^{m-n};\ \left(a^m\right)^n=a^{mn};\ (ab)^n=a^n\cdot b^n;\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Дійсні числа

Натуральні числа N

\+ їм протилежні + «0»

Цілі числа Z

\+ дробові

Раціональні числа Q

\+ ірраціональні числа

Дійсні числа R

Арифметичний квадратний корінь (АКК)

$$\sqrt{a}=b,\ a=b^2,\ b\geqslant 0,\ a\geqslant 0$$

Властивості АКК

При $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab},$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}},\ b\neq 0$$

При $a\in R,\ b\in R$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}},\ b\neq 0$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\left[\begin{array}{l}a,\ a\geqslant 0,\\ -a,\ a\leqslant 0\end{array}\right.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\geqslant 0$$

Квадратні рівняння

$$ax^2+bx+c=0$$

$b \in R$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$b=2k,\ k\in Z$ (b – парне):

$$x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}\quad\left(x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}\right)$$

Дослідження кількості коренів квадратного рівняння

Підкореневий вираз

- $>0 \longrightarrow x_1\neq x_2$
- $=0 \longrightarrow x_1=x_2$
- $<0 \longrightarrow$ коренів немає

Слід пам'ятати (!) → Якщо a і c різних знаків ($ac<0$), то корені є **завжди**

Теорема Вієта

зведене рівняння

$$x^2+px+q=0$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q\end{cases}$$

незведене рівняння

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

Слід пам'ятати (!) → Спочатку треба перевірити, чи існують корені квадратного рівняння

КВАДРАТИ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ (10–99)

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

КУБИ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ (1–30)

n	n^3	n	n^3	n	n^3
1	1	11	1331	21	9261
2	8	12	1728	22	10 648
3	27	13	2197	23	12 167
4	64	14	2744	24	13 824
5	125	15	3375	25	15 625
6	216	16	4096	26	17 576
7	343	17	4913	27	19 683
8	512	18	5832	28	21 952
9	729	19	6859	29	24 389
10	1000	20	8000	30	27 000

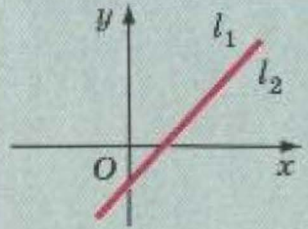
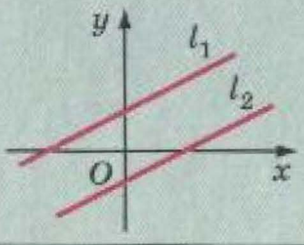
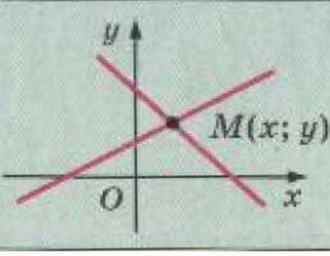
ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ (ФСМ)

Назва формули	Многочлен = Добуток
Квадрат двочлена	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Різниця квадратів	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Сума (різниця) кубів	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Слід пам'ятати (!)	$(a-b)^2 = (b-a)^2$; $(-a-b)^2 = (a+b)^2$; $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$

СИСТЕМА ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Умова	Кількість розв'язків системи	Графічне зображення
$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$	безліч	 прямі l_1 і l_2 збігаються
$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$	немає розв'язків	 $l_1 \parallel l_2$
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	єдиний розв'язок	 $l_1 \cap l_2 = M$ $(x; y)$ – розв'язок