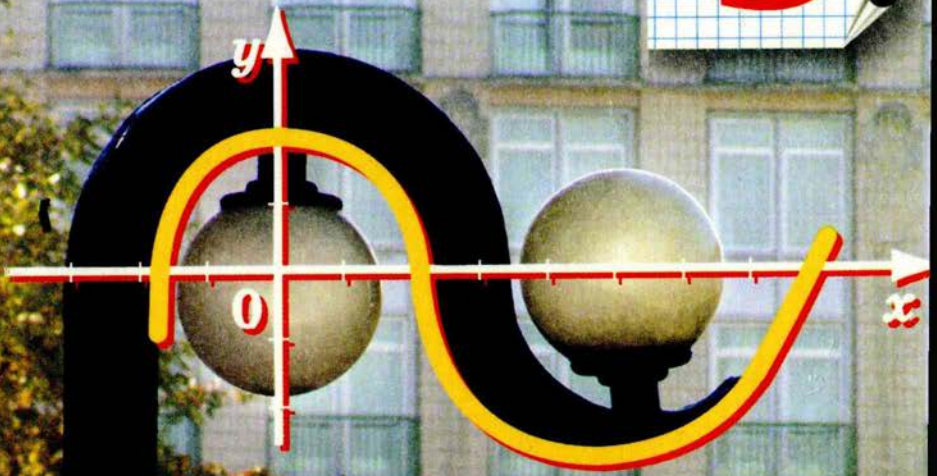
Г.П. БЕВЗ, В.Г. БЕВЗ

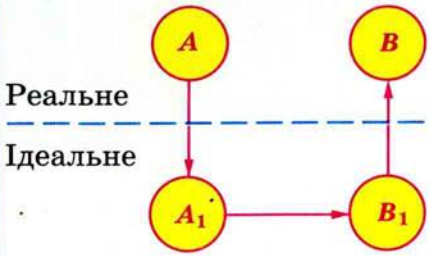
Алгебра

9



www.4book.org

Схема розв'язування прикладної задачі



A — прикладна задача,
A_1 — її модель,
B_1 – відповідь задачі A_1,
B — відповідь задачі A

Задачі на відсотки

Знаходження:

1) p відсотків від числа a — $a \cdot 0{,}01p$;

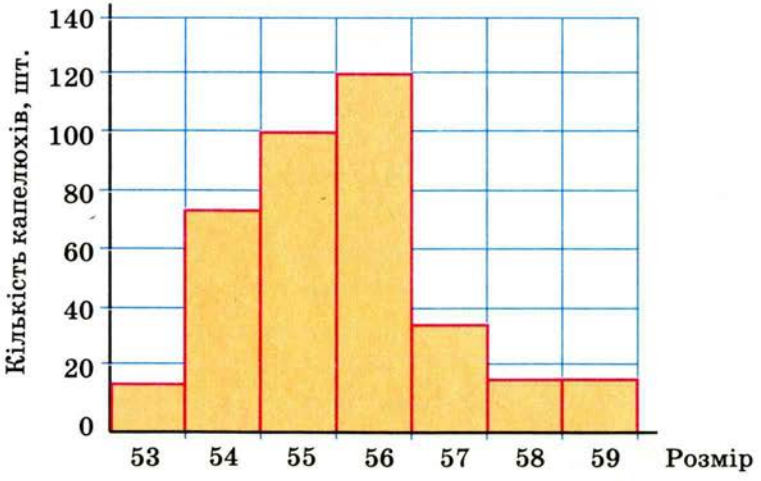
2) числа, p відсотків якого дорівнюють b, — $b : (0{,}01p)$;

3) відсоткового відношення a і b — $(a : b) \cdot 100\%$.

Формула простих відсотків: $P_n = P_0\left(1 + \frac{r}{100} \cdot n\right)$

Формула складних відсотків: $A_n = A_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

Гістограма



www.4book.org

Послідовності:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... — натуральних чисел;

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... — парних чисел;

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... — квадратів чисел;

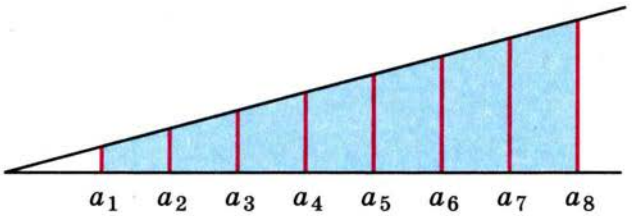
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... — простих чисел

Арифметична прогресія: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$

$d = a_2 - a_1 = a_{n+1} - a_n$ — різниця;

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ — формула n-го члена;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — формула суми перших n членів



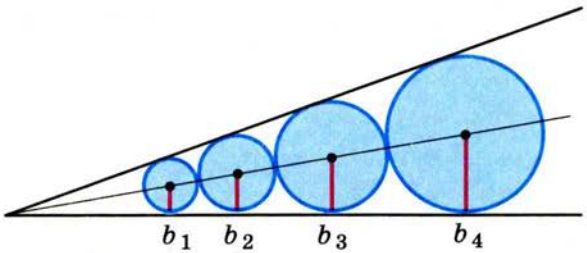
Геометрична прогресія: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$

$q = b_2 : b_1 = b_{n+1} : b_n$ — знаменник ($q \neq 0$, $b_1 \neq 0$);

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — формула n-го члена;

$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ — формула суми перших n членів ($q \neq 1$);

$S_n = \frac{b_1}{1 - q}$ — формула суми членів при $|q| < 1$



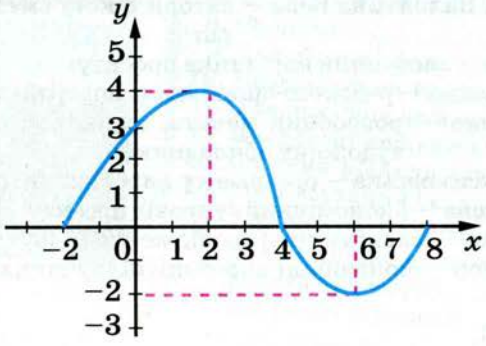
www.4book.org

Г. П. БЕВЗ, В. Г. БЕВЗ

Алгебра

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



Підручник — переможець
Всеукраїнського конкурсу підручників
для 12-річної школи
Міністерства освіти і науки України в 2009 р.

Київ
«Зодіак-ЕКО»
2009

www.4book.org

ББК 22.1я721
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
наказ від 2 лютого 2009 р., № 56
Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Відповідальні за підготовку до видання підручника: ***Н. С. Прокопенко*** *— головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України;* ***О. О. Литвиненко*** *— методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти.*
Експерти рукопису підручника: ***І. В. Горобець*** *— вчитель-методист ліцею «Перспектива», заступник директора, м. Запоріжжя;* ***О. В. Горбачик*** *— учитель Кузнецовської гімназії, Рівненська область;* ***Л. М. Кастранець*** *— методист Чортківського РМК, Тернопільська область;* ***І. Г. Величко*** *— доцент кафедри алгебри і геометрії Запорізького національного університету, кандидат фізико-математичних наук;* ***Ю. А. Дрозд*** *— завідувач відділу алгебри Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;* ***О. І. Глобін*** *— старший науковий співробітник лабораторії математичної та фізичної освіти АПН України, кандидат педагогічних наук*

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій Кузнецов — керівник проекту, розробник концепцій: структури, дизайну;
Григорій Бевз, Валентина Бевз — автори тексту і методичного апарату;
Олег Костенко — заступник керівника проекту;
Наталія Демиденко — редактор-організатор, контрольне редагування;
Андрій Віксенко — розробник макета, художнього оформлення, художник обкладинки;
Валентина Максимовська — організатор виробничого процесу;
Галина Кузнєцова — економічний супровід проекту;
Роман Костенко — маркетингові дослідження підручника;
Андрій Кузнецов — моніторинг апробації підручника

Бевз, Г. П.
Б36 Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К.: Зодіак-ЕКО, 2009. — 288 с.: іл.

ISBN 978-966-7090-64-7. **ББК 22.1я721**

© Видавництво «Зодіак-ЕКО». Усі права захищені. Жодні частина, елемент, ідея, композиційний підхід цього видання не можуть бути копійованими чи відтвореними в будь-якій формі та будь-якими засобами — ні електронними, ні фотомеханічними, зокрема ксерокопіюванням, записом або комп'ютерним архівуванням, — без письмового дозволу видавця.

© Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, 2009
© Видавництво «Зодіак-ЕКО», 2009
© Художнє оформлення. А. М. Віксенко, 2009
© Концепції: структури, дизайну. Ю. Б. Кузнецов, 2009

ISBN 978-966-7090-64-7

www.4book.org

ЗМІСТ

Юні друзі! 5

Розділ 1

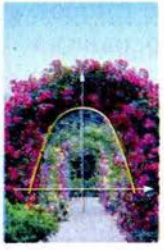
НЕРІВНОСТІ

§ 1. Загальні відомості про нерівності 7
§ 2. Властивості числових нерівностей 16
§ 3. Подвійні нерівності 22
§ 4. Розв'язування нерівностей з однією змінною .. 28
§ 5. Числові проміжки 38
§ 6. Системи нерівностей з однією змінною 48
§ 7. Доведення нерівностей 56

Завдання для самостійної роботи 62
Головне в розділі 63
Історичні відомості 64

Готуємося до тематичного оцінювання
Тестові завдання № 1 66
Типові завдання
до контрольної роботи № 1 67

Розділ 2



КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§ 8. Функції 69
§ 9. Властивості функцій 80
§ 10. Перетворення графіків функцій 91
§ 11. Квадратична функція 103
§ 12. Квадратні нерівності 113
§ 13. Системи рівнянь другого степеня 122
§ 14. Розв'язування задач складанням систем рівнянь 133

Завдання для самостійної роботи 142
Головне в розділі 143
Історичні відомості 144

Готуємося до тематичного оцінювання
Тестові завдання № 2 146
Типові завдання
до контрольної роботи № 2 147

www.4book.org

Розділ 3

ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

§ 15. Математичне моделювання 149
§ 16. Відсоткові розрахунки 163
§ 17. Наближені обчислення 175
§ 18. Випадкові події та їх імовірність 183
§ 19. Відомості про статистику 193

Завдання для самостійної роботи 204
Головне в розділі 205
Історичні відомості 206

Готуємося до тематичного оцінювання
Тестові завдання № 3 208
Типові завдання
до контрольної роботи № 3 209

Розділ 4

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

§ 20. Послідовність 211
§ 21. Арифметична прогресія 221
§ 22. Геометрична прогресія 231
§ 23. Задачі на обчислення сум 242

Завдання для самостійної роботи 251
Головне в розділі 252
Історичні відомості 253

Готуємося до тематичного оцінювання
Тестові завдання № 4 254
Типові завдання
до контрольної роботи № 4 255

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Нерівності 256
Функції і графіки 257
Елементи прикладної математики 260
Числові послідовності 263

Задачі та вправи підвищеної складності 266

Відомості з курсу алгебри 7—8 класів 272

Відповіді та вказівки до задач і вправ 281

Предметний покажчик 286

www.4book.org

Юні друзі!

Цей підручник з алгебри побудовано так само, як і підручник для 8 класу, за яким ви навчалися минулого року. Він містить теорію, задачі і вправи, завдання для самостійних робіт, запитання для самоперевірки, історичні відомості тощо.

Вивчаючи теорію, звертайте увагу на слова, виділені *курсивом*, — це нові терміни, які треба знати, розуміти, що вони означають. Набрані **жирним** шрифтом або синім кольором речення є основними означеннями, правилами та іншими важливими математичними твердженнями. Їх слід уміти формулювати (можна — своїми словами) і застосовувати до розв'язування вправ і задач.

Є в підручнику задачі з математичного фольклору різних народів, задачі відомих математиків, інші історичні задачі. Алгебра, як і вся математика, — це не тільки важливий інструмент наукового пізнання і добрий засіб розвитку логічного мислення учнів, вона є складовою загальнолюдської культури.

У кожному параграфі підручника є рубрика «Хочете знати ще більше?», що містить додаткові відомості для учнів, які особливо цікавляться математикою (її позначено). Відповідаючи на запитання рубрики «Перевірте себе», ви зможете закріпити, узагальнити і систематизувати здобуті знання, вміння та навички, одержані під час вивчення теми. У рубриці «Виконаємо разом!» наведено зразки розв'язання найважливіших видів вправ. Корисно ознайомитися з цими прикладами, перш ніж виконувати домашні завдання (їх позначено знаком).

Підручник містить вправи різних рівнів — від порівняно простих до досить складних. Номери останніх позначено зірочкою (*), вони пропонуються тим учням, які згодом навчатимуться у класах з поглибленим вивченням математики. Матеріали рубрики «Готуємося до тематичного оцінювання» допоможуть вам повторити і систематизувати вивчений матеріал. «Історичні відомості» сприятимуть розширенню кругозору кожного учня.

Бажаємо успіхів у навчанні!

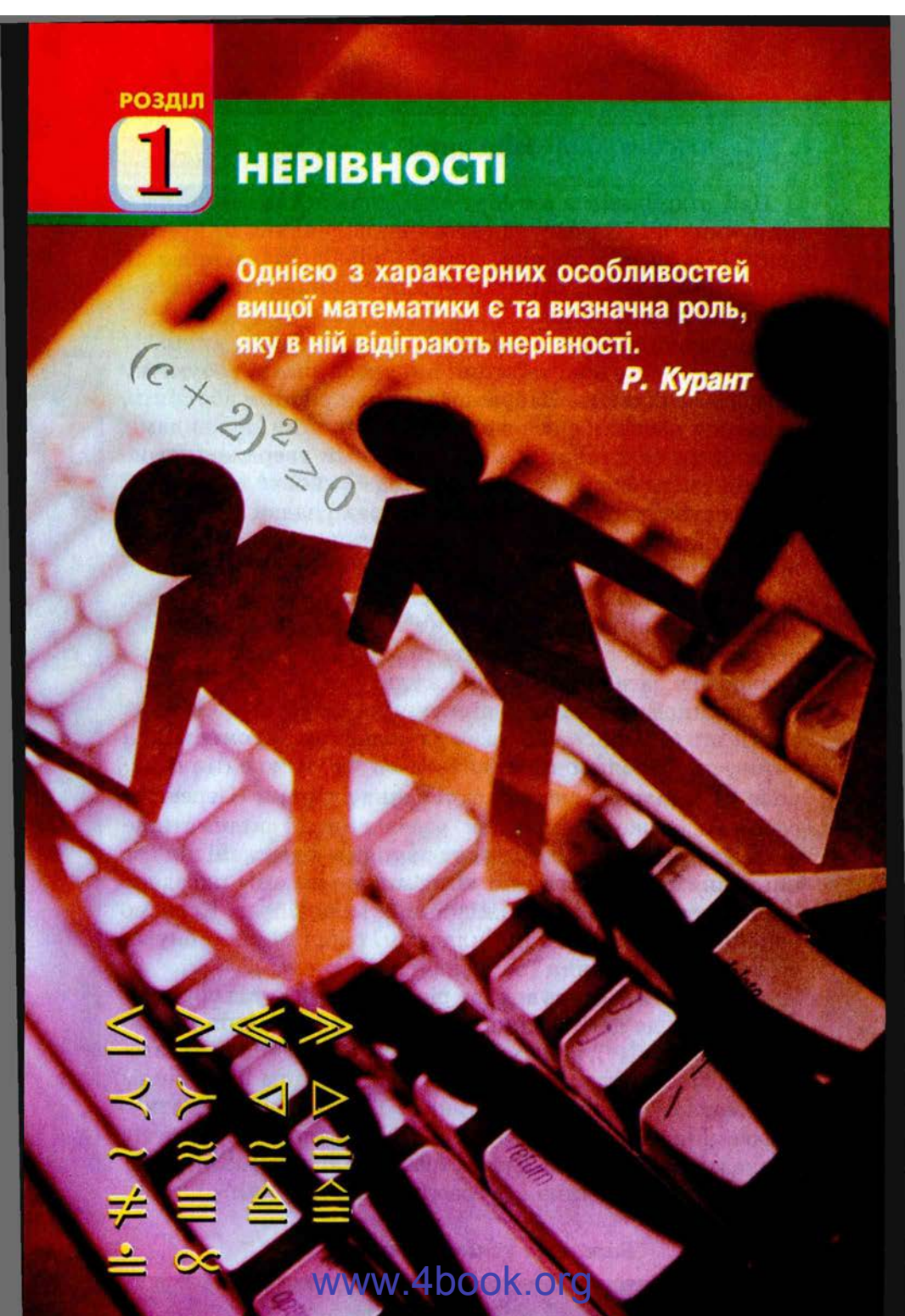
www.4book.org

РОЗДІЛ

1 НЕРІВНОСТІ

Однією з характерних особливостей вищої математики є та визначна роль, яку в ній відіграють нерівності.

Р. Курант



www.4book.org

Нерівності використовують так само часто, як і рівності. За їх допомогою зручно моделювати відношення більше — менше, коротше — довше та ін. Як і рівності, нерівності бувають числові та зі змінними. Деякі з них доводять, інші – розв'язують.

Основні теми розділу:

- **властивості числових нерівностей;**
- **подвійні нерівності;**
- **розв'язування нерівностей з однією змінною;**
- **системи нерівностей з однією змінною.**

§1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕРІВНОСТІ

Якщо число a менше або більше від числа b, то записують відповідно $a < b$ або $a > b$. Наприклад,

$$3 < 5, \quad -7 > -13.$$

Зміст співвідношень «більше» і «менше» можна розкрити таким означенням.

Число a більше від b, якщо різниця $a - b$ — число додатне; число a менше від b, якщо різниця $a - b$ — число від'ємне.

Оскільки різниця $a - b$ може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю, то для довільних дійсних чисел a і b виконується одне і тільки одне з трьох співвідношень:

$$a > b, \ a < b \text{ або } a = b.$$

Користуючись сформульованим вище означенням, можна порівнювати числа, тобто встановлювати, яке з них більше, а яке — менше. Наприклад, щоб порівняти дроби $\frac{4}{9}$ і $\frac{11}{25}$, знайдемо їх різницю:

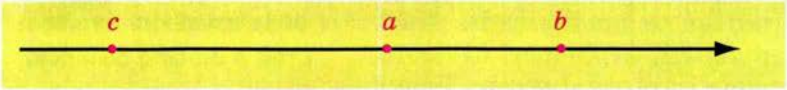
$$\frac{4}{9} - \frac{11}{25} = \frac{4 \cdot 25 - 11 \cdot 9}{9 \cdot 25} = \frac{1}{225}.$$

Різниця даних дробів — число додатне, тому $\frac{4}{9} > \frac{11}{25}$.

www.4book.org

На координатній прямій меншому числу відповідає точка, що лежить ліворуч від точки, яка відповідає більшому числу. Наприклад, малюнок 1 відповідає таким співвідношенням:

$$c < a,\ a < b,\ c < b.$$



Мал. 1

Нерівність — абстрактна математична модель відношень менше — більше, нижче — вище, коротше — довше, вужче — ширше, тонше — товстіше, дешевше — дорожче, молодше — старше та багатьох інших. Крім знаків $<$ (менше) і $>$ (більше) часто використовують також знаки: $\leq$ — менше або дорівнює (не більше), $\geq$ — більше або дорівнює (не менше).

Запис $a \leq b$ означає, що $a < b$ або $a = b$.

Запис $a \geq b$ означає, що $a > b$ або $a = b$.

Наприклад, можна стверджувати, що $2 \leq 5$, $4 \geq 4$, $-\frac{1}{2} \leq -0{,}5$.

Знаки $<$ і $>$ називають ***знаками строгої нерівності***. Вони протилежні один одному: якщо $a < b$, то $b > a$, і навпаки. Знаки $\leq$ і $\geq$ також протилежні один одному, їх називають ***знаками нестрогої нерівності***. Будь-який із знаків $<$, $>$, $\leq$ і $\geq$ називають ***знаком нерівності***.

Два вирази, сполучені знаком нерівності, утворюють *нерівність*.

Приклади нерівностей: $3 < \sqrt{10}$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $3x - 5 > 0$.

Вираз, який стоїть ліворуч чи праворуч від знака нерівності, називають відповідно лівою чи правою частиною нерівності. Наприклад, лівою частиною нерівності $5x + 4 < 8$ є вираз $5x + 4$, а правою — число 8 (будь-яке число також вважається виразом).

Якщо обидві частини нерівності — числові вирази, її називають *числовою нерівністю*. Такі нерівності бувають пра-

www.4book.org

вильні або неправильні. Наприклад, з нерівностей $2 < 3$, $\sqrt{2} \geq 1$, $-3 < -5$ дві перші правильні, а третя — неправильна, бо число -3 більше від -5.

Нерівність зі змінними при одних значеннях змінних може бути правильною, а при інших — неправильною. Наприклад, нерівність $2x + 3 > 5$ правильна, якщо x дорівнює 2, 3, 4, 5, а якщо x дорівнює 1, 0, -1, -2, — неправильна. Говорять, що значення 2, 3, 4, 5 дану нерівність задовольняють, а 1, 0, -1, -2 — не задовольняють.

Крім наведених вище знаків нерівності ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) часто використовується ще знак $\neq$ (не дорівнює). Якщо, наприклад, співвідношення «не більше» ($a \leq b$) означає $a < b$ або $a = b$, то співвідношення «не дорівнює» ($a \neq b$) означає $a < b$ або $a > b$.

Відношення «не дорівнює» принципово відрізняється від «не більше». Для всіх відношень рівності і нерівності, які позначають знаками $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, справджується властивість *транзитивності*, тобто із $a \leq b$ і $b \leq c$ випливає, що $a \leq c$. А для відношення «не дорівнює» така властивість може не справджуватись: із $a \neq b$ і $b \neq c$ не завжди випливає $a \neq c$. Наприклад, $2 \neq 3$ і $3 \neq 2$, але відношення $2 \neq 2$ хибне, неправильне.

Тому далі, говорячи про нерівності, матимемо на увазі два числа або вирази, сполучені будь-яким із знаків $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, але не знаком $\neq$.

Перевірте себе

1. За якої умови число a більше за c?
2. Що таке нерівність?
3. Які бувають нерівності?
4. Які нерівності називають строгими, які — нестрогими?
5. Що означають записи $a \leq b$, $a \geq b$? Прочитайте їх.

Виконаємо разом!

1. Яке з чисел a і b менше, якщо:

а) $a - b = (-1)^2$; б) $a = b - 3$; в) $a - 5 = b$?

✔ Розв'язання. а) $a - b = (-1)^2 = 1$ (число додатне), отже, $b < a$; б) знайдемо різницю чисел a і b: $a - b = -3$ (число від'ємне), отже, $a < b$; в) $a - b = 5$ (число додатне), отже, $b < a$.

Відповідь. а) $b < a$; б) $a < b$; в) $b < a$.

www.4book.org

2. За якої умови вираз $4-(2x+3)^2$ має найбільше значення?

✔ Розв'язання. Даний вираз має найбільше значення, якщо від'ємник найменший. А вираз $(2x+3)^2$ має найменше значення, якщо $2x+3=0$, тобто при $x=-1{,}5$.

Відповідь. Якщо $x=-1{,}5$.

3. Яка з різниць більша і в скільки разів:

$2009^{2010}-2009^{2009}$ чи $2009^{2009}-2009^{2008}$?

✔ Розв'язання. $2009^{2010}-2009^{2009}=2009^{2009}(2009-1)=$
$=2008\cdot 2009^{2009}$;

$2009^{2009}-2009^{2008}=2009^{2008}(2009-1)=2008\cdot 2009^{2008}$;

$(2008\cdot 2009^{2009}):(2008\cdot 2009^{2008})=2009$.

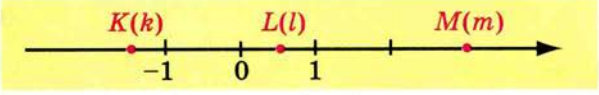
Відповідь. Перша різниця більша від другої в 2009 разів.

Виконайте усно

1. Яке з чисел x і y менше, якщо:

а) $x-y=1$; б) $x-y=-1$; в) $y-x=2$; г) $y-5=x$?

2. Точки K, L, M з координатами k, l, m розміщено на координатній прямій, як показано на малюнку 2. Порівняйте числа:



Мал. 2

а) k і m; б) k і 1; в) m і l;

г) 0 і l; ґ) k і l; д) m і -1.

3. Чи правильна нерівність:

а) $2\geq 2$; б) $-3<-5$; в) $3\leq 2$; г) $-5\leq -2$?

4. Порівняйте числа:

а) 1,28 і $\frac{5}{4}$; б) 0,02 і $\frac{1}{50}$; в) $-\frac{1}{3}$ і $-0{,}33$; г) 1,6 і $\frac{5}{3}$.

5. Порівняйте дроби:

а) $\frac{5}{7}$ і $\frac{3}{7}$; б) $-\frac{4}{3}$ і $-\frac{4}{5}$; в) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$; г) $-\frac{7}{13}$ і $-\frac{13}{27}$.

6. Чи завжди значення $\frac{1}{x}$ менше за відповідне значення x?

7. Чи завжди значення $\sqrt{x}$ менше за відповідне значення x?

www.4book.org

Рівень А

8. Яке з чисел a і b більше, якщо:

а) $a - b = 0{,}01$; б) $a - b = -3{,}7$; в) $a = 2{,}3 + b$;

г) $b - a = (-3)^2$; ґ) $a - b = 0$; д) $b = a + 1$?

9. Порівняйте числа m і n, якщо:

а) $m - n = 0{,}5$; б) $n - m = 5$; в) $m - 4 = n$; г) $m + 3 = n$.

10. Порівняйте числа x і y, якщо:

а) $y - x = -1$; б) $x - y = 7$; в) $x = y - 3$; г) $y - x = 0$.

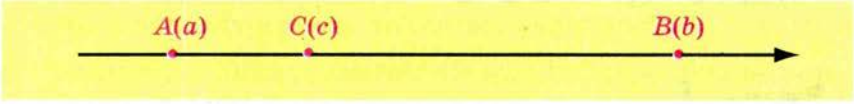
11. Які з нерівностей правильні:

а) $-7 > -5$; б) $4{,}3 \geq -3{,}4$; в) $\sqrt{5} \leq \pi$;

г) $\frac{1}{0{,}5} > 0{,}5$; ґ) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \geq 1{,}5$; д) $\pi \leq 3{,}14$?

12. Точки з координатами a, b, c розміщені на координатній прямій, як показано на малюнку 3. Яке з чисел a, b, c найбільше, яке — найменше? Чи правильні нерівності:

а) $a < b$; б) $b < c$; в) $c < a$; г) $b \geq c$?



Мал. 3

13. Порівняйте числа:

а) $\frac{10}{11}$ і $\frac{19}{20}$; б) $\frac{28}{29}$ і $\frac{29}{30}$; в) $\frac{48}{49}$ і $0{,}98$;

г) $-\frac{7}{9}$ і $-\frac{9}{7}$; ґ) $\frac{2}{15}$ і $\frac{9}{17}$; д) $-\frac{5}{7}$ і $-\frac{1}{3}$.

14. Розмістіть у порядку спадання числа:

$3{,}1$; π; $\sqrt{10}$; $2 + \sqrt{2}$; $5 - \sqrt{3}$.

15. Розмістіть у порядку зростання числа:

2; $\sqrt{5}$; -12; $2\frac{1}{2}$; 0; -3π.

16. Яке з чисел $1{,}5$; $1\frac{29}{50}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{10} : 2$; $\sqrt{7} \cdot 0{,}5$ найбільше?

www.4book.org

17. Порівняйте значення виразів $2x + 3$ і $3x - 2$, якщо:
а) $x = -1$; б) $x = 0$; в) $x = 5$; г) $x = 7$.

18. Порівняйте значення функції $y = 2x - 1$, якщо:
а) $x = 1$ і $x = 2$; б) $x = -1$ і $x = -2$; в) $x = 0{,}1$ і $x = 0{,}2$.

19. Порівняйте значення функції $y = x^2$, якщо:
а) $x = -20$ і $x = 20$; б) $x = -2$ і $x = -1$; в) $x = -8$ і $x = 0$.

20. Доведіть, що $10^{11} - 10^{10} > 10^{10} + 10^9$.

21. Чи правильна нерівність $3x - 2 < 7$, якщо:
а) $x = 4$; б) $x = 3$; в) $x = 2$; г) $x = 0$?

22. Яка з нерівностей правильна за умови, що $x = 10$:
а) $0{,}5x + 1 > 3$; б) $-7x + 3 < x$; в) $3 - x \geq x - 17$?

23. Чи при всіх дійсних значеннях c правильна нерівність:
а) $c^2 + 3 > 0$; б) $(c + 2)^2 > 0$; в) $(c - 1)^2 \geq 0$?

24. Доведіть, що при кожному значенні n:
а) $n^4 + 1 > 0$; б) $(n - 5)^2 \geq 0$; в) $n^2 - 2n + 1 \geq 0$.

25. Підберіть кілька значень змінної x, які задовольняють нерівність:
а) $2x + 3 < 0$; б) $3 - x^2 > 0$; в) $x + \frac{1}{x} < 1$.

Рівень Б

26. Запишіть у порядку зростання числа:

$$(-\pi)^2;\ \sqrt{2};\ -1^2;\ 1\frac{2}{3};\ -\sqrt{3};\ \frac{\pi}{2};\ (-2)^3;\ \sqrt{81};\ -5;\ (-3)^0.$$

27. Запишіть у порядку спадання числа:

$$-2\pi;\ \sqrt{10};\ 297^0;\ \left(-\frac{5}{2}\right)^2;\ \frac{1}{0{,}3};\ \frac{\pi}{10};\ 0^{297};\ (-2)^5;\ \pi;\ -\frac{25}{4}.$$

28. Порівняйте значення виразів $5m + 1$ і $19 - 3m$, якщо:
а) $m = 2$; б) $m = \sqrt{7}$; в) $m = 1 - \sqrt{2}$; г) $m = 1 + \sqrt{3}$.

29. Порівняйте значення функцій $y = 12 + 45x$ і $y = \frac{12}{x}$, якщо:
а) $x = \frac{3}{5}$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{2}{3}$; г) $x = \frac{2}{5}$.

www.4book.org

30. Яка з різниць більша і в скільки разів:
$1999^{2000} - 1999^{1999}$ чи $1999^{1999} - 1999^{1998}$?

31. Доведіть, що при кожному a правильна нерівність:
а) $(a-3)^2 + 2 > 0$; б) $(2a+1)^2 + 0{,}5 > 0$;
в) $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$; г) $9a^2 + 2 > 6a$.

32. Що більше: квадрат суми двох додатних чисел чи сума їх квадратів?

33. За якої умови вираз $1 + (2x-3)^2$ має найменше значення?

34. За якої умови вираз $1 - (2x-3)^2$ має найбільше значення?

35. Як розміщені на координатній прямій точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ і $D(d)$, якщо:
а) $a > b$, $a + b = 2d$ і $b + d = 2c$;
б) $a < b$, $2a = b + c$ і $2d = a + b$?

36. Доберіть кілька значень змінної n, які задовольняють нерівність:
а) $3n - 2 > 2n - 3$; б) $5n + 8 \leq 8n - 1$.

37. Сума двох взаємно обернених чисел дорівнює 2,5. Знайдіть більше з цих чисел.

38. Збільшиться чи зменшиться значення дробу $\frac{2}{5}$, якщо до його чисельника і знаменника додати одне й те саме натуральне число? Наведіть приклади.

39. Яке з чисел a і b більше, якщо:
а) $a + 7{,}8 = b + 3{,}5$; б) $a - 4{,}5 = b - 2{,}3$;
в) $8{,}5 - a = 7{,}3 - b$; г) $2a + 3{,}5 = b - 3{,}5$?

40. Яке з додатних чисел x і y більше, якщо:
а) $2{,}5x = 3{,}2y$; б) $5{,}3 : x = 7{,}1 : y$;
в) $x : 3{,}8 = y : 2{,}6$; г) $2x - 3y = 5{,}4$?

41. Сім зошитів коштують дорожче, ніж 9 олівців. Що дорожче: 12 зошитів чи 15 олівців?

42. Чотири подруги – Даринка Головко, Єва Кучер, Жанна Черкаська і Зоя Коваленко разом зі своїми братами прийшли на ковзанку. Кожний брат був вищий зростом за сестру. Вони розділилися на пари та й почали кататися. З'ясувалося, що в кожній парі «кавалер» вищий за «даму», і ніхто не катається зі своєю сестрою. Найвищим серед друзів виявився Андрій Головко, а найнижчою — Даринка. Відомо,

www.4book.org

що Жанна і Віктор Черкаські вищі за Юру Коваленка, але нижчі за Єву. З ким катався Борис Кучер?

43. Порівняйте значення виразів:
а) $a^2 + 36$ і $12a$; б) $4(x + 1)$ і $(x + 2)^2$;
в) $b^3 + 2$ і $2b + 1$; г) $(y - 3)^2$ і $(y - 2)(y - 4)$.

44. Порівняйте невід'ємні числа a і b, якщо:
а) $a^2 \geq b^2$; б) $b - a = a - b$; в) $a - b = a + b$.
Розгляньте усі можливі випадки.

Вправи для повторення

Обчисліть (45—47).

45. а) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+12\frac{2}{15}\right):\frac{1}{15}$; б) $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{1}{20}\right):1\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$;

в) $\left(1-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}-1\right)\cdot 5$; г) $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{4}-5:\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)$.

46. а) $2^{13}\cdot 0{,}5^{13}$; б) $25^7\cdot 0{,}04^7$; в) $0{,}5^{12}\cdot(-2)^{13}$;
г) $-5^{32}\cdot 0{,}2^{32}$; ґ) $0{,}1^{-21}\cdot 10^{-20}$; д) $0{,}2^{-41}\cdot(-0{,}5)^{-40}$.

47. а) $\sqrt{5^2-4^2}$; б) $\sqrt{13^2-12^2}$; в) $\sqrt{3^2+4^2}$;

г) $\sqrt{21{,}8^2-18{,}2^2}$; ґ) $\sqrt{45{,}8^2-44{,}2^2}$; д) $\sqrt{8{,}2^2-1{,}8^2}$.

Спростіть вираз (48—50).

48. а) $(c - 5)(c + 2) + 3c + 10$; б) $(x^2 + ax + a^2)(x - a) + a^3$;
в) $(a^2 - a + 1)(a + 1) - a^3$; г) $(x^2 - y)(x - y^2) - y^3 + xy$;

www.4book.org

ґ) $(c^3-2c)(2c+c^3)+4c^2$; д) $(x^2-6x+9)^2-(x-3)^4$.

49. а) $\dfrac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\left(a+\dfrac{1}{a-1}\right)+\left(a+\dfrac{1}{a}+1\right)\cdot\left(a+\dfrac{1}{a}-1\right)$;

б) $\left(\dfrac{a}{ab-b^2}+\dfrac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\dfrac{a^2b-ab^2}{a^2+b^2}-1$.

50. а) $\sqrt{a}+\sqrt{4a}+\sqrt{9a}$; б) $7\sqrt{x}-\sqrt{9x}+\sqrt{25x}$;

в) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{60}$; г) $\left(\sqrt{15}+2\right)^2-\sqrt{240}$;

ґ) $\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$; д) $\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}$.

51. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2+8x+15=0$; б) $x^2+10x+21=0$;

в) $y^2-7y-18=0$; г) $z^2-9z+14=0$;

ґ) $\dfrac{3x-1}{3x+1}=2-\dfrac{x-3}{x+3}$; д) $\dfrac{3c}{3c-2}+\dfrac{2c-9}{2c-5}=2$.

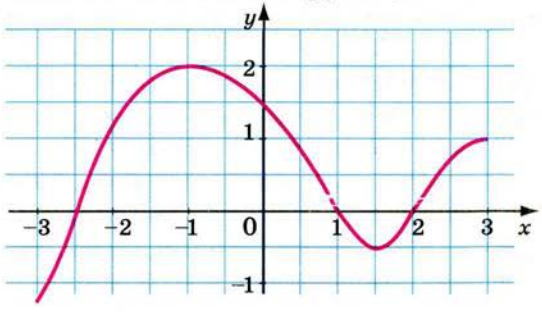
52. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{y-6}=0,\\ \dfrac{3}{x+5}+\dfrac{2}{y-3}=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{y}=0,\\ \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=1.\end{cases}$

53. Побудуйте графік функції:

а) $y=3-x$; б) $y=\dfrac{6}{x}$; в) $y=x^2$; г) $y=-\sqrt{x}$.

54. Дивлячись на графік функції (мал. 4), поясніть, на яких проміжках вона зростає, спадає, на яких — додатна, від'ємна. Укажіть найбільше значення функції.



Мал. 4

www.4book.org

55. До розчину, який містить 40 г солі, долили 200 г води, після чого його концентрація зменшилась на 10 %. Яка концентрація розчину була спочатку?

§2. ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Розглянемо нерівності виду $a < b$, $c > d$ та ін., де a, b, c, d — довільні дійсні числа.

Теорема 1. Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Доведення. Якщо $a < b$ і $b < c$, то числа $a - b$ і $b - c$ — від'ємні. Їх сума $(a - b) + (b - c) = a - c$ — також число від'ємне. А якщо $a - c$ — число від'ємне, то $a < c$. Це й треба було довести.

Теорема 1 виражає *властивість транзитивності* нерівностей з однаковими знаками.

Приклад. Оскільки $\sqrt{1{,}9} < \sqrt{2}$ і $\sqrt{2} < 1{,}42$, то $\sqrt{1{,}9} < 1{,}42$.

Теорема 2. Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.

Наприклад, якщо $a < b$ і c — довільне дійсне число, то $a + c < b + c$.

Доведення. Якщо $a < b$, то $a - b$ — число від'ємне. Оскільки $a - b = (a + c) - (b + c)$, то різниця $(a + c) - (b + c)$ — число також від'ємне. А це означає, що $a + c < b + c$.

Теорема 3. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

www.4book.org

Доведення. Нехай $a < b$ і c — будь-яке додатне число. У цьому випадку числа $a - b$, $(a - b)c$, отже, і різниця $ac - bc$ — числа від'ємні, тобто $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і c — довільне від'ємне число, то добуток $(a - b)c$, а отже, і різниця $ac - bc$ — числа додатні. Тому $ac > bc$.

Приклади. а) $3 < 4$ і $5 > 0$, тому $3 \cdot 5 < 4 \cdot 5$ або $15 < 20$;

б) $3 < 4$ і $-2 < 0$, тому $3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$ або $-6 > -8$.

Оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене до дільника, то в теоремі 3 слово «помножити» можна замінити словом «поділити».

Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; якщо $a < b$ і $c < 0$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Теорема 4. **Нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати.**

Наприклад, якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення. Якщо $a < b$ і $c < d$, то за теоремою 2 $a + c < b + c$ і $b + c < b + d$, звідси за теоремою 1 $a + c < b + d$.

Приклад. $2 < 3$ і $5 < 7$, тому $2 + 5 < 3 + 7$ або $7 < 10$.

Теорема 5. **Нерівності з однаковими знаками можна почленно перемножати, якщо їх ліві й праві частини — додатні числа.**

Наприклад, якщо $a < b$, $c < d$ і числа a, b, c, d — додатні, то $ac < bd$.

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$, а числа c і b — додатні. Згідно з теоремою 3 $ac < bc$ і $bc < bd$, звідси за теоремою 1 $ac < bd$.

Зауваження. Теореми 4 і 5 правильні також для трьох і довільної кількості нерівностей. Наприклад, якщо $a < b$, $c < d$ і $n < m$, то $a + c + n < b + d + m$.

Доведення теорем 1—5 для нерівностей зі знаком «<» майже дослівно можна повторити для аналогічних нерівностей зі знаком «>», «≥» або «≤».

Чи можна обидві частини нерівності підносити до квадрата або до куба? Нехай a і b — числа додатні; перемножимо почленно нерівності $a < b$ і $a < b$, одержимо $a^2 < b^2$. Перемножимо почленно

www.4book.org

частини останньої нерівності та $a < b$, одержимо $a^3 < b^3$ і т. д. Отже, якщо числа a і b — додатні, а n — натуральне, то з нерівності $a < b$ випливає $a^n < b^n$.

Якщо хоч одне з чисел a і b від'ємне, то з нерівності $a < b$ не завжди випливає $a^n < b^n$. Наприклад, $-3 < 2$, але нерівності $(-3)^2 < 2^2$, $(-3)^4 < 2^4$ неправильні.

Вираз «якщо числа a і b додатні та $a < b$» можна записати коротше: «якщо $0 < a < b$». Дослідіть, чи завжди правильне твердження: «якщо $0 < a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ».

Перевірте себе

1. Сформулюйте і доведіть теорему про транзитивність нерівностей.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про додавання до обох частин нерівності одного й того самого числа.
3. Сформулюйте теорему про множення обох частин нерівності на одне й те саме число.
4. Сформулюйте теорему про почленне додавання нерівностей з однаковими знаками.
5. Сформулюйте теорему про почленне множення нерівностей з однаковими знаками.

Виконаємо разом!

1. Відомо, що числа a і b додатні, а також $a < 3$, $b < 6$. Доведіть, що $ab < 20$.

✔ Розв'язання. Оскільки числа a і b додатні, то нерівності $a < 3$ і $b < 6$ можна перемножити: $a \cdot b < 3 \cdot 6$, або $ab < 18$. Якщо $ab < 18$, а $18 < 20$, то $ab < 20$.

2. Чи випливає з нерівностей $a < 3$ і $b < 6$ нерівність $ab < 20$, якщо принаймні одне з чисел a і b — від'ємне?

✔ Розв'язання. Якщо одне з чисел a і b від'ємне, а друге — додатне, то добуток ab від'ємний. У цьому випадку нерівність $ab < 20$ правильна.

Якщо числа a і b обидва від'ємні, то нерівність $ab < 20$ може бути як правильною, так і неправильною. Наприклад, якщо $a = -1$, $b = -2$, то $(-1) \cdot (-2) < 20$, отже, нерівність правильна.

Якщо $a = -7$, $b = -10$, то нерівність $(-7) \cdot (-10) < 20$ неправильна.

www.4book.org

Відповідь. Ні.

3. Відомо, що $m \geq -5$. Додатне чи від'ємне значення виразу $-3m - 20$?

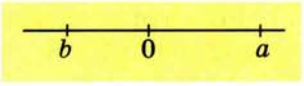
✔ Розв'язання. Помножимо обидві частини нерівності $m \geq -5$ на -3, одержимо $-3m \leq 15$ (властивість 4). Додамо до обох частин цієї нерівності число -20: $-3m - 20 \leq 15 - 20$ (властивість 2), звідси $-3m - 20 \leq -5$, отже, $-3m - 20 < 0$.

Відповідь. Від'ємне.

Виконайте усно

56. Яке з чисел a і c більше, якщо: а) $a - c < 0$; б) $a - c > 2$?

57. Дивлячись на малюнок 5, скажіть, значення якого виразу більше: a чи $a + 2b$; b чи $b - 2a$?



Мал. 5

58. Порівняйте числа x і z, якщо:
а) $x < y$ і $y < z$; б) $x > y$ і $y > z$; в) $x \leq a$ і $a \leq z$.

59. Додатне чи від'ємне число n, якщо:
а) $3n < 3{,}5n$; б) $-1{,}5n > -n$; в) $0{,}2n < -n$?

60. Який з дробів $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$ більший, якщо $b < a < 0$?

61. Який з двох від'ємних дробів $\frac{x}{y}$ і $\frac{y}{x}$ менший, якщо $|x| < |y|$?

62. Число a більше за 1. Яким є число: $3a$, $-a$, $1 - a$, $1 + 2a$?

63. Число x менше за -1. Яким є число: $5x$, $5 - x$, x^4, $2 + x^2$?

Рівень А

64. Порівняйте числа a і b, якщо різниці:
а) $a - c$ і $c - b$ — додатні числа;
б) $b - c$ і $c - a$ — від'ємні числа;
в) $a - n$ і $n - b$ — невід'ємні числа.

65. Порівняйте числа a і b, якщо:
а) $a - c > 0$ і $b - c < 0$; б) $a - x \leq 0$ і $x - b \leq 0$.

66. Покажіть, як розміщені на координатній прямій точки з координатами a, b, c і d, якщо $a < c$, $b > c$, $d > b$.

67. Запишіть правильну нерівність, утворену в результаті:
а) додавання до обох частин нерівності $12 < 18$ числа 5;

www.4book.org

б) віднімання від обох частин нерівності $12 < 18$ числа 77;

в) множення обох частин нерівності $12 < 18$ на 3; на -5;

г) ділення обох частин нерівності $12 < 18$ на 3; на -6.

68. Помножте обидві частини нерівності $a > b$ на $\frac{2}{3}$; на $-\frac{5}{7}$.

69. Відомо, що $a > b$. Поставте замість $*$ знак нерівності:

а) $2a * 2b$; б) $1{,}5a * 1{,}5b$; в) $-a * -b$;

г) $-3a * -3b$; ґ) $-\frac{1}{2}a * -\frac{1}{2}b$; д) $2a^3 * 2b^3$.

70. Додатне чи від'ємне число a, якщо:

а) $2a < 3a$; б) $0{,}5a > a$; в) $-5a < -4a$?

71. Додайте почленно нерівності:

а) $5 < 12$ і $7 < 8$; б) $3 < 6$ і $-3 < -2$;

в) $5 < 6$ і $x < z$; г) $a < b$ і $x \le z$.

72. Перемножте почленно нерівності:

а) $2 < 3$ і $5 < 8$; б) $-4 < -1$ і $-5 < -4$;

в) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ і $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$; г) $5 < 7$ і $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$.

73. Порівняйте додатні числа $\frac{c}{a}$ і $\frac{c}{b}$, якщо $a < b$ і $c > 0$.

Рівень Б

74. Відомо, що $m < n$. Порівняйте числа:

а) $m + 7$ і $n + 7$; б) $-0{,}1m$ і $-0{,}1n$;

в) $\sqrt{(-1)^2}\,m$ і $\sqrt{(-1)^2}\,n$; г) $1 - m$ і $1 - n$;

ґ) $5m - 1$ і $5n - 1$; д) $-2n - 1$ і $-1 - 2m$.

75. Відомо, що $x > y > 0$. Поставте замість $*$ знак нерівності:

а) $\sqrt{x} * \sqrt{y}$; б) $x^2 * xy$; в) $\left(1-\sqrt{2}\right)x * \left(1-\sqrt{2}\right)y$;

г) $\frac{y}{x} * 1$; ґ) $\frac{1}{x} * \frac{1}{y}$; д) $\frac{x^2y}{y-x} * \frac{xy^2}{y-x}$.

76*. Відомо, що $x < y < 0$. Поставте замість $*$ знак нерівності:

а) $x^3 * y^2$; б) $-x * 10y$; в) $\sqrt{-x} * \sqrt{-y}$;

г) $\frac{1}{x^2} * \frac{1}{y}$; ґ) $\frac{x}{x-y} * \frac{y}{x-y}$; д) $\frac{x+1}{xy} * \frac{y+1}{xy}$.

www.4book.org

77. Доведіть, якщо:

а) $x > y$ і $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, то $x > 0$ і $y < 0$;

б) $a < b$ і $ab < 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

78. Розмістіть у порядку зростання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, якщо всі вони додатні та $a < c$, $d < b$ і $d > c$.

79. Розмістіть у порядку зростання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, якщо всі вони від'ємні та $a > c$, $d > b$ і $d < c$.

80. Доведіть, якщо:

а) $a \le b$ і $b \le c$, то $a \le c$;

б) $a \le b$ і $c > 0$, то $ac \le bc$;

в) $a \le b$ і $c < 0$, то $ac \ge bc$.

81. Чи правильно, що при додатних значеннях a і b:

а) з $a < b$ випливає $a^2 < b^2$;

б) з $a^2 < b^2$ випливає $a < b$;

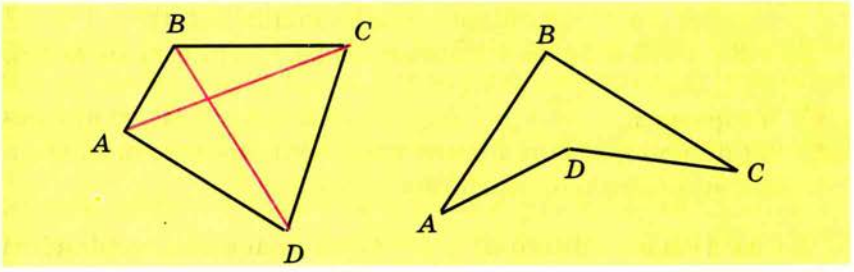
в) з $a < b$ випливає $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;

г) з $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ випливає $a < b$?

82. Доведіть, що: а) діагональ чотирикутника менша від його півпериметра; б) сума діагоналей чотирикутника менша від його периметра. Розгляньте два випадки (мал. 6).

83. Користуючись тотожністю $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, доведіть, якщо $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, то $x > y$.

84. Доведіть, що функція $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $y_1 < y_2$.



Мал. 6

www.4book.org

85. Доведіть, що:

а) функція $y = x^2$ зростає, якщо $x > 0$;

б) функція $y = \frac{1}{x}$ спадає, якщо $x > 0$.

Вправи для повторення

86. Чи проходить графік функції $y = x^2 - 5x + 6$ через точку $A(-3; 14)$? Через точку $B(3; 14)$?

87. При якому значенні n графік функції $y = x^2 - 3x + n$ проходить через точку $M(3; 7)$? Через точку $K(-2; 3)$?

Розкладіть на множники тричлен (**88—89**).

88. а) $x^2 + 2x - 35$; б) $6x^2 - x - 1$.

89. а) $6a^2 + a - 2$; б) $c^2 + \sqrt{2}c - 4$.

90. ***Гра судоку***. Перенесіть таблицю в зошит (мал. 7). Заповніть порожні клітинки цифрами від 1 до 9 так, щоб до кожного рядка, кожного стовпця і кожного виділеного квадрата 3×3 кожна цифра входила тільки 1 раз.

2	4		3		7			
				5	4	3	2	
7		3				5	8	
9				6			3	
8	3	6		1	5		4	2
			9	3		7		
6	1			9				
				7	1	4	6	
3	7		8	4				5

Мал. 7

§3. ПОДВІЙНІ НЕРІВНОСТІ

Якщо нерівності $a < x$ і $x < b$ правильні, то їх можна записати у вигляді ***подвійної нерівності***: $a < x < b$. Подвійна нерівність має три частини: ліву, середню і праву та два знаки нерівності. Приклади подвійних нерівностей:

$3 < x < 4$ (x більше від 3 і менше від 4);

$2a + 3 < x + 3 \le 5c$ ($x + 3$ більше за $2a + 3$, не більше за $5c$).

Теорема 6. **Якщо до кожної частини правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну подвійну нерівність.**

Доведення. Якщо $a < x < b$, то правильні нерівності $a < x$ і $x < b$. Тоді згідно з теоремою 2 для будь-якого дійсного

www.4book.org

числа c правильні нерівності $a + c < x + c$ і $x + c < b + c$. Отже, $a + c < x + c < b + c$.

Число c може бути як додатним, так і від'ємним. Наприклад:
якщо $2{,}5 < x - 3 < 2{,}6$ і $c = 3$, то $5{,}5 < x < 5{,}6$;
якщо $0{,}7 < x + 1 < 1{,}2$ і $c = -1$, то $-0{,}3 < x < 0{,}2$.

Подібним способом можна довести такі твердження:

- якщо $a < x < b$ і $k > 0$, то $ka < kx < kb$;
- якщо $a < x < b$ і $k < 0$, то $kb < kx < ka$;
- якщо $a < x < b$ і $c < y < d$, то:

$$a + c < x + y < b + d;$$
$$a - d < x - y < b - c;$$
$$ac < xy < bd \text{ (при } a > 0 \text{ і } c > 0);$$
$$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \text{ (при } a > 0 \text{ і } c > 0).$$

Зверніть увагу на віднімання і ділення подвійних нерівностей! Від меншого члена першої нерівності віднімають більший член другої, а від більшого — менший. Менший член першої нерівності ділять на більший член другої, а більший — на менший. Наприклад, якщо $4 < x < 6$ і $2 < y < 3$, то

$4 - 3 < x - y < 6 - 2$, або $1 < x - y < 4$;

$\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < \frac{6}{2}$, або $\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < 3$.

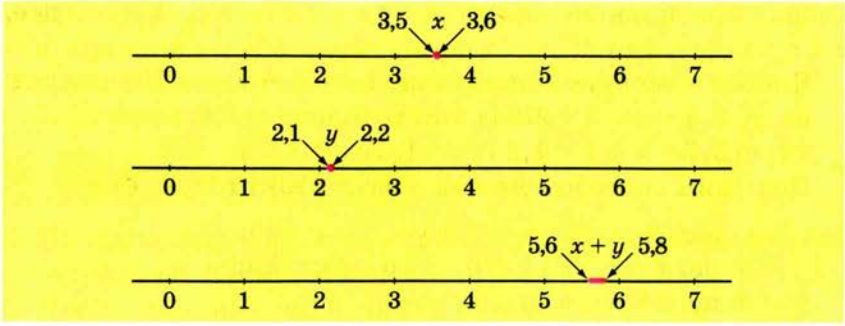
Розглянуті властивості дають можливість спрощувати подвійні нерівності. Наприклад, замість подвійної нерівності $16 < 3x - 2 < 19$ можна розглядати нерівність $18 < 3x < 21$, або ще простішу: $6 < x < 7$.

Особливо зручно використовувати подвійні нерівності для ***оцінювання значень*** величин чи виразів. Значення величин, таких як маса, відстань, час тощо, завжди наближені. Важко, зокрема, визначити висоту дерева з точністю до дециметра. Тому вказують, наприклад, що вона більша за 9,2 м, але менша за 9,4 м. Записують це у вигляді подвійної нерівності: $9{,}2 < h < 9{,}4$.

Користуючись властивостями подвійних нерівностей, можна оцінити і значення виразів $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{x}{y}$.

Нехай, наприклад, $3{,}5 < x < 3{,}6$ і $2{,}1 < y < 2{,}2$. Тоді
$3{,}5 + 2{,}1 < x + y < 3{,}6 + 2{,}2$, або $5{,}6 < x + y < 5{,}8$ (мал. 8);

www.4book.org



Мал. 8

$3{,}5 - 2{,}2 < x - y < 3{,}6 - 2{,}1$, або $1{,}3 < x - y < 1{,}5$;

$3{,}5 \cdot 2{,}1 < xy < 3{,}6 \cdot 2{,}2$, або $7{,}35 < xy < 7{,}92$;

$\frac{3{,}5}{2{,}2} < \frac{x}{y} < \frac{3{,}6}{2{,}1}$, або $1{,}59 < \frac{x}{y} < 1{,}72$.

За допомогою подвійних нерівностей можна звільнитися від модуля в нерівностях виду $|x| < a$ і $|x| \le a$, де $a > 0$.

Наприклад, нерівність $|x| < 3$ задовольняють усі значення x, модулі яких менші за 3. Такими є додатні числа, менші за 3, від'ємні числа, більші за -3, і число 0. Цю множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності так: $-3 < x < 3$.

Аналогічно можна записати нерівність $|x| \le 3$: $-3 \le x \le 3$.

Зверніть увагу! Будь-яку нерівність виду $|M| < a$, де $a > 0$ і M — деякий вираз, можна записати у вигляді подвійної нерівності: $-a < M < a$.

А, наприклад, нерівність $|x| > 3$ у вигляді подвійної нерівності записати не можна. Чому?

Перевірте себе

1. Наведіть приклади подвійних нерівностей.
2. Що означає «оцінити значення величини»?
3. Як за допомогою подвійних нерівностей оцінити наближене значення суми чи добутку двох значень величини?
4. Як за допомогою подвійних нерівностей оцінити наближене значення різниці (частки) двох значень величини?

Виконаємо разом!

1. Відомо, що $10 < x < 12$. Яких значень може набувати вираз: а) $3x - 5$; б) x^2?

www.4book.org

✔ Розв'язання. а) Домножимо усі частини нерівності на 3:

$3 \cdot 10 < 3 \cdot x < 3 \cdot 12$, або $30 < 3x < 36$.

Віднімемо від усіх частин нерівності 5:

$30 - 5 < 3x - 5 < 36 - 5$, або $25 < 3x - 5 < 31$.

б) Оскільки всі частини даної нерівності додатні, то їх можна піднести до квадрата: $100 < x^2 < 144$.

Відповідь. а) $25 < 3x - 5 < 31$; б) $100 < x^2 < 144$.

2. Оцініть значення виразу $0{,}2a - b$, якщо $5 < a < 15$ і $2 < b < 7$.

✔ Розв'язання. Якщо $5 < a < 15$, то $1 < 0{,}2a < 3$.

Якщо $2 < b < 7$, то $-2 > -b > -7$, або $-7 < -b < -2$.

Додамо почленно утворені нерівності: $-6 < 0{,}2a - b < 1$.

Відповідь. $-6 < 0{,}2a - b < 1$.

Виконайте усно

91. Прочитайте подвійну нерівність:

а) $4 < a < 7$; б) $0 < 0{,}5 < 1$; в) $-3 < x < 3$.

92. Чи правильні подвійні нерівності:

а) $-7 < 0 < 7$; б) $0 < 5 < 10$; в) $-1 < -2 < -3$?

93. Чи задовольняють значення $x = 3$ і $x = -3$ умову:

а) $0 < x < 2x$; б) $-x < x^2 < 3x$; в) $-x < x^2 < -x^3$?

94. Які цілі значення a задовольняють подвійну нерівність:

а) $-1 < a < 1$; б) $-2 < a < 2$; в) $0{,}1 < a < 1$?

95. Чи існують значення x, які більші за $\frac{8}{9}$, але менші за $\frac{6}{7}$?

96. Оцініть периметр рівностороннього трикутника, якщо його сторона більша за 1,8 м і менша за 2,1 м. Чи може площа такого трикутника дорівнювати $\sqrt{3}$ м^2?

Рівень А

97. Запишіть у вигляді подвійної нерівності співвідношення:

а) $x < 12$ і $x > 3$; б) $x > -2$ і $x < 2$; в) $x < 30$ і $x > -0{,}3$.

98. Чи існують значення c, які: а) менші за -3 і більші за $-\sqrt{10}$; б) більші за 10^{-2} і менші за 10^2? Якщо так, то запишіть відповідну подвійну нерівність.

99. Відомо, що $4 < n < 5$. Оцініть значення виразу:

а) $n + 3$; б) $n - 5$; в) $2n$; г) $-3n$; ґ) n^2.

www.4book.org

100. Знаючи, що $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, оцініть значення виразу:
а) $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}-1$; в) $-\sqrt{3}$; г) $2\sqrt{3}$.

101. Сторона квадрата дорівнює a см, де $4{,}2 < a < 4{,}3$. Оцініть його периметр і площу.

102. Оцініть значення суми $x + y$, якщо:
а) $4 \le x < 5$ і $2 \le y < 3$;
б) $-2 < x < 3$ і $-5 < y < 4$.

103. Оцініть значення різниці $x - y$, якщо:
а) $12 < x < 13$ і $5 < y < 6$;
б) $0{,}32 < x < 0{,}33$ і $0{,}25 < y < 0{,}27$.

104. Оцініть значення добутку xy, якщо:
а) $3 < x \le 4$ і $5 \le y \le 7$;
б) $-2 < x < -1$ і $-3 < y < -1$.

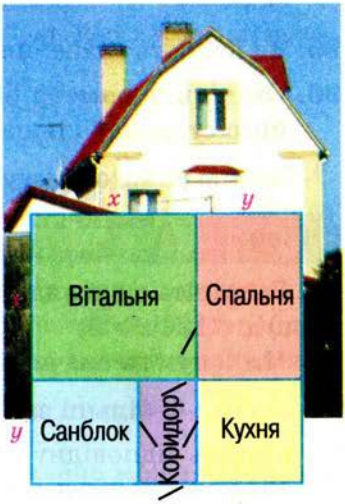
105. Оцініть значення частки $x : y$, якщо:
а) $12 < x < 15$ і $5 < y < 6$;
б) $6 < x < 8$ і $2 < y < 3$.

106. Відомо, що $-3 \le x \le 5$. Яких значень може набувати вираз:
а) $2x + 3$; б) $0{,}1x - 2$; в) $2 - x$; г) $10 - 0{,}1x$?

107. Вимірявши довжину a і ширину b прямокутника (у метрах), знайшли, що $1{,}3 < a < 1{,}4$, $0{,}6 < b < 0{,}8$. Оцініть периметр і площу цього прямокутника.

108. Довжина ребра куба — c мм, де $1{,}53 \cdot 10^2 < c < 1{,}54 \cdot 10^2$. Оцініть: а) суму довжин усіх ребер куба; б) площу поверхні куба; в) об'єм куба. Результат округліть до десятих.

109. На малюнку 9 зображено план квартири. Відомо, що вся квартира, а також вітальня мають форму квадрата. Оцініть площу вітальні, спальні та всієї квартири, якщо $4{,}9 \text{ м} < x < 5{,}1 \text{ м}$, $2{,}9 \text{ м} < y < 3{,}1 \text{ м}$.



Мал. 9

www.4book.org

Рівень Б

110. Відомо, що $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ і $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцініть:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; в) $2-\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}:\sqrt{2}$.

111. Нехай α і β – кути трикутника, $62^\circ < \alpha < 63^\circ$, $95^\circ < \beta < 96^\circ$. Оцініть міру третього кута.

112. Відомо, що $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Оцініть довжину кола і площу круга, якщо його радіус більший за 2,5 дм і менший за 2,6 дм.

113. Відомо, що $10 < x \le 12$. Яких цілих значень може набувати вираз:

а) $2x$; б) $\frac{x^2}{5}$; в) $3x-5$; г) $\frac{12}{x}$?

114. Відомо, що $3 < x < 4$ і $1{,}2 < y < 1{,}3$. Яких значень може набувати вираз:

а) $(x+y)^2$; б) $\sqrt{xy}$; в) y^2-x; г) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$?

115. В яких межах лежать значення виразу $\frac{3x-2}{x}$, якщо:

а) $1 < x < 4$; б) $-5 < x < 0$; в) $-10 \le x \le 10$?

116. Відомо, що $-\frac{3}{4} < m < \frac{5}{6}$ і $3 < n < 10$. Яких значень може набувати вираз:

а) $2m+3n$; б) $4m-n$; в) $m+n^2$; г) n^2-m?

117. Доведіть твердження:

а) якщо $a < x < b$, то $-b < -x < -a$;

б) якщо $a < x < b$ і $a > 0$, то $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$;

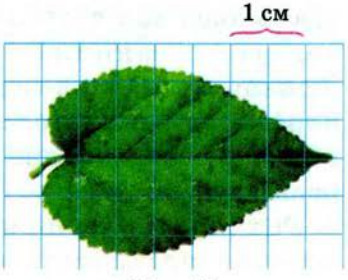
в) якщо $a < x < b$ і $a > 0$, то $a^2 < x^2 < b^2$.

118. Доведіть твердження:

а) якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$;

б) якщо $0 < a < b$, то $a < \sqrt{ab} < b$.

119. Запишіть у вигляді подвійної нерівності значення площі фігури, зображеної на малюнку 10.



Мал. 10

www.4book.org

120. Катети a і b прямокутного трикутника такі, що $8{,}4 < a < 8{,}5$, $6{,}5 < b < 6{,}6$. Оцініть площу цього трикутника і його периметр.

121*. Запишіть нерівність з модулем у вигляді подвійної нерівності:

а) $|x| < 3$; б) $|x| \le 0{,}5$; в) $2|x| < \pi$; г) $|x| - 7 \le -6$.

122*. Запишіть нерівність з модулем у вигляді подвійної нерівності та спростіть її:

а) $|2x - 1| < 3$; б) $|2 - 0{,}5x| \le 2{,}5$; в) $\left|\sqrt{x} - 5\right| < 1$.

Вправи для повторення

123. О 10 год з міста A до міста B виїхав мотоцикліст, а об 11 год так само з A до B — автомобіль. О котрій годині автомобіль наздогнав мотоцикліста, якщо він приїхав до B о 13 год, а мотоцикліст — о 14 год?

124. Запишіть у стандартному вигляді масу:

а) Місяця 73 500 000 000 000 000 000 т;

б) Сонця 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 т.

125. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x + y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

§4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Як відомо з попередніх класів, рівності зі змінними бувають двох видів: тотожності й рівняння. Тотожності доводять, рівняння — розв'язують. Аналогічно розрізняють два види нерівностей зі змінними: ***тотожні нерівності*** й ***нерівності з невідомими***. Тотожні нерівності доводять (див. § 7), а нерівності з невідомими — розв'язують.

Розглянемо нерівність $5x - 2 > 8$ зі змінною x. Якщо замість x підставимо число 1, то дістанемо неправильну числову нерівність $5 - 2 > 8$. Говорять, що значення $x = 1$ дану

www.4book.org

нерівність не задовольняє. Якщо замість x підставимо число 3, то дістанемо правильну числову нерівність $5 \cdot 3 - 2 > 8$. Значення $x = 3$ дану нерівність задовольняє, число 3 — розв'язок нерівності $5x - 2 > 8$.

Розв'язком нерівності **з однією змінною називають значення цієї змінної, яке задовольняє дану нерівність.**

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Розв'язують нерівність, замінюючи її іншими нерівностями, простішими і рівносильними даній.

Дві нерівності називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки, тобто якщо кожний розв'язок першої нерівності задовольняє другу, а кожний розв'язок другої нерівності задовольняє першу. Нерівності, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Наприклад, нерівність $5x - 2 > 8$ рівносильна кожній з нерівностей: $5x > 2 + 8$, $5x > 10$, $x > 2$.

Нерівності зі змінними мають багато властивостей, аналогічних до властивостей рівнянь.

1. **Якщо з однієї частини нерівності перенесемо в іншу доданок з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну даній.**
2. **Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.**
3. **Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.**

Ці властивості нерівностей зі змінними випливають з теорем, доведених у § 2. Користуючись цими властивостями, нерівності зі змінними можна розв'язувати подібно до рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $5x < 2x + 15$.

✔ Розв'язання. Перенесемо доданок $2x$ у ліву частину нерівності:

$$5x - 2x < 15.$$

www.4book.org

Зведемо подібні члени:

$$3x < 15.$$

Поділимо обидві частини нерівності на 3:

$$x < 5.$$

Відповідь. Нерівність задовольняє кожне дійсне число, менше від 5.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $7(2 - x) \le 3x + 44$.

✔ **Розв'язання.** $14 - 7x \le 3x + 44,$

$$-7x - 3x \le -14 + 44,$$

$$-10x \le 30,$$

$$x \ge -3.$$

Відповідь. Нерівність задовольняє кожне число, не менше від -3.

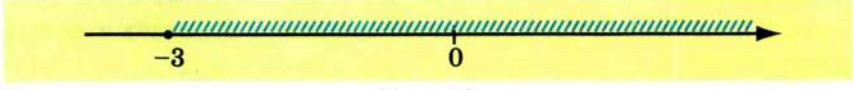
Зауваження. Множини розв'язків нерівностей зручно записувати у вигляді ***проміжків***. Множину всіх дійсних чисел, менших від 5, називають проміжком від мінус нескінченності до 5 і позначають $(-\infty; 5)$. На малюнку 11 цей проміжок позначено штриховкою, значення 5, що не входить до множини розв'язків, — світлим кружком.

Мал. 11

Множину всіх дійсних чисел, не менших від -3, називають проміжком від -3 до нескінченності, включаючи -3. Позначають його $[-3; \infty)$, наочно зображають, як показано на малюнку 12; значення -3, що входить до множини розв'язків, позначено темним кружком.

Отже, відповіді до розв'язаних нерівностей можна записати і за допомогою проміжків: $(-\infty; 5)$, $[-3; \infty)$.

Як ви вже знаєте, з усіх рівнянь найпростішими є лінійні виду $ax = b$. Найпростішими нерівностями з однією змінною також є лінійні.



Мал. 12

www.4book.org

Якщо a і b — дані числа, а x — невідома змінна, то кожна з нерівностей

$$ax < b,\ ax > b,\ ax \le b,\ ax \ge b \qquad (*)$$

називається *лінійною нерівністю* з однією змінною x.

Приклади лінійних нерівностей:

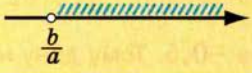
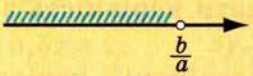
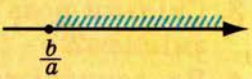
$$2x < 3,\quad -7x > 14,\quad 0{,}5x \le 1,\quad 9x \ge 0.$$

Лінійні нерівності часто записують і так:

$$ax - b < 0,\quad ax - b > 0,\quad ax - b \le 0,\quad ax - b \ge 0.$$

Якщо число a відмінне від нуля, то кожна з нерівностей (*) має множину розв'язків, якій відповідає нескінченний числовий промінь (або промінь без вершини).

Залежність розв'язків лінійної нерівності від значення коефіцієнтів при змінній і знака нерівності наведено в таблиці.

$ax > b$	$ax \le b$
Якщо $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$ 	Якщо $a > 0$, то $x \le \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$
Якщо $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$ 	Якщо $a < 0$, то $x \ge \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; \infty\right)$ 

Якщо $a = 0$, то кожна з нерівностей (*) або не має розв'язків (наприклад, $0x > 5$), або множиною її розв'язків є множина всіх дійсних чисел (наприклад, $0x < 5$).

До розв'язування лінійних нерівностей зводиться розв'язування найпростіших нерівностей з модулями.

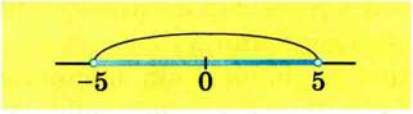
Розв'яжемо нерівності:

www.4book.org

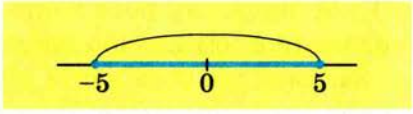
а) $|x| < 5$; б) $|x| > 3$; в) $|x| \leq -2$; г) $|x| > -0{,}5$.

а) Нерівність задовольняють усі значення x, модулі яких менші за 5. Такими є всі додатні числа, менші за 5, всі від'ємні числа, більші за -5, і число 0. Таку множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності $-5 < x < 5$. На числовій прямій цій множині чисел відповідає проміжок, показаний на малюнку 13. Числа -5 і 5 не належать цьому проміжку, вони не задовольняють дану нерівність, а нерівність $|x| \leq 5$ — задовольняють (мал. 14).

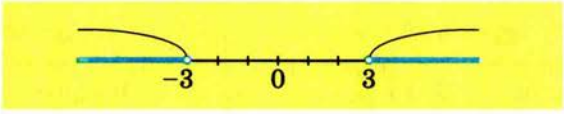
б) Нерівність $|x| > 3$ задовольняють усі числа, більші за 3, і всі числа, менші за -3 (мал. 15).



Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15

в) Модуль кожного числа — число невід'ємне, воно не може бути менше, ніж від'ємне число -2, або дорівнювати -2. Тому дана нерівність розв'язків не має.

г) Кожне невід'ємне число більше за $-0{,}5$. Тому дану нерівність задовольняє кожне дійсне число.

Перевірте себе

1. Наведіть приклади нерівностей зі змінними.
2. Що називають розв'язком нерівності зі змінною?
3. Скільки розв'язків може мати нерівність з однією змінною?
4. Як записують множини розв'язків нерівності зі змінною?

Виконаємо разом!

1. Розв'яжіть нерівність $2x + 3 < 2(x + 3)$.

✔ Розв'язання. $2x + 3 < 2x + 6$,

$2x - 2x < 6 - 3$,

$0x < 3$.

www.4book.org

Нерівність $0x < 3$ правильна при кожному значенні x.

Відповідь. $(-\infty; \infty)$.

2. Розв'яжіть нерівність $6z + 7 \geq 2(3z + 4)$.

✔ Розв'язання. $6z + 7 \geq 6z + 8$,

$6z - 6z \geq 8 - 7$,

$0z \geq 1$.

Нерівність $0z \geq 1$ не задовольняє жодне значення z.

Відповідь. Розв'язків немає.

3. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-5}{6} + \frac{x-8}{3} > \frac{5x}{2} - 1$.

✔ Розв'язання. Помножимо обидві частини нерівності на 6 (найменше спільне кратне чисел 6, 3 і 2):

$x - 5 + 2(x - 8) > 3 \cdot 5x - 6$;

$x - 5 + 2x - 16 > 15x - 6$;

$x + 2x - 15x > -6 + 5 + 16$;

$-12x > 15$; $x < -\frac{15}{12}$; $x < -1{,}25$.

Відповідь. $(-\infty; -1{,}25)$.

4. Розв'яжіть подвійну нерівність: $-2 \leq 10x - 3 \leq 5$.

✔ Розв'язання. $-2 + 3 \leq 10x - 3 + 3 \leq 5 + 3$,

$1 \leq 10x \leq 8$,

$0{,}1 \leq x \leq 0{,}8$.

Відповідь. $[0{,}1; 0{,}8]$.

Виконайте усно

126. Розв'яжіть нерівності:

а) $2x < 6$; б) $-3x > 9$; в) $10x < 20$;

г) $0{,}5z > 2$; ґ) $\frac{2}{3}y < 10$; д) $-\sqrt{2}x > 2$.

127. Скільки розв'язків має нерівність:

а) $x^2 + 1 < 0$; б) $|x| < 0$; в) $|x| \leq 0$?

128. Розв'яжіть нерівність:

а) $x + 3 < x$; б) $x - 3 \leq x$; в) $3 + x > 3$.

129. Які з чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 задовольняють нерівність:

а) $2x - 5 > 0$; б) $4x + 1 \leq 13$; в) $3x + 4 \geq 5$?

www.4book.org

Рівень А

130. Зобразіть у вигляді проміжків і на координатній прямій множини чисел, що задовольняють нерівність:
а) $x < 4$; б) $x > -1$; в) $x \le 0{,}5$.

Розв'яжіть нерівність **(131—134)**.

131. а) $x + 2 > 5$; б) $x - 4 > 0$; в) $2 + x \ge 3$;
г) $3x > 15$; ґ) $4y < 36$; д) $5z \ge 35$.

132. а) $3x > 15$; б) $x + 7 > 0$; в) $2x - 5 \ge 0$;
г) $-4x \ge 20$; ґ) $x - 1{,}5 \le 0$; д) $10 + 5x < 0$.

133. а) $-x < 5$; б) $-z \ge -4$; в) $-x < 0$;
г) $-5x \le 15$; ґ) $-3x > -3$; д) $5z \le -1$.

134. а) $3x + 2 < 5$; б) $7x - 4 \ge 8$; в) $9x + 5 > 5$;
г) $5x - 4 < 3x$; ґ) $6z + 1 > 2z$; д) $y + 5 < 2y$.

135. Чи рівносильні нерівності:
а) $2x + 3 > x + 8$ і $x > 5$;
б) $2x - 3 \ge 2$ і $2x - 4 \ge 1$;
в) $3 - 5x < x$ і $6x > 3$;
г) $3x - 1 < 6 - 2x$ і $1 - 3x < 2x - 6$?

Розв'яжіть нерівність **(136—139)**.

136. а) $8x - 3 > 5x + 6$; б) $7y - 13 < 5y - 9$;
в) $2x - 3 \le 3x - 8$; г) $x - 15 \ge 4x + 3$;
ґ) $3 + x > 2x - 3$; д) $5 - 2y < y + 8$;
е) $3 - 5x > 4 - 5x$; є) $8 + 6z \le 13 + 6z$.

137. а) $6x + 21 \le 5x + 8$; б) $3x + 7 < 7x + 3$;
в) $7x - 5 > 3x + 7$; г) $2x - 9 \ge 9x + 5$;
ґ) $x - 15 < 6x - 10$; д) $11x - 3 \le 8x - 15$;
е) $18 - 7x \ge 5x + 30$; є) $17 - x > 10 - 6x$.

138. а) $3(x + 1) > x + 5$; б) $2(x - 1) + 4 < x + 7$;
в) $4(x - 2) < x + 1$; г) $3(x + 2) - 4 > x + 2$;
ґ) $2(x + 3) \ge 5x - 9$; д) $4(x + 3) - 3x \le x - 5$.

139. а) $-5(x - 1) < 3 - 7x$; б) $2(3 - x) - x < 7 + 3x$;
в) $3(2 - x) > x - 6$; г) $-3(2 + x) + 5x \le 2x + 1$;
ґ) $8 - 3(x - 2) > 4x$; д) $5y < 12 - 4(y + 5)$.

140. За якої умови набуває від'ємних значень вираз:
а) $7 + 5x$; б) $10 - 0{,}5x$; в) $\sqrt{2} - 2x$?

141. За якої умови набуває невід'ємних значень вираз:
а) $2{,}5 + 0{,}5x$; б) $3{,}9 + 1{,}5x$; в) $1{,}2 - 3x$?

www.4book.org

142. За якої умови значення даного виразу більше за 10:

а) $3 + 7x$; б) $5{,}4 - 2{,}3x$; в) $12 - x\sqrt{2}$?

143. За якої умови значення виразу $3x - 7$ більше за відповідне значення виразу:

а) $2x + 1$; б) $5x - 2$; в) $3x - 5$?

Розв'яжіть нерівність (**144—147**).

144. а) $\frac{5x}{7} \le 3$; б) $\frac{-3x}{4} < 5$; в) $0 > \frac{5x}{11}$; г) $\frac{2x}{5} > -3$;

ґ) $-\frac{x}{2} \le 1$; д) $\frac{3x-1}{4} \le 2$; е) $\frac{2x+5}{7} > 3$; є) $\frac{7x-3}{5} \ge x$.

145. а) $\frac{3x}{5} > 2$; б) $\frac{4x}{7} < 4$; в) $\frac{2x}{3} < -4$; г) $0 \ge \frac{17x}{5}$;

ґ) $\frac{6x+1}{2} > 3$; д) $\frac{4x-11}{5} \le 0$; е) $\frac{3}{5}(x-4) > 12$.

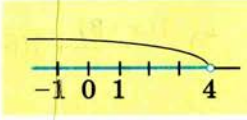
146. а) $(x + 2)^2 > 5x + x^2$; б) $(x + 3)^2 - 2x \ge 5x + x^2$;

в) $4 - (x - 2)^2 > x - x^2$; г) $(7 - x)^2 - x^2 \le x - 11$.

147. а) $(x - 3)^2 \le x^2 - x$; б) $(x - 2)^2 + 7x < x^2 - 3x$;

в) $1 - (x + 2)^2 < 5 - x^2$; г) $(x - 5)^2 - 7 > x^2 + 8$.

148. Напишіть три різні нерівності, множини розв'язків яких відповідали б проміжку, зображеному на малюнку 16.



Мал. 16

149. Яке найбільше натуральне значення n задовольняє нерівність:

а) $18 - 3(n - 15) > 11n$;

б) $0{,}3(n - 2) < 1{,}2 - 0{,}5(n + 2)$?

150. Яке найменше ціле значення m задовольняє нерівність:

а) $3m + 8(2m - 1) > 5m + 35$;

б) $m^2 + 4m \le (m + 2)^2$?

Рівень Б

151. Для яких значень x значення функції $y = \frac{2}{3}x - 7$:

а) додатні; б) невід'ємні;

www.4book.org

в) більші від 5; г) не менші від $-\frac{1}{3}$?

152. Для яких значень x значення функції $y = 5{,}2 - 2{,}5x$:
а) від'ємні; б) додатні; в) не більші від 7,7?

153. При яких значеннях змінної x має зміст вираз:

а) $\sqrt{3x-6}$; б) $\sqrt{4-x}$; в) $\sqrt{-(2-x)}$;

г) $\sqrt{0{,}5-0{,}3x}$; ґ) $\sqrt{1-5(x+3)}$; д) $x+\sqrt{2-x}$?

Розв'яжіть нерівність (154—161).

154. а) $3(x+4)+2(3x-2) > 5x-3(2x+4)$;
б) $2x-6-5(2-x) \le 12-5(1-x)$;
в) $x+2 < 5(2x+8)+13(4-x)-3(x-2)$.

155. а) $y+7 > 4(2-y)-12(4-2y)+17(y-1)$;
б) $0{,}2(x-2)-0{,}3(3-x) \ge 0{,}4(2x-1)-0{,}5(x-1)$;
в) $2{,}5(2-z)-3{,}5(z-1) \le 2{,}5(z+2)-1{,}5(2-z)$.

156. а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4} > 6$; б) $\frac{3x}{2}-\frac{x}{3} > 2$; в) $x+\frac{x}{2} \ge 15$;

г) $\frac{2+x}{3}-\frac{3-x}{2} > 0$; ґ) $\frac{3-y}{4}-\frac{y+2}{5} \ge 2$.

157. а) $\frac{7(x-3)}{2}+5(6-2x)+14 < \frac{x-3}{2}$;

б) $3(2x-4)+5(x-2)-3 \le \frac{9}{2}(x-2)$.

158. а) $\frac{3(2+c)}{2}-6 < \frac{7c-2}{3}-\frac{12+4c}{5}$;

б) $\frac{5z-18}{10}-\frac{27-10z}{14} > \frac{3z-12}{5}-\frac{9-4z}{7}$.

159. а) $(x-2)(x-3) > x^2$; б) $(x+5)(x-7) < x^2$;
в) $(2x-1)(3x+5) \le 6x^2$; г) $(3x-2)(3+2x) \ge 6x^2$;
ґ) $(3x-1)^2 \le 9x(x-2)$; д) $(3x-2)^2 \ge (3x+2)^2$.

160. а) $(z-2)^2 < (z-3)(z+5)$; б) $(y+3)^2 \ge y(y-5)$;

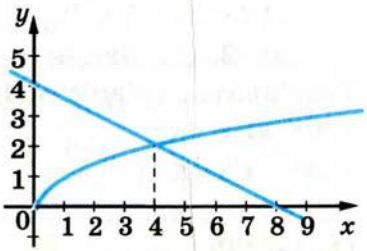
в) $\left(\frac{1}{x}+x\right)^2 > \frac{1}{x^2}+x^2$; г) $\left(\frac{1}{x}-x\right)^2 > \frac{1}{x^2}+x^2$.

www.4book.org

161. а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-3x>\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{x}{2}>\sqrt{2}-1$;

в) $\frac{2x-3}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}>0$; г) $\frac{2-\sqrt{2}}{3x+2}<0$.

162. На малюнку 17 зображено графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=4-\frac{x}{2}$. Дивлячись на них, укажіть множину розв'язків нерівності $\sqrt{x}<4-\frac{x}{2}$.



Мал. 17

163. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $\sqrt{x}>\frac{8}{x}$; б) $\sqrt{x}\geq x^2$; в) $\sqrt{x}<x-2$.

164. Напишіть нерівність зі змінною x:

а) яка не має жодного розв'язку;

б) яку задовольняє кожне дійсне число;

в) яку задовольняє тільки одне число 5;

г) яку задовольняють усі числа з проміжку $(-2; 3)$.

165. Туристи мають повернутися на базу не пізніше, ніж через 3 год. На яку відстань вони можуть відплисти за течією річки на моторному човні, якщо його власна швидкість 18 км/год, а швидкість течії — 4 км/год?

166*. Розв'яжіть нерівність:

а) $(2x-3)(5x+2)-(3x-1)(4x+2)>2(1-x)(1+x)-x$;

б) $(3x-2)(3x+2)-(2x-3)^2\leq 5x(x+7)+10$;

в) $(4x+1)(3x-5)+(2x+3)(5x-4)<2x^2+5(2x-1)^2$;

г) $(3x+1)^2-(2x-3)(3-2x)\geq(2x+1)^2+(3x-7)(3x+7)$.

167. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-3\leq 5x-1\leq 4$; б) $1<3x+4<7$;

в) $-5\leq 3-2x<1$; г) $-8<7-5x<-3$;

www.4book.org

ґ) $0,7 < 3x + 1 < 1,3$; д) $-3,4 \le 5 - 2x \le 1,8$;

е) $-\frac{2}{5} < \frac{4x-1}{3} < \frac{3}{5}$; є) $-\frac{2}{3} < \frac{2-0,5x}{5} \le \frac{1}{3}$.

168. Розв'яжіть подвійну нерівність і вкажіть її найбільший цілий розв'язок:

а) $2 < 3x - 5 < 7$; б) $-3 \le 4 - 2x \le 3$;

в) $-2 \le 1 - 3x \le 4$; г) $-0,3 < 2,7 + 0,1x < 1,7$.

Розв'яжіть нерівність **(169—170)**.

169*. а) $|x| < 5$; б) $|x - 3| \le 7$; в) $|2x - 3| < 1$.

170*. а) $|3x| \le 1$; б) $|x + 7| < 3$; в) $|1 - 5x| \le 2$.

Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність **(171—172)**.

171*. а) $ax > 5$; б) $ax \le 0$; в) $(2a - 1)x < 4a^2 - 4a + 1$.

172*. а) $ax > a$; б) $a^2x \le 0$; в) $a^2 + a - 12 \le (9 - a^2)x$.

Вправи для повторення

173. Виконайте дії:

а) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$; б) $5 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-7}$;

в) $(4,2 \cdot 10^9)^2$; г) $(3,7 \cdot 10^5) \cdot 2,4 \cdot 10^8$;

ґ) $(3,6 \cdot 10^6) : (2,4 \cdot 10^3)$.

174. Побудуйте графік рівняння;

а) $xy + 6 = 0$; б) $y^2 - x = 0$.

175. Раніше 3 кг м'яса коштували стільки, скільки тепер коштують 2 кг. На скільки відсотків подорожчало м'ясо?

§5. ЧИСЛОВІ ПРОМІЖКИ

Множиною розв'язків нерівності найчастіше буває числовий проміжок. Поняття числового проміжку часто використовують і в інших розділах математики. Тому бажано розрізняти різні види числових проміжків і навчитися знаходити їх перерізи та об'єднання.

Перерізом двох числових проміжків називають їх спільну частину.

www.4book.org

Наприклад, перерізом проміжків $(-\infty; 4)$ і $(-3; \infty)$ є проміжок $(-3; 4)$.

Переріз двох множин позначають знаком $\cap$. Тому пишуть:

$$(-\infty; 4) \cap (-3; \infty) = (-3; 4).$$

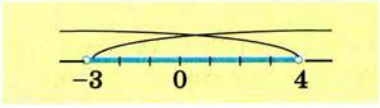
Наочно цю рівність ілюструє малюнок 18.

Інші приклади. Малюнкам 19—21 відповідають рівності:

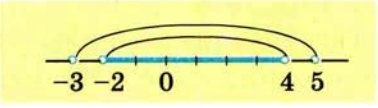
$$(-3; 5) \cap (-2; 4) = (-2; 4);$$

$$[-3; 5) \cap (-4; -3] = \{-3\};$$

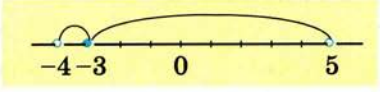
$$(-3; 5) \cap (-5; -4) = \varnothing.$$



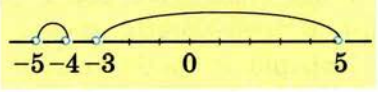
Мал. 18



Мал. 19



Мал. 20



Мал. 21

Друга рівність стверджує, що числові проміжки $[-3; 5)$ і $(-4; -3]$ мають тільки одне спільне число -3.

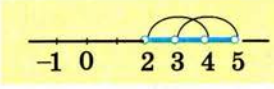
Знаком $\varnothing$ позначають *порожню множину*. Остання рівність стверджує, що числові проміжки $(-3; 5)$ і $(-5; -4)$ не мають спільних чисел.

Об'єднанням двох числових проміжків називають множину чисел, яка містить кожне число кожного проміжку і тільки такі числа.

Об'єднання двох множин позначають знаком $\cup$. Тому пишуть:

$$(2; 4) \cup (3; 5) = (2; 5).$$

Наочно цю рівність ілюструє малюнок 22.

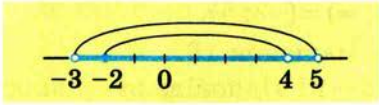


Мал. 22

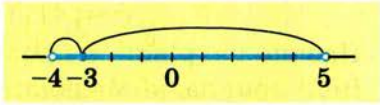
www.4book.org

Малюнкам 23—25 відповідають рівності:

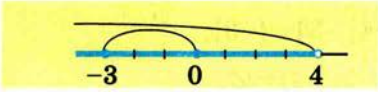
$$(-3; 5) \cup (-2; 4) = (-3; 5);$$
$$[-3; 5) \cup (-4; -3] = (-4; 5);$$
$$(-\infty; 4) \cup (-3; 0) = (-\infty; 4).$$



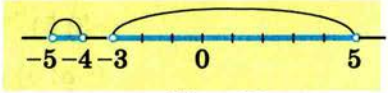
Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25



Мал. 26

Об'єднання проміжків $(-3; 5)$ і $(-5; -4)$ складається з двох роз'єднаних проміжків (мал. 26); його позначають так:

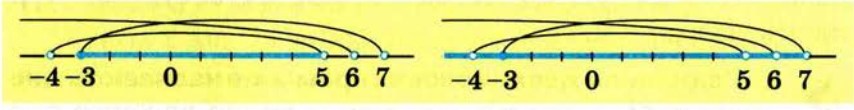
$$(-3; 5) \cup (-5; -4).$$

Іноді доводиться розглядати об'єднання трьох чи більшої кількості числових проміжків.

Перерізом трьох числових проміжків є множина чисел, яка містить числа, спільні для усіх трьох даних проміжків і тільки їх. Наприклад,

$$(-4; 5) \cap (-\infty; 6) \cap [-3; 7) = [-3; 5);$$
$$(-4; 5) \cup (-\infty; 6) \cup [-3; 7) = (-\infty; 7).$$

Цим рівностям відповідає малюнок 27, *а* і *б*.



а *б*

Мал. 27

Оскільки існує багато видів числових проміжків, то їх бажано відповідно називати. Традиційно додержуються таких назв. Якщо a і b — довільні дійсні числа, то:

$(-\infty; a)$, $(b; \infty)$ — нескінченні числові проміжки;

$(a; b)$ — відкритий проміжок, або *інтервал*;

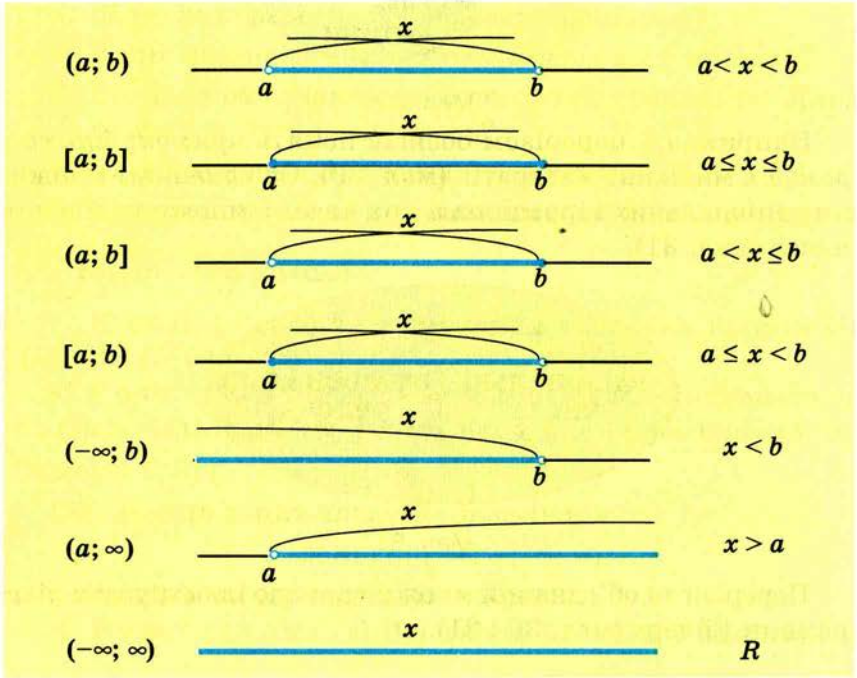
$[a; b]$ — закритий проміжок, або *відрізок*;

$[a; b)$ — проміжок, відкритий справа;

$(a; b]$ — проміжок, відкритий зліва.

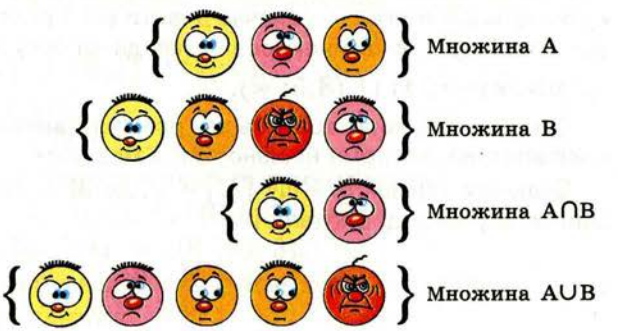
www.4book.org

На малюнку 28 зображено види проміжків та символи, якими їх позначають.



Мал. 28

Числові проміжки — окремі види *множин*. Окрім них, розглядають множини, елементами яких є довільні об'єкти: люди, тварини, рослини, пори року, дні тижня, геометричні фігури, рівняння, функції тощо. Поняття «переріз» чи «об'єднання» можна застосовувати до будь-яких множин (мал. 29).



Мал. 29

www.4book.org

Мал. 30

Наприклад, перерізом обсягів понять *прямокутники* і *ромби* є множина квадратів (мал. 30). Об'єднанням множини раціональних і ірраціональних чисел є множина дійсних чисел (мал. 31).

Мал. 31

Перерізи та об'єднання множин зручно ілюструвати діаграмами Ейлера (мал. 30 і 31).

Іноді виникає потреба знайти об'єднання розв'язків двох або більше нерівностей. У таких випадках говорять про *сукупність нерівностей*. Її записують за допомогою квадратної дужки:

$$\begin{bmatrix} 2x > 17, \\ x - 1 < 3, \end{bmatrix} \text{ або } \begin{bmatrix} x > 8{,}5, \\ x < 4. \end{bmatrix}$$

Розв'язком сукупності нерівностей називається значення змінної, яке задовольняє хоча б одну з даних нерівностей. Розв'язати сукупність нерівностей — означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх не існує. Множиною розв'язків даної сукупності нерівностей є проміжок $(-\infty; 4) \cup (8{,}5; \infty)$.

Сукупності використовують для розв'язування деяких видів рівнянь і нерівностей, зокрема нерівностей з модулем.

Будь-яку нерівність виду $|M| > a$, де M — деякий вираз, можна записати у вигляді сукупності:

$$\begin{bmatrix} M > a, \\ M < -a. \end{bmatrix}$$

www.4book.org

Перевірте себе

1. Що таке переріз двох числових проміжків?
2. Яким символом позначають переріз двох множин?
3. Що таке об'єднання двох числових проміжків? Яким символом його позначають?
4. Наведіть приклад інтервалу, відрізка.
5. Наведіть приклади нескінченних числових проміжків.

Виконаємо разом!

1. Знайдіть переріз і об'єднання числових проміжків $(-6;\ 8)$ і $(5;\ \infty)$.

✔ Розв'язання. Зобразимо дані проміжки геометрично (мал. 32). Їх спільні числа складають проміжок $(5;\ 8)$. Отже, $(-6;\ 8) \cap (5;\ \infty) = (5;\ 8)$.

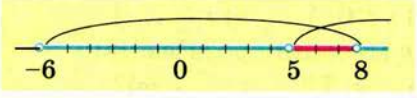
Об'єднання даних числових проміжків:

$$(-6;\ 8) \cup (5;\ \infty) = (-6;\ \infty).$$

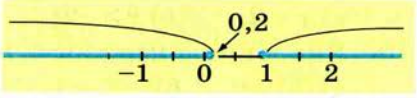
2. Розв'яжіть нерівність $|5x - 3| \geq 2$.

✔ Розв'язання. а) Нерівність $|5x - 3| \geq 2$ рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} 5x-3\geq 2, \\ 5x-3\leq -2, \end{array}\right.$ або $\left[\begin{array}{l} 5x\geq 5, \\ 5x\leq 1, \end{array}\right.$ звідси $\left[\begin{array}{l} x\geq 1, \\ x\leq 0{,}2. \end{array}\right.$

На малюнку 33 зображено множину чисел, що відповідає цій сукупності і задовольняє задану нерівність.



Мал. 32



Мал. 33

Відповідь. $(-\infty;\ 0{,}2] \cup [1;\ \infty)$.

Виконайте усно

176. Знайдіть об'єднання числових проміжків:

а) $(0;\ 1)$ і $(0;\ 2)$; б) $(0;\ 1)$ і $(0{,}5;\ 1)$;

в) $(1;\ 2]$ і $[2;\ 5)$; г) $(-\infty;\ 0)$ і $[0;\ 3)$.

177. Знайдіть переріз числових проміжків, указаних у попередньому завданні.

www.4book.org

178. Які натуральні числа містяться в числовому проміжку $(1; 8)$? А в проміжку $[1; 8]$?

179. Які цілі числа містяться в проміжку:
а) $[-3; 4]$; б) $(-3; 4)$; в) $(-3; 4]$; г) $[-3; 4)$?

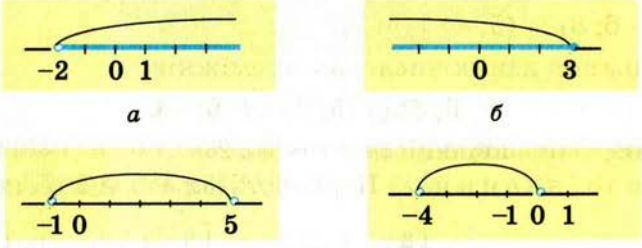
180. Чи при всіх значеннях a і b числовий проміжок $[a; b]$ містить у собі проміжок $(a; b)$?

181. Чому дорівнює переріз проміжків $[a; b]$ і $(a; b)$? А їх об'єднання?

Рівень А

182. Зобразіть на координатній прямій числовий проміжок:
а) $(2; \infty)$; б) $(-\infty; 0)$; в) $[-3; \infty)$; г) $(-\infty; -4]$.

183. Запишіть символами числові проміжки, що відповідають проміжкам, зображеним на малюнку 34.



Мал. 34

184. Зобразіть у вигляді проміжків і на координатній прямій множини чисел, що задовольняють нерівність:
а) $x < 3$; б) $x \geq -2$; в) $x \leq 0$; г) $x > 7$.

185. Яка лінійна нерівність має множину розв'язків:
а) $(3; \infty)$; б) $(-2; \infty)$; в) $(-\infty; 7]$; г) $[-3; \infty)$?

186. Яка лінійна нерівність має множину розв'язків, зображену на малюнку 34?

187. Зобразіть символами і графічно множину дійсних чисел, які задовольняють подвійну нерівність:
а) $-3 < x < 2$; б) $0 < x < 4$; в) $-5 < x < 0$.

188. Знайдіть об'єднання і переріз числових проміжків:
а) $[2; 3]$ і $[3; 5]$; б) $[-5; 0]$ і $[-3; 0]$;
в) $[-5; 7]$ і $[-7; 5)$; г) $(-2; -1)$ і $[-3; -1]$;
ґ) $(1; 2)$ і $(-2; 1)$; д) $(-\infty; 2)$ і $[-2; \infty)$.

www.4book.org

189. Перемалюйте таблицю в зошит і занесіть у неї об'єднання та перерізи зазначених числових проміжків.

№	Проміжки	Об'єднання	Переріз
1	$(0; 3)$ і $(0; 5)$		
2	$(-2; 0)$ і $(-3; 0)$		
3	$(-\infty; 1)$ і $(0; 2)$		
4	$(-2; \infty)$ і $(0; \infty)$		
5	$(-\infty; 1)$ і $(0; \infty)$		

190. Порівняйте числа a і c, якщо:

а) $(-\infty; a) \cup (c; \infty) = R$; б) $(a; x) \cap (x; c) = \varnothing$;

в) $(y; a) \cap (c; y) = \varnothing$; г) $(a; \infty) \cup (-\infty; c) = R$.

Розв'яжіть нерівність і запишіть відповідь у вигляді проміжку (**191—192**).

191. а) $5x - 3 > 12$; б) $3x + 5 \geq 11$; в) $0{,}5x + 2{,}6 > 3$;
г) $1 + 2x < 7$; ґ) $5 - 3x < 2$; д) $-1{,}3x - 9 \leq 4$.

192. а) $3x \leq 1 - 2x$; б) $-7x < 3x + 5$; в) $5x > x - 2$;
г) $-2x > 9 - 5x$; ґ) $2x \leq 7x + 3$; д) $1{,}1x \geq x - 5$.

Зобразіть на координатній прямій множину розв'язків нерівності (**193—195**).

193. а) $0{,}5x - 4(x - 3) > 3x$; б) $6x < 0{,}2x - 2(x + 3)$;
в) $0 < y - 0{,}3(2 - y)$; г) $4 \geq 5z - 0{,}2(1 - z)$.

194. а) $0{,}3 \leq 1{,}2 + 0{,}5(x - 2)$; б) $0 < 4{,}5 + 0{,}7(2y - 3)$;
в) $2{,}7(x + 3) < 7{,}2(x - 3)$; г) $3{,}4(2x + 3) < 6(x + 2)$.

195. а) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{5}y - \frac{3}{4} > \frac{3}{4}y - \frac{2}{5}$;

в) $x - \frac{2}{5}(x - 3) > 0{,}4$; г) $2y - \frac{1}{2} < 0{,}2(y + 3)$.

Рівень Б

196. За якої умови:

а) $(a; b) \cup (m; n) = (a; b)$; б) $(a; b) \cap (m; n) = (a; b)$?

197. Порівняйте числа x і a, y і c, якщо:

а) $(a; c) \cap (x; y) = (a; c)$; б) $(a; c) \cap (x; y) = (x; y)$;

в) $(a; c) \cup (x; y) = (a; c)$; г) $(a; c) \cup (x; y) = (a; y)$.

www.4book.org

198. Запишіть у вигляді подвійної нерівності співвідношення між числами a, x і y, якщо:

а) $(a; \infty) \cap (x; y) = (a; y)$; б) $(a; \infty) \cup (x; y) = (a; \infty)$;

в) $(-\infty; a) \cup (x; y) = (-\infty; y)$; г) $(-\infty; a) \cap (x; y) = (-\infty; a)$.

199. Які дроби із знаменником 2 містяться в проміжку:

а) $(1; 6)$; б) $(2; 3)$; в) $[-5; 0]$; г) $[-2; 3]$?

200. Домовимось довжиною числового проміжка $[a; b]$ називати різницю $b - a$. У скільки разів довжина першого проміжку більша за довжину другого:

а) $[0; 10]$ і $[0; 5]$; б) $[1; 15]$ і $[1; 3]$;

в) $[-6; 10]$ і $[-3; 5]$; г) $[na; nb]$ і $[a; b]$?

201. При яких значеннях x значення виразу $3x + 2$ належить проміжку:

а) $[-1; 5]$; б) $(1; 17)$; в) $[0; 3)$; г) $(-7; -1]$?

202. При яких значеннях x значення виразу $1{,}3 - 0{,}3x$ належить проміжку:

а) $(-0{,}2; 2{,}5)$; б) $[1; 4)$; в) $(-2{,}6; 0{,}2]$; г) $[-2; 0{,}1]$?

Розв'яжіть нерівність і запишіть розв'язок у вигляді проміжку **(203—204)**.

203. а) $5(x + 2) + 2(x - 3) < 3(x - 1) + 4(x + 3)$;

б) $3(2x - 1) + 3(x - 1) \geq 5(x + 2) + 2(2x + 3)$;

в) $2(x - 3) + 5(x - 2) > 3(2 - x) - 2(3 - x)$;

г) $9(x - 2) - 2(3x - 2) \leq 5(x - 2) - 2(x + 5)$.

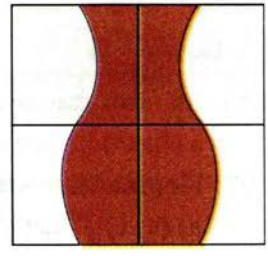
204. а) $\frac{x-2}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{x-4}{6} - \frac{x+1}{3}$;

б) $\frac{x-2}{2} + \frac{1+7x}{4} - \frac{x+11}{3} \geq \frac{5+2x}{4}$;

в) $\frac{3-2x}{2} - \frac{x-1}{3} > \frac{5-3x}{4} - \frac{4x+3}{6}$;

г) $\frac{6x-5}{3} - \frac{11+7x}{5} < \frac{4x+3}{5} - \frac{2x+3}{10}$.

205. Прийнявши площу одного квадрата за 1, з'ясуйте, до якого числового проміжку належить площа фігури, зображеної на малюнку 35: $[1; 2)$, $[2; 3)$, $[3; 4)$ чи $[4; 5)$?



Мал. 35

www.4book.org

Знайдіть об'єднання і переріз множин, що є розв'язками нерівностей (206—207).

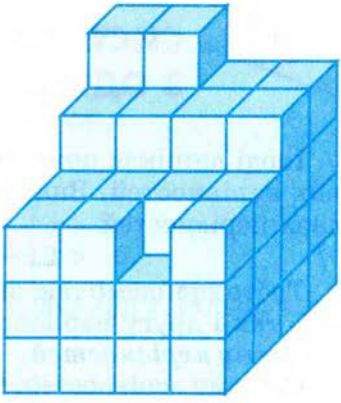
206. а) $\frac{5x-1}{4}+\frac{x+1}{2}<0$ і $\frac{x-3}{5}-\frac{2x-1}{10}\geq 4$;

б) $\frac{3+x}{2}+\frac{2-x}{3}\geq 0$ і $\frac{4x+3}{7}+\frac{x+1}{2}<2$.

207. а) $3x-\frac{2x-1}{4}>0$ і $\frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{4}\geq 2$;

б) $\frac{3-x}{15}-\frac{x-3}{3}>0$ і $\frac{3x-2}{4}-\frac{5x+1}{3}>1$.

208. На малюнку 36 зображено фігуру, складену з n кубиків, поставлених на квадрат 4×4. До якого з проміжків — (57; 67), (50; 69) чи [55; 65] входить число n?



Мал. 36

Розв'яжіть нерівність (209—210).

209*. а) $|x|>1$; б) $|x+2|>5$; в) $|3x+1|>5$;
г) $|5x|>2$; ґ) $|x-1|>3$; д) $|5-2x|>3$.

210. а) $|x+5|>-3$; б) $|1-3x|<-1$; в) $|2x-1|>0$;
г) $|x-1|\leq 0$; ґ) $|5x+3|\geq 0$; д) $|8-4x|<0$.

Вправи для повторення

211. Знайдіть значення добутку:

а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{40}$; б) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{48}\cdot\sqrt{50}$;

в) $\sqrt{42}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{18}$; г) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{72}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{45}$.

www.4book.org

212. Знайдіть корені рівняння:

а) $5\sqrt{x}=0$; б) $10\sqrt{x}=4$; в) $6\sqrt{x}-48=0$;

г) $3\sqrt{x}+20=0$; ґ) $4\sqrt{x}+9=11$; д) $7-2\sqrt{x}=12$.

213. ***Задача ал-Кархі.*** Знайдіть площу прямокутника, основа якого вдвічі більша за висоту, а площа чисельно дорівнює периметру.

214. Учні класу обмінялись святковими листівками один з одним. Скільки учнів у класі, якщо для цього потрібно 812 листівок?

§6. СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Іноді виникає потреба визначити спільні розв'язки кількох нерівностей. Знайдемо, наприклад, спільні розв'язки двох нерівностей

$$2x-3<5 \text{ і } 2-3x<11.$$

Тобто знайдемо такі значення x, які задовольняють як першу, так і другу нерівність. У таких випадках говорять про ***систему нерівностей***.

Систему нерівностей, як і систему рівнянь, записують за допомогою фігурної дужки:

$$\begin{cases} 2x-3<5, \\ 2-3x<11. \end{cases}$$

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке задовольняє кожну з нерівностей даної системи.

Розв'язати систему нерівностей **означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.**

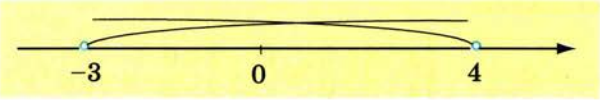
Розв'яжемо наведену вище систему, поступово замінюючи кожну її нерівність простішою і рівносильною їй:

$$\begin{cases} 2x-3<5, \\ 2-3x<11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x<8, \\ -3x<9; \end{cases} \quad \begin{cases} x<4, \\ x>-3. \end{cases}$$

www.4book.org

Множиною розв'язків системи нерівностей буде переріз множин розв'язків нерівностей, що входять до неї. Знайдемо переріз за допомогою координатної прямої.

Першу нерівність задовольняють усі числа, менші від 4, а другу — всі числа, більші від −3 (мал. 37).



Мал. 37

Обидві нерівності системи задовольняють такі значення x, що $-3 < x < 4$. Ця множина значень x — проміжок $(-3; 4)$. Числа −3 і 4 цьому проміжку не належать.

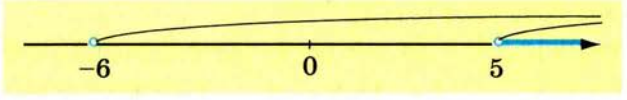
Розв'яжемо ще дві системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 3x-1>14, \\ 2-x<8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-1>x+3, \\ 5x-1<6-2x. \end{cases}$

✔ Розв'язання.

а) $\begin{cases} 3x-1>14, \\ 2-x<8; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x>15, \\ -x<6; \end{cases}$ $\begin{cases} x>5, \\ x>-6. \end{cases}$

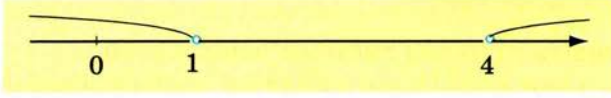
Обидві нерівності задовольняють значення x, більші від 5 (мал. 38).



Мал. 38

б) $\begin{cases} 2x>x+4, \\ 5x<7-2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ 7x<7; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ x<1. \end{cases}$

Немає числа, яке було б водночас меншим від 1 і більшим від 4 (мал. 39).



Мал. 39

Відповідь. а) $(5; \infty)$; б) розв'язків немає.

До розв'язування систем зводиться розв'язування і таких, наприклад, нерівностей:

www.4book.org

а) $(x-2)(x+5)<0$; б) $\frac{x-2}{x+5}<0$.

✔ **Розв'язання.** а) Добуток двох чисел від'ємний, якщо одне з цих чисел від'ємне, а інше — додатне. Отже, розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+5<0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x-2<0, \\ x+5>0. \end{cases}$$

Перша з цих систем розв'язків не має, множина розв'язків другої системи — числовий проміжок $(-5; 2)$.

б) Значення дробу від'ємне, якщо один з його членів від'ємний, а другий — додатний. Тому розв'язування нерівності б) таке саме, як і розв'язування нерівності а), і відповідь така сама.

Відповідь. а) $(-5; 2)$; б) $(-5; 2)$.

Розв'яжемо нерівності:
а) $|2x-3|\le 5$; б) $|x-1|>2x-5$.

а) Нерівність $|2x-3|\le 5$ і подвійна нерівність $-5\le 2x-3\le 5$ рівносильні системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x-3\le 5, \\ 2x-3\ge -5, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x\le 8, \\ 2x\ge -2. \end{cases}$$

Її множина розв'язків $[-1; 4]$.

б) Нерівність $|x-1|>2x-5$ рівносильна сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} x-1>2x-5, \\ x-1<-(2x-5); \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-1>2x-5, \\ x-1<5-2x; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<4, \\ 3x<6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<4, \\ x<2. \end{array}\right.$$

Дану нерівність задовольняють усі числа з проміжків $(-\infty; 4)$ і $(-\infty; 2)$. Їх об'єднання $(-\infty; 4)$.

Відповідь. а) $[-1; 4]$; б) $(-\infty; 4)$.

Перевірте себе

1. Наведіть приклад системи нерівностей.
2. Що таке розв'язок системи нерівностей з однією змінною?
3. Що означає «розв'язати систему нерівностей»?
4. Як знайти розв'язок системи, якщо відомі розв'язки кожної нерівності, що входять до неї?

www.4book.org

Виконаємо разом!

1. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases}(z^2-2)\cdot 3 \geq 3z^2-5,\\ z^2+2z \leq (z-1)(z+1).\end{cases}$$

✔ Розв'язання. $\begin{cases}3z^2-6 \geq 3z^2-5,\\ z^2+2z \leq z^2-1;\end{cases}$ $\begin{cases}-6 \geq -5,\\ z \leq -0{,}5.\end{cases}$

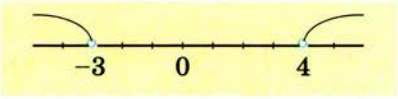
Перша нерівність неправильна, тому система не має розв'язків.

Відповідь. Система розв'язків не має.

2. Користуючись координатною прямою, розв'яжіть нерівність: $|x-2|+|x+1|>7$.

✔ Розв'язання. Вираз $|x-2|$ — відстань між точками з координатами x і 2, а $|x+1|$ — відстань між точками з координатами x і -1.

З малюнка 40 видно, що координата x має бути більшою за 4 або меншою за -3.



Мал. 40

Відповідь. $(-\infty; -3) \cup (4; \infty)$.

Виконайте усно

215. Чи має розв'язки система нерівностей:

а) $\begin{cases}x>3,\\ x<2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x>0,\\ x<5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x>-3,\\ x<2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x\leq 3,\\ x\leq 2?\end{cases}$

216. Чи задовольняє систему нерівностей $\begin{cases}2x\geq 0,\\ 3x<6\end{cases}$ число:

а) 2; б) 3; в) 0; г) 6?

217. Яка з нерівностей:

а) $|x|<3$; б) $|x|-1<0{,}5$; в) $|x|>5$; г) $7-|x|<0$

рівносильна системі відповідних нерівностей? А яка — сукупності?

www.4book.org

Рівень А

218. Чи є число 2 розв'язком системи нерівностей:

а) $\begin{cases} x-3<5, \\ 4x+2>9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x\geq x+2, \\ 12<8x-5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}5x\geq 2x-3, \\ 3x-1>4? \end{cases}$

219. Які з чисел $-1, 0, 1, 2, 3$ задовольняють систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 3-x\geq 0, \\ 7+x>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3>5, \\ 1-x<0? \end{cases}$

220. Розв'яжіть систему нерівностей і вкажіть два цілі числа, які її задовольняють:

а) $\begin{cases} 2x+7\geq 0, \\ 3x+6\geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-5<0, \\ 3x+9<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+1<0, \\ 2x+5>0. \end{cases}$

Розв'яжіть систему нерівностей (**221—224**).

221. а) $\begin{cases} 2x+3>x, \\ 4x-x<3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2-5x<7, \\ 3x+1<-8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8\leq 4x+8, \\ 0>3x+6. \end{cases}$

222. а) $\begin{cases} 5y-1<2y, \\ 3-2y<y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4-3y\geq -2y, \\ y-3\geq 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5y-7\leq 3y, \\ 2-4y<5. \end{cases}$

223. а) $\begin{cases} 0{,}5z-2<z, \\ 0{,}3-2z>3z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}8x-3\geq 5, \\ 0{,}8x+1\geq 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1-1{,}5x<x, \\ 1+1{,}5x<16. \end{cases}$

224. а) $\begin{cases} \frac{x}{2}-1>\frac{x}{3}, \\ x-1<7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6z+1<4z, \\ \frac{z}{2}-\frac{z}{5}>0{,}3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}<\frac{x-2}{3}, \\ 2x-3>0. \end{cases}$

225. Укажіть декілька таких значень a, щоб кожна з систем нерівностей а), б), в): 1) мала розв'язок; 2) не мала розв'язків:

а) $\begin{cases} x>a, \\ x<3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x<a, \\ x<-3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\geq a, \\ -x\geq 2. \end{cases}$

Розв'яжіть систему нерівностей (**226—228**).

226. а) $\begin{cases} 15-3x<9x-12, \\ 8x-7>5x+4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12-z<8z-15, \\ 7z-6>6z+4; \end{cases}$

www.4book.org

в) $\begin{cases} 2(x-3) \le 5x+7, \\ 3+4x > 3(x-5); \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5(x+2) \ge 2x-4, \\ 3(x+3) < 7-8x. \end{cases}$

227. а) $\begin{cases} 3-2(x-1) < 0, \\ 5-3(x-4) > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4(2x-1) < 3, \\ -5(x-3) \ge 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \le 2-3(x+1), \\ 5x \ge 3+(x-4); \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8(1+x) > 3(2x-1), \\ 5 < 3x-2(8x-3). \end{cases}$

228. а) $\begin{cases} 2x-0{,}2(x-2) > 4, \\ \frac{x}{2}-6 \le \frac{x}{8}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4-\frac{x-1}{3} \ge x, \\ 7x-1 \ge 48; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}5x+3 \le 2{,}5-3x, \\ 5-0{,}2x \le 0{,}2-5x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}4z+2 \ge 3{,}5-2z, \\ 7-1{,}3z \ge 0{,}3-5z. \end{cases}$

229. Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 2n+3 < 4(3n-5), \\ 8-4n < 7-2(4n-13); \end{cases}$ б) $\begin{cases} n(n+1) > (n+2)(n-2), \\ (n-3)^2 \ge 3-n(2-n). \end{cases}$

230. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-2 < 3x-4 < 5$; б) $3 < 2-x < 5$;

в) $0{,}4 \le 2x+1 \le 0{,}6$; г) $0{,}7 \le 3-2x \le 1{,}2$;

ґ) $-1 \le \frac{1}{3}(6-z) < 1$; д) $-2{,}5 < \frac{1}{2}(1-3y) \le 1{,}5$.

Рівень Б

Розв'яжіть систему нерівностей (231—234).

231. а) $\begin{cases} c^2-3 < (c+3)^2, \\ 2c+c^2 > (c-2)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5-(x+3)^2 > (x-2)(1-x), \\ x(x+7) < (x+7)^2-7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (z^2-2)\cdot 3 \ge 3z^2, \\ z^2+2z \le (z-1)z; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-1)^2+3x \ge (x-1)(x+1), \\ (x+3)(x-1) \ge (x+2)^2-1. \end{cases}$

232. а) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2+4, \\ (x-1)^2 > x^2-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7+(x+3)^2 < 5x+(x-3)^2, \\ (x-1)(x+2) < (x+1)(x-2); \end{cases}$

www.4book.org

в) $\begin{cases}(x-1)^2 \geq x^2+7,\\(x-2)^2 \geq x^2-8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x-(x+1)^2 \leq 5-(1-x)^2,\\(x-3)(x+3) > (x+7)(x-7).\end{cases}$

233. а) $\begin{cases}\dfrac{2y+15}{9}-\dfrac{1-y}{5} \geq \dfrac{y}{3},\\2y > \dfrac{19-2y}{2}-\dfrac{11-2y}{4};\end{cases}$ б) $\begin{cases}4\dfrac{2}{3}x-1 < 3x+3\dfrac{1}{3},\\\dfrac{3x+12}{5}+3 > \dfrac{8+x}{2};\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{4x+3}{3}-\dfrac{3x-1}{8} < 1+\dfrac{8-x}{6},\\\dfrac{7x+3}{5}+\dfrac{3x+1}{2} > 4+\dfrac{x-4}{2}.\end{cases}$

234. а) $\begin{cases}c+0{,}25 < \dfrac{14c+3}{12},\\c-\dfrac{1-3c}{4} < \dfrac{c+8}{6};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{2} < \dfrac{5}{3},\\6-\dfrac{a+16}{3} < -2a;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3}-x \leq \dfrac{11-x}{6}-2,\\3(x-1)^2+8x+2 \leq x(3x-2)+1.\end{cases}$

235. При яких значеннях змінної x має зміст вираз:

а) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}$; б) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+2}$;

в) $\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2x+3}}{5}+\dfrac{5}{\sqrt{3x+2}}$?

236. При яких значеннях x значення виразу $4x - 1{,}5$ належить проміжку:

а) $(1; 2)$; б) $[-2; 0]$; в) $(-\infty; 0)$; г) $[3; 7)$?

237. При яких c значення виразу $\dfrac{2-3c}{4}$ належить проміжку:

а) $(-\infty; 0)$; б) $[0; \infty)$; в) $(-1; 1)$; г) $[1; 8]$?

Розв'яжіть нерівність (238—241).

238. а) $(x + 2)(x - 7) < 0$; б) $(x - 3)(2x - 5) > 0$;

www.4book.org

в) $(3-2z)(1+z)\geq 0$; г) $(2y+8)(7-4y)\leq 0$;
ґ) $0{,}5x(x+3)<0$; д) $(x^2+1)(5-x)\leq 0$.

239. а) $(2x+1)(10x-7)\geq 0$; б) $(5-2x)(1-3x)\leq 0$;
в) $(x^2+5)(x+5)>0$; г) $x^3+2x^2+x<0$;
ґ) $5x^2-3x-2\leq 0$; д) $x^3+3x^2>0$.

240. а) $\dfrac{x+3}{x-7}>0$; б) $\dfrac{5-2x}{2x-7}\geq 0$; в) $\dfrac{3-x}{2x-1}<0$;

г) $\dfrac{(x^2+3)x}{2x-3}<0$; ґ) $\dfrac{3x+5}{x(x^2+1)}>0$; д) $\dfrac{x^3}{x-3}\leq 0$.

241. а) $\dfrac{3x-1}{x+5}\leq 0$; б) $\dfrac{5-2x}{2+5x}>0$; в) $\dfrac{-3x}{7x-14}\leq 0$;

г) $\dfrac{3x-1}{2x+4}<2$; ґ) $\dfrac{2x+3}{4-x}>5$; д) $\dfrac{x-4}{3x+2}>3$.

242. При яких значеннях n різниця дробів $\dfrac{1}{n+1}$ і $\dfrac{1}{n-1}$ більша за їх добуток?

243. При яких значеннях n сума дробів $\dfrac{3}{n-4}$ і $\dfrac{3}{3-n}$ менша за їх добуток?

244. Розв'яжіть систему трьох нерівностей:

а) $\begin{cases}2x-1>5,\\4x-3<37,\\3x-5>7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-2\leq 5x-8,\\2x-1\leq 4(2-x),\\2x-7<3(1-x).\end{cases}$

245. Розв'яжіть систему подвійних нерівностей:

а) $\begin{cases}0<1-2x<1,\\3<3x+4<5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}1<5-3x<3,\\-3<3-2x<1.\end{cases}$

246. Розв'яжіть нерівність:
а) $x^2\leq 25$; б) $x^2>16$; в) $x^2<2$.

247. Чи правильно, якщо число a додатне, то нерівність:
а) $x^2<a^2$ рівносильна нерівності $|x|<a$;
б) $x^2>a^2$ рівносильна нерівності $|x|>a$?

www.4book.org

248. Розв'яжіть нерівність двома способами:

а) $|x-1|<2$; б) $(x-1)^2<4$; в) $(2x+1)^2<9$;

г) $|x-8|>1$; ґ) $(x-2)^2\geq 25$; д) $(5x-3)^2>49$.

Розв'яжіть нерівність (**249—251**).

249*. а) $|2x+3|<5$; б) $|x-3|+|x+1|\leq 7$;

в) $|3x-1|\geq 2$; г) $|x-2|+|x+1|\geq 3$.

250*. а) $|5-x|>0{,}5$; б) $|x-1|+|1-x|>1$;

в) $|4x-3|<x$; г) $|x-7|>|x-1|$.

251*. а) $(x-3)\sqrt{x-2}<0$; б) $(2x-1)\sqrt{3x-2}>0$;

в) $(5-2x)\sqrt{x^2+3}\geq 0$; г) $(4x-5):\sqrt{3x-1}\leq 0$.

Вправи для повторення

252. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

а) $x^2-10x+21$; б) $a^2+2a-15$; в) $2x^2+5x-3$;

г) $c^2-11c-26$; ґ) $9a^2+3a-2$; д) $4c^2+25c+25$.

253. Доведіть, що значення виразу $17^{10}+3\cdot 7^{10}-3\cdot 7^9+17^9$ ділиться націло на 36.

254. Запишіть у стандартному вигляді число:

а) 47 000 000; б) 308 000 000; в) 0,000000039;

г) 0,00000407; ґ) $803\cdot 10^9$; д) $0{,}067\cdot 10^7$;

е) $3{,}7\cdot 100^5$; є) $0{,}42\cdot 10^{-7}$; ж) 2000^5.

255. Побудуйте графік рівняння:

а) $2x+3y=6$; б) $xy=12$;

в) $x^2+y^2=4$; г) $y^2-x^2=0$.

§7. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Іноді виникає потреба довести, що дана нерівність зі змінними правильна при всіх указаних значеннях змінних. Це можна робити на основі означення понять «більше» і «менше»:

$a>b$, якщо різниця $a-b$ — число додатне.

Приклад 1. Доведіть, що при кожному дійсному значенні a

$$a^2+2>2a.$$

www.4book.org

Доведення. $a^2+2-2a=a^2-2a+1+1=(a-1)^2+1$. При кожному дійсному значенні a значення виразу $(a-1)^2$ невід'ємне, $(a-1)^2+1$ — додатне. Отже, завжди $a^2+2>2a$.

Приклад 2. Доведіть, що при додатних a і b

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Доведення. $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$.

Утворений вираз $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ при будь-яких додатних a і b невід'ємний. Отже, якщо $a>0$ і $b>0$, то

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Рівність тут має місце тільки тоді, коли $a=b$.

Зауваження. Вираз $\frac{a+b}{2}$ називають ***середнім арифметичним*** чисел a і b, а вираз $\sqrt{ab}$ — їх ***середнім геометричним***. Тому доведену нерівність читають так:

середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного.

Приклад 3. Доведіть, що при додатних a, b і c

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc.$$

Доведення. Оскільки середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного, то

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab};\qquad \frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc};\qquad \frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ca}.$$

Перемноживши почленно ці нерівності, маємо:

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ab\cdot bc\cdot ca},$$

або

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc.$$

Довести твердження зі змінними означає показати, що воно істинне при *всіх* допустимих значеннях змінних. *Спростувати твердження* — це означає довести, що воно хибне.

www.4book.org

Спростувати нерівність зі змінними означає показати, що дана нерівність хибна хоч би при *одному* значенні змінної.

Приклад. Спростуйте нерівність $(n + 1)^2 > n^2$.

Спростування. Якщо $n = -1$, то нерівність матиме вигляд $0^2 > 1^2$. Остання нерівність неправильна. Тому неправильна і дана нерівність.

Приклад, що спростовує яке-небудь твердження, називають *контрприкладом*.

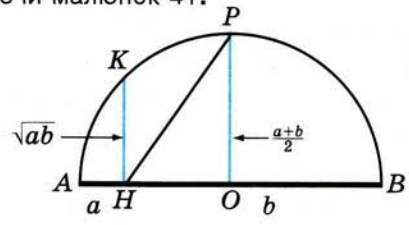
Крім середнього арифметичного і середнього геометричного науковці часто розглядають середнє квадратичне двох чи кількох чисел. *Середнім квадратичним* кількох чисел називають число, що дорівнює квадратному кореневі з середнього арифметичного їх квадратів. Середнім квадратичним чисел a і b або x, y і z є відповідно:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Середнє квадратичне двох чисел завжди більше за їх середнє арифметичне. Спробуйте довести, що для будь-яких додатних чисел a і b завжди:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Проілюструйте правильність такої подвійної нерівності, використовуючи малюнок 41.



Мал. 41

Перевірте себе

1. Що означає «довести твердження»? А спростувати?
2. Що означає «довести нерівність»?
3. Сформулюйте означення середнього арифметичного та середнього геометричного двох чисел.
4. Порівняйте середнє арифметичне і середнє геометричне двох додатних чисел.

www.4book.org

Виконаємо разом!

Доведіть, якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$. Сформулюйте це твердження.

Доведення. Якщо $a < b$, то $2a < a + b$, звідси $a < \frac{a+b}{2}$.

Якщо $a < b$, то $a + b < 2b$, звідси $\frac{a+b}{2} < b$.

Об'єднавши обидва випадки, маємо:

якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Одержану подвійну нерівність можна сформулювати так: **середнє арифметичне двох нерівних дійсних чисел більше від меншого із даних чисел і менше від більшого з них.**

Виконайте усно

256. Знайдіть середнє арифметичне чисел:

а) 1,3 і 2,7; б) 38 і 0;

в) 409 і −409; г) 10, 20 і 30.

257. Знайдіть середнє геометричне чисел:

а) 50 і 8; б) 1000 і 40;

в) 0,2 і 0,8; г) 5^{11} і 5^{-7}.

Доведіть нерівність (**258—259**).

258. а) $(a-2)^2 + 3 > 0$; б) $(1-2a)^2 + 1 > 0$;

в) $(a+2)^2 > 4a$.

259. а) $a^2 + 6a + 10 > 0$; б) $9 - 12a + 4a^2 \geq 0$;

в) $a^4 + 1 \geq 2a^2$.

Рівень А

Доведіть нерівність (**260—263**).

260. а) $a^2 + 2a + 2 > 0$; б) $a^2 - 2a + 5 > 0$;

в) $2a^2 + 4a + 5 > 0$; г) $2a^2 + a + 1 > 0$.

261. а) $a^2 + 3 > 2a$; б) $a^2 + 5 > 4a$;

в) $2a^2 + 1 > 2a$; г) $3a^2 + 1 > 2a$.

262. а) $(2a-1)(2a+1) < 4a^2$; б) $(a-3)^2 > a(a-6)$;

в) $a^2 + 65 > 16a$; г) $a^4 + 82 > 18a^2$.

www.4book.org

263. а) $(a+1)^2 \geq 4a$; б) $99+20a < (a+10)^2$;

в) $\frac{2a}{1+a^2} \leq 1$; г) $\frac{a^2+4}{4} \geq a$.

264. Доведіть, що для кожного від'ємного значення x:

а) $(x-1)(x-2) > 0$; б) $x^2+9 > 10x$;

в) $(x-3)(3-x) < 0$; г) $(2-x)(x-3) < 0$.

265. Доведіть, що для кожного додатного c:

а) $c+\frac{1}{c} \geq 2$; б) $9c+\frac{1}{c} \geq 6$; в) $(c+1)\left(\frac{1}{c}+1\right) \geq 4$.

Рівень Б

Доведіть нерівність (**266—267**).

266. а) $a^2-ab+b^2 \geq 0$;

б) $a^2+b^2+2 \geq 2(a+b)$.

267. а) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$;

б) $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

268. Доведіть, що сума квадратів двох будь-яких дійсних чисел не менша від їх подвоєного добутку.

269. Що більше:

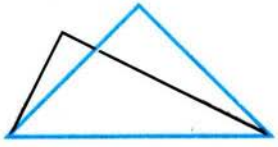
а) сума квадратів двох додатних чисел чи квадрат їх суми;

б) сума квадратів двох від'ємних чисел чи квадрат їх суми?

270. Доведіть, що півсума квадратів двох дійсних чисел не менша від квадрата їх півсуми.

271. З усіх прямокутників, що мають рівні площі, найменший периметр має квадрат. Доведіть.

272. З усіх прямокутних трикутників з рівними гіпотенузами найбільшу площу має рівнобедрений трикутник (мал. 42). Доведіть.



Мал. 42

www.4book.org

273. З усіх прямокутників, вписаних у дане коло, найбільшу площу має квадрат. Доведіть.

Доведіть для будь-яких дійсних значень змінних нерівність **(274—278)**.

274. а) $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$; б) $(a+b+1)^2\leq 3(a^2+b^2+1)$.

275. а) $a^4+b^4+2c^2\geq 4abc$; б) $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd$.

276. а) $8a^2+14ab+7b^2+1>0$; б) $2a^2+5c^2+2ac+1>0$.

277. а) $(ax+by)^2\leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$;

б) $\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}$.

278. а) $|a|+|b|\geq|a+b|$; б) $|a|-|b|\leq|a-b|$.

Доведіть істинність числової нерівності **(279—281)**.

279. а) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}<2$; б) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}<3$.

280. а) $\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}}<3$; б) $\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12}}}>3$.

281. а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}<1$;

б) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<1$.

Вправи для повторення

282. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{4}{x+3}=-2x$; б) $\frac{3}{x+3}+\frac{5x}{x-1}=-1$.

283. Один із коренів рівняння $x^3+2x^2-9x+a=0$ дорівнює -2. Знайдіть решту коренів цього рівняння.

284. Руда містить 60 % заліза. З неї виплавляють чавун, який містить 98 % заліза. Із скількох тонн руди виплавляють 1000 т чавуну?

285. Обчисліть $f(9)$, $f(99)$, $f(999)$, якщо $f(x)=\frac{2x^2-6x+4}{2x^2-2x-4}$.

www.4book.org

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант I

1°. Розв'яжіть нерівність $3x - 5 < 13$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 2x+3>7, \\ x-5\le 1; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} 3-\frac{x-2}{2}\le x, \\ 5(x-2)<8x+1. \end{cases}$

3•. Розв'яжіть подвійну нерівність $-1 \le 2x - 3 < 5$.

Варіант II

1°. Розв'яжіть нерівність $4x - 7 < 13$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 3x-7<5, \\ 2x+1\ge 3; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} 2-\frac{x-1}{3}\ge x, \\ 7(x-3)>5x-2. \end{cases}$

3°. Розв'яжіть подвійну нерівність $-3 < 2c + 1 \le 7$.

Варіант III

1°. Розв'яжіть нерівність $5x - 4 > 26$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 5x-2\le 18, \\ 2x+3>5; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} 4-\frac{2-x}{3}>x, \\ 2(x-4)\ge 5x-2. \end{cases}$

3°. Розв'яжіть подвійну нерівність $-2 \le 3n + 4 < 10$.

Варіант IV

1°. Розв'яжіть нерівність $7x + 3 > 38$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 4x-3>5, \\ 5x+2\le 27; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} 3-\frac{x-4}{2}<3x, \\ 5(x-1)\ge 3x-1. \end{cases}$

3•. Розв'яжіть подвійну нерівність $-5 < 2m - 1 \le 7$.

www.4book.org

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Два вирази, сполучені знаком нерівності ($<$, $>$, $\le$ чи $\ge$), утворюють *нерівність*. Нерівність називають *числовою*, якщо обидві її частини — числові вирази.

Властивості числових нерівностей

Якщо: $a < b$ і $b < c$, то $a < c$;

$a < b$ і c — довільне число, то $a + c < b + c$;

$a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$;

$a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$;

$a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$;

$a < b$, $c < d$ і a, b, c, d — числа додатні, то $ac < bd$.

Нерівності виду $a < x < b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$, $a \le x \le b$ називаються *подвійними нерівностями*. Їх зручно використовувати для оцінювання значень величин і наближених обчислень. Адже якщо $a < x < b$ і $c < y < d$, то

$$a + c < x + y < b + d, \quad a - d < x - y < b - c,$$

$$ac < xy < bd, \qquad a : d < x : y < b : c.$$

Дві останні подвійні нерівності правильні за умови, якщо числа a і c — додатні.

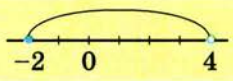
$2x + 17 < 1$, $12 - 3x \ge 2$ — приклади нерівностей з однією змінною x.

Нерівності зі змінними подібні до рівнянь. Розв'язком нерівності зі змінною називається таке число, яке задовольняє дану нерівність, тобто перетворює її в правильну числову нерівність. *Розв'язати нерівність* означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Множини розв'язків найчастіше утворюють *проміжки*. Наприклад, множини розв'язків нерівностей $2x + 7 < 15$ і $8 + 3x \ge 2$ — це відповідно проміжки $(-\infty, 4)$ та $[-2; \infty)$.

Декілька нерівностей з тією самою змінною утворюють *систему нерівностей*, якщо треба знайти їх спільні розв'язки. Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх не існує. Система нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + 7 < 15, \\ 3x + 8 \ge 2 \end{cases}$$



має множину розв'язків $[-2; 4)$.

www.4book.org

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Визначати, яке з двох чисел більше, а яке — менше, люди вміли ще до нашої ери. В «Основах» Евкліда (III ст. до н. е.) доведено нерівність, яку тепер прийнято записувати так: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Тільки під a і b тоді розуміли не довільні додатні числа, а довжини відрізків; доведення пропонувалось суто геометричне і без знаків нерівності.

Архімед (III ст. до н. е.) довів подвійну нерівність, яку тепер записують так: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Знаки «<» і «>» вперше запровадив англійський математик Т. Гарріот у 1631 р. Хоча знаки нерівності запропоновано пізніше від знаку рівності, використовуватися вони почали раніше, оскільки друкували їх, користуючись буквою V, а знаку рівності «=» на той час у типографії ще не було.

Знаки нестрогих нерівностей запровадив у 1670 р. англійський математик Дж. Валліс. Тільки риску він писав над знаком нерівності. Такі знаки використовувалися рідко. У звичайному для нас вигляді знаки «≤» і «≥» запропонував у 1734 р. французький математик П. Бугер.

У сучасній математиці та прикладних науках часто використовують нерівності між середніми, зокрема між середнім арифметичним і середнім квадратичним кількох дійсних чисел. Наприклад, якщо $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — довільні дійсні числа, $n \in N$, $n \geq 2$, то правильна нерівність:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

Відомі нерівності, які мають власні назви.

Нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним n додатних чисел називають *нерівністю Коші*:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Нерівність Буняковського:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

www.4book.org

Огюстен Луї Коші — французький математик, член Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства та багатьох інших академій наук. Працював у різних галузях математики (арифметика і теорії чисел, алгебра, математичний аналіз, диференціальні рівняння, теоретична і небесна механіка, математична фізика. Загалом він написав і опублікував понад 800 робіт. Повне зібрання його творів, видане Паризькою АН, містить 27 томів.

Огюстен Луї Коші (1789—1857)

З українських математиків XIX ст. проблеми, пов'язані з нерівностями, найбільше досліджував **Віктор Якович Буняковський**. Народився він у м. Бар (тепер – Вінницької області), навчався в Німеччині, Франції. Захистив дисертацію і одержав ступінь доктора математики в Парижі (1825). Доведену ним нерівність іноді приписують німецькому математику Г. Шварцу, але В. Я. Буняковський довів її на 16 років раніше. В. Я. Буняковський досліджував статистичні характеристики народонаселення, ймовірного контингенту російської армії, правдоподібності свідчень у судочинстві, похибок у спостереженнях і т. п. З 1858 р. був головним експертом уряду з питань статистики і страхування (див. с. 207).

В. Я. Буняковський (1804—1889)

Нерівності використовують і в геометрії. Наприклад, ΔABC існує тоді і тільки тоді, коли виконуються три нерівності:

$AB < BC + CA$, $BC < CA + AB$ і $CA < AB + BC$.

Чи правильно, що система цих трьох нерівностей рівносильна подвійній нерівності: $|AC - CB| < AB < |AC + CB|$?

www.4book.org

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 1

1. Виберіть правильну нерівність:

а) $0{,}2 > \sqrt{2}$; б) $-1 < -2$; в) $5 \geq 5$; г) $2^{-1} \leq 2^{-2}$.

2. Сумою нерівностей $5 > 3$ і $2 > -1$ є нерівність:

а) $4 > 5$; б) $4 < 5$; в) $7 > 2$; г) $7 \geq 2$.

3. Укажіть строгу нерівність:

а) $15 \geq 5$; б) $2 \leq 2$; в) $7 > -2$; г) $-10 \geq 10$.

4. Нерівність $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ задовольняє число:

а) 2; б) 1; в) 0; г) -1.

5. Скільки цілих чисел задовольняє подвійну нерівність $-1 \leq x \leq 1$:

а) одне; б) два; в) три; г) чотири?

6. Виберіть проміжок, якому належить число $\sqrt{3}$:

а) $[2; 3]$; б) $(-\infty; \sqrt{3})$;

в) $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$; г) $(-\sqrt{3}; \infty)$.

7. Виберіть нерівність, яка не має розв'язків:

а) $|x| \geq -3$; б) $x < -3$; в) $7 - |x| < 0$; г) $x^2 < 0$.

8. Система нерівностей $\begin{cases} 2x \leq 3, \\ x + 1 \leq 2 \end{cases}$ має множину розв'язків:

а) $(-\infty; 1]$; б) $[1{,}5; \infty)$; в) $(-\infty; 1{,}5]$; г) $[2; 3]$.

9. Яке найбільше число є розв'язком нерівності $x^2 - 2x \geq x^2 + 2$:

а) 2; б) 1; в) -1; г) -2?

10. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$:

а) $(-\infty; 0]$; б) $(-\infty; 0)$; в) $[0; \infty)$; г) $(0; \infty)$.

www.4book.org

Типові завдання до контрольної роботи № 1

1. Порівняйте дроби:

а°) $\frac{5}{7}$ і $\frac{3}{7}$; б°) $-\frac{4}{3}$ і $-\frac{4}{3}$; в•) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$; г•) $-\frac{7}{13}$ і $-\frac{13}{27}$.

2. Відомо, що $x < y$. Порівняйте:

а°) $x - 3$ і $y - 3$; б°) $1{,}3x$ і $1{,}3y$;

в•) $-2x$ і $-2y$; г•) $5 - x$ і $5 - y$.

3. Дано $7 < b < 12$, $2 < c < 5$. Оцініть значення виразу:

а°) $3b$; б°) bc; в•) $3b + 2c$; г•) $\frac{3b + 2c}{bc}$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а°) $2x - 5 < 7$; б°) $3x + 7 < 7x + 3$;

в•) $4 - (x - 2)^2 > x - x^2$; г•) $\frac{x - 3}{5} - \frac{2x - 1}{10} \geq 4$.

5•. Знайдіть об'єднання і переріз множин A і C, якщо:

а) $A = (2; 5)$, $C = (1; 3)$; б) $A = (-3; \infty)$, $C = (-\infty; 3]$;

в) $A = (-\infty; \pi)$, $C = [\sqrt{10}; \sqrt{11}]$.

6. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 6x - 7 \geq 4x - 3, \\ 3x + 16 \geq 8x - 4; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} x(x + 7) \geq (x - 7)^2, \\ (3 - x)(x + 3) \geq 0{,}5x - x^2. \end{cases}$

7•. Знайдіть область визначення функції:

$$y = \sqrt{2x + 3} - \frac{9}{\sqrt{9 - 2x}}.$$

8•. Розв'яжіть нерівність:

а) $|5x - 3| \leq 1$; б) $|3x - 15| > 9$.

9••. Розв'яжіть рівняння:

$$|x + 1| + |x - 2| = 3.$$

10••. Доведіть нерівність, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$(a + 2c)(c + 2b)(b + 2a) > 16\sqrt{2}abc.$$

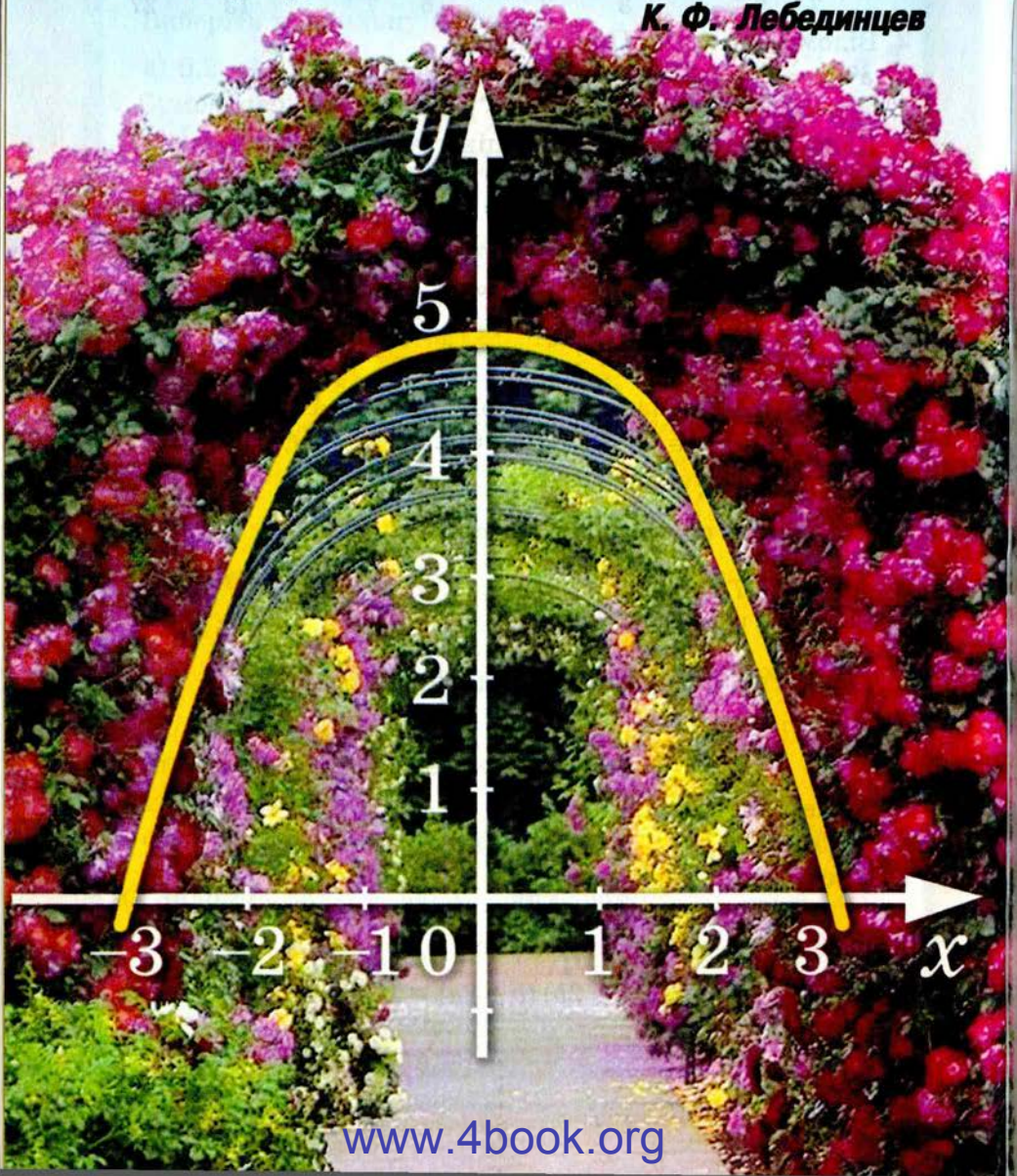
www.4book.org

РОЗДІЛ

2 КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

Немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення.

К. Ф. Лебединцев



www.4book.org

Функція — зручна математична модель для дослідження багатьох процесів. Функція, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, — квадратична. Її графік — парабола. Такі функції часто використовуються в різних галузях науки. Вони пов'язані з квадратними рівняннями і нерівностями.

Основні теми розділу:

- **властивості функцій;**
- **перетворення графіків функцій;**
- **квадратична функція;**
- **квадратні нерівності;**
- **системи рівнянь другого степеня.**

§8. ФУНКЦІЇ

Функція — одне з найважливіших понять математики. Можна навести чимало прикладів залежностей і відповідностей між змінними. Наприклад, формула $S = 4\pi R^2$ виражає залежність площі поверхні кулі від її радіуса.

Формула $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ встановлює відповідність між довжиною маятника l і його періодом коливання (T). Отже, T — функція від l (тут $\pi \approx 3{,}14$, $g \approx 9{,}8$ м/с^2 – константи).

Нагадаємо основні відомості про функції.

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y, то таку відповідність називають ***функцією***. При цьому x називають ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, y — ***залежною змінною***, а множину D — ***областю визначення*** даної функції. Множину всіх значень y, яких може набувати функція, називають її ***областю значень*** і позначають буквою E.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Задають функції найчастіше у вигляді формул, таблиць або графіків. Наприклад, формула $y = x^2$ задає функцію, яка виражає відповідність між числами та їх квадратами. Якщо область визначення цієї функції — множина цілих чисел з проміжку $[-3; 3]$, то її можна задати у вигляді таблиці:

www.4book.org

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Графік цієї функції — сім точок (мал. 43). Її область визначення — множина $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, область значень — множина $E = \{0, 1, 4, 9\}$.

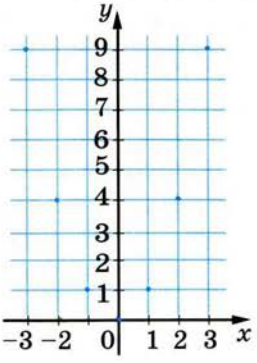
Якщо область визначення функції $y = x^2$ — проміжок $[-2; 2]$, то її графіком є частина параболи, зображена на малюнку 44, а областю значень — проміжок $[0; 4]$.

Графіком функції $y = x^2$, заданої на множині всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, є вся парабола (мал. 45). Область визначення цієї функції — множина дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, а область значень — проміжок $[0; \infty)$.

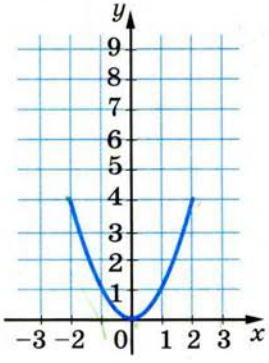
Нагадаємо ще кілька прикладів функцій.

y = kx — пряма пропорційність **($k \neq 0$).** Її графік — пряма, що проходить через початок координат. Область визначення цієї функції — множина $\boldsymbol{R}$, область значень — теж множина $\boldsymbol{R}$. Наприклад, графік функції $y = 2x$ зображено на малюнку 46.

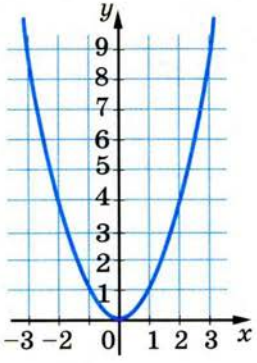
y = kx + b — лінійна функція. Її графік — пряма, не паралельна осі y. Область визначення — множина $\boldsymbol{R}$, область значень — $\boldsymbol{R}$, якщо $k \neq 0$. Якщо $k = 0$, то область значень — одне число b. Приклади: $y = x + 2$ (мал. 47), $y = 3{,}5$ (мал. 48).



Мал. 43

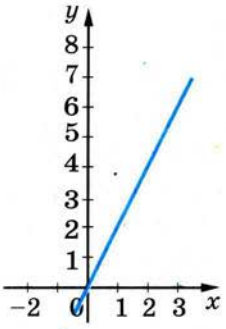


Мал. 44

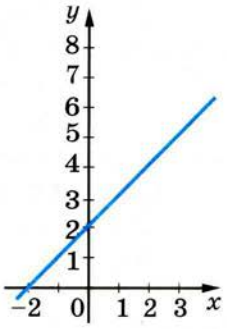


Мал. 45

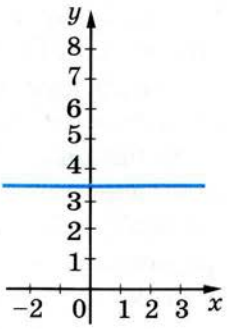
www.4book.org



Мал. 46



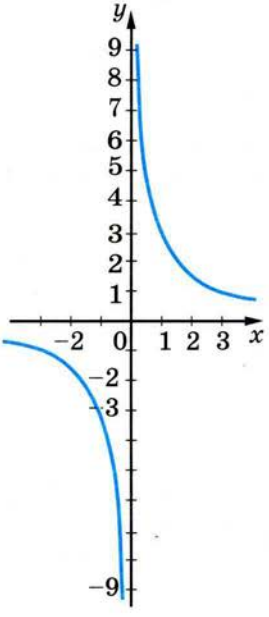
Мал. 47



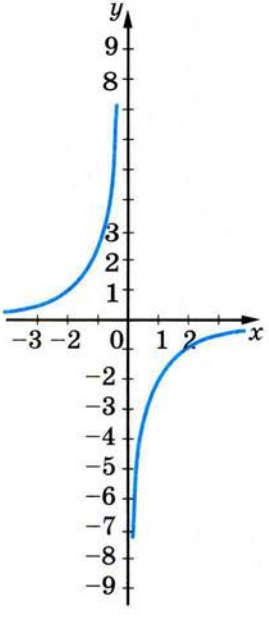
Мал. 48

$y = \frac{k}{x}$ — ***обернена пропорційність*** $(k \neq 0)$. Її графік — гіпербола. Якщо $k > 0$, то вітки цієї гіперболи розміщені в I і III чвертях координатної площини, якщо $k < 0$, — у II і IV чвертях. Область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ — множина $\boldsymbol{R}$ без числа 0, область значень — ця сама множина $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Приклади: $y = \frac{3}{x}$ (мал. 49, *а*), $y = -\frac{2}{x}$ (мал. 49, *б*)



а



б

Мал. 49

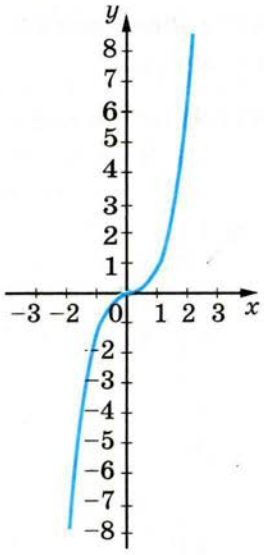
www.4book.org

Графік функції $y = x^3$ зображено на малюнку 50. Її область визначення і множина значень — множина $\boldsymbol{R}$.

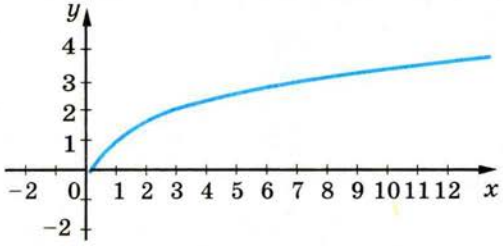
Графік функції $y = \sqrt{x}$ — одна вітка параболи (мал. 51). Її область визначення $[0; \infty)$ і область значень — $[0; \infty)$.

Якщо змінна y залежить від x, то записують $y = f(x)$ (читають: ігрек дорівнює еф від ікс). Символом $f(a)$ позначають значення функції $y = f(x)$, якщо $x = a$. Нехай, наприклад, функцію задано формулою $y = 3x^2 - 5$. Можна записати і так: $f(x) = 3x^2 - 5$. У цьому випадку $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 7$.

З а у в а ж е н н я. Якщо $y = f(x)$, то часто кажуть, що y — функція від x, тобто функцією називають змінну y. Однак здебільшого під функцією розуміють не одну залежну змінну, а відповідність між значеннями двох змінних. До того ж — не будь-яку відповідність, а однозначну, при якій кожному значенню змінної x відповідає *єдине* значення змінної y.



Мал. 50



Мал. 51

Деякі функції на окремих частинах області визначення задаються різними формулами. Такою є, наприклад, функція

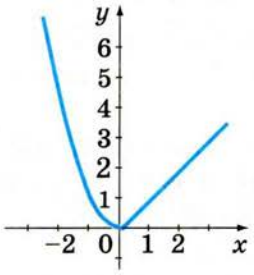
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

www.4book.org

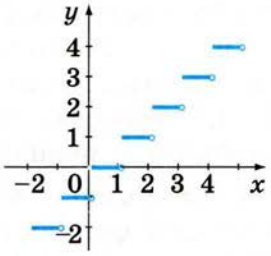
Значення цієї функції при від'ємних значеннях аргументу знаходять, користуючись формулою $f(x) = x^2$, а при додатних — за формулою $f(x) = x$. Її графік — на малюнку 52.

Існують також інші функції, які позначають новими для вас символами.

Цілою частиною дійсного числа x називають таке найбільше ціле число $[x]$, яке не більше від x. Графік функції $y = [x]$ — на малюнку 53.

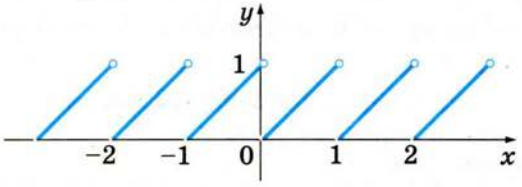


Мал. 52



Мал. 53

Дробовою частиною дійсного числа x називають різницю між даним числом і його цілою частиною: $\{x\} = x - [x]$. Графік функції $y = \{x\}$ — на малюнку 54.



Мал. 54

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення функції.
2. Що таке аргумент функції? Наведіть приклад.
3. Як можна задати функцію?
4. Що таке область визначення і область значень функції?
5. Які функції називають лінійними? Які їх властивості?
6. Назвіть властивості оберненої пропорційності.
7. Що таке графік функції?

www.4book.org

Виконаємо разом!

1. Функцію задано формулою $f(x) = x^3 + 1$. Знайдіть: $f(-3)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$.

✔ Розв'язання. $f(-3) = (-3)^3 + 1 = -27 + 1 = -26$, $f(0) = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$, $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + 1 = 2\sqrt{2} + 1$.

Відповідь. $f(-3) = -26$, $f(0) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$.

2. В яких точках графік функції $y = x^2 - 3x + 2$ перетинає:
а) вісь y; б) вісь x?

✔ Розв'язання. а) Якщо графік перетинає вісь y у деякій точці, то абсциса цієї точки дорівнює нулю, а координати задовольняють рівняння, що задає функцію.

Маємо: $x = 0$; $y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$.

Отже, графік функції перетинає вісь y у точці з координатами (0; 2).

б) Якщо графік перетинає вісь x у деякій точці, то ордината цієї точки дорівнює нулю, а координати задовольняють рівняння, що задає функцію.

Маємо: $y = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Отже, графік функції перетинає вісь x у точках з координатами (1; 0) і (2; 0).

Відповідь. а) (0; 2); б) (1; 0) і (2; 0).

Виконайте усно

286. Провідміняйте слово: а) *функція*; б) *аргумент*; в) *графік*.

287. Задайте формулою функцію, яка виражає відповідність між числами та: а) їхніми кубами; б) протилежними до них числами; в) оберненими до них числами.

288. Яким є графік функції, заданої формулою:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^2$; в) $y = 3$;

г) $y = \frac{3}{x}$; ґ) $y = \frac{x}{3}$; д) $y = \sqrt{x}$?

289. Чи правильно, що:

а) графік функції $y = \frac{2}{3}x - 5$ є також графіком рівняння $2x - 3y = 15$;

www.4book.org

б) графік функції $y=\sqrt{x}$ є також графіком рівняння $y^2=x$? Чому?

290. Графік якої з функцій проходить через початок координат: а) $y=2(x-3)$; б) $y=2x^2$; в) $y=x(x-2)$?

291. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=3x-2$; б) $y=4-x^2$; в) $y=-2{,}5$;

г) $y=\frac{5}{x(x-3)}$; ґ) $y=\sqrt{2x-4}$; д) $y=\frac{1}{x}\sqrt{5-2x}$.

Рівень А

292. Функцію задано формулою $y=\frac{1}{2}x^2$ на області визначення $D=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$. Задайте її таблично і графічно.

293. Побудуйте графік функції $y=\frac{1}{2}x^2$ на проміжку $[-4;4]$. Знайдіть її область значень.

294. Функцію $y=\frac{1}{2}x^2$ задано на множині $\boldsymbol{R}$. Знайдіть її область значень. Чи належить графіку цієї функції точка $A\,(-100;5000)$?

295. Функцію задано у вигляді таблиці:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Задайте її формулою. Вкажіть її область визначення і область значень.

296. Функцію задано формулою $f(x)=x^2+10$. Обчисліть: $f(2)$, $3f(2)$, $2f(3)$, $0{,}5f(10)$.

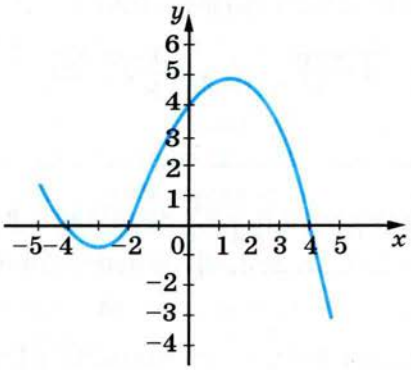
297. Функцію задано формулою $f(x)=x^3-5$. Знайдіть: $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(7)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$.

www.4book.org

298. Функцію задано формулою $f(x) = x^2 - x$. Обчисліть:
а) $f(-2) + f(-1)$; б) $f(0) + f(1)$; в) $f(2) - f(30)$.

299. $f(x) = x^2 - x + 1$. Знайдіть:
а) $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$; б) $f(10) - f(-9) + f(8) - f(-7)$.

300. На малюнку 55 зображено графік функції $y = f(x)$.



Мал. 55

Знайдіть:
а) область визначення і область значень даної функції;
б) $f(-5)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(5)$;
в) для яких значень аргументу $f(x) = 4$, $f(x) = 0$;
г) для яких x значення $f(x)$ найбільше, найменше.

Знайдіть область визначення функції (**301—302**).

301. а) $y = 3x - 2$; б) $y = \frac{3}{x-2}$; в) $y = \frac{10}{x^2+1}$;
г) $y = \frac{1}{(x-3)(x-4)}$; ґ) $y = \sqrt{x^2+1}$; д) $y = \sqrt{x+5}$.

302. а) $y = 5x - 1$; б) $y = \sqrt{x+1}$; в) $y = \sqrt{4-x}$;
г) $y = \frac{2x}{5-x}$; ґ) $y = \frac{3}{(x-4)(x+1)}$; д) $y = \frac{x-1}{1+x}$.

303. Побудуйте графік функції:
а) $y = 3x - 2$; б) $y = 0{,}5x - 1$; в) $y = -3x$;
г) $y = 7 - 2x$; ґ) $y = 5$; д) $y = 3 - x$.

304. Побудуйте графік функції, заданої формулою:
а) $f(x) = 2 - 3x$; б) $f(x) = -1$;
в) $f(x) = 3 - 2x$; г) $f(x) = 0{,}5x$.

www.4book.org

305. Знайдіть область значень функції:
а) $f(x)=7$; б) $f(x)=2x$; в) $y=x^2$.

306. Чи належить графіку функції $y=\sqrt{25-x^2}$ точка $A(3;4)$? Точка $B(-4;3)$?

307. Чи проходить графік функції $y=x(x-3)$ через точки $A(2;-2)$; $B(-1;4)$; $C(1{,}5;-2{,}25)$?

308. Яка з точок $A(-2;-6)$; $B(1{,}5;8)$; $C(-3;4)$; $D(-2;-6)$; $E(3;4)$ належить графіку функції:

а) $y=-10x-26$; б) $y=\frac{12}{x}$; в) $y=\sqrt{x^2+7}$?

309. В яких точках графік функції:
а) $y=2{,}5x$; б) $y=3-2x$; в) $y=2(x-1)$ перетинає вісь x і вісь y?

310. Температуру за шкалою Цельсія, Фаренгейта і Кельвіна позначимо відповідно t_C, t_F, t_K. Формули перерахунку мають вигляд: $t_F=\frac{9}{5}(t_C+32)$, $t_K=t_C+273$. Для довільних 10 значень температури за Цельсієм знайдіть відповідні значення температури за Фаренгейтом і Кельвіном. Дані занесіть до таблиці. Зобразіть графічно одержані залежності.

Рівень Б

311. Функцію задано формулою $f(x)=x^2$. Чи правильно, що для кожного числа a виконується рівність $f(-a)=f(a)$?

312. Функцію задано формулою $f(x)=x^3$. Чи для кожного значення її аргументу x правильна рівність $f(-x)=-f(x)$?

313. Знайдіть $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, якщо функцію задано формулою:
а) $f(x)=2x^2+3$; б) $f(x)=3x^3-2$;
в) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; г) $f(x)=\sqrt{x^2+8x+15}$.

314. Функцію задано формулою $y=\frac{6x}{1+x}$ на множині натуральних чисел першого десятка. Задайте її у вигляді таблиці.

www.4book.org

315. Функцію задано формулою $y = 2\sqrt{x+5}$ на області визначення $D = \{-4; -2{,}75; -1; 1{,}25; 4; 11\}$. Задайте її у вигляді таблиці і графіка.

316. Не будуючи графіка рівняння $9x - 2y = 14$, знайдіть його точку, ордината якої дорівнює абсцисі.

317. Не будуючи графіка функції $y = x^2 - 2$, знайдіть його точку, абсциса та ордината якої — протилежні числа.

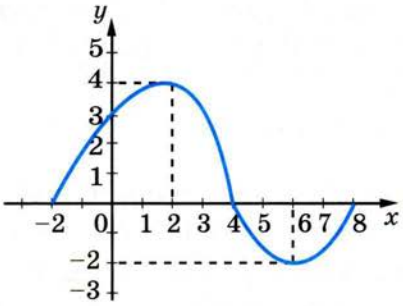
318. Кожному натуральному числу відповідає протилежне йому число. Чи є така відповідність функцією? Якщо так, то задайте її формулою та графіком.

319. Кожному цілому числу відповідає рівне йому число. Чи є така відповідність функцією? Якщо так, то що є її графіком?

320. Функцію $y = f(x)$ задано графіком (мал. 56). Для яких значень аргументу:

а) $f(x) = 0$, $f(x) \le 0$; б) $f(x) = -2$, $f(x) > -2$, $f(x) \le -2$;

в) $f(x) = 3$, $f(x) \ge 3$, $f(x) < 3$?



Мал. 56

321. В яких точках перетинає вісь x і вісь y графік функції:

а) $y = \frac{1}{2}x + 3$; б) $y = x - \frac{4}{7}$; в) $y = \frac{2}{5}x + \frac{5}{2}$;

г) $y = x^2 - 4$; ґ) $y = x^2 - 2x$; д) $y = 6 - 5x - x^2$?

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій (322—324).

322. $y = x^2$, $y = x^2 + 3$ і $y = x^2 - 2$.

323. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$ і $y = \sqrt{x} - 3$.

www.4book.org

324. $y=|x|, y=|x|+1$ і $y=|x|-2$.

325. При якому значенні m графік функції $y=m-2x$ проходить через точку $A(2;3)$? Чи проходить цей самий графік через точку $B(3;1)$?

326. При якому значенні m графік функції $y=x^2+m$ проходить через точку $K(-2;5)$?

327. Графік функції $y=\sqrt{x+m}$ проходить через точку $P(5;5)$. Чому дорівнює m?

328. Побудуйте графік функції:

а) $y=\frac{4}{x}$; б) $y=-\frac{3}{x}$; в) $y=\frac{12}{x}$;

г) $y=2x^2$; ґ) $y=0{,}5x^2$; д) $y=x^2-1$.

329*. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-5}}$; б) $y=\frac{-\sqrt{x^3+5x}}{4}$;

в) $y=\frac{1}{x^3+5x^2}$; г) $y=\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}$;

ґ) $y=\sqrt{x^2-6x+10}$; д) $y=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$.

330*. ***Задача А. М. Колмогорова.*** Яку додаткову умову потрібно накласти на значення x у формулі $f(x)=1$, щоб одержати визначення функції $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2$?

331*. Побудуйте графік функції:

а) $y=\begin{cases}4, & \text{якщо } x<-2,\\ x^2, & \text{якщо } -2\le x\le 1,\\ 2-x, & \text{якщо } x>1;\end{cases}$

б) $y=\begin{cases}x+1, & \text{якщо } x\le 1,\\ 3-x, & \text{якщо } 1<x<4,\\ -1, & \text{якщо } x\ge 4;\end{cases}$

www.4book.org

в) $y = |2x - 3|$; г) $y = 2|x| - 3$; ґ) $y = |x + 1| - |x|$;

д) $y = \frac{|x|}{x}$; е) $y = \frac{6}{|x|}$; є) $y = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$.

332*. Функція попиту на товар: $Q_D = 9 - p$. Функція пропозиції товару: $Q_S = 2p - 6$. Тут Q_D — обсяг попиту і Q_S — обсяг пропозиції (млн штук за рік), p — ціна (грошові одиниці). Визначте рівноважну ціну (попит дорівнює пропозиції) і обсяг продажу. Як вплине на значення рівноважної ціни товару зменшення попиту на 20 %?

Вправи для повторення

333. Порівняйте значення виразів:

а) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{20}$; б) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{44}$; в) $\sqrt{13}$ і $2\sqrt{3}$;

г) $3\sqrt{7}$ і 8; ґ) $4\sqrt{5}$ і 9; д) $5\sqrt{2}$ і 7.

334. У яких межах лежить значення виразу $3x - 2$, якщо:

а) $1 < x < 4$; б) $-5 < x < 0$; в) $-10 \le x \le 10$?

335. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{2x+3}{3x+1} > 0$; б) $\frac{x-6}{1-x} > -1$; в) $\frac{9-2x}{x} \ge 1$.

§9. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

Для того щоб досліджувати процеси і явища навколишнього світу, слід спочатку навчитися встановлювати характерні особливості відповідних математичних моделей. Передусім це стосується функцій.

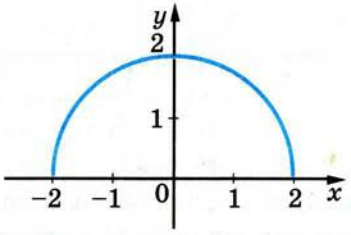
Описуючи властивості функції, зазвичай починають з її області визначення — вказують усі значення, яких може набувати аргумент.

Якщо функцію задано формулою, а про її область визначення нічого не сказано, то розуміють, що вона така сама, як і область допустимих значень змінної, яка входить до цієї формули.

www.4book.org

Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції — проекція її графіка на вісь x; область значень функції — проекція її графіка на вісь y (мал. 57). Наприклад, область визначення функції $y = x^2$ — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, область її значень — проміжок $[0; \infty)$. Область визначення і область значень функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ — проміжки $[-2; 2]$ і $[0; 2]$ (мал. 58).

Мал. 57



Мал. 58

Наступний крок у дослідженні функції полягає в тому, щоб з'ясувати, чи не є дана функція парною або непарною.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

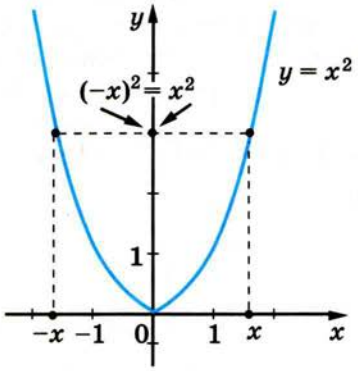
Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Існують функції ні парні, ні непарні. Це такі функції, в яких або область визначення несиметрична відносно нуля, або для яких не виконується жодна з умов $f(-x) = \pm f(x)$.

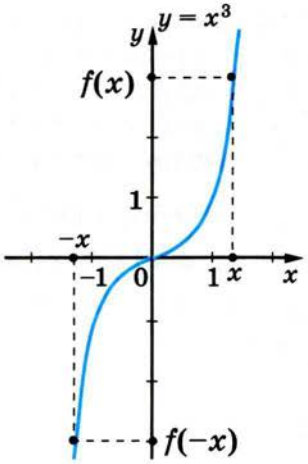
Якщо функцію задано графічно, то дослідити її на парність або непарність досить просто, оскільки **графік парної функції симетричний відносно осі y, а непарної — відносно початку координат.**

Приклади. Функції $y = x^2$ з областю визначення $\boldsymbol{R}$ і $y = x^2$ з областю визначення $[-5; 5]$ — парні (мал. 59). Функції $y = x^3$ з областю визначення $\boldsymbol{R}$ і $y = x^3$ з областю визначення $[-27; 27]$ —

www.4book.org

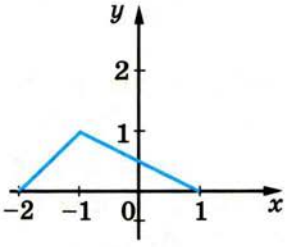


Мал. 59

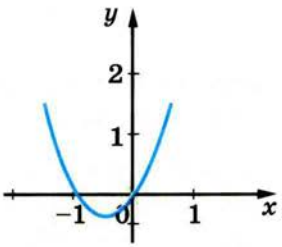


Мал. 60

непарні (мал. 60). А, наприклад, кожна функція з областю визначення $[-2; 1]$ і кожна функція $y = x^2 + x$ з будь-якою областю визначення — ні парна, ні непарна (мал. 61 *а*, *б*).



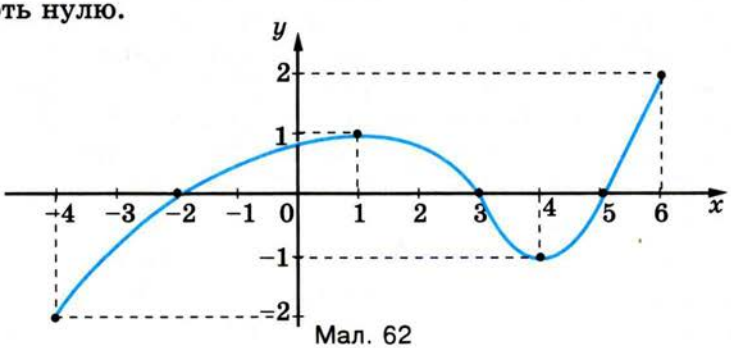
а



б

Мал. 61

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 62. При $x = -2$, $x = 3$ і $x = 5$ значення функції дорівнюють нулю.



Мал. 62

www.4book.org

Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають *нулями функції*.

Нулем функції $y = x - 6$ є лише одне значення x: тільки при $x = 6$ значення цієї функції дорівнює нулю.

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є нулями функції.

Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 62, має додатні, нульові й від'ємні значення. На проміжку $(-2; 3)$ її значення додатні. Це проміжок сталого знака: усі значення функції на цьому проміжку мають сталий знак «+». І проміжок $(5; 6)$ є також проміжком сталого знака «плюс». Проміжки $(-4; -2)$ і $(3; 5)$ теж є проміжками сталого знака: усі значення розглядуваної функції $y = f(x)$ на цих проміжках від'ємні.

Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають *проміжками знакосталості*. На проміжку знакосталості графік функції не перетинає вісь абсцис.

Зверніть увагу на графік функції на мал. 62. На проміжку $[-4; 1]$ графік «йде вгору»: при збільшенні значень x із цього проміжку відповідні значення функції збільшуються.

Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Кажуть, що на проміжку $[-4; 1]$ функція $y = f(x)$ *зростає* (або є *зростаючою*). Такою вона є й на проміжку $[4; 6]$.

На проміжку $[1; 4]$ графік функції $y = f(x)$ «йде вниз»: при збільшенні значень аргументу відповідні значення функції зменшуються. Кажуть, що на цьому проміжку функція $y = f(x)$ *спадає* (або є *спадною*).

Функцію називають *зростаючою* на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

Функцію називають *спадною* на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

Існують функції, які зростають (або спадають) на всій області визначення. Наприклад, функції $y = 2x$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ — зростаючі, а функції $y = -2x$, $y = -\sqrt{x}$ — спадні.

www.4book.org

Якщо пропонують *дослідити функцію*, це означає виявити її найважливіші властивості:

1) вказати область визначення;
2) вказати область значень;
3) з'ясувати, чи не є дана функція парною або непарною;
4) знайти точку перетину графіка функції з віссю y;
5) знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
6) визначити проміжки зростання чи спадання;
7) побудувати графік функції.

Характеризуючи властивості функції, часто відмічають, в яких точках вона має найбільше значення, в яких — найменше. Функція, графік якої зображено на малюнку 62, найбільше значення має в точці $x = 6$; воно дорівнює 2. Найменшого значення -2 ця функція досягає в точці $x = -4$.

Значення функції в точці $x = 1$ є найбільшим порівняно з усіма значеннями в найближчих до неї точках. Кажуть, що дана функція в точці $x = 1$ досягає *максимуму*, а в точці $x = 4$ — *мінімуму*.

Графіки функцій $y = 0{,}5x - 2$, $y = x^2$, $y = x^3$, заданих на всій області визначення $\boldsymbol{R}$, — суцільні, неперервні лінії. А графік функції $y = \frac{1}{x}$ складається з двох роз'єднаних віток. При $x = 0$ значення цієї функції не існує. Кажуть, що в точці $x = 0$ вона має *розрив*.

Перевірте себе

1. Що таке область визначення і область значень функції? Як їх знайти за допомогою графіка?
2. Яку функцію називають парною? А непарною?
3. Яким є графік парної функції? А непарної?
4. Що називають нулями функції?
5. Які функції називають зростаючими? А спадними?
6. Чи може функція на одному проміжку спадати, а на іншому — зростати?

Виконаємо разом!

1. Знайдіть нулі функції $y = x^2 - x - 6$.

✔ **Розв'язання.** Розв'яжемо рівняння $x^2 - x - 6 = 0$.
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$;

www.4book.org

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3.$$

Відповідь. Нулями даної функції є числа -2 і 3.

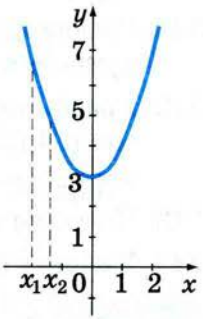
2. Доведіть, що функція $y = x^2 + 3$ на проміжку $(-\infty; 0)$ спадає.

✔ **Розв'язання.** Нехай x_1 і x_2 — два довільних значення аргументу x даної функції з проміжку $(-\infty; 0)$, причому $x_1 < x_2$.

Відповідні їм значення функції: $y_1 = x_1^2 + 3$, $y_2 = x_2^2 + 3$.

$$y_2 - y_1 = (x_2^2 + 3) - (x_1^2 + 3) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Значення x_1 і x_2 з проміжку $(-\infty; 0)$ від'ємні. Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_2 - x_1$ — число додатне, $x_2 + x_1$ — число від'ємне, їх добуток також від'ємний. Тому різниця $y_2 - y_1$ від'ємна, $y_2 < y_1$. Отже, більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції; дана функція на цьому проміжку спадна (мал. 63).



Мал. 63

3. Парною чи непарною є функція:

а) $y = x^2 - 7$; б) $y = 5x - 1$?

✔ **Розв'язання.** а) Область визначення $D(y)$ функції $y = x^2 - 7$ — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ є симетричною відносно 0 і $f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x)$. Отже, функція $y = x^2 - 7$ парна.

б) $D(y) = \boldsymbol{R}$ — симетрична відносно 0.

$f(-x) = 5(-x) - 1 = -5x - 1 = -(5x + 1)$. Ця функція не дорівнює ні $f(x)$, ні $-f(-x)$.

Отже, функція $y = 5x - 1$ ні парна, ні непарна.

Відповідь. а) парна; б) ні парна, ні непарна.

Виконайте усно

336. Знайдіть область визначення і область значень функції:

а) $y = 2x^2$; б) $y = x - 2$; в) $y = x^3$; г) $y = \sqrt{x}$;

ґ) $y = \frac{2}{x}$; д) $y = \frac{2x}{3} + 5$; е) $y = \frac{2x}{x}$; є) $y = \frac{2}{x^2}$.

www.4book.org

337. Області значень функцій $y = x^2$ і $y = |x|$ однакові. Наведіть приклади інших функцій з такими самими областями значень.

338. Чи однакові області значень функцій:
а) $y = |x + 3|$ і $y = |x| + 3$; б) $y = x^2 + 3$ і $y = (x + 3)^2$?

339. Які з функцій, розглянутих у задачі 336, парні, які — непарні? Наведіть інші приклади парних і непарних функцій.

340. Чи має нулі функція:
а) $y = x^2 + 1$; б) $y = x^4 - 4$; в) $y = -x^4 - 9$; г) $y = |x|$?

341. Графік функції перетинає вісь абсцис n разів. Скільки нулів має ця функція?

342. Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь абсцис в одній точці A (12; 0). Скільки нулів має ця функція? Скільки коренів має рівняння $f(x) = 0$?

343. Чи може парна функція спадати на проміжку $(-2; 2)$?

344. Чи існує функція водночас і парна, і непарна?

Рівень А

345. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = -7x + 3$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = \sqrt{x+4}$;

г) $y = \frac{3}{x+9}$; ґ) $y = \frac{-1}{x^2+4}$; д) $y = \frac{x}{1-x}$.

346. Знайдіть область значень функції:

а) $y = 0{,}01x$; б) $y = x^2$; в) $y = \sqrt{1-x^2}$;

г) $y = x^3$; ґ) $y = 2x^{-1}$; д) $y = \sqrt{1+x^2}$.

347. Знайдіть область визначення і область значень функції:

а) $y = x^2 - 1$; б) $y = \frac{2-x}{3}$; в) $y = \frac{1}{x} + 2$;

г) $y = 1 - \sqrt{x}$; ґ) $y = |x|$; д) $y = |x| + 2$.

348. Накресліть графік будь-якої функції $y = f(x)$, для якої:
а) $D = [-6; 2]$, $E = [-2; 2]$;
б) $D = [-1; 3) \cup (3; 5)$, $E = [-3; 1) \cup (1; 3]$.

www.4book.org

349. Функцію $y = 1{,}5x - 2$ задано на проміжку $[-2; 5]$. Знайдіть її область визначення і область значень.

350. Побудуйте графік функції $y = 0{,}5x^2$, заданої на проміжку $[1; 4]$, і спроектуйте його на осі координат. Яка область значень даної функції?

351. Покажіть, що функція $f(x) = x^4 + 3$ парна, а $f(x) = x^3 + x$ — непарна.

352. Чи один і той самий зміст мають речення «функція $y = f(x)$ не є парною» і «функція $y = f(x)$ — непарна»?

353. Покажіть, що функція $f(x) = x^2 + x$ ні парна, ні непарна.

354. Доведіть, що дана функція парна:

а) $y = x^4 + 3$; б) $y = 1 : x^2$; в) $y = x^2 + x^4$.

355. Доведіть, що дана функція непарна:

а) $y = 2x^3$; б) $y = -x^5$; в) $y = x^3 + x$.

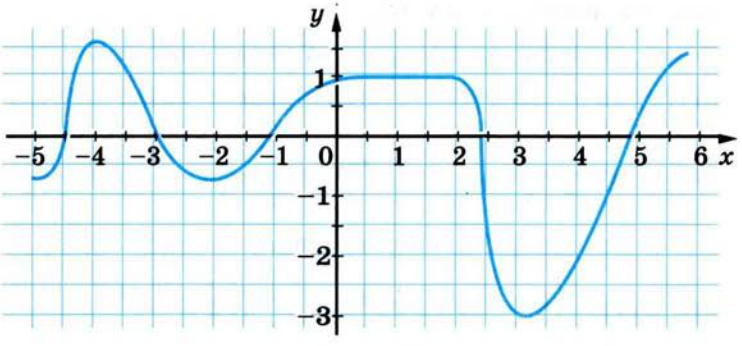
356. Покажіть, що дана функція ні парна, ні непарна:

а) $y = x^3 + 1$; б) $y = x\sqrt{x}$; в) $y = (x-1)^2$.

357. Знайдіть нулі функції:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = x^2 + 5x + 6$; в) $y = \sqrt{x} - 2$.

358. На мал. 64 зображено графік функції $y = f(x)$.



Мал. 64

Знайдіть: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) найбільше і найменше значення функції; ґ) проміжки, на яких функція зростає; д) проміжки, на яких функція спадає.

www.4book.org

359. Скільки нулів має функція:
а) $y = x + x^3$; б) $y = 6$; в) $y = 1 - |x|$; г) $y = -7x$?

360. Установіть проміжки знакосталості функції:
а) $y = x + 3$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = 3\sqrt{x}$.

361. Які з функцій зростаючі, а які — спадні:
а) $y = 2x$; б) $y = -x - 2$; в) $y = x^3$; г) $y = \sqrt{x}$;
ґ) $y = \frac{2x}{5}$; д) $y = \frac{5x}{2}$; е) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$; є) $y = \frac{-x}{5x}$?

362. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:
а) $y = 0{,}5x - 1$; б) $y = 2x^2$; в) $y = \sqrt{x+1}$; г) $y = x^{-1}$.

Рівень Б

363. Знайдіть область значень функції $y = 4 - x^2$, заданої на проміжку:
а) $[-3; 3]$; б) $[1; 7)$; в) $[0; \infty)$.

364. Знайдіть область визначення і область значень функції:
а) $y = 4 + x^2$; б) $y = 3 + \sqrt{x+2}$; в) $y = 1 : (1 + x^2)$.

365. Знайдіть область визначення функції $y = x^3 - 8$, якщо її область значень $[-35; 0]$.

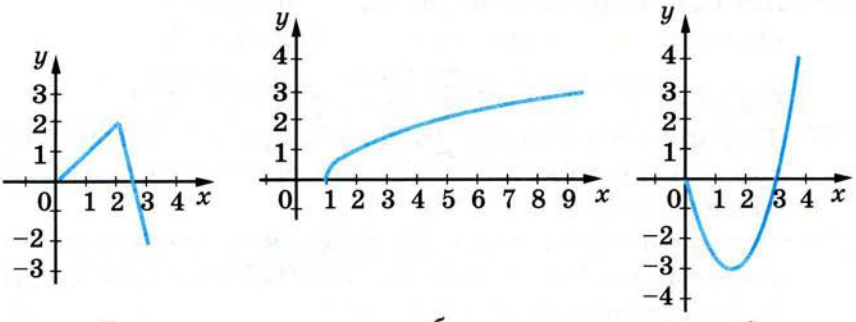
366. Доведіть, що функція $y = f(x)$ парна, якщо:
а) $f(x) = x^4 + 3x^2$; б) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$;
в) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$; г) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

367. Доведіть, що функція y непарна, якщо:
а) $y = x(1 - x^2)$; б) $y = 7x^3 + x$; в) $y = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$.

368. Які з функцій парні, які — непарні, які — ні парні, ні непарні:
а) $y = x^3 - 1$; б) $y = -x^2 + 3$; в) $y = x(1 - x)$;
г) $y = \frac{5}{x^2}$; ґ) $y = \sqrt{x}$; д) $y = \frac{3x^2+1}{x}$?

www.4book.org

369. Перемалюйте графіки з мал. 65 у зошит. Кожний з графіків добудуйте так, щоб одержана функція була: 1) парною; 2) непарною; 3) ні парною, ні непарною.
Для кожного з виконаних пунктів 1) — 3) установіть нулі функції, її проміжки знакосталості, зростання і спадання. Які висновки можна зробити?



Мал. 65

370. Не будуючи графіка функції, встановіть, при яких значеннях x вона набуває додатних значень, якщо:

а) $y = -2x + 5$; б) $y = 0{,}5x - 3$; в) $y = \sqrt{x+4}$;

г) $y = 3x - x^2 - 2$; ґ) $y = 3 - \frac{1}{x}$; д) $y = \frac{x}{x+1}$.

371. Не будуючи графіка функції, встановіть, при яких значеннях x вона набуває недодатних значень, якщо:

а) $y = 5x - 1$; б) $y = \sqrt{x} - 4$; в) $y = (x+1)(1-x)$;

г) $y = (x+2)^3$; ґ) $y = \frac{6}{x} + 2$; д) $y = \frac{1}{x-1} - 1$.

372. Доведіть, що функція:

а) $y = 3x + 5$ зростає на $\boldsymbol{R}$;

б) $y = 1 - \sqrt{x}$ спадає на $[0; \infty)$;

в) $y = -x^3$ спадає на $\boldsymbol{R}$;

г) $y = 2x^2$ зростає на $[0; \infty)$.

373. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = x - 5$; б) $y = 2x^3$; в) $y = \sqrt{3+x}$;

www.4book.org

г) $y = 13 - \sqrt{x}$; ґ) $y = 8 - x^3$; д) $y = x^3 + x$?

374. Укажіть проміжки спадання функції:
а) $y = x^4 + 3$; б) $y = |x - 3|$; в) $y = |x| - x$.

375. На яких проміжках дана функція зростає:
а) $y = x \cdot |x|$; б) $y = \sqrt{4 + x^2}$; в) $y = \sqrt{4 - x^2}$?

376. Які з даних функцій парні, які — непарні:
а) $y = x^4$; б) $y = x^5$; в) $y = 1 - x^4$;
г) $y = 1 : x^3$; ґ) $y = \sqrt{5 + x^2}$; д) $y = \sqrt{1 - x^2}$?

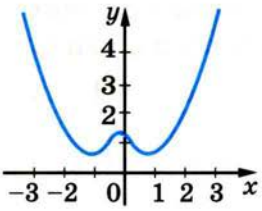
377. Функція $y = f(x)$ парна. На проміжку $(-\infty; -2)$ вона зростає, а на проміжку $(-2; 0)$ спадає. Якою вона є на решті області визначення?

378. Функція $y = f(x)$ непарна. На проміжку $(-\infty; -3)$ вона спадає, а на проміжку $(-3; 0)$ зростає. Якою вона є на решті області визначення?

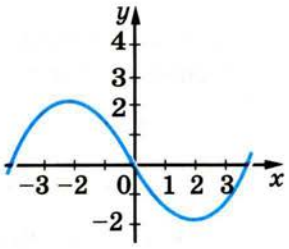
379. Намалюйте схематично графік парної функції, яка на проміжку $[-4; -2]$ зростає від 1 до 5, а на проміжку $[-2; 0]$ спадає від 5 до -1.

380. Намалюйте схематично графік непарної функції, яка на проміжку $[-4; -1]$ спадає від 3 до -3, а на проміжку $[-1; 0]$ зростає від -3 до 0.

381. Опишіть властивості функцій, графіки яких зображено на малюнках 66—68.



Мал. 66



Мал. 67

Мал. 68

www.4book.org

Побудуйте графік функції та опишіть її властивості (382—385).

382. а) $y=|x|$; б) $y=|x-3|$; в) $y=|x|-3$.

383. а) $y=\sqrt{x^2}$; б) $y=\sqrt{(x-2)^2}$; в) $y=\sqrt{(4-x)^2}$.

384. а) $y=\dfrac{x-2}{x^2-2x}$; б) $y=\dfrac{x^2-4}{x^3-4x}$.

385. а) $y=6x^{-1}$; б) $y=x^{-2}$.

386. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
а) $y=x^2-6$; б) $y=5-x^2$; в) $y=-(x^2+1)$;
г) $y=\dfrac{x^2}{x}$; ґ) $y=\sqrt{x^2}$; д) $y=-\sqrt{9-x^2}$.

Вправи для повторення

Розв'яжіть рівняння (387—389).

387. а) $-3x\cdot x^2=3$; б) $4x\cdot x^3+2=0$; в) $2x^2\cdot x^5=0$.

388. а) $2x^2+3x=9$; б) $9x^2-12x+4=0$; в) $5x^2+4x=1$.

389. а) $(x+3)\sqrt{x+5}=0$; б) $(x+5)\sqrt{x+3}=0$.

390. Запишіть у стандартному вигляді число:
а) 7 800; б) 140 000; в) 84,17; г) 486 000 000;
ґ) 0,085; д) 0,00045; е) 0,58954; є) 0,0000008.

§10. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Складемо таблиці значень функцій а) $y=x^2$ і б) $y=-x^2$, заданих на множині $D=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

а)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

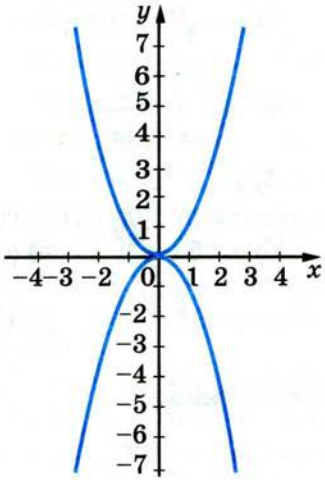
б)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

Взагалі значення функції $y=-x^2$ протилежні відповідним значенням функції $y=x^2$. Тому графіки цих функцій симет-

www.4book.org

ричні відносно осі x (мал. 69). Таку саму властивість мають будь-які функції $y = f(x)$ і $y = -f(x)$.



Мал. 69

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.

Порівняємо ще функції $y = 2f(x)$ і $y = f(x)$. Щоб одержати яке-небудь значення першої з них, треба відповідне значення другої помножити на 2. Тому графік першої з цих функцій можна одержати, розтягнувши вдвічі від осі x графік другої функції. А щоб побудувати графік функції $y = \frac{1}{3} f(x)$, слід втричі стиснути до осі x графік функції $y = f(x)$.

Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в $\frac{1}{k}$ разів до осі x, якщо $0 < k < 1$.

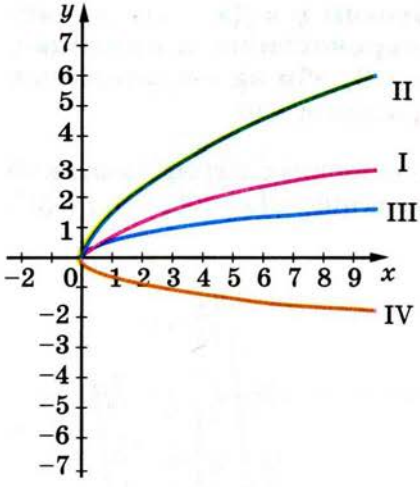
Приклад. Побудуйте графіки функцій: $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0{,}5\sqrt{x}$, $y = -0{,}5\sqrt{x}$.

✔ Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. На

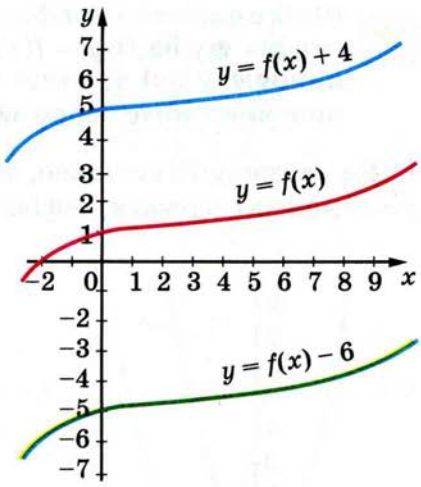
www.4book.org

малюнку 70 його зображає крива I. Збільшивши вдвічі ординату кожної точки цього графіка, одержимо множину точок, розміщених на кривій II. Це графік функції $y=2\sqrt{x}$. Якщо ординату кожної точки графіка I зменшити вдвічі й нанести відповідні точки на координатну площину, то одержимо криву III — графік функції $y=0{,}5\sqrt{x}$. Крива IV симетрична відносно осі x кривій III, — графік функції $y=-0{,}5\sqrt{x}$.

Кожне значення функції $y=f(x)+4$ на 4 більше, ніж відповідне значення функції $y=f(x)$. Тому графік функції $y=f(x)+4$ можна одержати, перенісши графік функції $y=f(x)$ на 4 одиниці в напрямку осі y (мал. 71). Щоб одержати графік функції $y=f(x)-6$, треба графік функції $y=f(x)$ перенести на 6 одиниць у протилежному напрямку.



Мал. 70



Мал. 71

Щоб одержати графік функції $y=f(x)+n$, треба графік функції $y=f(x)$ перенести на n одиниць у напрямку осі y, якщо $n>0$, або на $-n$ одиниць у протилежному напрямку, якщо $n<0$.

А як слід перетворити графік функції $y=f(x)$, щоб одержати графік функції $y=f(x-m)$? Обчислимо для тих самих значень x значення функцій а) $y=x^2$ і б) $y=(x-2)^2$.

www.4book.org

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

б)

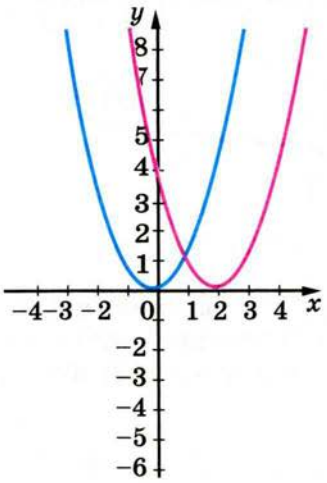
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	36	25	16	9	4	1	0	1	4

Як бачимо, при кожному значенні $x = c$ значення функції $y = (x - 2)^2$ таке, як значення функції $y = x^2$, коли $x = c - 2$.

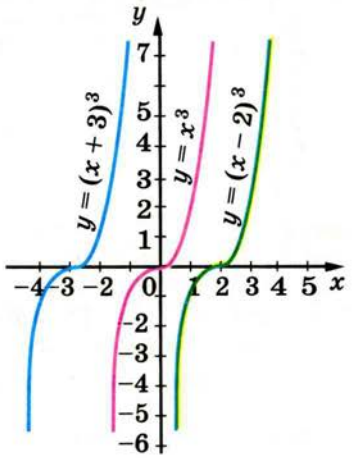
Тому графік функції $y = (x - 2)^2$ можна одержати, перенісши графік функції $y = x^2$ на 2 одиниці в напрямку осі x (мал. 72). Графік функції $y = (x + 3)^2$ можна одержати перенесенням графіка функції $y = x^2$ на 3 одиниці в напрямку, протилежному напрямку осі x.

Щоб одержати графік функції $y = f(x - m)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць у напрямку осі x, якщо $m > 0$, або на $-m$ одиниць у протилежному напрямку, якщо $m < 0$.

На малюнку 73 показано, як, наприклад, з графіка функції $y = x^3$ можна одержати графіки функцій $y = (x - 2)^3$ і $y = (x + 3)^3$.



Мал. 72



Мал. 73

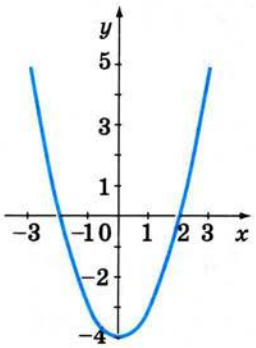
www.4book.org

Як, маючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = |f(x)|$?

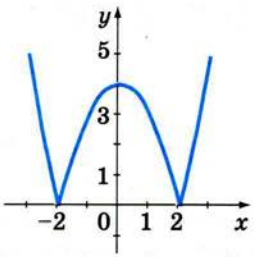
За означенням модуля,

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Тому значення функції $y = |f(x)|$ і $y = f(x)$ однакові за умови, що $f(x) \geq 0$ і протилежні, якщо $f(x) < 0$. Отже, щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, досить ті частини графіка функції $y = f(x)$, які лежать нижче від осі x, замінити симетричними їм відносно цієї осі, а все інше залишити без змін. Наприклад, маючи графік функції $y = x^2 - 4$ (мал. 74), можна одразу побудувати графік функції $y = |x^2 - 4|$ (мал. 75).



Мал. 74



Мал. 75

Дослідіть, як одержати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Перевірте себе

1. Що таке графік функції?
2. Як, маючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + n$;

в) $y = k \cdot f(x)$; г) $y = f(x - m)$;

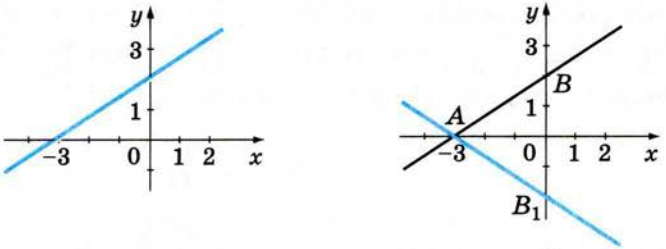
ґ) $y = |f(x)|$; д) $y = f(|x|)$?

www.4book.org

Виконаємо разом!

1. На малюнку 76, *а* зображено графік лінійної функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції $y = -f(x)$.

✔ Розв'язання. Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі абсцис. Точка A $(-3; 0)$ — спільна для обох графіків, а симетричною точці B $(0; 2)$ відносно осі x є точка B_1 $(0; -2)$. Пряма AB_1 — графік функції $y = -f(x)$.



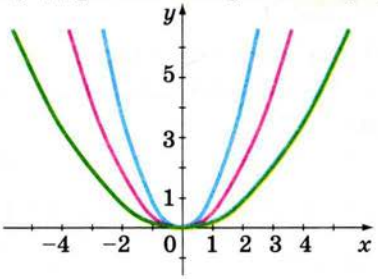
а *б*

Мал. 76

2. Побудуйте графік функції: $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ і $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.

✔ Розв'язання. Графік функції $y = x^2$ — звичайна парабола (мал. 77). Щоб одержати графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$, треба ординату кожної точки першого графіка зменшити вдвічі; на малюнку ця парабола синього кольору.

$y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$. Зменшивши ординату кожної точки звичайної параболи у 4 рази, одержимо потрібний графік — лінію червоного кольору.



Мал. 77

www.4book.org

Виконайте усно

391. Чим різняться графіки функцій:
а) $y = x^2$, $y = (-x)^2$ і $y = -x^2$;
б) $y = 4x^2$, $y = -(2x)^2$ і $y = (-2x)^2$;
в) $y = \sqrt{x^2}$, $y = \sqrt{(-x)^2}$ і $y = |x|$?

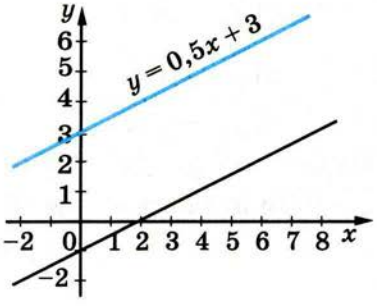
392. Як взаємно розташовані графіки функцій:
а) $y = 2x$ і $y = -2x$; б) $y = x^3$ і $y = -x^3$;
в) $y = \frac{1}{3}x$ і $y = -\frac{1}{3}x$; г) $y = \frac{1}{x}$ і $y = -\frac{1}{x}$?

393. Функція $y = f(x)$ зростає на всій області визначення. Зростаючою чи спадною є функція:
а) $y = 2f(x)$; б) $y = 0{,}5f(x)$; в) $y = -f(x)$?

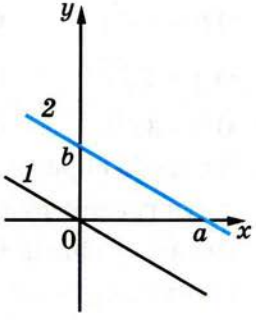
394. Чи правильно, що графіки функцій $y = 0{,}3x$, $y = 0{,}3x + 2$ і $y = 0{,}3x - 5$ — паралельні прямі?

395. На малюнку 78 зображено дві паралельні прямі — графіки двох функцій. Одна з цих функцій — $y = 0{,}5x + 3$. Назвіть формулу другої функції.

396. На малюнку 79 пряма *1* — графік функції $y = f(x)$, а паралельна їй пряма 2 перетинає осі координат у точках a і b. Один учень вважає, що пряма 2 — графік функції $y = f(x - a)$, інший — що це є графіком функції $y = f(b + x)$. Хто з них має рацію?



Мал. 78



Мал. 79

www.4book.org

397. Чим різняться графіки функцій:

а) $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 2$; б) $y = x^2 - 2$ і $y = (x - 2)^2$;

в) $y = x^3 + 1$ і $y = (x + 1)^3$; г) $y = (x - 2)^3$ і $y = (x + 2)^3$?

398. Область визначення функції $y = f(x)$ — проміжок $(a; b)$. Якою є область визначення функції:

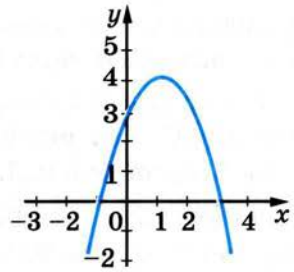
а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + n$; в) $y = |f(x)|$; г) $y = k \cdot f(x)$?

399. Область значень функції $y = f(x)$ — промінь $(c; \infty)$. Якою є область значень функції:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + n$; в) $y = f(x) - m$; г) $y = k \cdot f(x)$?

Рівень А

400. На малюнку 80 зображено графік функції $y = f(x)$. Перемалюйте його в зошит і побудуйте в тій самій системі координат графіки функцій $y = -f(x)$ і $y = 3 \cdot f(x)$.



Мал. 80

Побудуйте графік функції (**401—403**).

401. а) $y = -x^2$; б) $y = -x^3$; в) $y = -|x|$.

402. а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{9x}$; в) $y = \sqrt{16x}$.

403. а) $y = 3x^2$; б) $y = -3x^2$; в) $y = -0{,}5x^2$.

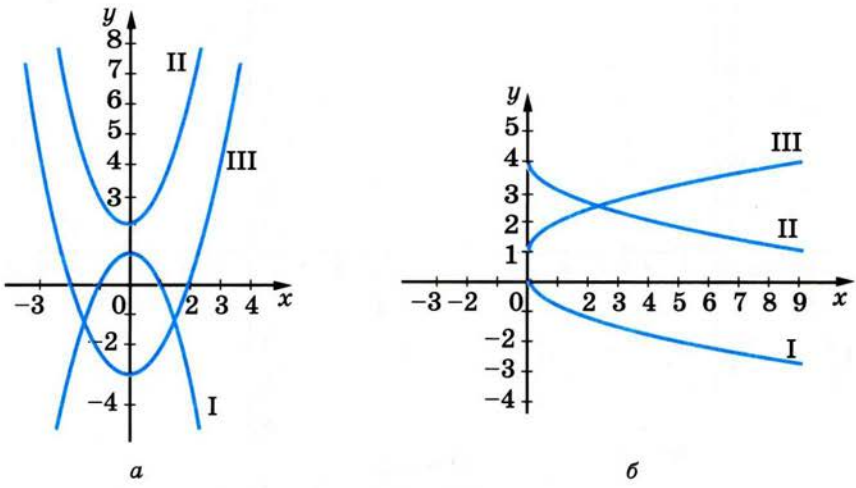
404. Як треба перетворити графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб одержати графік функції $y = -\sqrt{x}$? Чи правильно, що об'єднання графіків функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$ є графіком рівняння $y^2 = x$?

405. Як перетворити графік функції $y = 3x - 4$, щоб одержати графік функції $y = 4 - 3x$? Виконайте побудову.

www.4book.org

406. Побудуйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = x^2 - 4$. Знайдіть їх області значень. При яких значеннях x значення функцій додатні, а при яких — від'ємні? Знайдіть координати перетину графіків з осями координат.

407. Графіки яких функцій зображено на мал. 81, *а*, *б*?



а *б*

Мал. 81

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій (408—409).

408. а) $y = 2x$, $y = 2x + 1$ і $y = 2x - 3$;

б) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$ і $y = -x^2 - 1$.

409. а) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 1$ і $y = \sqrt{x} + 2$;

б) $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ і $y = 2x^2 - 1$.

410. Як треба перетворити графік функції $y = x^2$, щоб одержати графік функції:

а) $y = (x + 3)^2$; б) $y = (x - 3)^2$; в) $y = -(x + 3)^2$?

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій (411—412).

411. а) $y_1 = 2x$, $y_2 = 2(x - 1)$ і $y_3 = 2(x + 3)$;

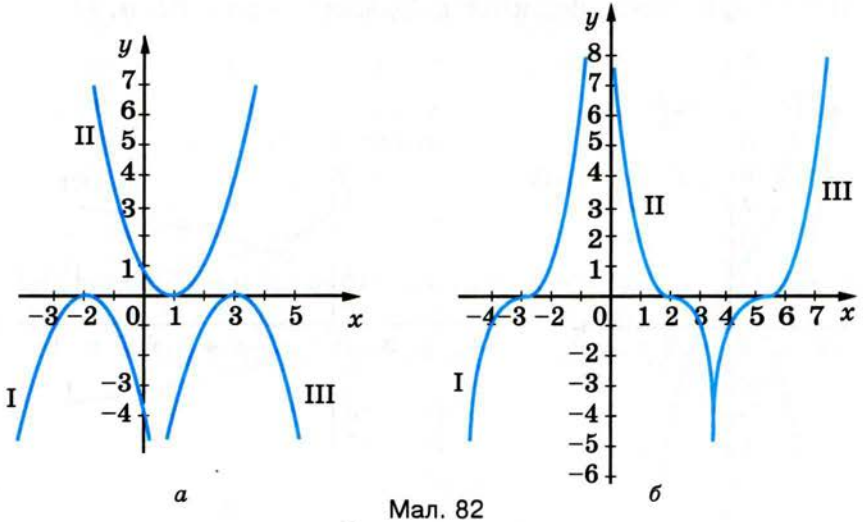
б) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x + 2)^2$ і $y_3 = -(x - 3)^2$.

www.4book.org

412. а) $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = \frac{4}{x-3}$ і $y_3 = \frac{4}{x+1}$;

б) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x-1}$ і $y_3 = \sqrt{x+2}$.

413. Графіки яких функцій зображено на мал. 82, *а*, *б*?



а *б*

Мал. 82

414. Дано параболу $y = x^2$. Напишіть рівняння параболи, яку можна одержати з даної перенесенням:

а) на 2 одиниці праворуч і 3 одиниці вгору;

б) на 4 одиниці ліворуч і 2 одиниці вниз.

415. Побудуйте графік функції $y = (x + 1)^2 - 3$.

Рівень Б

416. Графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі y. Чи симетричний відносно цієї осі графік функції:

а) $y = 2f(x)$; б) $y = -f(x)$; в) $y = -2f(x)$?

Побудуйте відповідні графіки.

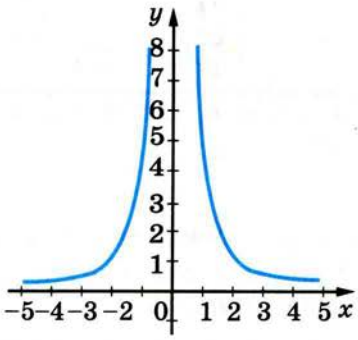
417. Функція $y = f(x)$ на проміжку $(-\infty; a)$ спадає, а на проміжку $(a; \infty)$ — зростає. Якою є на цих проміжках функція: а) $y = 2f(x)$; б) $y = 0{,}5f(x)$; в) $y = -f(x)$?

Побудуйте відповідні графіки.

418. На мал. 83 зображено графік функції $y = 4x^{-2}$. Перемалюйте його в зошит і побудуйте в тій самій системі координат графіки функцій:

www.4book.org

а) $y=\frac{4}{x^2}+2$; б) $y=\frac{4}{x^2}-3$; в) $y=1-\frac{4}{x^2}$.



Мал. 83

419. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y=-\frac{12}{x}$; $y=-\frac{12}{x}+3$; $y=-\frac{12}{x}-1$.

б) $y=2\sqrt{x}$; $y=2\sqrt{x}-3$; $y=2\sqrt{x}+2$.

420. Побудуйте графік функції:

а) $y=-x^2+3$; б) $y=\frac{4}{x}-3$; в) $y=x^3+1$;

г) $y=-\sqrt{x}+1$; ґ) $y=2x^3-1$; д) $y=0{,}5x^2-2$.

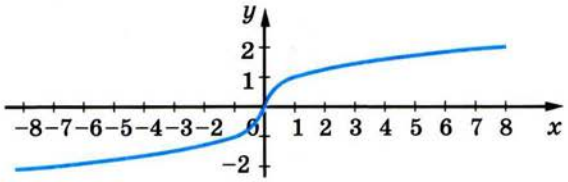
421. Заповніть порожні клітинки таблиці. Якою формулою можна задати функцію $y=f(x)$?

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	5	6	9	14
$-f(x)$						
$3f(x)$						

422. На мал. 84 зображено графік функції $y=\sqrt[3]{x}$. Перемалюйте його в зошит і побудуйте в тій самій системі координат графіки функцій:

www.4book.org

а) $y=\sqrt[3]{x-2}$; б) $y=\sqrt[3]{x+1}$; в) $y=3-\sqrt[3]{x}$.



Мал. 84

423. Побудуйте графік функції:

а) $y=0{,}5(x-1)^3$; б) $y=3\sqrt{x+3}$; в) $y=2(x-2)^2$;

г) $y=\frac{1}{x-3}$; ґ) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$; д) $y=\frac{-3}{x+3}$.

424. Побудуйте графік і дослідіть властивості функції:

а) $y=\frac{12}{x-3}+4$; б) $y=\frac{6}{x+2}-3$; в) $y=\frac{x+2}{x+1}$.

Побудуйте графік функції (**425—428**).

425. а) $y=(x+2)^2+3$; б) $y=-2(x+1)^2+3$;

в) $y=\frac{1}{x-1}+2$; г) $y=5-\frac{6}{x+1}$.

426. а) $y=2\sqrt{x-3}+1$; б) $y=2-\sqrt{x+3}$;

в) $y=-(x+1)^3+2$; г) $y=0{,}5(x-3)^3-3$.

427. а) $y=2|x|-3$; б) $y=\frac{1}{|x|}$; в) $y=\sqrt{|x|}$;

г) $y=-|x|+2$; ґ) $y=(|x|-1)^2$; д) $y=|x|^3+1$.

428. а) $y=|3x+1|$; б) $y=|-x^2+4|$; в) $y=|1-\sqrt{x}|$;

г) $y=\left|\frac{1}{5}x-1\right|$; ґ) $y=\left|\frac{6}{x}-3\right|$; д) $y=|x^2-2|$.

www.4book.org

Вправи для повторення

429. Обчисліть:

а) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+1\frac{2}{15}\right):2\frac{7}{15}$; б) $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{20}\right)\cdot 1\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$;

в) $\left(1-\frac{2}{3}\right):2\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}-1\right)\cdot 5$; г) $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}:\frac{3}{4}+5:\frac{1}{3}-\frac{1}{8}$.

430. З молока виходить 20 % вершків, а з вершків — 25 % масла. Скільки треба молока, щоб одержати 10 кг масла?

431. Знайдіть корені квадратного тричлена:

а) $2x^2+7x-30$; б) x^2-5x+6; в) $4x^2-5x+3$;
г) $7x^2-5x-2$; ґ) $x^2-6x-55$; д) $x^2+10x+25$.

432. Виділіть з поданого тричлена квадрат двочлена:

а) $x^2-6x+15$; б) x^2+8x+8; в) x^2+5x+6;
г) x^2-x-1; ґ) $5x^2-10x+8$; д) $9+2x-3x^2$.

§11. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

Функцію, яку можна задати формулою $y=ax^2+bx+c$, де $a\neq 0, b, c$ — довільні числа, а x — аргумент, називають *квадратичною* (або *квадратною*) *функцією*.

Приклади квадратичної функції: $y=x^2$, $y=-x^2$, $y=x^2+3$, $y=(x+4)^2$. Їх графіки — однакові параболи, але по-різному розміщені на координатній площині. Графік функції $y=ax^2$ — теж парабола; її вершина лежить у початку координат, а вітки напрямлені вгору, якщо $a>0$, або вниз, якщо $a<0$.

Графіки функцій $y=ax^2+bx+c$ і $y=ax^2$ — *однакові параболи*, які можна сумістити паралельним перенесенням.

Покажемо це: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$

www.4book.org

$$= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Оскільки $a \neq 0$, b, c — числа, то і $\frac{b}{2a}$, і $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ — числа.

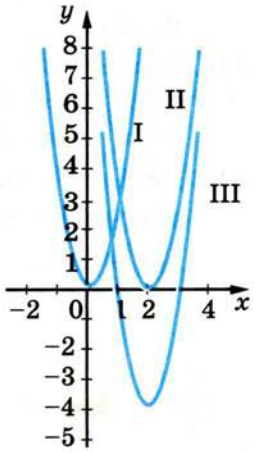
Позначивши їх буквами m і n, матимемо тотожність:

$$ax^2 + bx + c = a(x + m)^2 - n.$$

Отже, функцію $y = ax^2 + bx + c$ можна подати у вигляді $y = a(x + m)^2 - n$. Наприклад, функцію $y = 3x^2 - 12x + 8$ можна записати так: $y = 3(x - 2)^2 - 4$.

З § 10 відомо, що графік функції $y = a(x + m)^2$ можна одержати за допомогою паралельного перенесення на $|m|$ одиниць вздовж осі x графіка функції $y = ax^2$.

Якщо графік функції $y = a(x + m)^2$ перенесемо на $|n|$ одиниць уздовж осі y, то одержимо графік функції $y = a(x + m)^2 - n$. Отже, за допомогою двох паралельних перенесень графіка функції $y = ax^2$ утвориться графік функції $y = a(x + m)^2 - n$, а звідси і даної функції $y = ax^2 + bx + c$. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = 3x^2 - 12x + 8$, або $y = 3(x - 2)^2 - 4$, потрібно графік функції $y = 3x^2$ перенести в напрямку осі x на 2 одиниці (мал. 85), після чого криву II зсунути на 4 одиниці вниз. Утворена крива III — графік даної функції.



Мал. 85

З наведених міркувань випливає, що графік функції $y = ax^2 + bx + c$ — парабола $y = a(x + m)^2 - n$. Координати її вершини $-m$ і $-n$, тобто

$$-\frac{b}{2a} \text{ і } \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

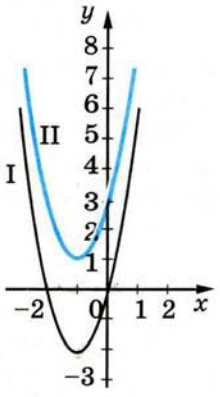
Щоб побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$, треба знайти координати вершини параболи і ще кількох її точок, по-

www.4book.org

значити їх на координатній площині й провести через них плавну лінію. Можна скористатись іншим способом: спочатку побудувати графік функції $y = ax^2 + bx$, а потім підняти або опустити його на $|c|$ одиниць. Графік функції $y = ax^2 + bx$, або $y = x(ax + b)$, будувати неважко, оскільки він перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$ і $x = -\frac{b}{a}$.

Приклад. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 + 4x + 3$.

✔ Розв'язання. Графік функції $y = 2x^2 + 4x$, або $y = x(2x + 4)$, перетинає вісь x у точках $x = 0$ і $x = -2$. Позначимо їх (мал. 86). Ці точки симетричні відносно осі параболи, яку маємо побудувати, тому абсциса її вершини $x = -1$. Ордината дорівнює $2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2$. Позначаємо точку з координатами $(-1; -2)$. Через позначені три точки проходить графік I функції $y = 2x^2 + 4x$. Переносимо його на 3 одиниці вгору і маємо графік II даної функції $y = 2x^2 + 4x + 3$.



Мал. 86

Проаналізуємо, які властивості має функція $y = ax^2 + bx + c$.

Графік даної функції — парабола. Нехай її вершина — точка $M(m; n)$, тобто

$$m = -\frac{b}{2a},\ n = -\frac{D}{4a},\ \text{де } D = b^2 - 4ac.$$

Якщо $a > 0$, то вітки параболи спрямовані вгору. Тоді:

1) область визначення функції — уся множина $\boldsymbol{R}$;

2) область значень — промінь $[n; \infty)$;

3) якщо $x < m$, то функція спадає, при $x > m$ — зростає;

4) якщо $D > 0$, то функція має два нулі: x_1 і x_2;

5) на проміжку $(x_1; x_2)$ значення функції від'ємні, на проміжках $(-\infty; x_1)$ і $(x_2; \infty)$ — додатні.

Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз і властивості 2), 3), 5) слід формулювати інакше. Спробуйте зробити це самостійно.

www.4book.org

Графік кожної квадратичної функції — парабола. Розглянемо деякі властивості цієї кривої.

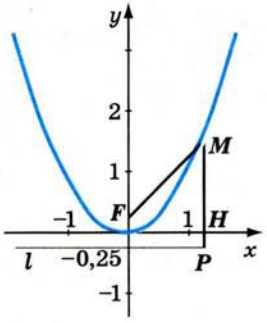
Парабола — геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки і даної прямої. Проілюструємо це твердження на прикладі функції $y = x^2$. Розглянемо точку $F\ (0;\ 0{,}25)$, пряму l, рівняння якої $y = -0{,}25$, і довільну точку $M\ (x;\ x^2)$ на даній параболі (мал. 87). Нехай перпендикуляр MP до прямої l перетинає вісь абсцис у точці H. Покажемо, що $FM = MP$.

Обчислимо FM за формулою відстані між двома точками:

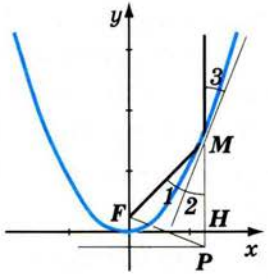
$$FM = \sqrt{x^2 + (x^2 - 0{,}25)^2} = \sqrt{(x^2 + 0{,}25)^2} = x^2 + 0{,}25.$$

Оскільки $MP = MH + HP = x^2 + 0{,}25$, то при кожному значенні x $MF = MP$.

Точку F і пряму l, які мають такі властивості, називають *фокусом* і *директрисою* даної параболи. Кожна парабола має один фокус і одну директрису.



Мал. 87



Мал. 88

Цікавою і дуже важливою є ще одна властивість параболи. Оскільки трикутник FMP рівнобедрений, то $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (мал. 88). Тому промінь, який виходить з фокуса F, падає на ділянку параболи поблизу точки M так, що кут падіння ($\angle 1$) дорівнює куту відбивання ($\angle 3$). Отже, відбитий промінь паралельний осі Oy. Якщо осьовий переріз угнутого дзеркала має форму параболи, то всі промені, відбившись від такого дзеркала, не розсіюються, а йдуть паралельним пучком. Цю властивість параболи використовують у прожекторах, які мають освітлювати далекі предмети. І навпаки: якщо на таке дзеркало падають промені, паралельні його осі Oy, то, відбиваючись, усі вони проходять через фокус F. У результаті фізичне тіло, що розташоване біля фокуса F, може сильно нагріватися.

www.4book.org

Перевірте себе

1. Які функції називають квадратичними?
2. Як називають лінію, що є графіком квадратичної функції?
3. Укажіть властивості функції $y = ax^2 + bx + c$.
4. Які координати вершини параболи — графіка функції $y = ax^2 + bx + c$?
5. За якої умови графік функції $y = ax^2 + bx + c$ перетинає вісь x?
6. Укажіть нулі функції $y = ax^2 + bx$.
7. Як побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$?
8. Чим різняться графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = ax^2$?
9. За якої умови графік функції $y = ax^2 + bx + c$:
   а) напрямлений вітками вгору; б) напрямлений вітками вниз; в) дотикається до осі абсцис; г) перетинає вісь абсцис?

Виконаємо разом!

1. Чи перетинає графік функції $y = 5x^2 + x + 3$ вісь абсцис?

✔ Розв'язання. Якщо графік функції перетинає вісь абсцис в якійсь точці, то значення функції в цій точці дорівнює 0. Задача зводиться до іншої: чи має розв'язки рівняння $5x^2 + x + 3 = 0$? Його дискримінант $D = 1 - 60 < 0$, тому рівняння не має розв'язків.

Відповідь. Не перетинає.

2. Графік функції $y = 2x^2 - 7x + n$ перетинає вісь ординат у точці $y = 5$. У яких точках він перетинає вісь абсцис?

✔ Розв'язання. Точка з координатами 0 і 5 належить графіку. Тому має виконуватися рівність $5 = 0 - 0 + n$, звідси $n = 5$. Отже, йдеться про функцію $y = 2x^2 - 7x + 5$. Знайдемо її нулі: $2x^2 - 7x + 5 = 0$, $D = 49 - 40 = 9$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2{,}5$.

Відповідь. У точках $A\,(-2{,}5;\ 0)$ і $B\,(-1;\ 0)$.

3. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 - 4x - 3$.

✔ Розв'язання. Побудуємо спочатку графік простішої функції $y = 2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$. Він перетинає вісь x у точках $O\,(0;\ 0)$ і $B\,(2;\ 0)$ (мал. 89). Вони симетричні відносно осі параболи, яка проходить через середину відрізка OB. Тому вершиною параболи є точка з абсцисою $x = 1$ і ординатою

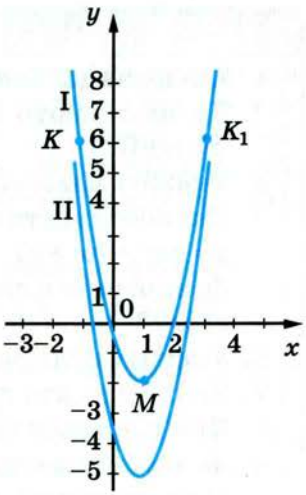
www.4book.org

$y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2$. Позначимо цю точку M (1; −2) і проведемо через неї вісь.

Позначимо контрольну точку K (−1; 6) та симетричну їй відносно осі параболи точку K_1 (3; 6).

Сполучимо плавною лінією відмічені точки й одержимо графік функції $y = 2x^2 - 4x$ (крива I).

Потім перенесемо графік функції $y = 2x^2 - 4x$ на 3 одиниці вниз і матимемо графік функції $y = 2x^2 - 4x - 3$ (крива II).



Мал. 89

Виконайте усно

433. Укажіть найважливіші властивості функції $y = 2x^2$.

434. Укажіть нулі функції:

а) $y = 2x^2$; б) $y = x^2 - 7x$; в) $y = x^2 - 9$.

435. На малюнку 90 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть:

а) область визначення функції і знак коефіцієнта a;

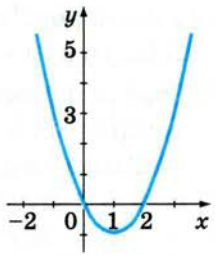
б) абсцису й ординату вершини параболи;

в) нулі функції;

г) проміжки, на яких функція зростає, на яких — спадає;

ґ) проміжки, на яких значення функції додатні, від'ємні;

д) найменше значення функції.



Мал. 90

436. Знайдіть координати вершини параболи:

а) $y = (x - 3)^2$; б) $y = 2(3 - x)^2$;

в) $y = (x - 5)^2 + 2$; г) $y = 2(5 - x)^2 - 3$;

ґ) $y = 2(x + 1)^2 + 1$; д) $y = -2(x - 1)^2 - 3$.

www.4book.org

437. Відгадайте ребус (мал. 91).

Мал. 91

Рівень А

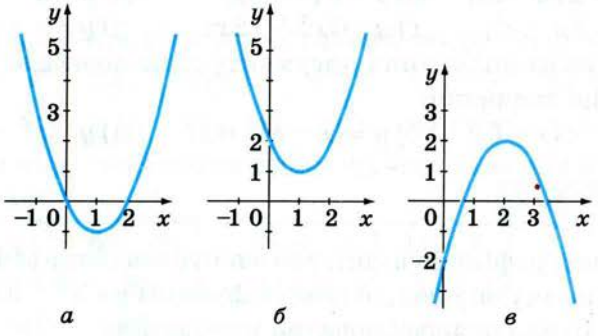
Побудуйте графік функції (438—439).

438. а) $y = 2x^2$, $y = 0{,}5x^2$, $y = 2x^2 + 1$;
б) $y = -2x^2$, $y = -0{,}5x^2$, $y = -0{,}5x^2 - 2$.

439. а) $y = (x - 1)^2$; б) $y = x^2 - 2x + 1$;
в) $y = x^2 - 6x + 9$; г) $y = x^2 + 4x + 4$.

440. В яких точках вісь x перетинається з графіком функції:
а) $y = x(x - 2)$; б) $y = -x(3x + 5)$;
в) $y = x^2 - 2x$; г) $y = 3x^2 + 5x$;
ґ) $y = 2x^2 - 6x$; д) $y = -3x^2 + 4x$?

441. На мал. 92, *а*, *б*, *в* дано графіки квадратичних функцій. Знайдіть для кожної з них за графіком:
а) знак дискримінанта;
б) знак першого коефіцієнта;
в) координати вершини параболи;
г) нулі функції;
ґ) проміжки, на яких функція зростає, спадає.



а *б* *в*

Мал. 92

442. Знайдіть координати вершини параболи — графіка функції:

www.4book.org

а) $y = x^2 + 4$; б) $y = 2x^2 - 6$; в) $y = x(x - 4)$;
г) $y = x(2x + 6)$; ґ) $y = x^2 + 4x$; д) $y = -8x - 3x^2$.

443. Побудуйте графік функції:
а) $y = (x - 1)^2 + 2$; б) $y = (x + 2)^2 + 1$;
в) $y = (x + 4)^2 + 2$; г) $y = (x - 4)^2 - 3$.

444. Побудуйте параболу, виділивши квадрат двочлена:
а) $y = x^2 + 4x + 5$; б) $y = x^2 - 6x + 5$;
в) $y = x^2 - 2x - 1$; г) $y = 1 + 4x - x^2$;
ґ) $y = 4x^2 - 4x + 5$; д) $y = 5x^2 + 10x + 4$.

Побудуйте графік функції (**445—446**).

445. а) $y = x^2 - 2x + 5$; б) $y = x^2 + 2x - 3$;
в) $y = x^2 + 2x + 4$; г) $y = x^2 - 2x - 3$.

446. а) $y = x^2 - 2x - 8$; б) $y = x^2 - 4x - 5$;
в) $y = x^2 + 2x + 6$; г) $y = x^2 - 4x + 3$.

447. Точка M (3; 5) є вершиною параболи $y = x^2 + mx + n$. Знайдіть m і n.

448. Знайдіть p і q, якщо графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки P (1; 4); Q (− 1; 10).

449. Графік функції $y = x^2 - 5x + c$ перетинає вісь y в точці A (0; 4). У яких точках він перетинає вісь x?

450. Графік функції $y = x^2 - 3x + c$ перетинає вісь y в точці A (0; 3). Чи перетинає він вісь x?

451. Побудуйте графік функції, вкажіть проміжки, на яких функція зростає (спадає):
а) $y = x(x - 2)$; б) $y = x(5 - x)$; в) $y = x^2 - 6x$;
г) $y = 2x - x^2$; ґ) $y = 3x^2 + 12x$; д) $y = x - 2x^2$.

452. При яких значеннях аргументу дана функція має найменше значення:
а) $y = x(x - 6)$; б) $y = (x - 3)^2 + 1$; в) $y = x^2 + 2x$?

Рівень Б

Не будуючи графіка функції, виконайте завдання (**453—454**).

453. При якому значенні c графік функції $y = x^2 - 5x + c$:
а) проходить через початок координат;
б) дотикається до осі x;
в) перетинає вісь x у точці A (3; 0);
г) перетинає вісь y в точці B (0; −5)?

www.4book.org

454. При якому значенні b графік функції $y = x^2 + bx + 4$:
а) дотикається до осі x;
б) не має спільних точок з віссю x;
в) перетинає вісь x у точці $A\,(4; 0)$;
г) перетинає вісь x у точках, відстань між якими дорівнює 3?

Побудуйте графік квадратичної функції (**455—461**).

455. а) $y = x^2 + x + 1$; б) $y = x^2 - (x + 2)$;
в) $y = x^2 - x + 1$; г) $y = x(x + 1) - 3$.

456. а) $y = -x^2 + 3x + 1$; б) $y = 1 - 2x - x^2$;
в) $y = -x^2 - 2x + 3$; г) $y = 4x - (x^2 - 1)$.

457. а) $y = 1 + x - x^2$; б) $y = 2 + x\,(1 - x)$;
в) $y = 4 - x - x^2$; г) $y = 3 - x\,(x - 2)$.

458. а) $y = (x - 1)\,(x + 2)$; б) $y = (x - 2)\,(x + 3)$;
в) $y = (x + 2)\,(x - 3)$; г) $y = 2(3 + x)\,(x - 1)$.

459. а) $y = (2x - 1)^2 + 3$; б) $y = 1 - (x + 3)^2$;
в) $y = (0{,}5x + 2)^2 - 3$; г) $y = 4(0{,}5x + 1)^2 - 1$.

460. а) $y = 3x^2 + 3x - 1$; б) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
в) $y = -3x^2 + 6x - 1$; г) $y = -x^2 + x - 3$.

461. а) $y = 0{,}5x^2 - x + 2$; б) $y = 0{,}3x^2 - 0{,}6x + 1$;
в) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$; г) $y = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$.

462. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:
а) $y = x^2 + 2x$; б) $y = 1 - x^2$; в) $y = x^2 - 4x + 3$;
г) $y = x\,(x + 4)$; ґ) $y = (1 - x)^2$; д) $y = x^2 + x + 1$.

463. При яких значеннях x дана функція має найменше значення:
а) $y = x^2 - 6x + 9$; б) $y = x^2 + 4x + 7$;
в) $y = 4x^2 - 12x - 3$; г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

464. Знайдіть найбільше значення функції:
а) $y = 3 - (x - 2)^2$; б) $y = -0{,}25\,(x + 5)^2$;
в) $y = 6x - x^2 - 10$; г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

www.4book.org

465. а) Найменше значення функції $y = x^2 - 6x + c$ дорівнює -5. Побудуйте її графік.

б) Найбільше значення функції $y = c + 4x - 4x^2$ дорівнює 4. Побудуйте її графік.

466. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y = x^2$ і $y = (x - 4)^2$;

б) $y = 2x^2$ і $y = -x^2 + 3$;

в) $y = 3x^2 + 7$ і $y = 3x^2 + 2x + 1$.

467. Знайдіть відстань між вершинами парабол, що є графіками функцій:

а) $y = (x - 3)^2$ і $y = (x - 3)^2 + 7$;

б) $y = x^2$ і $y = (x + 5)^2$;

в) $y = x^2 - 2x + 5$ і $y = x^2 - 2x - 4$;

г) $y = x^2 + 4x + 5$ і $y = -x^2 - 4x - 5$.

468. Знайдіть відстані від вершини параболи, рівняння якої $y = x^2 - 6x + 13$, до осей x, y і початку координат.

469. Знайдіть значення b, якщо графік функції $y = x^2 + bx$ симетричний відносно прямої $x = 3$.

470*. Побудуйте графік функції:

а) $y = |x^2 - 4x + 3|$; б) $y = |x^2 + x - 6|$;

в) $y = |x^2 + 4x| + 3$; г) $y = |6x| - x^2 - 5$.

471. ***Задача Дж. Кардано.*** Знайдіть геометричною побудовою додатний корінь рівняння $x^2 + 6x = 91$.

Вправи для повторення

472. Замініть букви цифрами, щоб виконувалася рівність:

ПАРА + ПАРА = БОЛА.

Скільки різних розв'язків має задача?

Розв'яжіть нерівність **(473—474).**

473. а) $2(x + 7) + 3(1 - 2x) \geq 1$; б) $3(3x - 2) - 4(x + 1) < 2x$;

в) $2(x + 1) \geq 3 - (1 - 2x)$; г) $3x - 0{,}5(1 - 3x) \leq 2{,}5(x - 3)$.

474. а) $(x - 1)(2 - x) > 0$; б) $(3 + x)(x + 7) < 0$;

в) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$; г) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

www.4book.org

475. Скільки коренів має рівняння:

а) $|x-1|+|x+2|=5$; б) $|x-1|+|x+2|=3$;

в) $|x-1|+|x+2|=2$; г) $|x-1|+|x+2|=0$?

§12. КВАДРАТНІ НЕРІВНОСТІ

Якщо лівою частиною нерівності є вираз ax^2+bx+c, де $a\neq 0, b, c$ — дані числа, а правою — нуль, то її називають *квадратною нерівністю*.

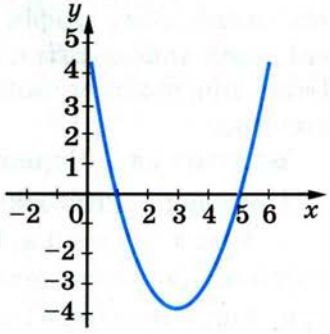
Приклади квадратних нерівностей:

$x^2-5x+3<0$, $2x^2+4\leq 0$, $-3x^2+2x\geq 0$, $-x^2+3x+7>0$.

Такі нерівності зручно розв'язувати за допомогою графіків квадратичних функцій.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $x^2-6x+5<0$.

✔ Розв'язання. Побудуємо графік функції $y=x^2-6x+5$ (мал. 93). Її нулі — числа 1; 5. Від'ємні значення ця функція має тільки в тому разі, якщо змінна x належить проміжку (1; 5). Це і є множина розв'язків даної нерівності.



Мал. 93

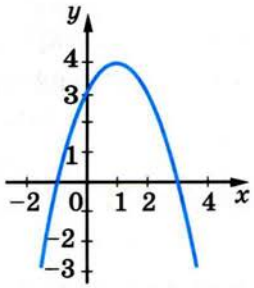
Відповідь. (1; 5).

Зрозуміло, що для розв'язування таких нерівностей будувати точно графіки квадратичних функцій не обов'язково. Досить визначити напрям віток параболи і точки перетину графіка з віссю x (якщо вони існують).

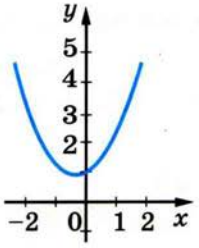
Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $-x^2+2x+3\leq 0$.

✔ Розв'язання. Графік функції $y=-x^2+2x+3$ перетинає вісь x у точках з абсцисами -1 і 3; вітки параболи напрямлені вниз. Тому схематично графік функції можна зобразити, як показано на малюнку 94. Значення функції недодатні за умови, що x належить проміжку $(-\infty; -1]$ або $[3; \infty)$.

www.4book.org



Мал. 94



Мал. 95

Отже, множина розв'язків даної нерівності — об'єднання цих проміжків. Оскільки об'єднання множин прийнято позначати символом $\cup$, то відповідь можна записати так: $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$.

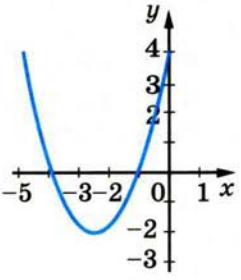
Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $x^2 + x + 1 < 0$.

✔ Розв'язання. Дискримінант рівняння $x^2 + x + 1 = 0$ від'ємний, тому графік функції $y = x^2 + x + 1$ з віссю x не має спільних точок. Вітки графіка напрямлені вгору (мал. 95). Отже, при кожному значенні x значення функції $y = x^2 + x + 1$ додатне.

Відповідь. Нерівність розв'язків не має.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $(x + 4)(x + 1) > 0$.

✔ Розв'язання. Вираз $(x + 4)(x + 1)$ тотожно дорівнює деякому квадратному тричлену з додатним коефіцієнтом при x^2. Отже, графік функції $y = (x + 4)(x + 1)$ — парабола, вітки якої напрямлені вгору і яка перетинає вісь x у точках з абсцисами -4 і -1 (мал. 96). Значення функції додатні, якщо $x < -4$ або $x > -1$.



Мал. 96

Відповідь. $(-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$.

Оскільки нерівність $\frac{x+4}{x+1} > 0$ рівносильна нерівності $(x + 4)(x + 1) > 0$, то таким способом (графічно) можна розв'язувати і найпростіші дробово-раціональні нерівності.

www.4book.org

Щоб розв'язати квадратну нерівність за допомогою графіка, потрібно:

а) визначити напрям віток параболи за знаком першого коефіцієнта;

б) знайти корені відповідного квадратного рівняння, якщо вони є;

в) побудувати ескіз графіка квадратної функції;

г) за графіком визначити проміжки для x, на яких нерівність правильна.

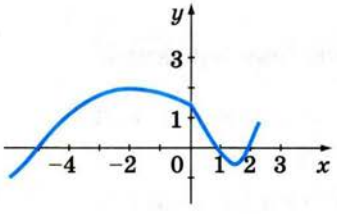
Спосіб, яким розв'язують квадратні нерівності, можна поширити на багато інших видів нерівностей.

Приклад. Нехай треба розв'язати нерівність $(x-1)(x-2)(x+5)<0$. Ця вправа рівносильна такій. При яких значеннях x значення функції $y=(x-1)(x-2)(x+5)$ від'ємні?

Щоб відповісти на поставлене запитання, знайдемо спочатку нулі функції: 1, 2 і –5. Вони розбивають область визначення функції на чотири проміжки: $(-\infty; -5)$, $(-5; 1)$, $(1; 2)$ і $(2; \infty)$. На кожному з цих проміжків кожний із множників добутку $(x-1)(x-2)(x+5)$ має певний знак. Подамо їх і знак усього добутку в такій таблиці.

Множник	$(-\infty; -5)$	$(-5; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$x-1$	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	+
$x+5$	–	+	+	+
y	–	+	–	+

Схематично графік функції y зображено на малюнку 97.



Мал. 97

Отже, функція набуває від'ємних значень на проміжках $(-\infty; -5)$ і $(1; 2)$.

Відповідь. Множина розв'язків нерівності $(-\infty; -5) \cup (1; 2)$.

У розглянутому прикладі проміжки, на яких значення функції додатні, чергуються з тими, на яких значення функції від'ємні. Однак це не завжди так.

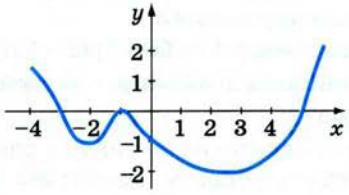
www.4book.org

Розв'яжемо нерівність $(x+1)^2(x+3)(x-5) \geq 0$.

Ліва частина нерівності дорівнює нулю, якщо значення x дорівнює -3, -1 або 5. Склавши відповідну таблицю, переконуємося, що значення лівої частини нерівності від'ємні на сусідніх проміжках $(-3; -1)$ і $(-1; 5)$. Отже, множина розв'язків даної нерівності $(-\infty; -3] \cup [5; \infty) \cup \{-1\}$.

Схематично графік функції $y = (x+1)^2(x+3)(x-5)$ показано на малюнку 98.

Розглянутий спосіб розв'язування нерівностей — це окремий випадок загального *методу інтервалів*. Докладніше з ним ви ознайомитесь у старших класах.



Мал. 98

Перевірте себе

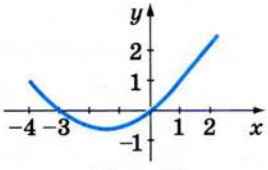
1. Сформулюйте означення квадратної нерівності.
2. Наведіть приклади квадратних нерівностей.
3. Яким символом позначають об'єднання двох множин?
4. Скільки розв'язків може мати квадратна нерівність?
5. Наведіть приклади квадратних нерівностей, які:
   а) не мають жодного розв'язку;
   б) мають тільки один розв'язок;
   в) задовольняють усі дійсні числа.

Виконаємо разом!

Розв'яжіть нерівність:

а) $x^2 + 3x < 0$; б) $z^2 - 3z - 2 \leq 0$; в) $t^2 + t + 1 > 0$.

✔ Розв'язання. а) Графік функції $y = x^2 + 3x$ перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$ і $x = -3$, вітки параболи напрямлені вгору. Зобразимо графік схематично (мал. 99); множина розв'язків нерівності — проміжок $(-3; 0)$.



Мал. 99

www.4book.org

б) Знайдемо корені рівняння $z^2 - 3z - 2 = 0$.

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$; $z_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $z_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Вітки параболи напрямлені вгору, тому шукана множина розв'язків нерівності $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$.

в) $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$. Коефіцієнт при t^2 додатний, тому вітки параболи напрямлені вгору. Вся вона розміщена у верхній півплощині. Отже, множина розв'язків нерівності — вся множина $\boldsymbol{R}$.

Відповідь. а) $(-3; 0)$; б) $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$; в) $\boldsymbol{R}$.

Виконайте усно

476. Назвіть квадратні нерівності:

а) $x^2 - 5x + 6 < 0$; б) $3x^2 + 6 \le 0$;
в) $-2x^2 - 5x + 7 \le 0$; г) $x^3 - 2x + 6 \ge 0$;
ґ) $x^2 + \frac{1}{x} + 3 \ge 0$; д) $\frac{x^2}{3} + 4x + \sqrt{2} < 0$.

477. Визначте напрям віток графіка функції:

а) $y = 4x^2 - 16x + 5$; б) $y = -x^2 + 4x + 3$; в) $y = 3x^2 - 7$;
г) $y = 6x^2 + 5x$; ґ) $y = 7 - 4x - x^2$; д) $y = 5 + 7x - 5x^2$;
е) $y = 3x(x - 4)$; є) $y = -x(x + 3)$; ж) $y = (x - 1)(2 - x)$.

478. Чи перетинає вісь абсцис графік функції:

а) $y = x^2 - 2x + 3$; б) $y = -x^2 + 7x - 5$; в) $y = 3x^2 - x$;
г) $y = 3x^2 - x + 3$; ґ) $y = 5x^2 + 3x - 1$; д) $y = x(7x - 1)$?

479. Чому не має розв'язків нерівність:

а) $3x^2 < -3$; б) $(x - 2)^2 + 1 \le 0$; в) $3x^2 - x + 1 < 0$;
г) $-x^2 \ge 2$; ґ) $-(1 - x)^2 > 0$; д) $2x^2 < x - 1$?

www.4book.org

Рівень А

480. Зобразіть на координатній прямій об'єднання проміжків:

а) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$; б) $(-4; 3) \cup (4; 7]$;

в) $[2; 4] \cup (5; 7)$; г) $(-\infty; 3] \cup (3; 7)$;

ґ) $[-4; 2] \cup [2; 3)$; д) $(-\infty; 1) \cup (1; 4)$.

Розв'яжіть нерівність (**481—487**).

481. а) $x^2 - 4x < 0$; б) $x^2 + 6x \le 0$; в) $z^2 + 6z - 7 \le 0$;

г) $6x^2 - x > 0$; ґ) $2x^2 + 7x \ge 0$; д) $y^2 - 4y - 5 < 0$.

482. а) $x^2 - 6x + 9 > 0$; б) $y^2 - 8y + 16 < 0$;

в) $x^2 + 4x + 4 \le 0$; г) $z^2 + z + 0{,}25 \le 0$;

ґ) $x^2 > 2x - 1$; д) $y^2 \ge 4y - 4$.

483. а) $x^2 \le 3x - 2$; б) $t^2 + 9 < 6t$;

в) $x^2 - 4x + 3 > 0$; г) $x^2 + 10x + 25 \ge 0$;

ґ) $9x^2 + 6x + 1 \le 0$; д) $x^2 - 2x + 9 < 0$.

484. а) $2x^2 - 3x + 1 \ge 0$; б) $x^2 + 8 < 6x$;

в) $0{,}5x^2 - x - 2 > 0$; г) $y^2 - 4y < 12$;

ґ) $-x^2 + 3x - 2 > 0$; д) $11z \ge z^2 + 18$.

485. а) $2 - 3y \le y^2$; б) $12x - 36 < x^2$;

в) $3z^2 \le 5z + 12$; г) $4x(x + 1) < 15$;

ґ) $-2x^2 > 2x + 3$; д) $6(t^2 + 1) < 13t$.

486. а) $x(x - 3) < -2$; б) $2(z^2 + 5) > 9z$;

в) $x(2 - x) \ge 4$; г) $8 - (5 - y)^2 > 3y$;

ґ) $(x - 3)(x + 5) > 0$; д) $(x + 2)(x + 7) < 0$.

487. а) $(x + 7)(x - 1) \ge 0$; б) $(x - 3)(x - 5) \le 0$;

в) $(x - 2)(x + 3) < 0$; г) $(a + 2)(a - 5) \le 0$;

ґ) $(t + 3)(t + 4) \ge 0$; д) $(2 - c)(3 - c) \ge 0$.

488. При яких значеннях x значення функції $y = x^2 + 3x$ від'ємні, а при яких — додатні?

489. При яких значеннях x значення функції $y = f(x)$ додатні, а при яких — від'ємні, якщо:

www.4book.org

а) $f(x)=x^2-4$; б) $f(x)=9-x^2$;
в) $f(x)=x^2+6x-7$; г) $f(x)=3+2x-x^2$?

490. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{x^2-4}$; б) $y=\sqrt{1-x^2}$; в) $y=\sqrt{x^2-5x+4}$;
г) $y=\sqrt{x^2-4x}$; ґ) $y=\sqrt{2x^2+1}$; д) $y=\sqrt{x^2-4x+4}$.

491. Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

а) $x^2+5x-6<0$; б) $x^2-5x-6\le 0$; в) $x^2-x-6<0$;
г) $6-x^2\ge x$; ґ) $x^2+2x-8>0$; д) $x^2-4x+4\le 0$.

Рівень Б

Розв'яжіть нерівність (**492—496**).

492. а) $(2-x)(3-x)\le 2$; б) $(x+4)(x-5)<10$;
в) $(1-z)(2+z)>2$; г) $(x+2)(x+3)\ge 10x$;
ґ) $(3-2x)(x+1)\le 2$; д) $3(x^2+1)\le 5x+1$.

493. а) $2(x-3)(1-2x)>6$; б) $4(x^2-9)>x+3$;
в) $x(x-2)>2-3x^2$; г) $1-x>2(x^2+1)$;
ґ) $-x(2-x)\le 5-4x^2$; д) $3-x<3(x^2+3)$.

494. а) $\frac{x-3}{x+2}<0$; б) $\frac{x+2}{x-7}>0$; в) $\frac{4-x}{2x+5}>0$;
г) $\frac{2x-1}{3-x}<0$; ґ) $\frac{3x-2}{5-2x}<0$; д) $\frac{4z-1}{3-2z}>0$.

495. а) $\frac{x-1}{x+3}<1$; б) $\frac{x+4}{x-1}>5$; в) $\frac{3x-1}{2x+5}>3$;
г) $\frac{7x+4}{3-2x}\ge 2$; ґ) $\frac{x^2}{2-x}\le 3-x$; д) $\frac{2}{2-x}\ge\frac{x-8}{10-x}$.

496. а) $\frac{x+5}{x+7}\ge 0$; б) $\frac{2-x}{3-x}\le 0$; в) $\frac{x}{1-x}\le 0$;
г) $\frac{2x+1}{x-7}<1$; ґ) $\frac{x+3}{1+3x}\le 1$; д) $\frac{5x-1}{1-x}\ge 1$.

www.4book.org

497. Розв'яжіть нерівність:

а) $(3x-1)(x+3) > x(1+5x)$;

б) $(x-2)(x+2)+x(x+7) \le 0$;

в) $(x+4)(2x-3)-(5x-6)(x-3) \ge 10$;

г) $(x-4)(3x+1) < (2x-6)(x-2)+4$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів **(498—502)**.

498. а) $(x^2-3x+2)(x+7) \ge 0$;

б) $(x^2-16)(x^2-25) < 0$;

в) $(x^4+x^2+1)(x-1)(x+3) < 0$.

499. а) $(x-3)(x+2)(x^2+4x+5) \le 0$;

б) $(x^2-1)(x^2-5x+6) \le 0$;

в) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15) > 0$.

500. а) $(x^2-1)(3x-2x^2+5) \ge 0$;

б) $(x^2+3x-10)(4-x^2) < 0$;

в) $(x^2-6x+9)(x^2-9) > 0$.

501. а) $\dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+2x-3} \le 0$; б) $\dfrac{2x^2-3}{4x-1} \ge \dfrac{x}{2}$; в) $1 > \dfrac{8-3x}{3x^2-2x-16}$.

502. а) $\dfrac{5x^2-9x-2}{11x-2-5x^2} > 0$; б) $4 > \dfrac{4-3x}{3x^2-x-4}$; в) $\dfrac{x+1}{1-x} < 2x$.

503. При яких значеннях x значення функції $y=2x+2$ більше за відповідне значення функції:

а) $y=x^2-3x-4$; б) $y=4x^2+9x-13$?

504. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{8+7x-x^2}$; б) $y=\sqrt{3-5x-2x^2}$;

в) $y=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{4+x-5x^2}}$; г) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x^2-3x-4}$;

ґ) $y=\sqrt{x^3-x^2-25x+25}-\sqrt{\dfrac{5}{x^2+6x+9}}$.

www.4book.org

505. При яких значеннях b не має розв'язків нерівність:

а) $x^2 + 2bx + 1 < 0$; б) $bx^2 + 6x + 1 > 0$;

в) $(b-1)x^2 + 3b > 2bx$; г) $b(x^2+1) \le 2bx + 9$?

506. При яких значеннях m кожне дійсне число задовольняє нерівність:

а) $x^2 - mx + 4 > 0$; б) $x^2 - 6x + m \ge 0$;

в) $mx^2 + m + 3 < 4x$; г) $mx^2 + 4x + 2m < 1$?

Розв'яжіть систему нерівностей (**507—508**).

507. а) $\begin{cases} x^2 - 4x < 0, \\ x^2 - x - 6 \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2 - 1 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0. \end{cases}$

508. а) $\begin{cases} x^2 - 3 > 2x, \\ x^2 + 28 \ge 11x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 + 1 > 4x, \\ 3x^2 + 2 \le 5x. \end{cases}$

509. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $0 < x^2 - 5x < 6$; б) $1 < x^2 + 2 < 3x$;

в) $x < 2x + 3 < x^2$; г) $3 < x^2 - 2x + 3 < x^2$.

510. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $x^2 < x + 2$; б) $(x-2)^2 \ge |x|$;

в) $2x^2 < 1 + \sqrt{x}$; г) $x^2 - 3{,}5x \ge \sqrt{x}$.

Вправи для повторення

511. Кільцевим маршрутом їздять два автобуси з інтервалом у 50 хв. Скільки додаткових автобусів треба вивести на маршрут, щоб скоротити інтервал руху на 60 %?

512. Йдучи на день народження, гості придбали спільний подарунок на суму 260 грн. Якби їх було на 3 особи більше, то внесок кожного був би на 6 грн. меншим. Скільки осіб було запрошено на день народження?

Спростіть вираз (**513—514**).

513. а) $9x^2y \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right) \cdot (-24a^2b^3)$.

514. а) $\frac{a^2-4b^2}{ab} : \frac{a^2-2ab}{3b}$; б) $\frac{x+x^3}{y^2-9} : \frac{9-x^2}{2y-6}$.

www.4book.org

§13. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ

З поняттям «система рівнянь» ви ознайомилися в 7 класі. Тоді розглядалися системи двох лінійних рівнянь з двома змінними та способи їх розв'язування. На практиці часто доводиться розглядати системи, що містять рівняння другого степеня.

Приклади рівнянь другого степеня з двома змінними:

$$x^2 + 5y^2 = 9, \quad 8z - t^2 = 12, \quad 0{,}5xy + y = 0.$$

Кожне з таких рівнянь має дві змінні та принаймні один член другого степеня відносно цих змінних. Тобто або одну змінну в квадраті, або добуток двох змінних.

А, наприклад, рівняння

$$x - 2y = 0, \quad 5x^2y + 10 = 0, \quad x^2z^2 - x^2 + z = 0 —$$

першого, третього і четвертого степенів.

Якщо одне з рівнянь системи — другого степеня з двома змінними, а друге — рівняння з тими самими змінними другого або першого степеня, то таку систему називають *системою двох рівнянь другого степеня з двома змінними*.

Пригадаємо.

Розв'язком рівняння з двома змінними називається кожна пара чисел, яка перетворює це рівняння в правильну рівність.

Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти множину всіх її розв'язків.

Наприклад, для рівнянь $x^2 + y - 5 = 0$ і $x - y + 3 = 0$ спільними розв'язками є пари чисел $(-2; 1)$ і $(1; 4)$. Перевірте усно. Інших спільних розв'язків ці рівняння не мають (мал. 100).

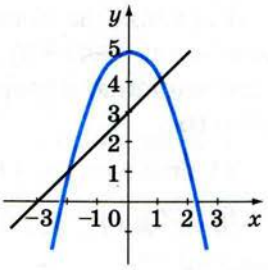
Отже, система $\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ має два розв'язки, її задовольняють дві пари чисел: $(-2; 1)$ і $(1; 4)$.

www.4book.org

Існують різні способи розв'язування систем рівнянь. Основними серед них є:

- спосіб підстановки;
- спосіб алгебраїчного додавання;
- графічний спосіб.

Покажемо на конкретних прикладах, як ці способи використовуються до розв'язування систем рівнянь другого степеня.



Мал. 100

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x^2 - y = 17, \\ x^2 + y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

Розв'язання. а) *Спосіб додавання.* Додаємо рівняння системи, маємо $3x^2 = 27$, звідси $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Оскільки $x^2 = 9$, то з другого рівняння знаходимо: $y_1 = y_2 = 1$.

Отже, система має два розв'язки: (3; 1) і (−3; 1).

б) *Спосіб підстановки.* Виразимо з другого рівняння x^2 через y і підставимо його в перше рівняння:

$$2(y + 5) - y^2 = 2, \text{ або } y^2 - 2y - 8 = 0.$$

За теоремою Вієта знаходимо корені: $y_1 = 4$, $y_2 = -2$.

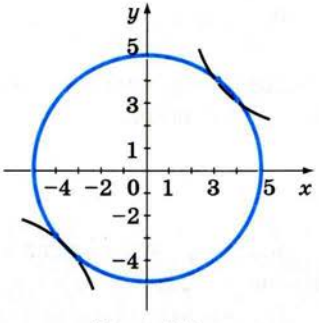
Якщо $y = 4$, то $x^2 = 9$, звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Якщо $y = -2$, то $x^2 = 3$, звідси $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$.

Отже, дана система рівнянь має 4 розв'язки: (3; 4), (−3; 4), $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$.

в) *Графічний спосіб.* Графіком першого рівняння є коло з центром у початку координат і радіусом 5 одиниць.

Графіком другого рівняння є гіпербола $y = \frac{12}{x}$. Побудуємо графіки цих рівнянь в одній системі координат (мал. 101) і визначимо координати точок їх перетину.



Мал. 101

www.4book.org

З графіка бачимо, що дана система рівнянь має чотири розв'язки: (−4; −3), (−3; −4), (3; 4), (4; 3). Безпосередньою підстановкою переконуємося, що це точні розв'язки даної системи.

Відповідь. а) (3; 1) і (−3; 1); б) (3; 4), (−3; 4), $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$; в) (−4; −3), (−3; −4), (3; 4), (4; 3).

Для розв'язування деяких видів систем використовують *спосіб заміни змінних*. Розв'яжемо цим способом такі системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ x + xy + y = 11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4x + (x-2y)^2 = 1, \\ (x-2)^2 + 2y - x = 3. \end{cases}$

Розв'язання. а) $\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x + y = 11 - xy, \end{cases}$ звідси $xy(11 - xy) = 30$.

Замінивши $xy = a$, матимемо з останнього рівняння $a^2 - 11a + 30 = 0$.

Коренями цього квадратного рівняння є 5 і 6.

Якщо $xy = 5$, то $x + y = 6$; якщо $xy = 6$, то $x + y = 5$.

Маємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Розв'язавши обидві системи, одержимо розв'язки заданої системи: а) (5; 1), (1; 5); (3; 2), (2; 3).

б) Сформуємо повний квадрат двочлена в першому рівнянні системи. Маємо:

$$\begin{cases} (x-2)^2 - 4 + (x-2y)^2 = 1, \\ (x-2)^2 + 2y - x = 3, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (x-2)^2 + (x-2y)^2 = 5, \\ (x-2)^2 - (x-2y) = 3. \end{cases}$$

Уведемо нові змінні: $a = x - 2$, $b = x - 2y$. Тоді задана система матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a^2 - b = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Якщо від першого рівняння відняти друге, то одержимо квадратне рівняння з однією змінною $b^2 + b = 2$, яке має корені $b_1 = -2$ і $b_2 = 1$.

Підставимо ці значення b у систему (*) і знайдемо відповідні значення змінної a.

www.4book.org

Якщо $b_1 = -2$, то $a^2 + 2 = 3$, звідси $a_1 = -1$ або $a_2 = 1$.
Якщо $b_2 = 1$, то $a^2 - 1 = 3$, звідси $a_1 = -2$ або $a_2 = 2$.
Отже, розв'язками системи рівнянь (*) є такі пари чисел:

$$(-1; -2), (1; -2), (-2; 1), (2; 1).$$

Щоб знайти розв'язки заданої системи, потрібно перейти до змінних x і y та розв'язати (можна усно) відповідні системи:

$$\begin{cases} x-2=-1, \\ x-2y=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=1, \\ x-2y=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=-2, \\ x-2y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=2, \\ x-2y=1. \end{cases}$$

Одержимо $(1; 1{,}5)$, $(3; 2{,}5)$, $(0; -0{,}5)$, $(4; 1{,}5)$.

Відповідь. а) $(5; 1)$, $(1; 5)$; $(3; 2)$, $(2; 3)$; б) $(1; 1{,}5)$, $(3; 2{,}5)$; $(0; -0{,}5)$, $(4; 1{,}5)$.

Перевірте себе

1. Наведіть приклад рівняння другого степеня з двома змінними.
2. Що є розв'язком рівняння з двома змінними?
3. Скільки розв'язків може мати рівняння з двома змінними?
4. Яка фігура є графіком рівняння: а) $y = x^2$; б) $x^2 + y^2 = 4$; в) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$; г) $y^2 = x$?
5. Що таке система двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
6. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
7. Назвіть основні способи розв'язування системи рівнянь другого степеня з двома змінними.

Виконаємо разом!

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=61, \\ x^2-y^2=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy-x^2=2, \\ y^2-xy=3. \end{cases}$

✔ Розв'язання. а) Додамо почленно дані рівняння системи, маємо рівняння $2x^2 = 72$, корені якого -6 і 6. Підставивши будь-яке з цих значень у друге рівняння даної системи, матимемо $36 - y^2 = 11$. Корені цього рівняння -5 і 5. Отже, система має чотири розв'язки: $(6; 5)$, $(-6; -5)$, $(-6; 5)$ і $(6; -5)$.

www.4book.org

б) Віднімемо почленно перше рівняння від другого: $y^2 - 2xy + x^2 = 1$, або $(y - x)^2 = 1$.

Звідси $y - x = 1$, або $y - x = -1$.

Якщо $y - x = 1$, то $y = x + 1$. Підставимо в перше рівняння $xy - x^2 = 2$ замість y вираз $x + 1$:

$x(x + 1) - x^2 = 2$, $x^2 + x - x^2 = 2$, $x = 2$, тоді $y = 2 + 1 = 3$.

Якщо $y - x = -1$, то $y = x - 1$, і з першого рівняння $xy - x^2 = 2$ маємо: $x(x - 1) - x^2 = 2$, $x^2 - x - x^2 = 2$, $x = -2$, тоді $y = -2 - 1 = -3$.

Отже, система має два розв'язки: (2; 3), (−2; −3).

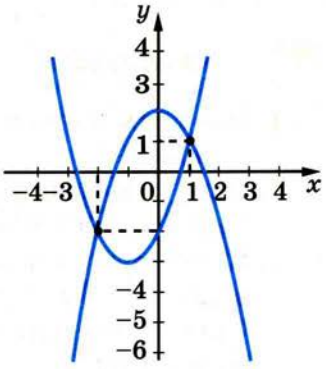
Відповідь. а) (6; 5), (−6; −5), (−6; 5), (6; −5); б) (2; 3), (−2; −3).

2. Чи має розв'язки система рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2, \\ y = 2 - x^2 ? \end{cases}$$

✔ Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь. Це параболи, які перетинаються у двох точках (мал. 102). Отже, система рівнянь має два розв'язки.

Відповідь. Система рівнянь має два розв'язки.



Мал. 102

Виконайте усно

515. Чи є розв'язком рівняння $x^2 - 3x = y$ пара чисел:

а) (0; 0); б) (3; 0); в) (0; 3);

г) (− 3; 0); ґ) (0; − 3); д) (3; 3)?

516. Чому не має розв'язків рівняння:

а) $x^2 + y^2 + 4 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 2xy - 3$?

517. Чи є пара чисел (0; 2); (1; 1); (−1; 1); (−2; 0); (3; 3) розв'язком системи рівнянь:

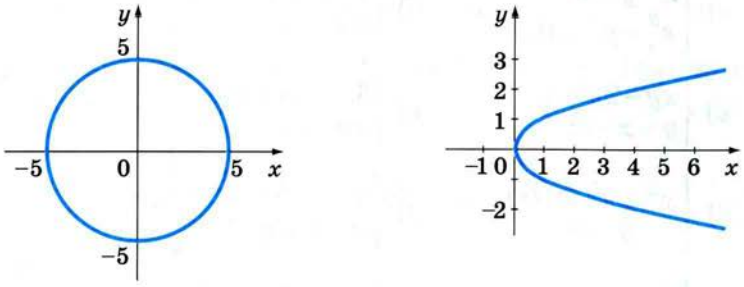
а) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ 2xy + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ xy + 2y = 4? \end{cases}$

518. Чому не має розв'язків система рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 7 = 0, \\ 3xy - y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 4? \end{cases}$

www.4book.org

519. Яке рівняння відповідає графіку (мал. 103): а) синього кольору; б) червоного кольору; в) синього і червоного кольорів разом?



а *б*

Мал. 103

Рівень А

520. Побудуйте графік рівняння:

а) $x + 2y = 0$; б) $xy = 12$; в) $x^2 + y^2 = 9$;

г) $x^2 - y = 2$; ґ) $y + \sqrt{x} = 1$; д) $y + 1 = (x + 1)^3$.

Чи можна побудовані графіки вважати графіками функцій?

Розв'яжіть графічно систему рівнянь **(521—524).**

521. а) $\begin{cases} y + x = 1, \\ y + x^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8y = x^2, \\ y - \sqrt{x} = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 6, \\ y + 2 = 0. \end{cases}$

522. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 16, \\ x - y = 0. \end{cases}$

523. а) $\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ y - 2 = x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy - 8 = 0, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

524. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - 2 = x. \end{cases}$

www.4book.org

Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки (525—527).

525. а) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy-2y=4, \\ y=x-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+4y=8, \\ xy=1. \end{cases}$

526. а) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ x-6=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+1=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy+2=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x-y=2. \end{cases}$

527. а) $\begin{cases} 3x+y=7, \\ x-2y^2=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=8, \\ 2x^2-y^2=32; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y=6, \\ x-y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=2. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь способом алгебраїчного додавання (528—529).

528. а) $\begin{cases} x+y-xy=-23, \\ x-y+xy=49; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ (x-y)(x+y)=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

529. а) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+z^2=34, \\ xz=15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-2=xy, \\ y^2+1=xy; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=5xy, \\ x-y=xy. \end{cases}$

530. ***Задачі Діофанта.*** **Розв'яжіть системи рівнянь:**

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=68; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2-y^2=80. \end{cases}$

www.4book.org

531. ***Задачі Іоанна Палермського.*** Розв'яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy - x = 40, \\ x - y = 2. \end{cases}$

532. ***Задачі Леонардо Фібоначчі.*** Розв'яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x(x - y) = 24y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 = 32y. \end{cases}$

Рівень Б

533. Побудуйте графік рівняння:

а) $y^2 - x = 1$; б) $x^2 + y^2 = 9$;

в) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$; г) $x^2 + y^2 - 2x = 3$;

ґ) $x^2 - y^2 = 0$; д) $x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$.

Чи можна побудовані графіки вважати графіками функцій?

Розв'яжіть графічно систему рівнянь **(534—536).**

534. а) $\begin{cases} y = 6x - x^2 - 7, \\ y = |x| - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1, \\ y = \dfrac{3}{x} + 1. \end{cases}$

535. а) $\begin{cases} y = \sqrt{x - 4}, \\ 3y - x + 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

536. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ |x| - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ |x| - y = 0. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь **(537—540).**

537. а) $\begin{cases} x^2 - xy = 3{,}36, \\ 3x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ 3x + y = -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 8)(x - 3) = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x(y + 1) = 0. \end{cases}$

www.4book.org

538. а) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 5xy+y^2=44; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-y=13, \\ 2x^2-xy=21. \end{cases}$

539. а) $\begin{cases} xy-x-y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x+y-xy=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5{,}2, \\ x^2-y^2=24. \end{cases}$

540. а) $\begin{cases} x^2+2y^2=3, \\ x+y^2=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+3y^2=13, \\ 2x^2+y^2=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-xy=0, \\ x^2y-4y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$

Розв'яжіть системи рівнянь з праць відомих авторів **(541—542).**

541. *З «Алгебри» аль-Хорезмі* (IX ст.):

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2\frac{1}{6}. \end{cases}$

542. *З «Книги абака» (1202 р.) Леонардо Фібоначчі:*

а) $\begin{cases} x+y=12, \\ \frac{xy}{x-y}=4\frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=10, \\ \left(\frac{x}{y}+10\right)\left(\frac{y}{x}+10\right)=122\frac{2}{3}. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь **(543—545).**

543. а) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{26}{5}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}; \end{cases}$

www.4book.org

в) $\begin{cases} y^2+x^2-3xy=4, \\ y^2-x^2+4x=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2-4x^2-4x=1, \\ 4x^2+y^2+3xy=1. \end{cases}$

544. а) $\begin{cases} x^2+y=2, \\ y^2+x=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+2y^2=6, \\ y^2+4x=9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6. \end{cases}$

545. а) $\begin{cases} x^2+y^2=90, \\ x(x-3y)=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+y)(x-y)=0, \\ x^2+y^2=64; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y^2+xy=72, \\ x+y=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x+y)=7. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь способом заміни змінних (**546—548**).

546. а) $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19, \\ x+y+3xy=-35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+y^2x=30; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x+y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3y^3=-8, \\ x^3+y^3=-7. \end{cases}$

547. а) $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}, \\ x^2+y^2=17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ x^2+y^2=160. \end{cases}$

548. а) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=12, \\ x^3+y^3=72; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=109, \\ x^3-y^3=218; \end{cases}$

www.4book.org

в) $\begin{cases} x\left(1+\frac{x}{y}\right)=1{,}5, \\ y\left(1+\frac{y}{x}\right)=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=26, \\ xy-\frac{y}{x}=26. \end{cases}$

549. Знайдіть числа a і b, якщо:

а) $3a+4b=8ab=8$;

б) $a^2-0{,}5b=a-b=1$;

в) $a^2+ab-5=b^2+ab=10$;

г) $a^2+b^2-6b=2a+b=0$;

ґ) $a^2+b-2a=a+b=-1$;

д) $3(a-2)(b+1)=a-b=3$.

550. Знайдіть відстань між точками перетину прямої і кола, рівняння яких $x-y=7$ і $x^2+y^2=169$.

551. Знайдіть відстань між точками перетину кіл, рівняння яких $x^2+y^2=25$ і $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.

Вправи для повторення

552. Швидкість світла дорівнює $3\cdot10^5$ км/с. Яку відстань світло проходить за: а) 5 с; б) 1 год; в) 1 рік?

553. Знайдіть суму і різницю дробів:

а) $\frac{1}{2x^2+5x-3}$ і $\frac{1}{2x^2-7x+3}$;

б) $\frac{2}{6a^2-13a+6}$ і $\frac{1}{3a^2-11a+6}$.

554. Скоротіть дріб:

а) $\frac{2a^2-5a+2}{3a^2-3{,}5a+1}$; б) $\frac{x^2-3}{x^2-2\sqrt{3}x+3}$; в) $\frac{c^2+\sqrt{5}c-10}{c^2-3\sqrt{5}c+10}$.

www.4book.org

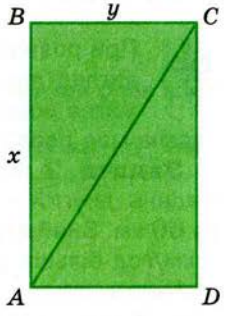
§14. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СКЛАДАННЯМ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Задача — це вимога виконати що-небудь або запитання, рівнозначне такій вимозі. В алгебраїчних задачах найчастіше вимагається що-небудь обчислити, довести, перетворити, дослідити. Якщо, розв'язуючи задачу, як моделі використовують алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності, системи рівнянь, то говорять про алгебраїчні методи.

Як розв'язувати задачі складанням систем лінійних рівнянь, ви знаєте з 7 класу. Подібним способом розв'язують і задачі, які зводяться до систем рівнянь другого степеня з двома невідомими.

Задача 1. Знайдіть сторони прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см, а периметр на 18 см більший.

✔ Розв'язання. Позначимо довжини шуканих сторін прямокутника x см і y см (мал. 104). Тоді квадрат його діагоналі дорівнює $x^2 + y^2$, а півпериметр становить $x + y$. Оскільки діагональ дорівнює 10 см, а периметр — 28 см, то маємо систему рівнянь:



Мал. 104

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$y = 14 - x$ і $x^2 + (14 - x)^2 = 100$,

$x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100$,

$x^2 - 14x + 48 = 0$.

Корені останнього рівняння: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$.

Якщо $x = 8$, то $y = 6$; якщо $x = 6$, то $y = 8$.

Відповідь. 8 см і 6 см.

Задача 2. Один велосипедист їде зі швидкістю на 2 км/год більшою, ніж другий, тому відстань 28 км він долає на 20 хв швидше, ніж другий. Знайдіть швидкості обох велосипедистів.

✔ **Розв'язання. Нехай швидкості велосипедистів (у кілометрах за годину) дорівнюють u і v. Швидкість першого більша на 2, тому маємо рівняння: $u - v = 2$.**

www.4book.org

Оскільки відстань 28 км перший велосипедист долав за $\frac{28}{u}$, а другий — за $\frac{28}{v}$ год, і час першого на 20 хв, або на $\frac{1}{3}$ год, менший, то маємо друге рівняння:

$$\frac{28}{v}-\frac{28}{u}=\frac{1}{3}, \text{ або } 84(u-v)=uv.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}u-v=2,\\84(u-v)=uv,\end{cases} \text{ або } \begin{cases}u-v=2,\\168=uv,\end{cases}$$

звідси $u(u-2)=168$, $u^2-2u-168=0$.

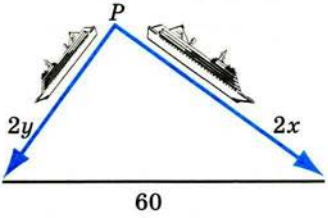
Корені одержаного квадратного рівняння: $u_1=14$, $u_2=-12$. Значення -12 умову задачі не задовольняє. Отже, $u=14$, а $v=14-2=12$.

Відповідь. 14 км/год і 12 км/год.

При розв'язуванні задач з параметрами відповіді одержують у вигляді виразів зі змінними. Повне розв'язання такої задачі вимагає дослідження: треба вказати, за яких значень параметрів задача має розв'язки і скільки.

Задача. З порту одночасно вийшли два теплоходи: один на південь, другий — на захід. Через 2 год відстань між ними дорівнювала 60 км. Знайдіть швидкості теплоходів, якщо швидкість першого на a км/год більша за швидкість другого.

Розв'язання. Нехай швидкості теплоходів дорівнюють відповідно x км/год і y км/год. За 2 год вони пройшли (в напрямах, перпендикулярних один до одного) відповідно $2x$ і $2y$ км (мал. 105). За теоремою Піфагора, $4x^2+4y^2=60^2$, або $x^2+y^2=900$. Крім того, $x-y=a$. Маємо систему рівнянь:



Мал. 105

$$\begin{cases}x^2+y^2=900,\\x-y=a.\end{cases}$$

Розв'яжемо її. З другого рівняння системи знайдемо $x=y+a$. Підставивши це значення в перше рівняння, матимемо:

$(y+a)^2+y^2=900$, $2y^2+2ay+a^2-900=0$.

www.4book.org

Розв'яжемо останнє квадратне рівняння відносно y:

$$y=\frac{-a\pm\sqrt{1800-a^2}}{2}.$$

За умовою задачі, a і y мають бути додатними, тому можливий лише один випадок:

$$y=\frac{\sqrt{1800-a^2}-a}{2}.$$

При цьому мають виконуватися умови:

$$\begin{cases} a>0, \\ 1800-a^2\geq 0, \\ \sqrt{1800-a^2}>a, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a>0, \\ -30\sqrt{2}\leq a\leq 30\sqrt{2}, \\ -30<a<30. \end{cases}$$

Отже, задачу задовольняє тільки одне значення змінної y:

$y=0{,}5(\sqrt{1800-a^2}-a)$, якщо $0<a<30$.

Тоді $x=y+a=0{,}5(\sqrt{1800-a^2}+a)$.

Відповідь. Якщо $0<a<30$, то задача має єдиний розв'язок: $0{,}5(\sqrt{1800-a^2}+a)$ км/год і $0{,}5(\sqrt{1800-a^2}-a)$ км/год. Якщо $a\leq 0$ або $a\geq 30$, то задача розв'язків не має.

Перевірте себе

1. Що таке задача?
2. Які бувають задачі?
3. Складіть кілька різних моделей для задачі: «Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 15, а добуток — 56».

Виконаємо разом!

Задача 1. Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму його цифр і в 3 рази — за їх добуток.

✔ Розв'язання. Позначимо цифри десятків і одиниць буквами x і y. Тоді шукане число дорівнює $10x+y$. Оскільки воно в 4 рази більше за суму цифр, то $10x+y=4(x+y)$, звідси $6x=3y$, або $2x=y$.

www.4book.org

Число $10x + y$ втричі більше за добуток цифр, тому $10x + y = 3xy$. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x = y, \\ 10x + y = 3xy. \end{cases}$$

Підставимо значення y в друге рівняння:

$10x + 2x = 3x \cdot 2x$, $12x = 6x^2$, звідси $x = 0$, або $x = 2$.

Перша цифра двоцифрового числа — не 0. Тому $x = 2$, а $y = 2x = 4$.

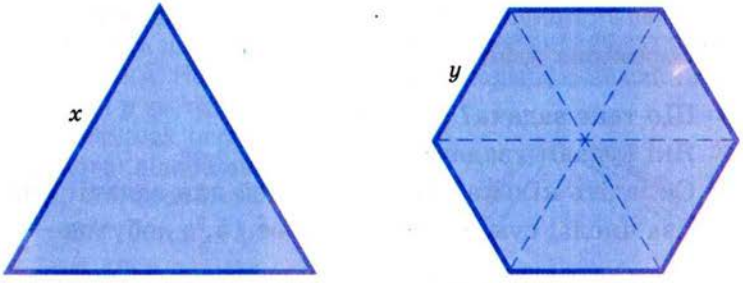
Перевірка. $24 = 4(2 + 4)$ і $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$.

Примітка. Оскільки тут x і y — натуральні числа, то з'ясувавши, що $y = 2x$, далі можна не розв'язувати систему, а випробувати числа 12, 24, 36 і 48. З них задачу задовольняє тільки число 24.

Відповідь. Число 24.

Задача 2. Периметри правильного трикутника і правильного шестикутника рівні, а сума їх площ дорівнює $\sqrt{3}$ м^2. Знайдіть сторони цих многокутників.

✔ Розв'язання. Нехай шукані сторони трикутника і шестикутника дорівнюють x і y (мал. 106). Оскільки периметри фігур рівні, то $3x = 6y$, звідси $x = 2y$.



Мал. 106

Площа правильного трикутника зі стороною x дорівнює $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Правильний шестикутник складається з шести правильних трикутників зі стороною y, тому його площа дорівнює $6 \cdot \frac{y^2\sqrt{3}}{4}$. Маємо систему рівнянь:

www.4book.org

$$\begin{cases} x = 2y, \\ \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{y^2 \cdot 6\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 + 6y^2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо в друге її рівняння значення $x = 2y$. Маємо рівняння $10y^2 = 4$, звідси $y^2 = 0{,}4$, а $y = 2\sqrt{0{,}1}$. Тоді $x = 4\sqrt{0{,}1}$.

Відповідь. $4\sqrt{0{,}1}$ м і $2\sqrt{0{,}1}$ м.

Виконайте усно

555. Складіть задачу, математичною моделлю якої була б система рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 40; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

Рівень А

556. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 21, а добуток становить 90.

557. Знайдіть два числа, різниця яких дорівнює 1,1, а добуток — 0,6.

558. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 31, а сума їх квадратів — 625.

559. Середнє геометричне двох чисел дорівнює 3. Знайдіть ці числа, якщо одне з них більше від другого на 9,1.

560. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 90 см, а гіпотенуза — 41 см. Знайдіть катети трикутника.

561. Знайдіть два числа, якщо:

а) їх різниця дорівнює 2, а різниця квадратів — 88;

б) їх півсума дорівнює 9,5, а сума квадратів — 185;

в) їх сума дорівнює 20, а добуток — 84.

562. Знайдіть катети прямокутного трикутника, в якого:

а) гіпотенуза дорівнює 13 дм, а площа — 30 дм^2;

б) периметр дорівнює 30 см, а сума катетів — 17 см;

в) гіпотенуза дорівнює 17 см, а периметр — 40 см.

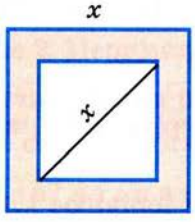
www.4book.org

563. Знайдіть сторони прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 м, а площа — 48 м^2.

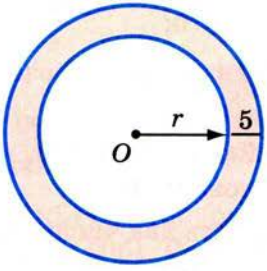
564. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо один з них менший від гіпотенузи на 2 см, а другий — на 25 см.

565. Внутрішній і зовнішній контури рамки — квадрати. Сторона одного з них дорівнює діагоналі другого (мал. 107). Знайдіть сторони цих квадратів, якщо площа рамки дорівнює 32 см^2.

566. Знайдіть внутрішній і зовнішній радіуси кільця, якщо їх різниця дорівнює 5 см, а площа кільця — 125π см^2 (мал. 108).



Мал. 107



Мал. 108

567. Знайдіть довжини ребер прямокутного паралелепіпеда, якщо довжина одного з них, площа поверхні й об'єм паралелепіпеда дорівнюють відповідно 8 см, 158 см^2 і 120 см^3.

568. Один комбайнер може зібрати врожай пшениці з ділянки на 24 год швидше, ніж другий. Якщо комбайнери працюватимуть разом, то можуть завершити роботу за 35 год. За який час кожний комбайнер може зібрати весь урожай?

569. ***Задача Луки Пачіоло.*** Сума квадратів двох чисел дорівнює 20, а добуток — 8. Знайдіть ці числа.

570. Чисельник звичайного нескоротного дробу на 3 менший від знаменника, а якщо до обох його членів додати по 10, то значення дробу збільшиться вдвічі. Який це дріб?

www.4book.org

Рівень Б

571. Автомат виготовляє однакові деталі. Якби він щохвилини виготовляв на одну деталь більше, то 720 деталей виготовив би на 1 год швидше. Скільки деталей виготовляє автомат за одну годину?

572. Замовлення на випуск 150 машин завод мав би виконати за кілька днів. Але вже за два дні до строку, випускаючи щодня 2 машини понад план, він не тільки виконав замовлення повністю, а й випустив ще 6 машин додатково. За скільки днів завод мав би виконати замовлення?

573. Завод мав би виготовити партію верстатів за кілька днів. Перевиконуючи денне завдання на 9 верстатів, він уже за 3 дні до строку виготовив 588 верстатів, що становило 98 % замовлення. Скільки верстатів виготовляв завод щодня?

574. Бригада лісорубів повинна була заготовити протягом кількох днів 216 $м^3$ дров. Перші три дні вона працювала, як передбачалось, а потім щодня заготовляла на 8 $м^3$ більше, тому вже за день до строку заготовила 232 $м^3$ дров. Скільки кубометрів дров заготовляла бригада щодня?

575*. Одна труба може наповнити басейн водою на 36 хв швидше, ніж друга. Якщо спочатку половину басейну наповнить одна труба, а потім половину басейну — друга, то він наповнюватиметься на півгодини довше, ніж одночасно обома трубами. За скільки хвилин може наповнити басейн водою кожна труба?

576. З ***«Курсу математики»*** (1813 р.) ***для французьких військових шкіл.*** Сума трьох сторін прямокутного трикутника дорівнює 156 м, площа — 1014 $м^2$. Знайдіть його сторони.

577. Поїзд мав би проїхати шлях від станції A до станції B за 4 год. Однак на відстані 150 км від A його було затримано на 20 хв. Щоб прибути до B за розкладом, він пройшов решту шляху зі швидкістю, більшою від початкової на 15 км/год. Знайдіть відстань від A до B.

www.4book.org

578. Мотоцикліст проїхав відстань від села до міста за 5 год. Повертаючись у село, він перші 36 км їхав з тією самою швидкістю, а решту (більшу частину шляху) — зі швидкістю, на 3 км/год більшою. Тому на зворотний шлях він затратив на 15 хв менше. З якою швидкістю мотоцикліст їхав до міста?

579. Шлях між селами A і B складається з підйому і спуску. Велосипедист, рухаючись на спуску зі швидкістю на 6 км/год більшою, ніж на підйомі, шлях від A до B долає за 2 год 40 хв, а від B до A — на 20 хв швидше. Знайдіть швидкості велосипедиста на підйомі й спуску та довжину підйому від A до B, якщо відстань від A до B дорівнює 36 км.

580. Теплохід пройшов за 9 год 100 км за течією річки і 64 км — проти течії. Іншим разом за такий самий час він пройшов 80 км за течією і 80 км — проти течії. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії річки.

581. Швидкість одного літака на 100 км/год більша від швидкості другого. Тому перший долає відстань 980 км на 0,4 год довше, ніж другий — відстань 600 км. Знайдіть швидкості літаків.

582. Від пристані A за течією річки відійшов пліт. Через 3 год від пристані B, віддаленої від A на 60 км, відійшов теплохід, який прибув до A через 1 год після зустрічі з плотом. Визначте швидкість течії, якщо швидкість теплохода в стоячій воді дорівнює 24 км/год.

583. Із села в місто, відстань між якими 20 км, виїхав велосипедист, а через 15 хв слідом за ним другий. Наздогнавши першого, другий велосипедист повернувся назад і прибув до села за 45 хв до прибуття першого велосипедиста в місто. Знайдіть швидкість першого велосипедиста, якщо другий їхав зі швидкістю 15 км/год.

584. З пункту A одночасно і в одному напрямку виїхали два велосипедисти зі швидкостями 18 км/год і 24 км/год. Через 1 год слідом за ними виїхав автомобіль, який наздогнав спочатку одного велосипедиста, а через 10 хв — і другого. Знайдіть швидкість автомобіля.

www.4book.org

585. З пункту A до B, відстань між якими 90 км, виїхав велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Через півгодини з A до B виїхав другий велосипедист зі швидкістю 15 км/год. Водночас з B у напрямку до A виїхав мотоцикліст, який спочатку зустрів першого велосипедиста, а через 2 хв — другого. Знайдіть швидкість мотоцикліста.

Вправи для повторення

586. Двома взаємно перпендикулярними дорогами в напрямку до перехрестя їдуть велосипедист і мотоцикліст зі швидкостями $\frac{1}{3}$ км/хв і 1 км/хв. У деякий момент часу велосипедист був на відстані 8 км від перехрестя, а мотоцикліст — на відстані 15 км. Через скільки хвилин після того відстань між ними дорівнюватиме 5 км?

587. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної вираз набуває тільки невід'ємних значень:

а) $9x^2 + 12x + 4$; б) $0{,}01y^4 - y^2 + 25$.

Доведіть тотожність (588—589).

588. $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$.

589. $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

Спростити вираз (590—591).

590. $\dfrac{1}{(a+c)^2} + \dfrac{1}{a^2-c^2} - \dfrac{1}{(a-c)^2}$.

591. $\dfrac{a+2c}{3a-3c} - \dfrac{3c-a}{2a-2c} + \dfrac{a^2-c^2}{(a-c)^2}$.

592. На столі в одному ряду лежать чотири фігури: трикутник, круг, шестикутник і ромб. Вони пофарбовані в різні кольори: червоний, синій, жовтий і зелений. Відомо, що праворуч від жовтої фігури лежить ромб; круг розташований праворуч від трикутника і ромба; червона фігура лежить між синьою і зеленою; трикутник лежить не з краю; синя і жовта фігури не лежать поруч. Визначте, в якій послідовності розташовано фігури і якого вони кольору.

www.4book.org

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант I

1°. Побудуйте графік функції: а) $y = -x^2$; б) $y = 2 + \sqrt{x}$.

2°. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 2x < 0$.

3•. Площа прямокутника дорівнює 180 см^2, а його периметр становить 54 см. Знайдіть сторони прямокутника.

4•. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x - 3$, дослідіть її.

Варіант II

1°. Побудуйте графік функції: а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = x^2 - 4$.

2°. Розв'яжіть нерівність $2x - x^2 > 0$.

3•. Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює 61 см. Знайдіть довжини катетів цього трикутника, якщо його площа — 330 см^2.

4•. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 2x - 3$, дослідіть її.

Варіант III

1°. Побудуйте графік функції: а) $y = x^{-1}$; б) $y = x^2 + 2$.

2°. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 3x \le 0$.

3•. Сума площ двох квадратів дорівнює 65 м^2, а сума їх периметрів — 44 м. Знайдіть сторони цих квадратів.

4•. Побудуйте графік функції $y = 4x - x^2$ і дослідіть її.

Варіант IV

1°. Побудуйте графік функції: а) $y = -x^3$; б) $y = 4 - x^2$.

2°. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 4x \ge 0$.

3•. Площа прямокутника дорівнює 120 см^2, а його периметр — 46 см. Знайдіть сторони та діагональ прямокутника.

4•. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 5x + 4$, дослідіть її.

www.4book.org

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Функція — відповідність, при якій кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y. Множину D називають *областю визначення*, а множину усіх відповідних значень змінної y, — *областю значень* даної функції. Якщо y — функція від x, то пишуть $y = f(x)$.

$y = ax^2 + bx + c$ — квадратична функція.

Графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2 + bx$ і $y = ax^2$ — однакові параболи, які можна сумістити паралельним перенесенням.

Нулі функції — це значення її аргументу, при яких значення функції дорівнюють нулю.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо область її визначення симетрична відносно нуля і для всіх значень аргументу $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо область її визначення симетрична відносно нуля і для всіх значень аргументу $f(-x) = -f(x)$.

Існують функції, які є ні парними, ні непарними.

Функцію називають *зростаючою* (або *спадною*) на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше (менше) значення функції.

Квадратною нерівністю називається кожна нерівність виду $ax^2 + bx + c * 0$, де a, b, c — дані числа, x — змінна, а $*$ — будь-який зі знаків нерівності: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Розв'язуючи таку нерівність, зручно уявляти, як розташований відносно осі x графік функції $y = ax^2 + bx + c$.

Системою рівнянь другого степеня з двома змінними називають систему рівнянь, принаймні одне з яких — рівняння другого степеня із двома змінними, а друге — рівняння першого чи другого степеня з тими самими змінними. Розв'язують такі системи найчастіше способом підстановки, додавання або графічним способом.

www.4book.org

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Функція — одне з найважливіших понять сучасної математики. Воно створювалося і збагачувалося протягом тривалого часу. Таблиці квадратів і кубів вавилонські вчені обчислювали ще понад 4 тисячоліття тому. А це ж — табличні задання функцій. Архімед визначав залежність площі круга і площу поверхні кулі залежно від їх радіусів. А рівності $S = \pi r^2$ і $S = 4\pi r^2$ задають функції. Р. Декарт для графічного зображення різних залежностей застосував систему координат. Термін «функція» вперше ввів німецький математик Г. Лейбніц (1646—1716). Символи для загального позначення функцій $f(x)$ і $y = f(x)$ запровадив у 1734 р. швейцарський математик **Л. Ейлер**.

Леонард Ейлер (1707—1783)

Навіть після введення слова «функція» відповідне йому поняття з часом змінювалося. Г. Лейбніц функціями називав довжини відрізків, які змінювалися залежно від зміни довжин інших відрізків.

Ейлер називав функцією вираз, складений зі змінної і чисел. Наприклад, вираз $3x + 5$ — функція від змінної x, бо значення даного виразу залежить від значень x. Чеський математик Б. Больцано (1781—1848) ще більше розширив поняття функції, він під функцією розумів будь-яку залежність однієї величини від іншої. Згодом більшість математиків під функцією розуміли залежну змінну величину, інші — відповідність між множинами чисел або й відношення (співвідношення) між елементами довільних множин.

Найзагальніше сучасне означення функції запропонувала в XX ст. група математиків, що виступала під псевдонімом Н. Бурбакі: «Функція — це в і д н о ш е н н я,

www.4book.org

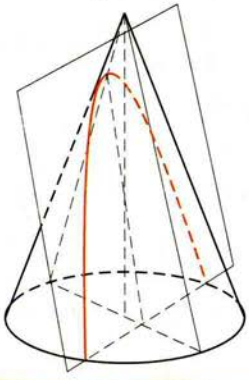
при якому кожному елементу області відправлення відповідає рівно один елемент області прибуття». Під областю відправлення (областю визначення функції) і областю прибуття (областю її значень) розуміють будь-які множини, а не тільки числові.

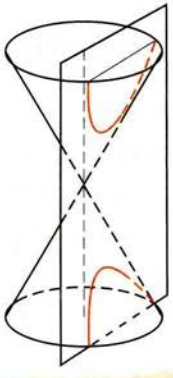
Як бачимо, словом «функція» в різні часи називали то довжину відрізка, то вираз зі змінною, то змінну величину, то залежність між величинами, відповідність між значеннями величин, відношення між елементами двох множин.

В основній школі розглядають тільки найважливіші й найпростіші приклади функцій. Згодом ви ознайомитеся з іншими класами функцій: степеневими, показниковими, логарифмічними, тригонометричними тощо. Науковці розглядають також функції від двох, трьох та більшої кількості змінних.

Назви «парабола», «гіпербола» ввів давньогрецький математик Аполлоній (III ст. до н. е.). Ці криві він розглядав як лінії перетину конічної поверхні з площиною.

У сучасній математиці розглядають багато різних видів функцій. Докладно їх вивчають в окремих математичних дисциплінах: математичному аналізі і теорії функцій. У цих галузях успішно працювали й українські математики М. В. Остроградський, М. П. Кравчук, С. Н. Бернштейн, Є. Я. Ремез та інші.





www.4book.org

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 2

1. R — це область визначення функції:

а) $y=\sqrt{x+1}$; б) $y=2x^{-1}$; в) $y=-x^2$; г) $y=x^{\frac{1}{2}}$.

2. Парною є функція:

а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=2x$; в) $y=3x^2$; г) $(x-2)^2$.

3. На проміжку $(0;\infty)$ зростаючою є функція:

а) $y=-5x$; б) $y=2-x^2$; в) $y=3x^{-1}$; г) $y=\sqrt{x}-1$.

4. Скільки нулів має функція $y=x(x^2+2)(x+4)$:

а) один; б) два; в) три; г) чотири?

5. Парабола — це графік функції:

а) $y=x^{-2}$; б) $y=x-3x^2$; в) $y=2x$; г) $y=\sqrt{x}$.

6. Розв'язком нерівності $x^2+2x+3>2$ є проміжок:

а) $(-\infty;-3)$; б) $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$; в) $(1;2)$; г) R.

7. Симетричним відносно точки $(0;0)$ є графік функції:

а) $y=x^{-2}$; б) $y=3x^2$; в) $y=2x$; г) $y=\sqrt{x}$.

8. Розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} y=x^2+4, \\ 4x+y=0 \end{cases}$ є точка:

а) $(-8;-2)$; б) $(8;2)$; в) $(4;2)$; г) $(-2;8)$.

9. Областю значень функції $y=x^2-2x-1$ є проміжок:

а) $(-\infty;-2)$; б) $(1;\infty)$; в) $[1;2)$; г) $[-2;\infty)$.

10. Функція $y=2x-x^2$ набуває найбільшого значення, якщо:

а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=2$; г) $x=-2$.

www.4book.org

Типові завдання до контрольної роботи № 2

1°. Побудуйте графік функції $y = 2x + 3$. Знайдіть її область визначення та область значень. Установіть нулі функції та проміжки знакосталості.

2°. Функцію задано формулою $f(x) = (2x + 3)^2$. Знайдіть:
а) $f(0)$; б) $f(-4)$; в) $f(3{,}5)$.

3. Побудуйте графік та дослідіть властивості функції:
а°) $y = -x^2 + 1$; б•) $y = (x + 1)^2 - 4$.

4. Розв'яжіть нерівність:
а°) $(x + 5)(x - 3) > 0$; б•) $-5x^2 + 3x + 2 \le 0$.

5•. Побудуйте графік функції:
а) $y = x^2 + 4x + 3$; б) $y = |6x - x^2 - 5|$.

6. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а°) $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^2 - y + 2 = 0. \end{cases}$

7•. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ 3x - y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy - 3 = 0, \\ x^2 - xy + 2 = 0. \end{cases}$

8•. Якщо деяке двоцифрове число поділити на суму цифр, то в частці одержимо 8, в остачі буде 5, а якщо поділити його на добуток цифр, то в частці одержимо 10, а в остачі буде 1. Знайдіть це число.

9••. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x + 5)^2(x - 3)(1 + x) > 0$; б) $\dfrac{x^3 - 16x}{x^3 - 5x^2 + 4x} \le 0$.

10••. Знайдіть, при яких значеннях c рівняння
$$(c + 1)x^2 + (3c - 2)x - c = 0$$
має два різних дійсних корені.

www.4book.org

РОЗДІЛ

3 ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Усі види руху матерії можуть вивчатися математикою.

А. М. Колмогоров

www.4book.org

Прикладною математикою називають ту її частину, яка займається прикладними задачами — тими задачами, які виникають у практичній діяльності людей.

У цьому розділі розглядаються тільки найпростіші і найважливіші теми прикладної математики.

Основні теми розділу:

- **математичне моделювання;**
- **відсоткові розрахунки;**
- **наближені обчислення;**
- **випадкові події та їх імовірності;**
- **відомості про статистику.**

§15. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Математичними методами розв'язують не тільки абстрактні математичні задачі про числа, фігури, рівняння, функції тощо, а й багато інших. ***Прикладними задачами*** в математиці називають такі, умови яких містять нематематичні поняття. Розв'язуючи прикладну задачу математичними методами, спочатку створюють її ***математичну модель***.

Задача 1. Знайдіть площу поверхні стола, ширина і довжина якого дорівнюють 67 см і 125 см.

✔ Розв'язання. Поверхня стола має форму прямокутника. Щоб знайти площу прямокутника, треба його довжину помножити на ширину. Отже, шукана площа дорівнює: $S = 125 \cdot 67 = 8375$ (см^2).

Відповідь. $S \approx 84$ дм^2.

Дана задача прикладна, бо в ній говориться про стіл — нематематичне поняття. Розв'язуючи задачу, ми замінили її іншою: замість поверхні стола розглядали прямокутник.

Задача 2. У посудині є 10,5 кг 40-відсоткового розчину сульфатної кислоти. Скільки треба долити 75-відсоткового розчину тієї самої кислоти, щоб мати 50-відсотковий розчин?

✔ Розв'язання. Спочатку в посудині було $0{,}4 \cdot 10{,}5$ кг чистої кислоти (мал. 109). Якщо долити до неї x кг 75-відсоткового розчину, то маса чистої кислоти в посудині збільшиться на $0{,}75x$ кг. У результаті одержимо $(10{,}5 + x)$ кг

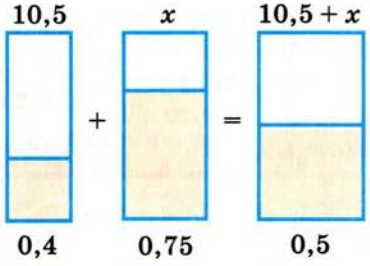
www.4book.org

50-відсоткового розчину, тобто $0{,}5(10{,}5 + x)$ кг чистої кислоти. Маємо рівняння:

$$0{,}4 \cdot 10{,}5 + 0{,}75\,x = 0{,}5 \cdot (10{,}5 + x). \qquad (*)$$

Його корінь $x = 4{,}2$.

Відповідь. 4,2 кг.



Мал. 109

Задача 2 також прикладна, бо посудина і розчини сульфатної кислоти — нематематичні поняття. Рівняння (*) — математична модель даної задачі.

Моделлю **називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта** (від французького слова *modèle* — копія, зразок). Зменшені моделі літака, греблі, автомобіля — приклади фізичних моделей.

Математична модель — це система математичних співвідношень, яка наближено в абстрактній формі описує досліджуваний об'єкт, процес або явище.

Математичні моделі створюють з математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів тощо. Математичними моделями здебільшого бувають функції, рівняння, нерівності, їх системи.

Процес побудови математичної моделі та подальше її застосування для розв'язування конкретних задач називається ***математичним моделюванням***.

Розв'язування прикладної задачі математичними методами здійснюється в три етапи:

1) створення математичної моделі даної задачі;

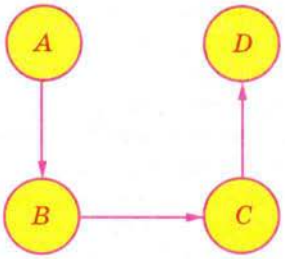
2) розв'язування відповідної математичної задачі;

3) аналіз відповіді.

Схематично ці етапи зображено на малюнку 110. Тут A —

www.4book.org

дана прикладна задача; B — її математична модель; C — відповідь для моделі; D — відповідь для даної прикладної задачі A. Перехід від A до B — процес моделювання, створення потрібної моделі, для чого треба знати не тільки математику, а й ту галузь науки чи виробництва, з якою пов'язана дана прикладна задача. Якщо модель складено неправильно, то неправильними будуть і розв'язання задачі, і відповідь. Припустимо, що в задачі 2 замість 10,5 кг дано 10,5 л. Якщо і для такої задачі учень складе рівняння (*) і знайде відповідь 4,2 л, то він допустить грубу помилку (чому?).



Мал. 110

Важливим є також останній етап розв'язування прикладної задачі — аналіз відповіді. Відповідь C для абстрактної задачі B може не задовольняти дану задачу A або задовольняти її не повністю. Відповідь C може бути точною для задачі B, але для прикладної задачі A майже завжди є наближеною. Тому і записувати її слід відповідно до правил наближених обчислень (див. с. 175).

Розглянемо ще один приклад.

Задача 3. Чи досить одного мільйона літрів води для проведення змагань з плавання в басейні з горизонтальним дном прямокутної форми довжиною 100 м і шириною 25 м?

✔ Розв'язання. **І. Створення математичної моделі задачі.** Вода в басейні з горизонтальним дном набуває форми прямокутного паралелепіпеда, який і є для даної задачі математичною моделлю реального об'єкта. У цьому паралелепіпеді одне з ребер відповідає висоті води (a — шукане значення), інші ребра — це довжина (b) і ширина (c) басейна.

www.4book.org

II. Розв'язування математичної задачі. $V = a \cdot b \cdot c$ — об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b і c. За умовою задачі:

$b = 100$ м, $c = 25$ м; $V = 1\,000\,000$ л $= 1\,000\,000$ дм$^3 = 1\,000$ м^3.

Маємо: $1000 = a \cdot 100 \cdot 25$, звідси $a = \dfrac{1000}{2500} = 0{,}4$ (м).

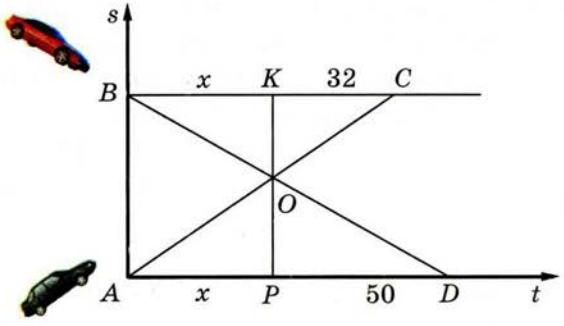
III. Аналіз відповіді. Для змагань з плавання глибина 0,4 м — надто мала. Отже, 1 000 000 л води в даному басейні недостатньо для проведення змагань з плавання.

Відповідь. Недостатньо.

Для багатьох задач на рух найзручнішими математичними моделями є графіки, побудовані в декартовій системі координат. На осі абсцис t відмічають час руху, а по осі ординат s — пройдену відстань. Зі зміною часу відстань між містами не змінюється, цьому факту відповідають паралельні прямі. Розглянемо задачу.

Задача. З міст A і B виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Перший приїхав до B через 32 хв після зустрічі, а другий до A — через 50 хв після зустрічі. Скільки хвилин вони їхали до зустрічі?

Розв'язання. Нехай AC і BD — графіки руху першого і другого автомобілів (мал. 111). Якщо кожний з них їхав до зустрічі x хв, тобто $AP = BK = x$, то $KC = 32$, $PD = 50$.



Мал. 111

$\Delta AOP \sim \Delta COK$ і $\Delta POD \sim \Delta KOB$, тому

$$\frac{AP}{KC} = \frac{OP}{OK} = \frac{PD}{BK}.$$

Отже, $\dfrac{x}{32} = \dfrac{50}{x}$, звідси $x = 40$.

Відповідь. 40 хв.

www.4book.org

Математичними моделями даної задачі є система графіків, зображена на малюнку 111, та рівняння $x : 32 = 50 : x$. Спробуйте створити інші її математичні моделі.

Наприклад, візьміть до уваги, що $AD \parallel BC$, а тангенси кутів нахилу AC і BD до цих прямих — швидкості рухів відповідних об'єктів.

Перевірте себе

1. Що таке математична модель?
2. Наведіть приклади математичних моделей.
3. Що таке математичне моделювання?
4. Які задачі називають прикладними?
5. Назвіть основні етапи розв'язування прикладних задач.

Виконаємо разом!

1. У двох магазинах — 580 кг яблук. Скільки яблук у кожному магазині, якщо в першому на 60 кг більше, ніж у другому. Складіть чотири різні математичні моделі цієї задачі.

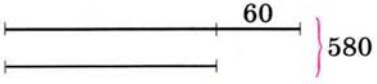
✔ Розв'язання. Нехай у першому магазині яблук x кг, тоді в другому їх — $(x - 60)$ кг, а разом — $(x + x - 60)$ кг. Маємо рівняння $x + x - 60 = 580$, звідси $2x = 640$, $x = 320$, $x - 60 = 260$.

Відповідь. 320 кг і 260 кг.

Рівняння $x + x - 60 = 580$ — одна з математичних моделей розглянутої задачі. Можна створити й інші її моделі, зокрема у вигляді рівняння: $y + y + 60 = 580$;

системи рівнянь: $\begin{cases} x + y = 580, \\ x - y = 60; \end{cases}$

схеми (мал. 112):



Мал. 112

2. Два фермери, працюючи на комбайнах, можуть разом зібрати врожай пшениці за 12 год. За скільки годин кожен з них, працюючи окремо, міг би зібрати цей урожай, якщо відомо, що продуктивність праці першого в 1,5 раза вища від продуктивності праці другого?

www.4book.org

✔ Розв'язання. Нехай перший фермер може зібрати всю пшеницю за x год, тоді другий — за $1{,}5\,x$ год. За 1 год перший може зібрати $\frac{1}{x}$ частину поля, а другий — $\frac{1}{1{,}5x}$ частину. Разом за 1 год вони можуть зібрати врожай з $\frac{1}{12}$ частини поля. Отже,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1{,}5x}=\frac{1}{12},\ \text{звідси}\ \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{1{,}5}\right)=\frac{1}{12},$$

$$x=\frac{2{,}5}{1{,}5}\cdot 12,\ x=20;\ 1{,}5\cdot 20=30.$$

Відповідь. 20 год; 30 год.

3. На проведення кожного тиражу лотереї витрачають 55 000 грн. Один білет лотереї коштує 1 грн. Третина виручки від продажу білетів іде у виграшний фонд, чверть — на сплату податків, а решта — прибуток організаторів лотереї. Яким був прибуток, якщо продали 180 000 білетів? Скільки білетів треба продати, щоб мати прибуток понад 30 000 грн.? За якої умови організатори не одержать прибутку?

✔ Розв'язання. I. Нехай S — виручка за продаж білетів, а P — прибуток. Тоді $S=\frac{S}{3}+\frac{S}{4}+P+55\,000$, а $P=\frac{5S}{12}-55\,000$.

II. 1. Якщо $S=180\,000$ грн., то $P=\frac{5\cdot 180\,000}{12}-55\,000=$ $=20\,000$ (грн.).

2. Якщо $P>30\,000$, то $\frac{5S}{12}-55\,000>30\,000$, а $S>204\,000$ (грн.).

3. Якщо $P\le 0$, то $\frac{5S}{12}-55\,000\le 0$, а $S\le 132\,000$.

III. Оскільки один білет лотереї коштує 1 грн., то кількість проданих білетів (K) чисельно дорівнює виручці. Отже, якщо $K>204\,000$ штук, то прибуток перевищить 30 000 грн., а якщо $K\le 132\,000$ штук, то організатори прибутку не матимуть.

www.4book.org

Відповідь. 20 000 грн.; понад 204 000 штук; якщо кількість проданих білетів не перевищить 132 000 штук.

Виконайте усно

593. Якими математичними поняттями зручно змоделювати: шибку, двері, дискету, обруч, дно відра, цеглину, батарейку, хокейну шайбу, м'яч?

594. Наведіть приклади матеріальних моделей математичного поняття: відрізок, квадрат, трикутник, парабола.

595. Наведіть приклади матеріальних моделей математичних відношень: паралельні, перпендикулярні, подібні.

596. Наведіть приклади відношень між фізичними величинами, які можна змоделювати рівністю: $y = mx$, $y = \frac{m}{x}$.

597. Сформулюйте прикладну задачу, математичною моделлю якої є формула:

а) $l = 2\pi r$; б) $S = \pi r^2$; в) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

598. На двох полицях разом 65 книжок: на першій на 3 книжки більше, ніж на другій. Скільки книжок на кожній полиці? Чи можна вважати математичною моделлю цієї задачі:

а) рівняння $x + x - 3 = 65$;

б) рівняння $y + 3 + y = 65$;

в) рівняння $z - (65 - z) = 3$;

г) систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 65, \\ x - y = 3; \end{cases}$

ґ) діаграму, зображену на малюнку 113?

Мал. 113

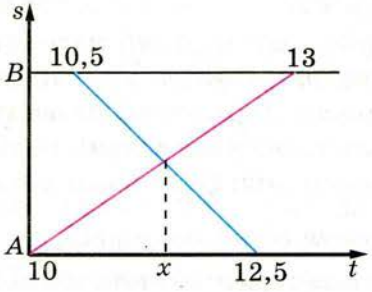
Задачі **599** і **600** розв'яжіть усно, дивлячись на їх графічні моделі.

599. О 10 год з міста A до міста B виїхав мотоцикліст, а через 30 хв йому назустріч з B виїхав автомобіль. О котрій

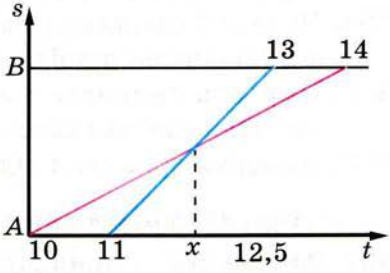
www.4book.org

години вони зустрілись, якщо автомобіль до A приїхав о 12 год 30 хв, а мотоцикліст до B — о 13 год (мал. 114)?

600. О 10 год з міста A до міста B виїхав мотоцикліст, об 11 год так само з A до B — автомобіль. О котрій годині автомобіль наздогнав мотоцикліста, якщо він приїхав до B о 13 год, а мотоцикліст — о 14 год (мал. 115)?



Мал. 114



Мал. 115

Рівень А

Створіть математичні моделі задач **601—603** і розв'яжіть задачі.

601. Знайдіть об'єм цеглини, розміри якої 250×120×65 мм.

602. Корова прив'язана на галявині до кілка мотузкою завдовжки 8 м. Яку площу вона випасає?

603. Щоб підняти відро з криниці, треба зробити 12 обертів коловорота. Знайдіть глибину криниці, якщо діаметр вала коловорота становить 24 см.

Побудуйте математичні моделі задач **604** і **605** у вигляді секторних діаграм. Дайте відповіді на запитання.

604. У лісі ростуть берези, дуби, ялини і сосни. Четверта частина усіх дерев — ялини, а шоста — берези. Яку частину всіх дерев становлять сосни, якщо на дуби припадає третина кількості ялин?

605. Студент прочитав у суботу $\frac{3}{8}$ книжки, а в неділю — половину того, що прочитав у суботу. Яку частину книжки йому залишилося прочитати?

Створіть математичні моделі задач **606—609** у вигляді рівнянь або систем рівнянь і розв'яжіть задачі.

606. Батько старший за сина в 4 рази, а через 5 років він буде старший за сина тільки в 3 рази. Скільки років синові тепер?

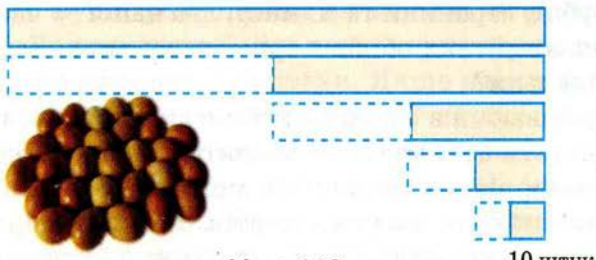
www.4book.org

607. ***Задача Безу.*** Робітнику сказали, що він одержуватиме по 24 су за кожний відпрацьований день, але при цьому відраховуватимуть по 6 су за кожний прогул. Через 30 днів з'ясувалося, що йому нічого одержувати. Скільки днів він працював?

608. На одному складі вугілля в 2 рази більше, ніж на другому. Якщо на перший склад привезти ще 80 т, а на другий — 145 т, то на обох складах вугілля буде порівну. Скільки тонн вугілля є на кожному складі?

609. В одному мішку було 60 кг цукру, а в другому — 80 кг. З другого мішка взяли цукру в три рази більше, ніж з першого, і тоді в першому мішку залишилось цукру вдвоє більше, ніж у другому. По скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

610. З кошика взяли половину всіх яєць, потім — половину остачі, потім — половину нової остачі, нарешті — половину нової остачі. Після цього в кошику залишилося 10 яєць (мал. 116). Скільки яєць було в кошику спочатку?



Мал. 116

Для задач **611—612** створіть моделі, аналогічні тій, що використовується в задачі **610**. Дайте відповіді на поставлені запитання.

611. Оля спекла пиріжки і два відразу з'їла сама. Половину пиріжків, що залишилися, вона віддала батькам, а половину остачі — подругам. Три пиріжки, що після цього залишилися, вона віддала молодшому брату. Скільки пиріжків спекла Оля?

612. У понеділок учні взяли половину всіх нових підручників, у вівторок — половину остачі, в середу — половину нової остачі. Після цього в бібліотеці залишилося 25 нових підручників. Скільки нових підручників було в бібліотеці?

www.4book.org

Розв'яжіть задачі **613** і **614** та зіставте їх математичні моделі.

› **613.** Два ковалі, працюючи разом, виконують певну роботу за 8 днів. За скільки днів виконав би цю роботу другий коваль, якщо перший може виконати її за 12 днів?

614. а) Одна бригада може виконати роботу за 3 год, друга — за 5 год. За скільки годин виконали б цю роботу обидві бригади разом?

б) Однією з двох труб басейн можна наповнити за 3 год, а другою — за 5 год. За скільки годин наповниться басейн, якщо відкрити обидві труби?

в) Від станції A до станції B і від B до A одночасно виїхали два автомобілі. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо відомо, що перший автомобіль відстань AB долає за 3 год, а другий — за 5 год?

Створіть модель у вигляді дерева можливих варіантів для задач **615—617**. Дайте відповідь на поставлені запитання.

› **615.** У їдальні є дві перші страви — борщ і суп, три другі — голубці, вареники та млинці, два напої — чай і компот. Скільки різних обідів з трьох страв може запропонувати їдальня?

616. Перебуваючи в Україні, кубинська делегація вирішила відвідати три міста — Харків, Львів і Севастополь. Скільки різних маршрутів можна їй запропонувати?

617. На пошті є три види конвертів, два види марок до них і чотири види поздоровчих листівок, що вкладаються до цих конвертів. Скільки існує різних способів оформлення одного привітання?

Рівень Б

Створіть математичні моделі до задач **618—634** і розв'яжіть задачі.

618. Які розміри мають золотий і срібний злитки у формі куба, якщо маса кожного дорівнює 3 кг? Густина золота — 19,3 г/см^3, а густина срібла — 10,5 г/см^3.

› **619.** ***Задача Маклорена.*** Кілька людей обідали разом і мали заплатити за обід 175 шилінгів. З'ясувалося, що у двох

www.4book.org

не було з собою грошей, тому інші заплатили на 10 шилінгів більше, ніж їм належало. Скільки людей обідало?

620. Заводу було замовлено виготовити 105 двигунів. Завод щодня виготовляв на 6 двигунів більше, ніж передбачалось, тому виконав замовлення на 2 дні раніше. Скільки двигунів завод виготовляв щодня?

621. У розіграші першості з футболу було зіграно 55 матчів, кожна команда грала з кожною іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у розіграші?

622. Катер за 4 год пройшов 24 км за течією річки і 20 км — проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 12 км/год.

623. Знайдіть сторони прямокутника, знаючи, що його периметр дорівнює 74 см, і якщо одну зі сторін збільшити на 3 см, а другу — зменшити на 2 см, то площа прямокутника зменшиться на 20 $см^2$.

624. ***Задача Фібоначчі.*** Дві вежі, одна заввишки 40, а друга — 30 футів, розташовані на відстані 50 футів одна від одної. До розміщеної між ними криниці злітаються одночасно з обох веж два птахи. Якщо птахи летять з однаковою швидкістю, то вони водночас долітають до криниці. Знайдіть відстань від криниці до веж.

625. Дві бригади мулярів, працюючи разом, можуть виконати роботу за 4 дні. За скільки днів кожна бригада окремо могла б виконати цю роботу, якщо перша зробить це на 6 днів раніше, ніж друга?

626. Двома екскаваторами різної потужності, що працювали разом, вирили котлован за 6 год. Якби одним з них вирили б половину котловану, а потім другим — решту, то всю роботу було б закінчено за 12,5 год. За скільки годин кожним екскаватором окремо можна виконати всю роботу?

627. Двома насосами, що працювали разом, наповнили танкер нафтою за 5 год. Якби потужність I насоса була удвічі меншою, а потужність II — вдвічі більшою за початкову, то танкер наповнили б за 4 год. За скільки годин кожним насосом, що працював би окремо з початковою потужністю, можна наповнити танкер нафтою?

www.4book.org

628. Є 10-відсотковий і 15-відсотковий розчини солі. Скільки треба взяти кожного розчину, щоб мати 100 г 12-відсоткового розчину?

629. Є два розчини солі. Концентрація солі в першому — 0,25, а в другому — 0,4. На скільки кілограмів більше треба взяти одного розчину, ніж другого, щоб одержати розчин масою 100 кг, концентрація солі в якому 0,37?

630. Ціна меблів після двох послідовних знижок на p % зменшилася з 12 500 до 8 000 грн. На скільки відсотків зменшувалася ціна щоразу?

631. У дитячому кафе фруктовий салат «Екзотика», що складається на $\frac{3}{4}$ із персиків, коштує 24 грн. Якою буде ціна салату, якщо персики замінити: а) сливами, що вдвічі дешевші за персики; б) плодами, що в k разів дорожчі за персики? Врахуйте, що вартість компонентів салату становить 50 % його загальної вартості.

632. Попит і пропозиція певного товару описуються рівняннями:

$$Q_D = 750 - 23p,\ Q_S = 150 + 97p,$$

де Q_D — обсяг попиту (млн штук за рік), Q_S — обсяг пропозиції (млн штук за рік), p — ціна, грн. Знайдіть рівноважну ціну та обсяг продажу. Як зміняться попит і пропозиція, якщо ціна товару становитиме 6 грн.?

633. Для виробництва продукції фірма закупила устаткування, вартість якого — 200 000 грн. Передбачається, що термін експлуатації устаткування — 10 років, після чого, у зв'язку із закінченням терміну експлуатації, воно може бути продано тільки на брухт за ціною 19 700 грн. Установіть, якою буде поточна вартість устаткування через 2 і через 5 років його експлуатації, якщо щороку амортизаційні відрахування залишаються сталими.

634. У фермера є 600 м металевої сітки, якою хоче обгородити загін для телят. Яку форму загону слід обрати, щоб він мав найбільшу площу?

www.4book.org

Для розв'язування задач **635** і **636** складіть математичні моделі у вигляді кругів Ейлера.

635. Учні фізико-математичних класів ліцею підготували наукові проекти з математики, фізики та інформатики. З математики — 48 проектів, фізики — 30, а з інформатики — 40. Із математики і фізики роботи виконали 6 учнів, математики й інформатики — 9, із фізики й інформатики — 7. Двоє учнів мають наукові проекти із усіх трьох предметів. Скільки учнів не підготували проект з жодного із цих трьох предметів, якщо у фізико-математичних класах ліцею навчаються 100 учнів?

636. У 9-А класі навчаються 36 учнів. З'ясувалося, що на канікулах тільки двоє учнів не були ні в кіно, ні в театрі, ні в цирку. Проте в кіно були 25 учнів, у театрі — 11, а в цирку — 17. Шестеро учнів ходили і в кіно, і в театр, четверо — в театр і цирк, а десятеро — в кіно і в цирк. Скільки учнів були на канікулах і в кіно, і в театрі, і в цирку?

Створіть математичні моделі до задач на рух і розв'яжіть задачі **(637—642)**.

637. З двох міст, відстань між якими 120 км, назустріч один одному одночасно виїхали мотоцикліст і велосипедист. Зустрілися вони через 3 год. Знайдіть їхні швидкості, знаючи, що всю відстань мотоцикліст проїхав на 2,5 год швидше, ніж велосипедист.

638. Два поїзди вийшли з міст A і B, відстань між якими 900 км, і зустрілися на середині шляху. Знайдіть їхні швидкості, якщо швидкість першого на 5 км/год менша від швидкості другого, а виїхав перший з A на 1 год раніше, ніж другий із B.

639. Відстань між містами A і B — 90 км. З них одночасно назустріч один одному виїхали два мотоциклісти. З якими швидкостями вони їхали, якщо після зустрічі перший їхав до B 1 год 15 хв, а другий до A — 48 хв?

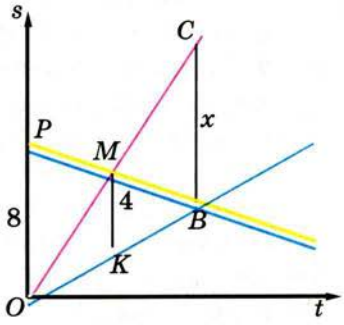
640. З пунктів A і B, відстань між якими 24 км, вирушили одночасно два автомобілі назустріч один одному. Після їх зустрічі автомобіль, що вийшов з A, прийшов до B через 16 хв, а другий автомобіль прийшов до A через 4 хв. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

www.4book.org

641. З двох міст, відстань між якими 350 км, одночасно назустріч один одному виїхали два мотоцикліcти. Через 3 год після початку руху їм залишилося проїхати до зустрічі 20 км. Знайдіть швидкості мотоциклістів, якщо їх різниця дорівнює 10 км/год.

642. З порту одночасно вийшли два теплоходи: один — на південь, другий — на захід. Через 2 год відстань між ними становила 60 км. Знайдіть швидкості теплоходів, якщо різниця цих швидкостей становить 6 км/год.

643*. Однією дорогою зі сталими швидкостями їдуть мотоцикліст і велосипедист, а назустріч їм іде пішохід. Коли мотоцикліст наздогнав велосипедиста, вони були на відстані 8 км від пішохода. Коли мотоцикліст зустрів пішохода, велосипедист відстав від мотоцикліста на 4 км. На скільки кілометрів мотоцикліст випереджатиме велосипедиста в момент, коли велосипедист зустрінеться з пішоходом (мал. 117)?



Мал. 117

644*. Круговою доріжкою завдовжки 2 км рухаються в одному напрямку два ковзанярі, які сходяться через кожні 20 хв. Визначте швидкість кожного ковзаняра, якщо перший з них пробігає коло на 1 хв швидше від другого.

До задачі **645** складіть модель у вигляді двовимірної таблиці і дайте відповідь на поставлене запитання.

645. Поліна, Галина, Данило та Валентин працюють на кондитерській фабриці в різних цехах, де виробляють карамель, шоколад, печиво, торти. Валентин, Данило і той, хто працює в цеху, де випікають торти, разом навчалися в кулінарному училищі. Поліна та Галина ходять на роботу пішки, а той, хто працює в карамельному цеху, та Данило постійно їздять на роботу на власних авто. Людина, яка працює в цеху, де виробляють

www.4book.org

печиво, ніколи не була знайома ні з працівником цеху, де виробляють шоколад, ні з Галиною. Хто в якому цеху працює?

Вправи для повторення

646. Побудуйте графік функції $y = |2x + 3|$.

647. Яка з нерівностей правильна:

а) $-18{,}7 < 17{,}3$; б) $3{,}25 \geq 3\frac{1}{4}$; в) $-3\sqrt{2} \geq 2\sqrt{3}$?

648. Який з дробів більший:

а) $\frac{3}{4}$ чи $\frac{4}{5}$; б) $\frac{47}{48}$ чи $\frac{49}{50}$; в) $\frac{5}{6}$ чи $0{,}833$?

649. Значення якого виразу більше:

$\left(32\frac{1}{5} - 7{,}2\right) : \frac{5}{6}$ чи $\left(21\frac{1}{4} + 4{,}75\right) \cdot \frac{12}{13}$?

650. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 10}$; б) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$; в) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$.

§16. ВІДСОТКОВІ РОЗРАХУНКИ

Відсоток (або *процент*) — це одна сота:

$$1\,\% = 0{,}01; \quad 50\,\% = 0{,}5; \quad 100\,\% = 1.$$

З найпростішими задачами на відсотки (знаходженням відсотків від числа, числа — за відсотками і відсоткового відношення) ви ознайомились раніше. Пригадайте ці види задач і способи їх розв'язування.

У складніших прикладних задачах на відсотки часто йдеться про збільшення або зменшення величини на кілька відсотків. У таких випадках треба добре розуміти, від чого беруться відсотки. Наприклад, коли говорять, що заробітна плата підвищилась на 10 %, то розуміють, що вона збільшилась на 10 % від попередньої заробітної плати. При цьому, якщо значення x більше від y на p %, то значення y менше від

www.4book.org

x не на p %. Збільшенню в 2 рази відповідає збільшення на 100 %, а зменшенню в 2 рази — зменшення на 50 % (мал. 118). Ціна товару теоретично може збільшуватись на будь-яке число відсотків, а зменшитись, наприклад, на 120 % не може.

Мал. 118

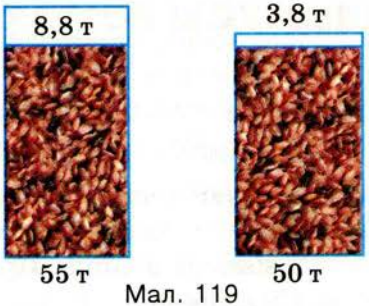
Розглянемо одну із задач на відсотки.

Задача. Просушили 55 т зерна 16-відсоткової вологості, після чого його стало 50 т. Знайдіть відсоток вологості просушеного зерна.

✔ Розв'язання (мал. 119). Зерно спочатку містило вологи $0{,}16 \cdot 55 = 8{,}8$ (т).

Випарувалось вологи 5 т ($55 - 50 = 5$).

Залишилось у зерні вологи $8{,}8 - 5 = 3{,}8$ (т).



Мал. 119

Отже, відсоток вологості просушеного зерна дорівнює $3{,}8 : 50 = 0{,}076 = 7{,}6$ %.

Відповідь. 7,6 %.

Можна розв'язати задачу й інакше, наприклад склавши рівняння:

$$0{,}16 \cdot 55 - 0{,}01x \cdot 50 = 5.$$

Найчастіше доводиться розв'язувати задачі на відсотки

www.4book.org

бухгалтерам і працівникам банків. Розглянемо приклади, пов'язані з нарахуванням інвесторам (вкладникам) відсоткових грошей.

Говорять про **прості відсотки**, якщо нараховують відсотки лише на початково *інвестовану суму*.

Наприклад, на початку року вкладник розміщує на рахунку в банку суму P під відсоток r річних. За рік він одержить суму P_1, яка дорівнює початковому вкладу P плюс нараховані відсотки $\left(\frac{Pr}{100}\right)$, або $P_1 = P + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Через два і три роки сума на рахунку становитиме:

$$P_2 = P + \frac{Pr}{100} + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + 2\frac{r}{100}\right) \text{ і } P_3 = P\left(1 + 3\frac{r}{100}\right).$$

Аналогічно можна представити суму P_n, яку вкладник одержить через n років:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}n\right), \qquad (1)$$

де P — сума початкового вкладу; P_n — сума вкладу через n років.

Нарахування за схемою простих відсотків застосовується, як правило, в короткострокових фінансових операціях, коли після кожного інтервалу нарахування вкладнику виплачуються відсотки.

У довгострокових фінансово-кредитних угодах частіше використовують **складні відсотки**. Їх нараховують не тільки на основну суму, а й на нараховані раніше відсотки. У цьому випадку кажуть, що відбувається *капіталізація відсотків*.

Припустимо, що вкладник дав ощадбанку під 9 % річних 1 000 грн. Це ***початковий капітал***. Через рік банк нарахує вкладнику за це 90 грн. ***відсоткових грошей*** (9 % від 1 000 грн.). Після цього на рахунку вкладника стане 1 090 грн., бо $1\,000\,(1 + 0{,}09) = 1\,090$. За другий рік відсоткових грошей йому нарахують уже 9 % від 1 090 грн.; ***нарощений капітал*** вкладника після двох років дорівнюватиме $1\,000\,(1 + 0{,}09)^2$ грн. Зрозуміло, що через n років цей капітал становитиме $1\,000\,(1 + 0{,}09)^n$ грн.

www.4book.org

Отже, вкладений в ощадбанк початковий капітал P під r % річних через n років перетвориться в нарощений капітал:

$$P_n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

Це ***формула складних відсотків***. Вона є однією з базових у фінансових розрахунках.

Задача. Вкладник поклав до банку 200 000 грн. під складні 7 % річних. Які відсоткові гроші він матиме через 5 років?

✔ Розв'язання. Скористаємось формулою складних відсотків $P_n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$. У даному разі $r = 7$, $n = 5$.

Отже, $P_5 = P(1{,}07)^5$. При $P = 200\,000$ маємо:

$$P_5 = 200\,000 \cdot (1{,}07)^5 = 280\,510.$$

Порівняно з початковим вкладом:

$$280\,510 - 200\,000 = 80\,510 \text{ (грн.)}.$$

Відповідь. 80 510 грн.

Множник $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, який забезпечує нарощення грошової суми, називають ***мультиплікованим множником***. Його значення обчислюють для різних значень r і n та заносять у спеціальні таблиці.

За цією формулою можна розв'язувати також задачі, не пов'язані з нарощенням капіталу (див. задачу **716**).

Подібні до поняття відсотка — проміле і проба.

Проміле — це одна тисячна (1 ‰ = 0,001). Наприклад, розчин солі, концентрація якого становить 5 проміле, — це розчин, 1000 г якого містять 5 г солі.

Пробами характеризують сплави дорогоцінних металів. Так, золото 875-ї проби — це сплав, 1000 г якого містять 875 г чистого золота.

Складні відсотки можуть нараховуватися частіше, ніж один раз на рік, наприклад раз на півроку, квартал, місяць. Нарахування складних відсотків декілька разів на рік називається ***компаундингом***, а відсотки, що нараховуються з певною періодичністю, — ***дискретними***. У фінансових контрактах фіксується річна відсоткова ставка, яка називається ***номінальною***, а відсоткова ставка за один інтервал на-

www.4book.org

рахування дорівнює відношенню номінальної ставки до кількості інтервалів на рік. Тоді нарощена сума розраховується за такою формулою:

$$P_n = P\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn},$$

де m — кількість інтервалів нарахування відсотків протягом року.

Отже, при фіксованій номінальній ставці слід ураховувати зазначену частоту нарахувань, оскільки зі зростанням кількості нарахувань відсотків протягом року абсолютний річний доход зростає.

Пробу дорогоцінного металу не завжди і не скрізь позначають та визначають однаково. Наприклад, золото, яке тепер у нас вважається золотом 750-ї проби, років 100 тому називали золотом 72-ї проби, а у Великій Британії його називають золотом 18-ї проби. Чому? Тому що не всі країни дотримуються метричної системи мір. У дореволюційних підручниках арифметики (А. Кисельов, 1900), наприклад, пояснювалося: «Проба означає, скільки вагових частин чистого металу містяться в 96 вагових частинах сплаву». За тогочасною системою мір масу (вагу) визначали у фунтах і золотниках, причому 1 фунт прирівнювали до 96 золотників.

У Великій Британії пробу золота традиційно визначають у каратах. Приймають, що чисте золото (без будь-яких домішок) має 24 карати. Золото 18-ї проби містить 18 каратів, тобто $\frac{18}{24}$ чистого золота.

Перевірте себе

1. Що таке відсоток? А процент?
2. Наведіть приклад і спосіб розв'язування задачі на знаходження: а) відсотків від числа; б) числа за його відсотками; в) відсоткового відношення двох чисел.
3. Що означає «збільшити число на 100 %»?
4. Що означає «зменшити число на 50 %»?
5. Що таке початковий капітал, відсоткові гроші, нарощений капітал?
6. Напишіть формулу простих і складних відсотків.
7. Що таке проба дорогоцінного металу?

Виконаємо разом!

1. Знайдіть 20 % від числа 190.

Розв'язання. $20\ \% = 0{,}2$; $0{,}2 \cdot 190 = 38$.

www.4book.org

Відповідь. 38.

2. Знайдіть число x, 12 % якого дорівнюють 480.

✔ Розв'язання. $12\ \% = 0{,}12$; $0{,}12 \cdot x = 480$, звідси $x = 480 : 0{,}12 = 4\,000$.

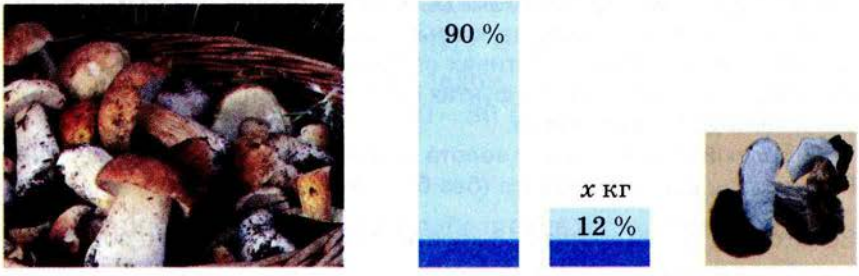
Відповідь. 4 000.

3. Знайдіть відсоткове відношення числа 51 до числа 20.

✔ Розв'язання. $\frac{51}{20} \cdot 100\ \% = 255\ \%$.

Відповідь. 255 %.

4. Свіжі гриби містять 90 % води, а сушені — 12 %. Скільки сушених грибів буде з 22 кг свіжих (мал. 120)?



Мал. 120

✔ Розв'язання. Нехай сушених грибів буде x кг. У них безводної маси 88 %, тобто $0{,}88x$. У 22 кг свіжих грибів безводної маси 10 %, тобто 2,2 кг. Безводні маси свіжих і сушених грибів рівні, звідси маємо рівняння:

$$0{,}88x = 2{,}2;\ x = 2{,}5.$$

Відповідь. 2,5 кг.

5. З двох розчинів солі — 10-відсоткового і 15-відсоткового — треба утворити 40 г 12-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти?

✔ Розв'язання. Побудуємо і заповнимо таблицю, позначивши загальні маси першого та другого розчинів через x і y.

За значеннями у стовпцях «Загальна маса» та «Маса солі» складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 0{,}10x + 0{,}15y = 4{,}8, \end{cases} \text{ звідси } x = 24,\ y = 16.$$

www.4book.org

Розчин	Загальна маса, г	Вміст солі, %	Маса солі, г
I	x	10	$0{,}10x$
II	y	15	$0{,}15y$
III (утворений)	40	12	4,8

Відповідь. Потрібно взяти першого розчину 24 г, другого — 16 г.

Виконайте усно

651. Знайдіть 50 % від: а) 200; б) 35; в) 0,5; г) 1 год.

652. Знайдіть 25 % від: а) 80; б) 16; в) 0,4; г) 1 грн.

653. Знайдіть число, 10 % якого дорівнює:
а) 7; б) 200; в) 3,5; г) 1; ґ) 0,5.

654. Знайдіть відсоткове відношення чисел:
а) 5 і 25; б) 25 і 20; в) $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{3}$.

655. Виразіть у відсотках відношення:
а) 1 : 4; б) 3 : 12; в) 3 : 15; г) 5 : 50.

656. На скільки відсотків число 20 більше від 10? На скільки відсотків число 10 менше від 20?

657. Ціна на яблука зросла на 300 %. У скільки разів зросла їх ціна?

Рівень А

658. Запишіть у вигляді десяткових дробів:
а) 2 %; б) 35 %; в) 216 %; г) 5,4 %.

659. Запишіть у вигляді відсотків:
а) 0,4; б) 0,53; в) 13,7; г) 24.

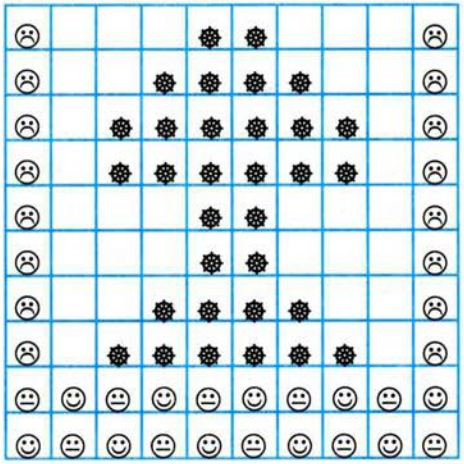
660. 1. Знайдіть:
а) 42 % від 350 грн.; б) 0,6 % від 5 кг;
в) 12 % від 0,54 м; г) 125 % від 4 год.
2. Знайдіть число:
а) 60 % якого становлять 30; 90; 120; 150; 1,8; 2,4;
б) 2,5 % якого становлять 15; 45; 60; 125; 7,5; 1,7.

661. Знайдіть число:
а) 45 % якого становлять 270;
б) 0,3 % якого становлять 0,3.

www.4book.org

662. Запишіть у відсотках відношення:
а) 7 : 10; б) 21 : 140; в) 0,39 : 2,6.

663. Скільки відсотків площі великого квадрата (мал. 121) позначено:
а) ☸;
б) ☹;
в) ☺;
г) 😐?



Мал. 121

664. Скільки кілограмів жиру містяться в 50 кг молока, жирність якого 3,8 %?

665. Руда містить 54 % заліза. Скільки заліза можна виплавити з 5 000 т такої руди?

666. Скільки кілограмів солі містяться в 1 кг 7-відсоткового розчину?

667. У магазин завезли 1 000 кг яблук, з них 20 % першого сорту, 30 % — другого, а решта — третього сорту. Скільки кілограмів яблук кожного сорту завезли в магазин?

668. Довжина прямокутника 65 см, а ширина становить 40 % довжини. Знайдіть периметр прямокутника.

669. Посадовий оклад службовця — 2 000 грн. З нового року його обіцяють підвищити на 20 %. Яким стане посадовий оклад службовця?

www.4book.org

670. При виготовленні розсолу для соління огірків треба 0,76 кг солі на відро води (12 кг). Виразіть у відсотках міцність розчину.

671. Із 1050 зернин пшениці 1000 зернин зійшло. Який відсоток схожості має насіння?

› 672. Банк обслуговує 50 000 клієнтів: 21 000 — юридичні особи, а решта — фізичні. Скільки відсотків становлять: а) юридичні особи; б) фізичні особи?

673. Площа поверхні Землі становить 510,1 млн км^2, з них 149,2 млн км^2 — суходіл. Скільки відсотків поверхні Землі покрито водою?

674. Тракторист мав зорати 25 га, а зорав — 27 га. На скільки відсотків він виконав завдання? На скільки відсотків перевиконав завдання?

675. З молока одержують 10 % сиру. Скільки потрібно молока, щоб виготовити 20 кг сиру?

› 676. З цукрових буряків одержують 12 % цукру. Скільки буряків треба переробити, щоб одержати 1 т цукру?

› 677. Довжина прямокутника 54 см, а ширина — на 20 % менша. Знайдіть площу прямокутника.

678. Площа прямокутника дорівнює 96,8 см^2. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 20 % менша за другу.

679. Площа прямокутника дорівнює 96,8 см^2. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 20 % більша за другу.

Рівень Б

680. В одній книжці на 20 % сторінок менше, ніж у другій. На скільки відсотків у другій книжці сторінок більше, ніж у першій?

› 681. Яка була ціна товару до переоцінки, якщо після підвищення її на 20 % цей товар коштує 450 грн.?

682. Ціна краму спочатку знизилась на 10 %, а потім ще раз на 10 %. На скільки відсотків вона змінилась після двох переоцінок?

› 683. Ціна на автомобіль спочатку підвищилась на 20 %, а потім знизилась на 20 %. Як змінилась ціна на автомобіль після цих двох переоцінок?

www.4book.org

› 684. Сума двох чисел на 20 % більша від їх різниці. Знайдіть відношення цих чисел.

685. Півсума двох чисел на 30 % більша від їх різниці. Знайдіть відношення цих чисел.

686. У двох баках міститься 140 л бензину. Якщо з першого бака 12,5 % бензину перелити до другого, то в обох баках бензину стане порівну. Скільки літрів бензину в кожному баці?

687. Завод збільшив випуск продукції за перший рік на 20 %, а за другий — на 25 %. Як зріс випуск продукції на заводі за ці два роки?

688. Обсяг робіт на будівництві збільшився на 50 %, а продуктивність праці — на 20 %. Як змінилась кількість робітників?

› 689. До 18 кг 10-відсоткового розчину кислоти долили 2 кг води. Визначте відсоткову концентрацію нового розчину.

690. Скільки треба змішати 10-відсоткового і 20-відсоткового розчинів солі, щоб мати 1 кг 12-відсоткового розчину?

691. Скільки кілограмів 7-відсоткового розчину слід долити до 5 кг 5-відсоткового розчину, щоб він став 6-відсотковим?

692. Скільки прісної води треба долити до 100 кг морської, яка містить 5 % солі, щоб концентрація солі в ній дорівнювала 1,5 %?

› 693. Латунь — сплав 60 % міді і 40 % цинку. Скільки міді і цинку треба сплавити, щоб одержати 500 т латуні?

694. Бронза — сплав міді й олова. Скільки відсотків міді в бронзовому злитку, який містить 17 кг міді і 3 кг олова?

695. Скільки води треба долити до 10 кг розчину солі, концентрація якого 5 ‰, щоб одержати розчин концентрацією 3 ‰?

696. Скільки треба змішати розчину солі концентрацією 2 ‰ і розчину солі концентрацією 10 ‰, щоб одержати 800 г розчину, концентрація якого 7 ‰?

697. Скільки золота 375-ї проби треба сплавити із 30 г золота 750-ї проби, щоб одержати сплав золота 500-ї проби?

www.4book.org

698. Із молока жирністю 5 % виготовляють сир жирністю 15,5 %, при цьому залишається сироватка жирністю 0,5 %. Скільки сиру одержують із 100 кг молока?

699. На першому полі 65 % площі засіяно житом. На другому полі під жито відвели 45 % площі. Відомо, що на обох полях житом засіяно 53 % загальної площі. Яку частину всієї засіяної площі становить перше поле?

700. Раніше 3 кг м'яса коштували стільки, скільки тепер 2 кг. На скільки відсотків подорожчало м'ясо?

701. З молока одержують 20 % вершків, а з вершків — 25% масла. Скільки треба молока, щоб одержати 10 кг масла?

702. Руда містить 60 % заліза. З неї виплавляють чавун, який містить 98 % заліза. Із скількох тонн руди виплавляють 1 000 т чавуну?

703. Яблука під час сушіння втрачають 84 % своєї маси. Скільки свіжих яблук треба висушити, щоб одержати 40 кг сушених?

704. Під час прожарювання кавові зерна втрачають 12,5 % своєї маси. Скільки кілограмів непрожарених зерен потрібно, щоб одержати 42 кг прожарених?

705. Свіжі гриби містять 90 % води, а сухі — 12 %. Скільки вийде сухих грибів із 44 кг свіжих?

706. Свіжі гриби містять 90 % води, а сухі — 12 %. Скільки треба висушити свіжих грибів, щоб одержати 10 кг сухих?

707. Вологість свіжих грибів дорівнювала 99 %. Коли гриби підсушили, їх вологість зменшилась до 98 %. Як змінилась маса грибів?

708. Фірма взяла в банку кредит 250 000 грн. на 5 років під простих 3 %. Визначте: а) скільки гривень фірма поверне банку через 5 років; б) який прибуток одержить банк?

709. Підприємець вніс до банку 15 000 грн. під складні 5 % річних. Якою буде сума його вкладу через 4 роки?

710. Підприємству надано 50 000 грн. у кредит на шість місяців за ставкою 8 % річних. Яку суму підприємство має повернути банку через півроку?

www.4book.org

711. На вклад у розмірі 90 000 грн. строком на 5 років банк нараховує 18 % річних. Яка сума буде на рахунку в кінці строку, якщо нарахування відсотків здійснюється за схемою складних відсотків: а) щопівроку; б) щоквартально?

У задачах **712—715** розгляньте різні умови нарахування відсотків.

712. Вкладник поклав до банку 200 000 грн. під 17 % річних. Які відсоткові гроші він матиме через два роки?

713. За якої умови покладений до банку капітал через два роки збільшиться на 44 %?

714. Через скільки років капітал, покладений до банку під 25 % річних, збільшиться в 2 рази? (Скористайтеся калькулятором.)

715. Говорять, що в 1723 р. гетьман Павло Полуботок поклав до англійського банку великий капітал з України під 4 % річних. У скільки разів збільшився б той капітал до наших днів?

716. Щороку населення Землі зростає приблизно на 2 %. Скільки людей житиме в 2025 р., якщо в 2000 р. їх було 6 млрд?

Вправи для повторення

Обчисліть **(717—718)**.

717. а) -6^{-3}; б) $-0{,}1^{-6}$; в) $(-0{,}4)^{-4}$; г) $(-0{,}3)^{-5}$.

718. а) $\sqrt{2^8 \cdot 10^4}$; б) $\sqrt{(-0{,}3)^2 \cdot 10^6}$; в) $\sqrt{(-5)^4 \cdot 0{,}1^2}$.

Розв'яжіть усно рівняння **(719—720)**.

719. а) $x^2 - 3x - 18 = 0$; б) $x^2 - 16x + 60 = 0$.

720. а) $x^2 + 16x + 48 = 0$; б) $x^2 + 4x - 21 = 0$.

www.4book.org

§17. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ

Чи можна виміряти довжину рейки абсолютно точно? Ні. Навіть якщо почуєте, що довжина якоїсь рейки дорівнює, наприклад, 9,42783 м, не вірте цьому. Адже довжину такої рейки з точністю до сотої частки міліметра не можна виміряти. Результат кожного вимірювання — наближене значення величини.

Якщо, вимірюючи довжину x деякої рейки, виявили, що вона більша від 6,427 м і менша від 6,429 м, то записують

$$x = 6{,}428 \pm 0{,}001 \text{ м}.$$

Говорять, що значення довжини рейки знайдено з точністю до 0,001 м (одного міліметра), або абсолютна похибка наближеного значення 6,428 не перевищує 0,001.

***Абсолютною похибкою* наближеного значення називають модуль різниці між наближеним і точним значеннями.**

Якщо точне значення величини невідоме, то невідома й абсолютна похибка її наближеного значення. У такому випадку вказують ***межу абсолютної похибки*** — число, яке не перевищує абсолютна похибка.

У розглянутому прикладі межа абсолютної похибки наближеного значення 6,428 дорівнює 0,001. Тут цифри 6,4 і 2 точні, а 8 — сумнівна, від точної цифри вона відрізняється не більш як на одиницю.

Якщо $x = 3{,}274 \pm 0{,}002$, тобто $3{,}272 \leq x \leq 3{,}276$, то межа абсолютної похибки наближеного значення 3,274 дорівнює 0,002.

Наближені значення можна записувати і без меж похибок. При цьому домовились записувати їх так, щоб усі цифри, крім останньої, були правильні, а останні (сумнівні) відрізнялись від правильних не більш як на одиницю. Наприклад, якщо пишуть $x = 6{,}428$ м, то розуміють, що $x = 6{,}428 \pm 0{,}001$ м.

Якщо $y = 3{,}247 \pm 0{,}002$ кг, то писати $y = 3{,}247$ кг не прийнято. Такий результат бажано округлити: $y = 3{,}25$ кг.

Уявіть, що виміряли (в сантиметрах) товщину h книжки і довжину l шибки:

www.4book.org

$h = 1{,}6$ — з точністю до 0,1,
$l = 71{,}5$ — з точністю до 0,1.

Межі абсолютних похибок обох значень однакові: 0,1. Але в одному випадку ця похибка припадає на невелике число 1,6, а в другому — на значно більше число 71,5. Щоб оцінити якість вимірювань, обчислюють відносні похибки.

Відносною похибкою **наближеного значення називають відношення абсолютної похибки до модуля наближеного значення.**

Наприклад, відносні похибки наближень h і l дорівнюють відповідно:

$0{,}1 : 1{,}6 = 0{,}0625 \approx 6{,}3\ \%$; $0{,}1 : 71{,}5 \approx 0{,}0014 = 0{,}14\ \%$.

Значення l визначено якісніше, з меншою відносною похибкою.

Дії над наближеними значеннями можна виконувати з точним урахуванням похибок і без точного врахування похибок. Точно враховувати похибки можна на основі властивостей подвійних нерівностей. Нехай, наприклад, маса болта в грамах $x = 325 \pm 2$, а маса гайки — $y = 117 \pm 1$, тобто $323 \leq x \leq 327$ і $116 \leq y \leq 118$. Додавши почленно ці подвійні нерівності, одержимо:

$$439 \leq x + y \leq 445, \text{ або } x + y = 442 \pm 3.$$

Аналогічно можна виконувати й інші дії над наближеними значеннями. Роблять так у найбільш відповідальних обчисленнях.

У менш відповідальних випадках користуються ***правилами підрахунку цифр***.

Нагадаємо, що ***десятковими знаками*** **числа називають усі його цифри, що стоять праворуч від десяткової коми.**

Значущими цифрами **числа називають усі його цифри, крім нулів ліворуч, які стоять перед першою цифрою, відмінною від нуля, і нулів праворуч, що стоять на місцях цифр, замінених при округленні.**

Наприклад, у наближеному значенні 0,03074 п'ять десяткових знаків і чотири значущі цифри: 3, 0, 7, 4. А в наближеному значенні діаметра Землі $d = 12\ 700$ км десяткових знаків немає, а значущих цифр три: 1, 2 і 7.

www.4book.org

Нехай дано наближені значення $x = 3{,}24$ і $y = 1{,}4$. Позначимо перші відкинуті при округленні їх цифри знаками питання: $x = 3{,}24?$, $y = 1{,}4?$. Знайдемо суму і різницю цих наближених значень:

$$\begin{array}{r} 3{,}24? \\ +\ 1{,}4? \\ \hline 4{,}6?? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}24? \\ -\ 1{,}4? \\ \hline 1{,}8?? \end{array}$$

Взагалі,

при додаванні та відніманні наближених значень у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх має компонент дії з найменшою кількістю десяткових знаків.

Перемножимо дані наближені значення:

$$\begin{array}{r} 3{,}24? \\ \times \\ \quad 14? \\ \hline \quad ???? \\ 1296? \\ +\ \\ \quad 324? \\ \hline 4{,}5???? \end{array}$$

У розглянутому прикладі слід залишити дві значущі цифри. Взагалі,

при множенні наближених значень у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має множник з найменшою кількістю значущих цифр.

Подібним правилом користуються і при діленні наближених значень.

Виділені жирним шрифтом правила називають ***правилами підрахунку цифр***. Вони не забезпечують високої точності наближених обчислень, але цілком достатні для більшості прикладних задач.

www.4book.org

Наближені значення часто записують у стандартному вигляді. Наприклад, замість $m = 4\,360\,000\,000$ пишуть $m = 4{,}36 \cdot 10^9$. Тут лише три значущі цифри: 4, 3 і 6, а нулями позначено невідомі цифри. Остання значуща цифра 6 сумнівна, але не більш як на одиницю її розряду. Тобто

$$m = (4{,}36 \pm 0{,}01) \cdot 10^9, \text{ або } m = 4{,}36 \cdot 10^9 \pm 10^7.$$

Межа абсолютної похибки значення m дорівнює 10^7. Говорять, що $4{,}36 \cdot 10^9$ — значення m з точністю до десяти мільйонів. Межа відносної похибки m дорівнює:

$$10^7 : (4{,}36 \cdot 10^9) = \frac{1}{436} \approx 0{,}0023 \text{ або } 0{,}23\ \%.$$

Стверджуючи, що маса Землі $m = 5{,}98 \cdot 10^{21}$ т, розуміють, що тут значення $5{,}98$ наближене, межа його абсолютної похибки становить $0{,}01$. Тому абсолютна похибка наближеного значення m дорівнює $0{,}01 \cdot 10^{21} = 10^{19}$ (т), а відносна похибка:

$$10^{19} : (5{,}98 \cdot 10^{21}) \approx 0{,}00167 \approx 0{,}17\ \%.$$

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення абсолютної похибки наближеного значення.
2. Що таке межа абсолютної похибки?
3. Що таке відносна похибка наближеного значення?
4. Які цифри називають значущими?
5. Які цифри називають десятковими знаками?
6. Сформулюйте правило підрахунку цифр при додаванні та відніманні наближених значень.
7. Сформулюйте правило підрахунку цифр при множенні та діленні наближених значень.

Виконаємо разом!

1. Знайдіть (з точним урахуванням похибок) різницю наближених значень $x = 1{,}52 \pm 0{,}01$ і $y = 0{,}27 \pm 0{,}02$.

Розв'язання. Даним наближеним значенням відповідають подвійні нерівності:

$$1{,}51 \le x \le 1{,}53 \text{ і } 0{,}25 \le y \le 0{,}29.$$

Помножимо всі частини останньої подвійної нерівності на -1, одержимо:

www.4book.org

$$-0{,}29 \le -y \le -0{,}25.$$

Додавши цю подвійну нерівність до першої, матимемо:

$$1{,}22 \le x - y \le 1{,}28, \text{ або } x - y = 1{,}25 \pm 0{,}03.$$

Відповідь. $1{,}25 \pm 0{,}03$.

2. Маса Землі дорівнює $(5{,}98 \pm 0{,}01) \cdot 10^{27}$ г, а маса дитячого м'яча — $(2{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{2}$ г. Яке вимірювання точніше?

✔ Розв'язання. Знайдемо межу відносної похибки кожного вимірювання:

1) $\frac{0{,}01 \cdot 10^{27}}{5{,}98 \cdot 10^{27}} \cdot 100\,\% \approx 0{,}2\,\%$; 2) $\frac{0{,}1 \cdot 10^{2}}{2{,}5 \cdot 10^{2}} \cdot 100\,\% \approx 4\,\%$.

Оскільки $4\,\% > 2\,\%$, то масу Землі визначено точніше, ніж масу м'ячика.

Відповідь. Масу Землі виміряно точніше.

Виконайте усно

721. Які з наведених у прикладах чисел можна віднести до точних, а які — до наближених:

а) у школі навчаються 900 учнів;

б) маса Місяця $7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг;

в) площа басейну 600 м^2;

г) товарний поїзд складається з 60 вагонів;

ґ) прискорення вільного падіння дорівнює 9,8 м/с^2;

д) клавіатура комп'ютера містить 113 клавіш, а клавіатура фортепіано — 87;

е) потомство однієї інфузорії туфельки на рік становить $75 \cdot 10^{108}$ особин;

є) африканська антилопа імпала може стрибнути у довжину на 7,5 м, а кенгуру — на 12 м;

ж) рецепт овочевої запіканки має 9 компонентів?

722. Вимірявши довжину рейки ранком і опівдні, одержали різні її значення: 8,234 м і 8,237 м. Яка довжина цієї рейки? Чи можна визначити абсолютну похибку якогонебудь її наближеного значення?

723. Товщина книжки $m = 35 \pm 1$ мм. Назвіть наближене значення товщини книжки і межу його абсолютної похибки.

724. Вивозячи з кар'єру руду, 45-тонний самоскид зробив 13 рейсів. Чи можна стверджувати, що він вивіз 585 т руди?

www.4book.org

725. Назвіть десяткові знаки в числах: 2,325; 0,007; 20,7.

726. Скільки значущих цифр мають числа: 327; 1,005; 0,028; 1001?

727. Об'єм Землі дорівнює 1 083 000 000 000 км^3. Скільки значущих цифр має це наближене значення?

728. Діаметр молекули води дорівнює 0,0000003 мм. Скільки десяткових знаків і скільки значущих цифр має це наближене значення?

Рівень А

729. Округліть число:

а) 37,2539 з точністю до сотих;

б) 0,02578 з точністю до тисячних;

в) 6 548 371 з точністю до тисяч.

730. Запишіть у вигляді подвійної нерівності вираз:

а) $4{,}96 \pm 0{,}03$; б) $37{,}9 \pm 0{,}2$; в) $3{,}05 \pm 0{,}01$;

г) 73 ± 1; ґ) $79{,}25 \pm 0{,}05$; д) $97\,000 \pm 1000$.

731. Маса атома Гідрогену дорівнює 1,0783 (а. о. м.). Округліть це число послідовно до тисячних, сотих, десятих, цілих і знайдіть відповідні абсолютні похибки наближення.

732. Маса яблука більша від 310 г і менша від 320 г. Назвіть наближене значення маси яблука і межу абсолютної похибки.

733. Перетворивши число $\frac{1}{3}$ у десятковий дріб, знайшли його наближене значення 0,333. Знайдіть абсолютну похибку.

734. Чи правильно, що:

а) $\frac{1}{3} = 0{,}33 \pm 0{,}01$; б) $\frac{1}{3} = 0{,}33 \pm 0{,}002$;

в) $\frac{1}{6} = 0{,}166 \pm 0{,}001$; г) $\frac{1}{6} = 0{,}166 \pm 0{,}0005$?

735. Швидкість світла у вакуумі (у метрах за секунду) — $299\,792\,458 \pm 2$, а швидкість звуку в повітрі — $331{,}6 \pm 0{,}1$ м/с. Назвіть наближене значення швидкості світла і швидкості звуку та відповідні межі абсолютних похибок.

736. Відомо, що $4{,}13 \le a \le 4{,}15$ і $2{,}59 \le b \le 2{,}61$. Знайдіть наближене значення і межу абсолютної похибки виразу:

а) $a + b$; б) ab; в) $a - b$.

www.4book.org

737. Користуючись правилами підрахунку цифр, знайдіть суму, різницю, добуток і частку наближених значень $m = 12{,}31$ і $n = 5{,}407$.

738. Знаючи, що діаметр стовбура липи дорівнює 57 см, учень обчислив площу поперечного перерізу стовбура: 2550,5 см^2. Чи правильна ця відповідь? Якщо неправильна — виправіть.

739. Знайдіть площу поверхні та об'єм кавуна, діаметр якого дорівнює 45 см.

740. Сторона квадрата $a = 8 \pm 0{,}5$. Знайдіть його площу.

741. Сторона квадрата $a = 0{,}7 \pm 0{,}05$. Знайдіть довжину його діагоналі.

Рівень Б

742. Перетворивши звичайний дріб $\frac{2}{3}$ у десятковий, одержали 0,6667. Знайдіть абсолютну похибку цього наближення. Знайдіть наближене значення числа $\frac{2}{3}$ з точністю до тисячних і його абсолютну похибку.

743. Знайдіть (з точним урахуванням похибок) суму, різницю, добуток і частку наближених значень $a = 3{,}24 \pm 0{,}02$ і $b = 1{,}17 \pm 0{,}03$.

744. Відомо, що $3{,}24 \leq m \leq 3{,}25$ і $1{,}73 \leq n \leq 1{,}74$. Знайдіть наближене значення дробу $\frac{m}{n}$.

745. Знайдіть абсолютну і відносну похибки, які допускають, округлюючи числа:

а) $2{,}54 \approx 2{,}5$; б) $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$; в) $-0{,}327 \approx -0{,}33$;

г) $7{,}52 \cdot 10^5 \approx 7{,}5 \cdot 10^5$; ґ) $2{,}58 \cdot 10^{-7} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-7}$.

746. Покажіть, що для малих значень α правильна наближена рівність $(1 + \alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha$. Користуючись нею, знайдіть наближені значення:

а) $1{,}03^2$; б) $1{,}002^2$; в) $0{,}97^2$; г) $0{,}998^2$.

747. Знайдіть площу трапеції, основи якої $a \approx 1{,}7$; $b \approx 0{,}43$ і висота $h \approx 0{,}841$.

www.4book.org

748. Гепард розвинув швидкість 34,5 м/с. Виразіть цю швидкість у кілометрах за годину, округліть до цілих і знайдіть абсолютну похибку наближення.

749. Чи можна увімкнути в коло прилад з опором $44 \pm 0{,}5$ Ом, щоб при напрузі 215 ± 15 В сила струму не перевищувала 6 А?

750. Дано наближені значення: $z = 7{,}48 \pm 0{,}01$ і $t = 3{,}24 \pm 0{,}02$. Знайдіть (з точним урахуванням похибок) значення виразу:

а) $z - t$; б) $z : t$; в) $z^2 + t$.

751. Відомо, що $x = 2{,}15 \pm 0{,}05$. Знайдіть відповідне значення функції:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = (x - 2)^3$; в) $f(x) = (x - 2)^{-2}$.

752. Знайдіть за правилами підрахунку цифр суму, різницю, добуток, частку наближених значень $x = 21{,}37$ і $y = 9{,}832$.

753. Дано наближені значення $a = 2{,}23$ і $b = 3{,}75$. Знайдіть значення виразу:

а) $a^2 + b$; б) $2a - b$; в) $ab - a^2$.

754. Порівняйте точність вимірювань товщини d людської волосини і діаметра D Сонця, якщо $d = 0{,}15 \pm 0{,}005$ мм, а $D = 1\,392\,000 \pm 1\,000$ км.

755. Необхідно перевезти $1\,000 \pm 20$ м^3 бетону. Скільки рейсів має зробити самоскид, щоб виконати цю роботу, якщо кузов містить $2{,}25 \pm 0{,}02$ м^3?

Вправи для повторення

756. Порівняйте числа:

а) $1{,}3^8$ і $1{,}4^8$; б) $0{,}7^{12}$ і $0{,}8^{12}$;

в) $(-1{,}5)^9$ і $(-1{,}6)^9$; г) $(-0{,}3)^{15}$ і $(-0{,}7)^{15}$.

757. Скільки розв'язків має рівняння:

а) $x^3 = 8$; б) $x^3 + 8 = 0$; в) $x^3 = 4x$;

г) $x^4 = x + 1$; ґ) $x^6 = x - 3$; д) $x^7 + x - 3 = 0$?

758. Побудуйте графік функції:

а) $y = 1{,}4x^2 + 3$; б) $y = (x + 3)^2 - 2$;

в) $y = x(x - 2) + 1$; г) $y = 5 - x(x - 2)$.

www.4book.org

§18. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ЇХ ІМОВІРНІСТЬ

Одним із розділів сучасної математики є теорія ймовірностей. Її найважливіші поняття — *ймовірнісний експеримент* (випробування, спостереження), *подія* (наслідок випробування) і *ймовірність події*. Наведемо приклади випробувань та їх окремих наслідків — деяких подій.

Випробування	Подія
Підкидання монети	Монета упала догори гербом
Написання контрольної роботи	Ви отримали 12 балів
Очікування ранку	Ранок настав
Підкидання грального кубика	Випало 7 очок

Остання подія неможлива, бо на гранях грального кубика немає сімки. Подія 3 достовірна (вірогідна), бо після ночі завжди наступає ранок. Події 1 і 2 випадкові.

Взагалі, подія називається *неможливою*, якщо вона ніколи не може відбутися, *достовірною* — якщо вона завжди відбувається. Якщо подія може відбутися або не відбутися, її називають *випадковою*.

Події позначають великими латинськими буквами A, B, C, ... або однією латинською буквою з індексом: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Зміст події подають у фігурних дужках. Наприклад, третю подію з таблиці можна записати так:

$A_3 = \{\text{настав ранок}\}$.

Сказати наперед про випадкову подію, що вона відбудеться чи не відбудеться, не можна. Якщо ж ця подія масова, виконується багато разів і за однакових умов, то ймовірність її настання можна характеризувати деяким числом.

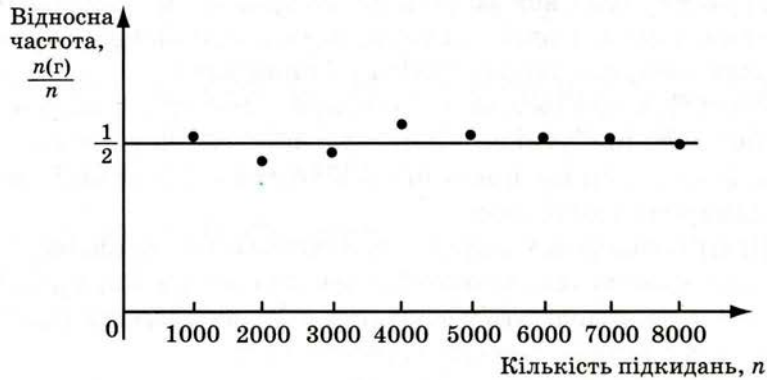
Розглянемо експеримент, який полягає в підкиданні симетричної однорідної монети і фіксації того боку, яким монета упала догори. Його можна проводити в одних і тих са-

www.4book.org

мих умовах яку завгодно кількість разів. У таблиці подаються результати восьми серій таких випробувань.

Номер серії	1	2	3	4	5	6	7	8
Кількість підкидань, n	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
Кількість гербів, n(г)	501	986	1495	2036	2516	3004	3504	3997
Відносна частота появи герба, $\frac{n(г)}{n}$	0,501	0,493	0,498	0,509	0,503	0,501	0,501	0,500

Число в останньому рядку таблиці для кожної серії визначається як відношення кількості випадання герба до загальної кількості підкидань монети в цій серії випробувань. Воно називається ***відносною частотою появи події***. Якщо дані таблиці зобразити графічно (мал. 122), то можна побачити, що відносна частота появи герба коливається навколо числа 0,5 і мало відрізняється від нього.



Мал. 122

Якщо в n випробуваннях подія X відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає відносну частоту прояви події X. Число, біля якого коливається відносна частота події, виражає *ймовірність* цієї події; її позначають буквою P (від англійського слова *probability* – ймовірність).

www.4book.org

Цей термін увів Б. Паскаль. У листі до П. Ферма від 28 жовтня 1654 р. він писав: «Більшість людей вважають, що коли вони про що-небудь не мають повного знання (а ми ніколи не маємо повного знання), то вони взагалі нічого про це не знають. Я переконаний, що такі думки глибоко помилкові. Часткове знання теж є знанням, і неповне переконання все ж має деяке значення, особливо коли мені відомий ступінь цієї впевненості. Хтось може запитати: «А чи можна виміряти міру впевненості числом?». «Звичайно, — відповім я, — люди, які грають в азартні ігри, обґрунтовують свою впевненість саме так. Коли гравець кидає гральний кубик, він наперед не знає, яке саме число очок випаде. Але дещо він все-таки знає. Наприклад, те, що всі шість чисел — 1, 2, 3, 4, 5, 6 — мають однакові шанси на успіх. Якщо ми домовимося вважати можливість появи достовірного за одиницю, то можливість випадання шістки, як і кожного з інших п'яти чисел, виразиться дробом $\frac{1}{6}$». Зазначу відразу, що міру можливості (впевненості) події я назвав імовірністю. Я багато розмірковував над вибором відповідного слова і, нарешті, саме його вважаю найвиразнішим».

Б. Паскаль визначав імовірності деяких подій без проведення випробувань. Це можна зробити тоді, коли наслідки випробувань утворюють скінченну множину і є рівноможливими, тобто в умовах проведеного випробування немає підстав уважати появу одного з наслідків більш чи менш можливим порівняно з іншими.

Розглянемо **приклад**. Кидають один раз правильний однорідний гральний кубик (мал. 123) і фіксують суму очок на грані, що випала догори. Результатом такого випробування можуть стати 6 різних подій:

E_1 = {випаде одне очко};

E_2 = {випаде два очки};

E_3 = {випаде три очки};

E_4 = {випаде чотири очки};

E_5 = {випаде п'ять очок};

E_6 = {випаде шість очок}.

Мал. 123

www.4book.org

Ці шість подій охоплюють і вичерпують усі можливі наслідки експерименту. Вони *попарно несумісні*, бо кожного разу випадає тільки одна кількість очок. Усі шість подій *однаково можливі*, бо йдеться про однорідний кубик правильної форми і спритність гравця виключається. В такому разі говорять, що для здійснення кожної з цих подій існує один шанс із шести.

Кожну з подій E_1—E_6 для наведеного вище випробування називають елементарною, а всю їх множину — простором елементарних подій.

Елементарною подією називають кожний можливий наслідок імовірнісного експерименту. Множину всіх можливих наслідків експерименту називають ***простором елементарних подій*** і позначають грецькою буквою Ω (омега).

Якщо простір елементарних подій для деякого випробування складається з n рівноможливих несумісних подій, то ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{n}$. Наприклад, ймовірність того, що на підкинутому гральному кубику випаде 5 очок, дорівнює $\frac{1}{6}$. А ймовірність того, що підкинута монета впаде догори гербом, дорівнює $\frac{1}{2}$. *Ймовірність події* A позначають символом $P(A)$. Якщо першу з цих подій позначити буквою A, а другу — B, то $P(A)=\frac{1}{6}, P(B)=\frac{1}{2}$.

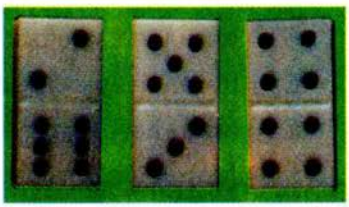
Існують події неелементарні. Розглянемо, наприклад, таку подію: C = {поява пластинки доміно з 8 очками}.

Оскільки пластинок доміно усього 28, то випробування, пов'язане з вибором однієї пластинки, вичерпується 28 рівноможливими і незалежними наслідками. Отже, простір елементарних подій для даного випробування складається з 28 елементарних подій E_i, де $i=1,2,\ldots,28$. Подія C може відбутися, якщо відбудеться одна з трьох елементарних подій (мал. 124):

1) E_1 = {поява пластинки $\frac{2}{6}$};

2) E_2 = {поява пластинки $\frac{3}{5}$};

3) E_3 = {поява пластинки $\frac{4}{4}$}.



Мал. 124

www.4book.org

Кажуть, що події C сприяють три елементарні події (E_1, E_2, E_3) з можливих 28, тому $P(C) = \frac{3}{28}$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай випробування має скінченну кількість (n) рівноможливих і несумісних наслідків і A — деяка випадкова подія, пов'язана з даним випробуванням. Будемо називати елементарну подію E_n ***сприятливою для випадкової події A***, якщо настання події E_n в результаті випробування приводить до настання події A. Якщо кількість елементарних подій, сприятливих події A, позначити через $n(A)$, то ймовірність випадкової події A визначається за формулою:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Задача. З перевернутих 28 кісточок доміно навмання беруть одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього:

а) 2 очки (подія A); б) 4 очки (подія B); в) 11 очок (подія D)?

✔ Розв'язання. Існує 2 кісточки доміно з двома очками $\left(\frac{0}{2}; \frac{1}{1}\right)$, 3 кісточки з чотирма очками $\left(\frac{0}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{2}\right)$, 1 кісточка з 11 очками $\frac{5}{6}$. Усього можливостей вибору 28, бо взяти можна будь-яку з 28 кісточок. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}, \quad P(B) = \frac{3}{28}, \quad P(D) = \frac{1}{28}.$$

Назвемо важливіші властивості ймовірності випадкової події.

1. Якщо C — подія неможлива, то $P(C) = 0$.
2. Якщо B — подія достовірна, то $P(B) = 1$.
3. Якщо X — подія випадкова, то $0 \le P(X) \le 1$.
4. Якщо $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ — елементарні події, що вичерпують деяке випробування, то

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1.$$

www.4book.org

Подібно до геометрії теорію ймовірностей можна будувати на основі *системи аксіом*. При цьому вводяться основні поняття теорії ймовірностей та відношення між ними і формулюються аксіоми. Всі інші поняття і твердження базуються на побудованій системі аксіом з нехтуванням інтуїції та досвіду. Аксіоматизувати теорію ймовірностей можна різними способами. Це в різні часи робили Г. Больман (1908), С. Н. Бернштейн (1917), Р. Мізес (1919, 1928), А. Ломницький (1923). Найкращою з таких вважається система аксіом, запропонована в 1929 р. А. М. Колмогоровим. З нею ви ознайомитеся у старшій школі та вищих навчальних закладах.

Аксіоматичний підхід дає змогу широко використовувати теорію ймовірностей до розв'язування різних теоретичних і практичних завдань, а також визначати межі її застосування.

Перевірте себе

1. Які події називають випадковими?
2. Наведіть приклади випадкових подій.
3. Які події називають неможливими, достовірними?
4. Наведіть приклад простору елементарних подій.
5. Які події називають елементарними? Наведіть приклади.
6. Чому дорівнює ймовірність випадкової події?
7. Чому дорівнює ймовірність достовірної події? А неможливої?
8. Що таке відносна частота випадкової події?

Виконаємо разом!

1. Маємо два кубики, в яких по 2 грані відповідно червоного, жовтого і зеленого кольору. Підкидають їх разом і фіксують кольори граней, на які впадуть обидва кубики. Запишіть простір елементарних подій для такого випробування.

✔ Розв'язання. Якщо обидва кубики впали на жовті грані, то цю подію позначатимемо символом *жж*. Якщо один впаде на жовту, інший — на червону, то таку подію позначатимемо *жч*. Тоді простір елементарних подій для заданого випробування буде $\Omega = \{жж, зз, чч, жз, жч, зч\}$.

2. Набираючи номер телефону, абонент забув останню цифру і набрав її навмання. Яка ймовірність того, що він правильно набрав цей номер?

www.4book.org

✔ Розв'язання. Число всіх можливих випадків $n = 10$, а число сприятливих випадків $m = 1$. Тому шукана ймовірність $P = \frac{1}{10}$.

3. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на них випадуть очки, сума яких дорівнює: а) 4; б) 5; в) 8?

✔ Розв'язання. Кожній розглядуваній події поставимо у відповідність двоцифрове число, цифри якого відповідають очкам, що випали при падінні першого і другого кубиків. Можливі такі випадки:

$$\begin{array}{c} 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots.\\ 61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66. \end{array}$$

Як бачимо, для даного випробування простір елементарних подій Ω містить 36 елементів.

а) Суму очок, що дорівнює 4, дають три числа: 13, 22 і 31. Маємо 3 сприятливі елементарні події із 36. Тому шукана ймовірність:

$$P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

б) Суму очок 5 дають 4 пари кубиків: 14, 23, 32 і 41, тому

$$P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

в) Суму очок 8 дають 5 пар: 26, 35, 44, 53, 62, тому

$$P(8) = \frac{5}{36}.$$

Виконайте усно

759. Якою з погляду теорії ймовірностей є подія: а) при падінні грального кубика випадуть п'ять очок; б) дитина народиться 30 лютого; в) перестановкою букв у слові «зебра» одержати слово «береза»; г) вибране навмання двоцифрове число виявиться меншим за 100; ґ) побудований графік непарної функції виявиться симетричним відносно початку координат.

www.4book.org

760. Яка ймовірність того, що при падінні грального кубика випаде: а) два очки; б) парна кількість очок; в) кількість очок, кратна 3?

761. Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що вона: а) є дублем; б) не є дублем?

762. Опишіть простір елементарних подій для даного експерименту: а) встановлення дня народження довільно обраного учня; б) визначення кількості коренів квадратного рівняння; в) установлення кількості спільних точок кола і гіперболи, побудованих в одній системі координат.

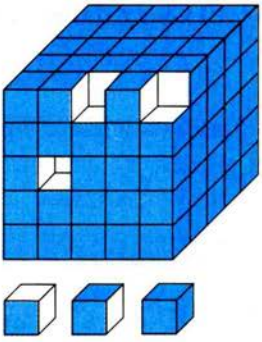
Рівень А

763. Знайдіть імовірність того, що ваш товариш народився: а) в середу; б) навесні; в) у вересні; г) 1 січня.

764. У 9-А класі навчаються 20 учнів, 25 % з яких — відмінники. Доводити теорему синусів навмання викликають одного учня. Яка ймовірність того, що це буде відмінник?

765. Набираючи номер телефону, абонент забув першу цифру і набрав її навмання. Яка ймовірність того, що потрібний номер він набрав правильно?

766. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 125 рівних кубиків і зсипали їх у торбину. Яка ймовірність того, що беручи з торбини кубик навмання, візьмете такий, у якого пофарбовано: а) три грані; б) тільки дві грані; в) тільки одна грань (мал. 125)?



Мал. 125

767. З букв, написаних на окремих картках, склали слово ТОТОЖНІСТЬ. Потім ці картки перевернули, перетасували і взяли навмання одну з них. Яка ймовірність того, що на ній виявиться: а) буква Т; б) буква О; в) буква Н?

768. У торбині 5 білих і 7 чорних куль. Яка ймовірність того що, беручи навмання, виймуть з неї: а) білу кулю; б) чорну кулю?

www.4book.org

769. У мішечку 10 згорнутих папірців. На двох із них написано «ні», а на решті — «так». Яка ймовірність того, що на взятому навмання папірці виявиться слово «так»?

770. В ящику 10 червоних і 5 жовтих куль. З нього вийняли одну кулю червоного кольору і відклали вбік. Після цього з ящика беруть ще одну кулю навмання. Яка ймовірність того, що вона виявиться жовтою?

771. У змаганнях беруть участь 25 учнів першої школи, 15 — другої і 10 — третьої. Яка ймовірність того, що першим виступатиме учень з першої школи?

772. Пасажир чекає трамвай № 1 або № 3 на зупинці, де зупиняються трамваї № 1, 3, 4 і 9. Вважаючи, що всі трамваї підходять однаково часто, знайдіть імовірність того, що першим прийде до зупинки трамвай, якого чекає пасажир.

Рівень Б

773. На 1000 білетів лотереї припадає 1 виграш 1000 грн., 10 виграшів по 200 грн., 50 — по 100 грн., 100 — по 50 грн. Решта білетів невиграшні. Знайдіть імовірність виграшу на один білет, не меншого від 100 грн.

774. У партії зі 100 деталей 75 деталей першого сорту, 15 — другого, 8 — третього і 2 деталі браковані. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться першого або другого сорту?

775. Із 10 карток, занумерованих числами від 1 до 10, вимають одну. Яка ймовірність того, що її номер виявиться меншим за 7 і більшим за 3?

776. В урні є 30 жетонів з номерами від 1 до 30. Яка ймовірність того, що перший витягнутий з урни навмання жетон не міститиме цифри 6?

777. З 15 карток, нумерованих числами від 1 до 15, вимають одну. Яка ймовірність того, що номер вийнятої картки виявиться: а) кратним 3; б) кратним 4?

778. Зі 100 науковців установи англійською володіють 90, німецькою — 85, 80 осіб — обома цими мовами. Знайдіть імовірність того, що вибраний навмання нау-

www.4book.org

ковець з цієї установи: а) володіє англійською або німецькою; б) не знає ні англійської, ні німецької.

» **779.** Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність появи хоча б однієї шістки?

780. Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що на ній є: а) всього 9 очок; б) більш ніж 9 очок; в) менш ніж 9 очок?

781. Пофарбований дерев'яний кубик розпиляли на 1000 рівних кубиків і зсипали їх у торбину. Яка ймовірність того, що беручи з торбини навмання один кубик, ви візьмете такий, який має: а) принаймні одну пофарбовану грань; б) тільки дві пофарбовані грані?

» **782.** Знайдіть імовірність того, що вибране навмання двоцифрове число кратне 5.

783. Одночасно підкидають дві однакові монети. Знайдіть імовірність події: а) A = {випав один герб і одна решка}; б) B = {випало не менше одного герба}.

784. Стрілець у незмінних умовах робить 5 серій пострілів по мішені. В кожній серії — 100 пострілів. Результати стрільби занесено в таблицю. Знайдіть відносну частоту влучення в мішень: а) в кожній серії; б) у перших 300 пострілах; в) в останніх 300 пострілах; г) у всіх 500 пострілах. Сформулюйте гіпотезу про ймовірність влучення в мішень.

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість влучень у мішень	69	64	72	78	65

785. Перевірили 500 довільно вибраних деталей і виявили, що 5 із них — браковані. Скільки бракованих деталей можна очікувати в партії з 3 500 штук?

786*. Дослідіть розподіл хлопчиків і дівчаток у родинах, які мають троє дітей різного віку. Вважайте, що ймовірність народження хлопчика і дівчинки однакова.

www.4book.org

Вправи для повторення

787. Функцію задано формулою $f(x) = -5x + 3$. Знайдіть $f(0,1)$; $f(-2,5)$; $f(-10)$; $f(0,3)$; $f(-1,2)$.

788. Розв'яжіть рівняння:

а) $1 - 4x - 5x^2 = 0$; б) $-3x^2 + 5x + 2 = 0$.

789. Розв'яжіть нерівність:

а) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$; б) $x^2 + 8x + 8 \le 3x^2$.

790. Побудуйте графік функції: а) $y = |x^2 - x|$; б) $y = x^2 - |x|$.

§19. ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИСТИКУ

Науку, в якій досліджуються кількісні характеристики масових явищ, називають ***математичною статистикою*** (від латинського слова *status* — стан, становище).

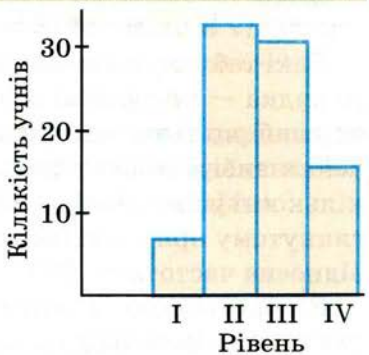
Приклад 1. Із 87 дев'ятикласників однієї школи 7 мають оцінки, що відповідать I рівню навчальних досягнень, 33 — II, 31 — III і 16 — IV рівню. Це кількісні характеристики проведеної контрольної роботи. Їх можна подати у вигляді таблиці.

Рівень навчальних досягнень	I	II	III	IV
Кількість учнів	7	33	31	16

Наочно зобразити ці дані можна за допомогою стовпчастої діаграми (мал. 126).

Стовпчасті діаграми у статистиці називають ***гістограмами*** (від грецьких слів *histós* — стовп, *gramma* — написання).

У розглянутому прикладі йдеться про 87 учнів. Справа значно ускладнюється, якщо досліджують ***масові явища***, що



Мал. 126

www.4book.org

охоплюють тисячі або й мільйони досліджуваних об'єктів. Наприклад, взуттєвикам треба знати, скільки взуття слід випускати того чи іншого розміру. Як це з'ясувати? Опитати всіх, тобто десятки мільйонів чоловіків і жінок, — надто дорого і довго. Тому роблять ***вибірку*** — формують скінченну сукупність незалежних результатів спостережень. У даному випадку опитують вибірково лише кілька десятків чи сотень людей.

Приклад 2. Припустимо, що, опитавши 60 жінок, розміри їхнього взуття записали в таблицю.

23,5	24	23,5	23	24,5	23	22,5	24,5	22,5	23,5	23,5	23,5
25,5	21	24	25	23,5	22	23	24,5	23	24,5	23	24,5
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5	22	23,5	26,5	25,5	25	26
24	23	24	24,5	22	24	23,5	21,5	23,5	25	24	22,5
25,5	21,5	24,5	26	25	23,5	22,5	24	23	22,5	24	25

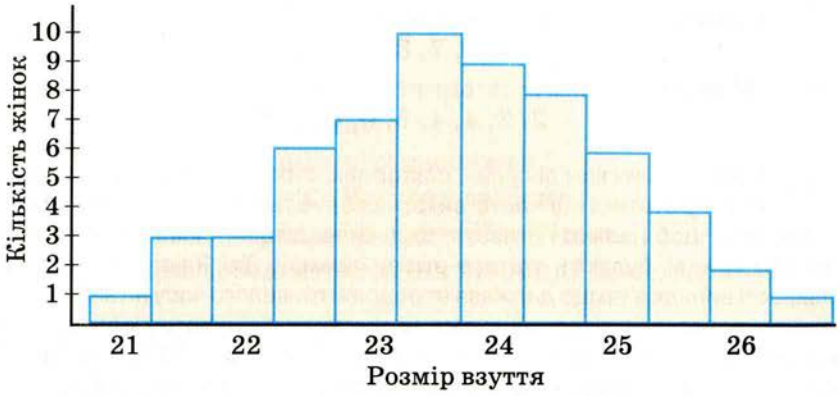
Це вибірка з 60 значень (даних). Для зручності їх групують у класи (за розмірами взуття) і відмічають, скільки значень вибірки містить кожний клас.

Розмір взуття	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5
Кількість жінок	1	3	3	6	7	10	9	8	6	4	2	1

Такі таблиці називають ***частотними***. В них числа другого рядка — ***частоти***; вони показують, як часто трапляються у вибірці ті чи інші її значення. ***Відносною частотою*** значення вибірки називають відношення частоти значення до кількості усіх значень вибірки, виражене у відсотках. У розглянутому прикладі частота розміру взуття 24 дорівнює 9, а відносна частота — 15 %, бо $9 : 60 = 0{,}15 = 15\ \%$.

За частотною таблицею можна побудувати гістограму (мал. 127). Вона наочно показує, яку частину взуття бажано випускати того чи іншого розміру. Зрозуміло, що одержані

www.4book.org



Мал. 127

в такий спосіб висновки тільки ймовірні, наближені. Але для практичних потреб цього буває досить.

Вибірки характеризують ***центральними тенденціями***: модою, медіаною, середнім значенням.

Мода вибірки — це те її значення, яке трапляється найчастіше.

Медіана вибірки — це число, яке «поділяє» навпіл упорядковану сукупність усіх значень вибірки.

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне усіх її значень.

Нехай дано вибірку: 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6, 4. (*)

Упорядкуємо її: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6.

Мода даної вибірки дорівнює 4, оскільки 4 трапляється найчастіше (тричі).

Медіана даної вибірки дорівнює 3, бо число 3 «поділяє» впорядковану вибірку навпіл: перед нею і після неї — однакові кількості членів упорядкованої вибірки.

Якщо впорядкована вибірка має парне число значень, то її медіана дорівнює півсумі двох її серединних значень. Наприклад, для вибірки 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6 медіана

$$m = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$$

Середнє значення вибірки (*):

$$\frac{1+1+2+2+3+3+4+4+4+5+6}{11} = \frac{35}{11}.$$

www.4book.org

Вибірка може не мати моди, наприклад:

$$4, 5, 6, 7, 8;$$

мати дві моди:

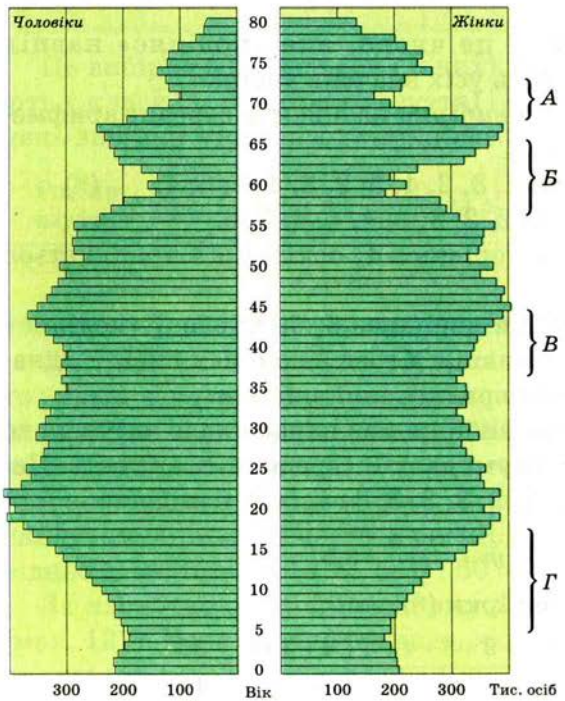
$$2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8.$$

Крім відомих вам лінійних, секторних, стовпчастих діаграм і гістограм у статистиці часто використовують діаграми інших видів. Наприклад, щоб наочно показати, скільки населення певної статі й віку живе в державі, будують *статево-вікову піраміду.* Так її називають, бо в більшості випадків (якщо держава впродовж тривалого часу не зазнавала великих потрясінь) діаграма схожа на високу ступінчасту піраміду. Для українців ця діаграма на піраміду не схожа. На малюнку 128 наведено ту її частину, що відповідає людям віком до 80 років (станом на 2007 р.).

Зверніть увагу на проміжки, позначені буквами *А*, *Б*, *В*, *Г*. Проміжок *А* відповідає істотному зменшенню народжуваності в 1931—1933 рр. Чим зумовлені такі негативні демографічні явища в історії України?

Радимо навчитися «читати» і такі діаграми, робити висновки, які випливають з них.

Чи правильно, що в Україні хлопчиків народжується більше, ніж дівчаток, а після 25 років чоловіків стає менше, ніж жінок?



Мал. 128

www.4book.org

Перевірте себе

1. Що досліджує математична статистика?
2. Що таке гістограма?
3. Які явища називають масовими?
4. Що таке вибірка? Частота вибірки?
5. Назвіть центральні тенденції вибірки.
6. Що таке середнє значення вибірки? А медіана, мода?

Виконаємо разом!

1. Перевірка інспекцією якості 20 твердих сирів сорту «Український» (за вмістом жиру) дала такі результати.

Вміст жиру, %	44	45	46	47	48
Кількість випробувань	1	4	5	7	3

Знайдіть центральні тенденції вибірки.

✔ Розв'язання. Мода даної вибірки дорівнює 47, бо це значення трапляється найчастіше (7 разів).

Вибірка має парне число значень, тому її медіана дорівнює півсумі двох її серединних значень — під десятим і одинадцятим номерами, бо всього членів вибірки 20. Цим номерам у вибірці (44; 45; 45; 45; 45; 46; 46; 46; 46; 46; 47...) відповідають значення 46 і 47. Отже, $(46 + 47) : 2 = 46{,}5$ — медіана вибірки.

Знайдемо середнє значення вибірки:

$$\frac{44 \cdot 1 + 45 \cdot 4 + 46 \cdot 5 + 47 \cdot 7 + 48 \cdot 3}{20} = \frac{927}{20} = 46{,}35.$$

Відповідь. Мода — 47; медіана — 46,5; середнє значення — 46,35.

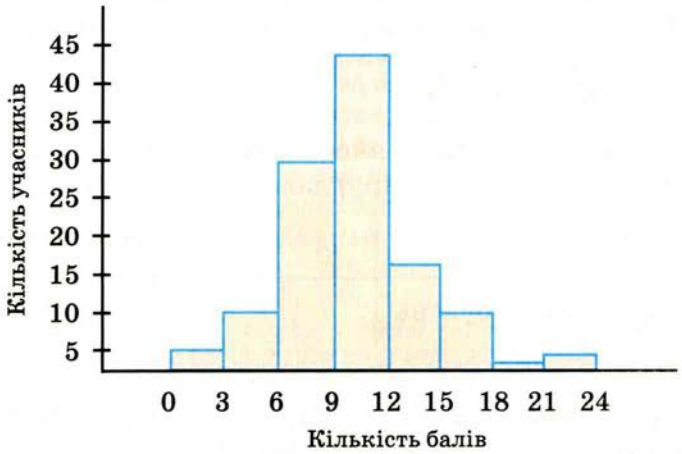
2. За розв'язування задач п'ять учасників олімпіади одержали від 0 до 3 балів, десять — від 4 до 6, тридцять — від 7 до 9, сорок чотири — від 10 до 12, шістнадцять — від 13 до 15, десять — від 16 до 18, два — від 19 до 21, три — від 22 до 24 балів. Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму.

✔ Розв'язання. Частотна таблиця має такий вигляд

www.4book.org

Кількість балів	0 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12	13 – 15	16 – 18	19 – 21	22 – 24
Кількість учасників	5	10	30	44	16	10	2	3

Відповідну гістограму наведено на малюнку 129.



Мал. 129

Виконайте усно

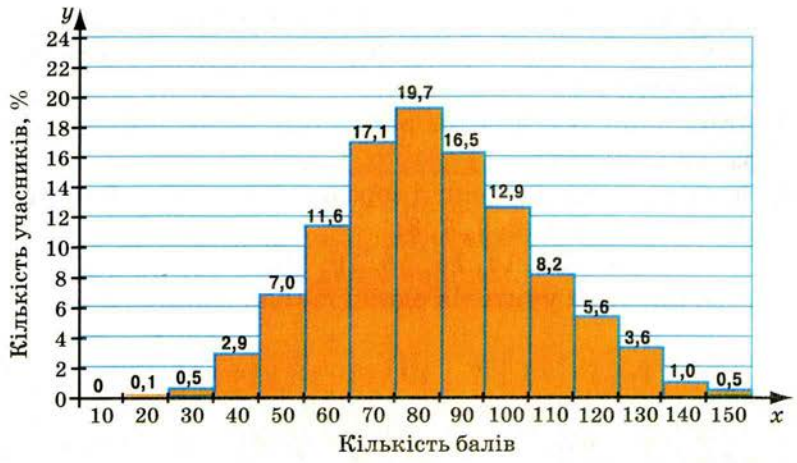
791. Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки:
а) 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11;
б) 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15, 16, 17.

792. У конкурсі «Кенгуру» брали участь 2 000 осіб рівня «Кадет». На мал. 130 зображено відповідність між кількістю учасників (%) і кількістю балів, яку вони набрали. Яку інформацію про результати конкурсу можна одержати за допомогою даної гістограми?

793. Укажіть центральні тенденції вибірки і відносну частоту кожного її значення, якщо вибірку подано у формі такої частотної таблиці.

−30°	−20°	−10°	0°	10°	20°	30°
1	3	6	17	13	8	2

www.4book.org



Мал. 130

Рівень А

794. Знайдіть середнє арифметичне усіх цілих чисел x таких, що:

а) $10 \le x \le 90$; б) $-10 < x < 40$; в) $-n < x < n$.

795. Дано 100 чисел; з них число 2 трапляється 15 разів, число 4 — 40, число 8 — 20, число 9 — 20, число 10 — 5 разів. Знайдіть їхнє середнє арифметичне.

796. Вимірявши зріст 40 учнів у сантиметрах, одержали таку частотну таблицю.

Зріст, см	162	163	164	165	166	167	168	169	170
Кількість учнів	3	5	4	2	6	10	6	3	1

Побудуйте відповідну гістограму. Визначте відносну частоту кожного значення.

797. За таблицею побудуйте гістограму розподілу дітей, які відвідують гурток малювання, за роками народження.

Рік народження	2000	2001	2002	2003
Кількість учнів	1	20	3	2

www.4book.org

798. Дано 50 чисел: з них число 2 трапляється 10 разів, число 3 — 20 і число 5 — 20 разів. Знайдіть їх середнє арифметичне.

799. Чому дорівнює середнє арифметичне перших 99 натуральних чисел?

800. Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки:
а) 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8;
б) 12, 17, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 13, 13.

801. Робочий стаж учителів однієї школи вказано в таблиці.

Стаж у роках	1	2	3	7	10	12	13	14	17	18	21	26
Кількість учителів	1	3	2	1	3	4	1	2	3	2	1	1

Знайдіть середнє значення, моду і медіану цієї вибірки даних.

802. Учні класу написали контрольну роботу з алгебри. З них 4 одержали оцінки четвертого рівня навчальних досягнень, 16 — третього, 12 — другого і 3 — першого рівня. Зведіть ці дані в таблицю і побудуйте за нею кругову і стовпчасту діаграми.

803. Визначаючи розміри верхнього одягу 50 жінок, результати записали в таблицю.

50	44	50	48	54	46	52	48	54	52
48	48	52	50	46	50	54	48	56	50
52	48	42	56	50	48	50	46	54	48
46	46	48	48	52	48	56	50	52	46
52	48	50	54	50	50	54	44	58	46

Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму.

804. Щоб з'ясувати, скільки і яких кашкетів слід пошити, виміряли в сантиметрах обводи голів 35 вибраних курсантів. Результати виявились такими.

www.4book.org

Розмір	53	54	55	56	57	58	59
Кількість курсантів	1	7	10	12	3	1	1

Побудуйте відповідну гістограму та обчисліть центральні тенденції вибірки. Знайдіть відносну частоту кожного значення даної вибірки.

Рівень Б

805. Опитавши 60 чоловіків про розміри їхнього взуття, склали таку таблицю.

27,5	28	25,5	28	29	28,5	26	28	27,5	29,5	26,5	30,5
26,5	27,5	29,5	27,5	26	30	27,5	27	29	27	28,5	27,5
29,5	25,5	27	28,5	28	27	28	25	26	28	30	27
27	28,5	29	26	26,5	28,5	26,5	27,5	28	29,5	26,5	29
28	27,5	28,5	27,5	29	27	28	29	27	26,5	28,5	27,5

Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму. Визначте частоту і відносну частоту кожного значення вибірки.

806. На уроці фізкультури 11 дівчат-дев'ятикласниць у стрибках у висоту показали такі результати: 90 см, 125 см, 125 см, 130 см, 130 см, 135 см, 135 см, 135 см, 135 см, 140 см, 140 см. Який результат найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат цього класу?

807. Шість учасників математичної олімпіади за розв'язування задач набрали менше 3 балів, десять — від 3 до 6, тридцять два — від 7 до 9, сорок п'ять — від 10 до 12, сімнадцять — від 13 до 15, вісім — від 16 до 18, п'ять — понад 18 балів. Складіть за цими результатами частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму.

808. Щоб з'ясувати, як часто різні голосні звуки трапляються в українській мові, можна підрахувати, скільки

www.4book.org

літер, що позначають голосні звуки, є в різних текстах. Полічивши голосні в «Заповіті» Т. Шевченка, одержали дані, наведені в таблиці (п'ять рисок 𝍸 означають число 5). Побудуйте за таблицею гістограму. Знайдіть центральні тенденції цієї сукупності літер. Візьміть текст з історії, фізики, хімії, математики такого самого обсягу, як «Заповіт», використайте такий самий набір голосних і з'ясуйте, чи зберігаються виявлені тенденції.

а	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
е	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	24
є	||	2
и	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	22
і	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	21
ї	||||	4
о	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	48
у	𝍸 𝍸 𝍸	15
ю	𝍸	5
я	𝍸 ||	7

809. Пекарня випікає кілограмові калачі. Під час перевірки виявилось, що маса трьох зі ста калачів менша від 1 кг на 31—40 г, п'ятнадцяти — на 21—30 г, двадцяти — на 11—20 г, тридцяти — на 1—10 г; маса сімнадцяти калачів більша від 1 кг на 1—9 г, а двох — на 10—19 г. Складіть частотну діаграму і побудуйте відповідну гістограму.

810. Розміри денної виручки (у тисячах гривень) у 30 випадково вибраних магазинах такі.

42	24	49	76	45	27	39	21	58	40
28	78	44	66	20	62	70	81	7	68
99	76	63	87	65	104	46	20	72	93

www.4book.org

Складіть частотну таблицю на 5 інтервалів і побудуйте відповідну гістограму.

Вправи для повторення

811. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{x+7}{x-3}<0$; б) $\frac{x+4}{x-5}>0$;

в) $\frac{2-z}{z+3}\le 3$; г) $\frac{5-y}{y+12}\ge 7$.

812. Із 100 студентів-першокурсників 60 вивчають англійську мову, 30 — німецьку, 10 — французьку. Знайдіть імовірність того, що вибраний навмання студент цього факультету вивчає німецьку або французьку мову.

813. Дано наближені значення: $a = 1{,}83 \cdot 10^6$ і $c = 5{,}36 \cdot 10^7$. Користуючись правилами підрахунку цифр, обчисліть значення виразу:

а) $a + c$; б) ac; в) $c - a$.

814. Густина алюмінію становить $2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Знайдіть масу алюмінієвого куба, ребро якого дорівнює:

а) 0,2 м; б) 10^{-3} м; в) $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ дм.

815. Корона царя Гієрона, виготовлена із золота і срібла, важить 10 кг. У воді її маса становить 99,55 % її маси в повітрі. Знаючи, що 1 кг золота втрачає у воді $\frac{9}{77}$ кг, а срібло – $9\frac{11}{12}$ % своєї маси в повітрі, обчисліть, скільки золота і скільки срібла затратив майстер на виготовлення корони.

www.4book.org

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант I

1°. Дано вибірку: 7, 5, 4, 6, 3, 4, 7, 3, 8, 5, 5, 6, 6, 5. Знайдіть її моду, медіану і середнє значення. Побудуйте відповідну гістограму.

2•. Ціна виробу спочатку зросла на 10 %, а потім знизилась на 20 %. Як і на скільки відсотків змінилась ціна внаслідок цих двох переоцінок?

Варіант II

1°. Дано вибірку: 1, 1, 3, 3, 5, 4, 4, 2, 3, 6, 3, 4, 5, 6, 7. Знайдіть її моду, медіану і середнє значення. Побудуйте відповідну гістограму.

2•. Вкладник поклав до банку 1000 гривень під 17 % річних (складні відсотки). Скільки відсоткових грошей йому мають нарахувати через 3 роки?

Варіант III

1°. Дано вибірку: 3, 2, 3, 5, 4, 7, 6, 3, 4, 5, 5, 4, 6, 3. Знайдіть її моду, медіану і середнє значення. Побудуйте відповідну гістограму.

2•. Скільки потрібно змішати 10-відсоткового і 30-відсоткового розчинів кислоти, щоб одержати 8 кг 15-відсоткового розчину?

Варіант IV

1°. Дано вибірку: 6, 5, 8, 4, 8, 9, 7, 5, 5, 7, 6, 7, 7, 6. Знайдіть її моду, медіану і середнє значення. Побудуйте відповідну гістограму.

2•. Ціна виробу спочатку знизилась на 20 %, а потім зросла на 10 %. Як і на скільки відсотків змінилась ціна внаслідок цих двох переоцінок?

www.4book.org

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Моделлю називається спеціально побудований об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта. Математичні моделі створюють за допомогою математичних виразів, функцій, рівнянь, нерівностей тощо.

Багато прикладних задач зводяться до розв'язування задач на відсотки, визначення ймовірності випадкової події, аналізу статистичних даних тощо.

Відсоток (або *процент*) — це одна сота: 1 % = 0,01. Найпростіші задачі на відсотки: знаходження відсотків числа, числа за відсотками і відсоткового відношення.

Формула складних відсотків:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^n.$$

Випадкові події — такі, які можуть відбутися або не відбутися.

Якщо в n випробуваннях подія X відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає відносну частоту появи події X. Число, біля якого коливається відносна частота події, виражає *ймовірність* цієї події, її позначають буквою P (від англійського слова *probability* — ймовірність).

Математична статистика — розділ прикладної математики, в якому досліджуються кількісні характеристики масових явищ. Статистичні дані визначають здебільшого за допомогою *вибірки* — скінченної сукупності незалежних результатів спостережень. Вибірку впорядковують, складають частотну таблицю, на її основі будують відповідну діаграму або гістограму.

Центральні тенденції вибірки:

а) *середнє значення вибірки* — середнє арифметичне усіх її значень;

б) *мода вибірки* — це те її значення, яке трапляється найчастіше;

в) *медіана вибірки* — серединне значення, яке «поділяє» навпіл упорядковану сукупність усіх значень вибірки.

www.4book.org

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Прикладна математика існує кілька тисячоліть. Учені Стародавнього Єгипту обчислювали площі полів, об'єми приміщень тощо. Уся їхня математика була прикладною. Тільки в V—IV ст. до н. е. в Греції почала створюватись теоретична (чиста) математика.

Окремі математичні моделі вчені використовували ще в античні часи. Йдеться, зокрема, про застосування методу подібності до розв'язування задач на побудову. Сучасні поняття *математична модель* і *математичне моделювання* набули широкого використання тільки в XX ст. у зв'язку з розвитком кібернетики.

Відсотки раніше використовували виключно в грошових розрахунках. Давали таке означення: «Відсоток — це прибуток, одержуваний з кожних ста карбованців капіталу, відданого на певний строк». Слово «капітал» ввів Л. Пізанський, знак «%» з'явився вперше в італійських працях у XV ст. Першу таблицю складних відсотків надрукував нідерландський математик С. Стевін (1548—1620) у XVI ст. Він перший в Європі ввів і десяткові дроби.

З *наближеними значеннями* величин учені мали справу ще понад 2 000 років тому. Наукову теорію про наближені обчислення створено в XX ст. Започаткував її російський математик і спеціаліст із суднобудування О. М. Крилов (1863—1945).

Деякі властивості випадкових подій виявили італійські математики Л. Пачолі (1445—1514) і Д. Кардано (1501—1576) у зв'язку з дослідженнями азартних ігор.

Теорію ймовірностей як галузь математики започаткували французькі вчені П. Ферма (1601 — 1665) і Б. Паскаль (1623—1662).

Збирати й аналізувати статистичні дані люди почали давно. В Китаї переписи населення робилися ще понад 4 тис. років тому. В Київській Русі переписи здійснювалися з 1245 р.

www.4book.org

Великий внесок у розвиток математичної статистики зробили У. Петті, А. Муавр, Л. Ейлер, Я. Бернуллі, П. Лаплас, С. Пуассон та ін.

У Російській імперії в XIX ст. проблеми статистики досліджували, зокрема, українські математики В. Я. Буняковський і М. В. Остроградський.

М. В. Остроградський (1801—1862)

М. В. Остроградський народився в селі Пашенна на Полтавщині, навчався в Полтавській гімназії, Харківському університеті, у Парижі; був академіком Російської, Туринської, Римської, Американської академій наук, членом-кореспондентом Паризької академії.

М. В. Остроградський одержав основоположні результати в галузі математичного аналізу, теоретичної механіки, теорії ймовірностей, математичної фізики, балістики, теорії теплоти, написав «Курс небесної механіки». Багато уваги приділяв наближеним обчисленням, відсоткам. Розробив статистичні методи бракування товарів.

Пам'ятник М. В. Остроградському споруджено в м. Полтаві.

М. П. Кравчук (1892—1942)

Багато працював у галузі прикладної математики і український математик **М. П. Кравчук.**

Народився він у селі Човниця на Волині, закінчив Луцьку гімназію, Київський університет. Із 1925 р. — професор, з 1929 р. — академік Всеукраїнської академії наук, її вчений секретар, очолював Комісію математичної статистики. 1938 р. його безпідставно репресовано. Загинув на Колимі.

Пам'ятник М. П. Кравчуку споруджено в Києві.

www.4book.org

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 3

1. Банк сплачує своїм вкладникам 15 % річних. Скільки грошей потрібно покласти на рахунок, щоб через рік отримати 3000 грн. прибутку?

а) 10 000 грн.; б) 20 000 грн.; в) 30 000 грн.; г) 45 000 грн.

2. З цілих чисел від 1 до 20 називають одне. Яка ймовірність того, що воно виявиться дільником числа 20?

а) 0,3; б) 0,4; в) 0,5; г) 0,6.

3. Середнє арифметичне усіх цілих чисел проміжка $-10 < x < 40$, дорівнює:

а) 10; б) 15; в) 20; г) 30.

4. Протягом перших десяти днів жовтня о 7 год ранку температура була такою: 6°, 8°, 8°, 7°, 5°, 8°, 6°, 7°, 8°, 8°. Знайдіть моду вибірки.

а) 7°; б) 6°; в) 8°; г) 5°.

5. Знайдіть медіану вибірки 1, 7, 5, 7, 3, 7, 1, 8, 3.

а) 1; б) 7; в) 5; г) 3.

6. Математичною моделлю для знаходження площі арени цирку може бути формула:

а) $S = R^2$; б) $C = 2\pi R$; в) $S = \pi R^2$; г) $C = 4R$.

7. Якою стане концентрація розчину, якщо до 5 кг води додати 560 г солі?

а) 17 %; б) 10 %; в) 11 %; г) 16%.

8. На скільки відсотків зміниться ненульове значення виразу, якщо його збільшено втричі?

а) На 100 %; б) на 200 %; в) на 300 %; г) на 400 %.

9. З пакета взяли половину всіх горіхів, потім — половину остачі, потім — половину нової остачі, нарешті — половину нової остачі. Після цього в пакеті залишилося 5 горіхів. Скільки горіхів було в пакеті спочатку?

а) 80; б) 40; в) 75; г) 60.

10. Андрій загубив одну шахову фігуру. Яка ймовірність того, що вона — тура?

а) 0,5; б) 0,025; в) 0,0625; г) 0,125.

www.4book.org

Типові завдання до контрольної роботи № 3

1°. В коробці 20 цукерок у синіх обгортках і 80 — у червоних. Яка ймовірність того, що взята навмання цукерка виявиться в синій обгортці?

2°. Площа Африки дорівнює 30 065 000 км^2, або 20,3 % від площі суходолу земної кулі. Знайдіть площу суходолу.

3°. Вкладник вніс до банку 5000 грн. під складних 14 %. Скільки грошей буде у вкладника через 3 роки, якщо він не забиратиме відсоткові гроші?

4•. Розв'яжіть задачу, склавши до неї математичну модель у вигляді схеми і рівняння. Дріт завдовжки 90 м розрізали на дві частини так, що друга виявилася втричі довшою за першу. Знайдіть довжину кожної частини.

5°. Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки: 7, 5, 3, 7, 6, 7, 4, 6, 8, 5

6•. На 100 000 білетів лотереї припадають 662 виграші. З них: 2 по 5 000 грн., 10 по 1 000 грн., 50 по 200 грн., 100 по 50 грн., 500 по 10 грн. Решта білетів невиграшні. Знайдіть імовірність виграшу понад 200 грн. на один білет.

7•. Аналізуючи кількість проданих авіаквитків у квітні, отримали такі дані:

57	55	60	46	55	54	57	54	49	52
51	65	60	56	45	59	53	61	47	42
47	58	56	53	59	64	49	58	59	63

Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму. Обчисліть центральні тенденції вибірки

8••. Попит на яблука в торговельній мережі описується рівнянням $Q_d = 3\,500 - 100P$, а пропозиція товару — рівнянням $Q_s = 1\,000 + 250P$, де Q — кількість кілограмів, куплених чи проданих за день; P — ціна в гривнях. Визначте: а) параметри рівноваги ринку; б) що буде — дефіцит чи надлишок яблук на ринку, якщо ціна дорівнюватиме 5 грн. за 1 кг.

9••. Знайдіть наближене значення виразу $a^2 - \pi r^2$ з точністю до сотих, якщо $a \approx 10{,}45$ см і $r \approx 2{,}73$ см.

www.4book.org

РОЗДІЛ

4 ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Послідовність — певна черговість подій, явищ, станів роботи тощо, порядок розташування чогось.

Тлумачний словник української мови

www.4book.org

Послідовність — це множина будь-яких об'єктів, розташованих у певному порядку. Якщо членами послідовності є числа, її називають *числовою послідовністю*. Найпростіші й найважливіші приклади числових послідовностей: арифметична і геометрична прогресії.

Основні теми розділу:

- **послідовність;**
- **арифметична прогресія;**
- **геометрична прогресія;**
- **задачі на обчислення сум.**

§20. ПОСЛІДОВНІСТЬ

Уявімо, що підряд виписано всі парні натуральні числа:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

Це ***послідовність*** парних натуральних чисел. Число 2 — її перший член, 4 — другий, 6 — третій, 20 — десятий і т. д.

Наведемо ще кілька прикладів числових послідовностей:

1, 2, 3, 4, 5, ... — послідовність натуральних чисел;

1, 3, 5, 7, 9, ... — послідовність непарних натуральних чисел;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ... — послідовність чисел, обернених до натуральних.

Послідовності бувають ***скінченні*** та ***нескінченні***. Скінченною, наприклад, є послідовність одноцифрових натуральних чисел:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Послідовність усіх натуральних чисел нескінченна. Записуючи нескінченну послідовність, після кількох її перших членів ставлять три крапки.

Перший, другий, третій члени послідовності парних натуральних чисел дорівнюють відповідно 2, 4, 6. Пишуть: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. А чому дорівнює її n-й член a_n? Оскільки кожний член послідовності парних натуральних чисел удвоє більший від свого порядкового номера, то її n-й член дорівнює $2n$, тобто

$$a_n = 2n.$$

www.4book.org

Це формула n-го члена послідовності парних натуральних чисел.

Формула n-го члена послідовності непарних натуральних чисел:

$$a_n = 2n - 1.$$

Ця формула схожа на формулу $y = 2x - 1$, яка задає лінійну функцію. Тільки в останній аргумент x може бути будь-яким дійсним числом, а у формулі $a_n = 2n - 1$ змінна n може набувати тільки натуральних значень. Кожний член послідовності відповідає деякому натуральному числу — порядковому номеру члена послідовності. Тому **числова послідовність — функція, задана на множині усіх натуральних чисел або на множині перших n натуральних чисел.** Якщо функцію задано на множині усіх натуральних чисел, то маємо нескінченну числову послідовність; якщо функцію задано на множині перших n натуральних чисел, то вона є скінченною послідовністю, кількість членів якої дорівнює n.

Якщо відома формула n-го члена послідовності, то нескладно обчислити будь-який її член. Напишемо кілька перших членів послідовності, n-й член якої $a_n = n^2 + 2$. Надаючи змінній n значення 1, 2, 3, 4, 5, ... , одержимо перші члени послідовності:

$$3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \ldots .$$

Тисячний член цієї послідовності:

$$a_{1000} = 1000^2 + 2 = 1\,000\,002.$$

Набагато важче розв'язувати обернену задачу — для даної послідовності знайти її n-й член. Наприклад, формула n-го члена послідовності простих чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... невідома і досі, хоч математики шукали її понад 2 000 років.

Кілька перших членів послідовності не задають її однозначно. Наприклад, існує безліч різних послідовностей, перші члени яких 2, 4, 6, 8. Зокрема, такі перші члени мають послідовності, n-ні члени яких

$$a_n = 2n \text{ і } c_n = 2n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

Із двох сусідніх членів a_i і a_{i+1} послідовності член a_{i+1} називають ***наступним*** за a_i, а a_i — ***попереднім*** відносно a_{i+1}.

www.4book.org

Послідовність називають *зростаючою*, якщо кожний її член, починаючи з другого, більший від попереднього. Послідовність називають *спадною*, якщо кожний її член, починаючи з другого, менший від попереднього.

З а у в а ж е н н я. Іноді розглядають також послідовності, членами яких є різні вирази, функції, фігури тощо. Можна говорити і про послідовності місяців у році, днів у тижні, букв у слові, прізвищ у списку, вагонів у поїзді, станцій на залізниці та ін.

Пальці руки людини також ідуть у певній послідовності: великий, вказівний, середній, підмізинний, мізинний (мал. 131). І штрихи на штрих-коді, що є на обкладинці цього підручника, нанесено у певній послідовності. Що вони означають? Навіщо вони?

Ми далі говоритимемо тільки про *числові послідовності*, хоч і називатимемо їх коротко послідовностями.

Мал. 131

Числові послідовності часто задають рекурентними формулами (від латинського слова *recurrentis* — той, що повертається). Формулу називають рекурентною, якщо вона показує, як виражається будь-який член послідовності через кілька попередніх її членів.

Наприклад, рекурентною є формула $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, яка засвідчує, що кожний член послідовності (починаючи з третього) дорівнює сумі двох членів, що йому передують. Одна така формула послідовності не визначає, бо невідомі її два перших члени. Якщо крім формули вказати і два перших члени, то послідовність можна вважати цілком заданою.

Задамо рекурентною формулою послідовність, перший і другий члени якої — одиниці, а кожний наступний дорівнює сумі двох попередніх. Цю послідовність можна задати такими рівностями:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Користуючись такою формулою, можна визначити послідовно третій, четвертий та інші члени послідовності:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5, \ldots .$$

www.4book.org

Маємо послідовність: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Її називають *послідовністю Фібоначчі*, оскільки вперше розглянув та описав її властивості в трактаті «Книга про абак» (1202 р.) Леонардо Пізанський (Фібоначчі).

Формулу n-го члена як функцію від n для цієї послідовності знайдено Ж. Біне тільки у XIX ст. (див. задачу **840**).

Перевірте себе

1. Наведіть приклади числових послідовностей.
2. Сформулюйте означення числової послідовності.
3. Якими бувають числові послідовності?
4. Які послідовності називають скінченними?
5. Які послідовності називають зростаючими? А які — спадними?
6. Назвіть п'ять перших членів послідовності: а) парних чисел; б) непарних чисел.

Виконаємо разом!

1. Продовжіть послідовність квадратів натуральних чисел:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots .$$

✔ Розв'язання. Кожний член указаної послідовності дорівнює квадрату його номера: перший — квадрату числа 1, другий — квадрату числа 2 і т. д. Тому шостий член дорівнює 6^2, сьомий — 7^2, восьмий — 8^2 і т. д. Отже, маємо послідовність:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots .$$

2. Знайдіть сороковий член послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = 3n - 2$; б) $a_n = (-1)^n$; в) $a_n = n - (-1)^{n-3}$.

✔ Розв'язання. а) $a_{40} = 3 \cdot 40 - 2 = 120 - 2 = 118$;

б) $a_{40} = (-1)^{40} = 1$;

в) $a_{40} = 40 - (-1)^{37} = 40 + 1 = 41$.

Відповідь. а) 118; б) 1; в) 41.

3. Починаючи з якого номера всі члени послідовності, заданої формулою $c_n = n^2 + n$, більші за 100?

✔ Розв'язання. Якщо $n^2 + n > 100$, то $n^2 + n - 100 > 0$. Розв'яжемо цю квадратну нерівність.

www.4book.org

$D = 1 + 400$. Оскільки йдеться тільки про натуральні (отже — додатні) значення n, а додатний корінь $n = \frac{-1+\sqrt{401}}{2} \approx 9{,}5$, то номер, що задовольняє умову, має бути більшим від 9.

Відповідь. Починаючи з десятого номера.

4. Установіть, зростаючою чи спадною є послідовність, яка задається формулою: $a_n = 1 - 2n^2$.

✔ Розв'язання. Візьмемо два довільних послідовних члени цієї послідовності, знайдемо їх різницю та визначимо її знак:

$$a_p = 1 - 2p^2;\ a_{p+1} = 1 - 2(p+1)^2;$$
$$a_{p+1} - a_p = 1 - 2(p+1)^2 - (1 - 2p^2) =$$
$$= 1 - 2p^2 - 4p - 2 - 1 + 2p^2 = -(4p + 2).$$

Для натуральних p вираз $4p + 2$ набуває лише додатних значень. Тому $a_{p+1} - a_p < 0$ для всіх натуральних p. Отже, для будь-якого номера p виконується умова $a_{p+1} < a_p$. Дана послідовність спадна, бо в ній кожний наступний член менший за попередній.

Відповідь. Послідовність спадна.

Виконайте усно

816. Назвіть 5 перших членів послідовності чисел, обернених до натуральних.

817. Назвіть 5 перших членів послідовності простих чисел.

818. Продовжіть послідовність натуральних чисел:

а) які діляться на 3: 3, 6, 9, 12, ... ;

б) які діляться на 5: 5, 10, 15, ... ;

в) які не діляться на 3: 1, 2, 4, 5, 7, ... ;

г) кожне з яких на 3 більше за попереднє: 1, 4, 7, ...

819. Розгляньте послідовності:

а) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ... ;

б) 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... ;

в) 5, 55, 555, 5555, 55555, 555555, ... ;

Для кожної послідовності вкажіть такі члени: 1) другий, п'ятий і сьомий; 2) наступний за третім; 3) попередній сьомому; 4) які містяться між другим і шостим.

www.4book.org

820. Який член послідовності $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$:
а) наступний за $x_3, x_7, x_{39}, x_{121}, x_{n+1}, x_{3n}$;
б) попередній відносно $x_5, x_{71}, x_{99}, x_{123}, x_{n+1}, x_{3n}$?

Рівень А

821. Скінченною чи нескінченною є послідовність:
а) простих чисел;
б) чисел, протилежних натуральним;
в) правильних дробів зі знаменником 10;
г) неправильних дробів зі знаменником 10;
ґ) правильних дробів із чисельником 10;
д) неправильних дробів із чисельником 10;
е) двоцифрових чисел;
є) цифр у десятковому записі числа π?
Випишіть п'ять перших членів кожної послідовності.

822. Напишіть п'ять перших членів послідовності, n-й член якої задається формулою:
а) $a_n = 2(n-1)$; б) $x_n = 12$; в) $y_n = 3n + (-1)^n$;
г) $b_n = 1 - n^2$; ґ) $c_n = 2n^2$; д) $z_n = 1 + (-1)^n$.

823. Послідовність задано формулою $a_n = 2n + 3$. Знайдіть:
а) a_3; б) a_6; в) a_{15}; г) a_{100}.

824. Напишіть сім перших членів послідовності, заданої формулою:
а) $a_n = 3n - 2$; б) $a_n = n^2 + 1$;
в) $a_n = 2 - 5n$; г) $a_n = n^2 - n$.

825. Напишіть кілька перших членів послідовності квадратів натуральних чисел. Який її n-й член?

826. Напишіть кілька перших членів і n-й член послідовності кубів натуральних чисел.

827. Напишіть кілька перших членів послідовності натуральних чисел, кратних 3. Обчисліть її сороковий член.

828. Напишіть кілька перших членів послідовності, n-й член якої $a_n = n^2 - 1$. Знайдіть a_{10}, a_{20}, a_{100}.

829. Напишіть скінченну послідовність, задану формулою:
а) $a_n = 4n - 3$, де $1 \le n \le 8$;
б) $b_n = \frac{n}{n+1}$, де $1 \le n \le 10$;

www.4book.org

в) $c_n = n^2 + 2n$, де $1 \leq n \leq 8$;
г) $y_n = 2^n + 1$, де $1 \leq n \leq 7$.

830. Знайдіть тридцятий член послідовності, заданої формулою:
а) $a_n = 2n + 7$; б) $b_n = 2n^2 - n$;
в) $c_n = (-1)^n + 3$; г) $x_n = 0{,}5n(n + 1)$.

831. Дано послідовність, n-й член якої $a_n = 5n + 8$. На скільки її двадцятий член більший від дев'ятнадцятого?

832. Дано послідовність, n-й член якої $a_n = n \cdot 3^n$. У скільки разів її двадцятий член більший від вісімнадцятого?

833. Знайдіть шостий, восьмий і десятий члени послідовності, n-й член якої $b_n = 2^n$.

834. Чи правильно, що $a_n = 5n - 3$ — формула n-го члена послідовності натуральних чисел, які при діленні на 5 дають остачу 2?

835. Напишіть формулу n-го члена послідовності натуральних чисел, які при діленні на 7 дають остачу 3.

836. Перший член послідовності дорівнює 7, а кожний наступний на 2 більший від попереднього. Напишіть кілька її перших членів.

837. Перший член послідовності дорівнює 5, а кожний наступний на 3 менший від попереднього. Напишіть кілька її перших членів. Зростаюча чи спадна ця послідовність?

838. Послідовність 1, 3, 6, 10, 15, ... називають послідовністю *трикутних чисел* (мал. 132). Напишіть 4 наступних члени цієї послідовності.

Мал. 132

Рівень Б

839. Напишіть п'ять перших членів послідовності, яка задається рекурентною формулою:
а) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -2a_n$;

www.4book.org

б) $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;

в) $a_1 = 15,\ a_{n+1} = a_n - 5$;

г) $c_1 = -2,\ c_2 = 3,\ c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$.

› **840.** Послідовність чисел Фібоначчі можна задати рекурентною формулою: $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ або формулою n-го члена:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Знайдіть п'ять перших членів цієї послідовності двома способами і порівняйте їх.

841. Послідовність $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ така, що $a_1 = -5$ і $a_{i+1} - a_i = 3$ для кожного натурального числа i. Знайдіть a_2, a_5, a_{10}.

› **842.** Починаючи з якого номера всі члени послідовності:

а) $a_n = 3n + 1$ більші за 50;

б) $c_n = n^2 - 5$ більші за 220;

в) $x_n = 200 - 3n$ менші за 12;

г) $b_n = n^2 - n$ не менші за 110;

ґ) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ не більші за 1,01?

843. Для яких номерів члени послідовності:

а) $a_n = 3n - 5$ більші за 40, але менші за 150;

б) $b_n = 200 - 2n$ більші за 50, але менші за 170;

в) $c_n = 2^n + 1$ більші за 8, але менші за 30;

г) $x_n = 4 - 7n$ більші за -40, але менші за -10;

ґ) $y_n = \sqrt{n+2}$ більші за $\sqrt{10}$, але менші за 10?

844. Скільки додатних членів містить послідовність, задана формулою:

а) $a_n = -3n + 374$; б) $a_n = -n^2 + 70n + 800$?

› **845.** Послідовність задано формулою $a_n = n^2 - 15n$. Скільки в ній від'ємних членів?

846. Чи є серед членів послідовності $a_n = 7n - 2$ такі, що:

а) закінчуються цифрою 0;

б) діляться на 13;

в) діляться на 2 і не діляться на 3;

г) при діленні на 27 дають остачу 1?

www.4book.org

847. Дано дві послідовності: $a_n = 7n - 1$ і $c_n = 8n + 3$. Знайдіть найменші значення k і p, для яких $a_k = c_p$.

848. Дано скінченну послідовність: 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9. Задайте її формулою.

Підберіть **(849—850)** одну з можливих формул n-го члена послідовності. Задайте кожну послідовність у вигляді таблиці і графіка.

849. а) 2, 5, 8, ... ; б) 2, 4, 8, ... ;

в) 1, −1, 1, ... ; г) 1, 0, 1, ... ;

ґ) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$; д) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$.

850. а) 3, 6, 12, 24, 48, ... ; б) 1, 7, 31, 127, 511, ... ;

в) 0, −2, −4, −6, ... ; г) −1, 2, −3, 4, −5, ... ;

ґ) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$; д) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$.

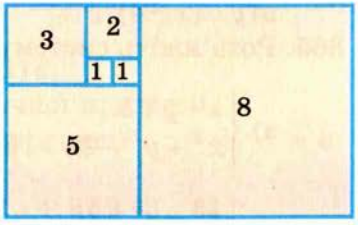
851*. Напишіть два різних n-них члени послідовностей, першими членами яких є: 1, 3, 5, 7.

852. Доведіть, що n-й член послідовності трикутних чисел (див. задачу **838**) дорівнює сумі перших n натуральних чисел.

853. Нескінченна послідовність 0, 2, 0, 2, 0, ... така, що сума кожних двох її сусідніх членів дорівнює 2. Чи правильно, що її n-й член $a_n = 1 + (-1)^n$?

854. Послідовність задано формулою $a_n = (-1)^n$. Знайдіть суму її перших членів: а) ста; б) тисячі; в) тисячі одного.

855. Перемалюйте в зошит малюнок 133 і доповніть його двома квадратами так, щоб їх сторони дорівнювали наступним членам послідовності Фібоначчі.



Мал. 133

www.4book.org

856. Зростаючими чи спадними є послідовності, задані такими формулами:

а) $a_n = 9n - 10$; б) $b_n = 10 - 9n$; в) $c_n = 5 - n^2$;

г) $x_n = \frac{1}{n^2 + 1}$; ґ) $y_n = \frac{3n + 4}{n + 2}$; д) $z_n = n^2 + 2n - 3$?

857. Доведіть, що послідовність $a_n = 8n - 7$ — зростаюча.

858. Доведіть, що послідовність $a_n = \frac{n + 1}{n}$ — спадна.

859. Знайдіть найбільший член послідовності:

а) $a_n = 6n - n^2 - 5$; б) $a_n = -n^2 + 2n + 3$.

860. Знайдіть найбільший від'ємний член послідовності, заданої формулою n-го члена:

а) $a_n = n^2 - 35$; б) $a_n = 0{,}25n^2 - 10{,}75$.

861. Яке з чисел -20, -10, -5, 4, 9 є членом послідовності, n-й член якої $a_n = 2n^2 - 7n$?

862. Членом якої послідовності є число -12:

а) $a_n = 7n^2 - 11$; б) $a_n = 3 - 5n$; в) $a_n = 2n - n^2 + 3$;

г) $a_n = \frac{n + 1}{n}$; ґ) $a_n = n - n^2$; д) $a_n = \frac{5n^2 + 4}{1 - 2n}$?

Вправи для повторення

863. Торговельна організація купила за 2 500 грн. два предмети і після їх продажу одержала 40 % прибутку. Скільки заплатила організація за кожний предмет, якщо перший приніс прибутку 25 %, а другий — 50 %?

864. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^2 + 3$; б) $y = x^2 - 2$;

в) $y = (x - 4)^2$; г) $y = (x + 3)^2$.

865. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 - 2x = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy + 12 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 4)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 - 6x = 7. \end{cases}$

www.4book.org

§21. АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Нехай дано послідовність, перший член якої 5, а кожний інший член на 3 більший від попереднього:

$$5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \dots .$$

Це арифметична прогресія з першим членом 5 і різницею 3.

Арифметичною прогресією **називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число. Це стале для даної послідовності число d називають *різницею арифметичної прогресії*.**

Іншими словами, арифметична прогресія — це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, де $n \in N$, a і d — задані числа.

Перший член і різниця арифметичної прогресії можуть бути якими завгодно числами. Арифметична прогресія зростаюча, якщо її різниця додатна, або спадна — якщо її різниця від'ємна. Приклад спадної арифметичної прогресії:

$$11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, \dots .$$

Щоб одержати будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, треба до попереднього члена додати різницю d. Тому якщо перший член і різниця арифметичної прогресії дорівнюють відповідно a_1 і d, то її перші члени становлять:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ a_1 + 4d, \dots ,$$

тобто

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d,\ a_4 = a_1 + 3d,\ a_5 = a_1 + 4d, \dots .$$

Зверніть увагу: коефіцієнт при d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії. Так само знаходимо $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ і взагалі:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

Це формула n-го члена арифметичної прогресії.

Приклад 1. В арифметичній прогресії $a_1 = 4$, $d = 3$. Знайдіть a_{20}.

✔ Розв'язання. $a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.

Відповідь. 61.

www.4book.org

Приклад 2. В арифметичній прогресії $a_{19} = 8$, $d = -1$. Знайдіть a_1.

✔ Розв'язання. $a_{19} = a_1 + 18d$, $8 = a_1 - 18$. Отже, $a_1 = 26$.

Відповідь. 26.

Розглянемо кілька властивостей арифметичної прогресії.

Теорема 1. Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, дорівнює півсумі двох сусідніх з ним членів: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Доведення. За означенням, $d = a_{n+1} - a_n$, $d = a_n - a_{n-1}$. Отже, $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, звідси $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Правильне й обернене твердження. Доведіть його самостійно.

Теорема 2. Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$.

Нехай дано n членів скінченної арифметичної прогресії:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Додамо перший і останній її члени, потім — другий і передостанній, потім — третій член від початку і третій від кінця і т. д. Результати маємо однакові. Справді, якщо $a_1 + a_n = m$, то:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m$;
$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m$;
$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = m$
і т. д. Отже, $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$.

Теорема 3. Сума членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює півсумі крайніх її членів, помноженій на число членів: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Нехай S_n — сума n членів арифметичної прогресії

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Якщо $a_1 + a_n = m$, то $a_2 + a_{n-1} = m$, $a_3 + a_{n-2} = m$ і т. д. Враховуючи це, додамо почленно дві рівності:

www.4book.org

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ +\,S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{array}$$

$$2S_n = m + m + m + \ldots + m + m + m$$

$2S_n = mn$; $2S_n = (a_1 + a_n)n$, звідси

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

За цією формулою знаходять суму перших n членів будь-якої арифметичної прогресії.

Приклад 3. Знайдіть суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії 5, 7, 9, ...

Розв'язання. Тут $a_1 = 5$, $d = 2$. Тому $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$.

$$S_{20} = \frac{5 + 43}{2} \cdot 20 = 480.$$

Відповідь. 480.

Суму n перших членів арифметичної прогресії можна також знаходити за формулою:

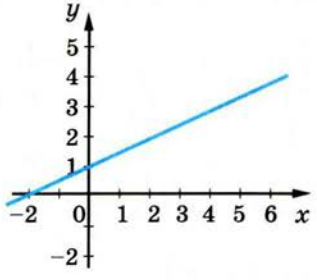
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Доведіть її самостійно.

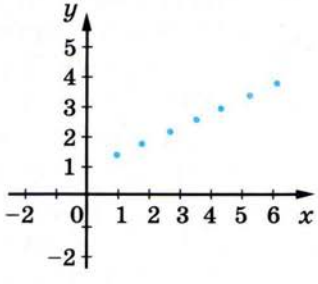
Уявіть лінійну функцію, задану формулою $y = 0{,}5x + 1$. Її графік зображено на малюнку 134. Якщо аргументу x надавати тільки натуральних значень, тобто 1, 2, 3, ... , то значення функції дорівнюватимуть відповідно:

$$1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 4;\ \ldots .$$

Маємо арифметичну прогресію з першим членом 1,5 і різницею 0,5. Цій прогресії відповідає малюнок 135. Взагалі кожна функція



Мал. 134



Мал. 135

www.4book.org

$y = ax + b$, визначена на множині натуральних чисел, є арифметичною прогресією з першим членом $a + b$ і різницею a. Тому вважають, що **арифметична прогресія — це лінійна функція, задана на множині натуральних чисел.**

Якщо така функція визначена на множині всіх натуральних чисел, то маємо нескінченну арифметичну прогресію. Якщо вона визначена на множині перших n натуральних чисел, то маємо скінченну арифметичну прогресію, яка містить n членів.

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення арифметичної прогресії.
2. Що таке різниця арифметичної прогресії?
3. Як виражається n-й член арифметичної прогресії через її перший член і різницю?
4. Чому дорівнює сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців?
5. Чому дорівнює сума n перших членів арифметичної прогресії?

Виконаємо разом!

1. Знайдіть суму всіх двоцифрових натуральних чисел.

✔ Розв'язання. Знайдемо суму чисел 10, 11, 12, ..., 99. Це скінченна арифметична прогресія. Вона містить 90 членів, і тому її сума дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}(10 + 99) \cdot 90 = 4\,905.$$

Відповідь. 4 905.

2. Чи є числа 1 000 і 2 000 членами арифметичної прогресії з першим членом 5 і різницею 3?

✔ Розв'язання. Якщо 1 000 є i-м членом даної прогресії, то $1000 = 5 + (i - 1) \cdot 3$, $3 \cdot (i - 1) = 995$, то i не є натуральним числом, бо 995 не ділиться на 3.

Якщо $2000 = 5 + (i - 1) \cdot 3$, то $3 \cdot (i - 1) = 1\,995$, звідси $i = 666$.

Відповідь. 1000 — не є членом даної арифметичної прогресії, а 2 000 — її 666-й член.

3. В арифметичній прогресії відомі $a_7 = 43$ і $a_{15} = 3$. Знайдіть a_{10}.

www.4book.org

✔ **Розв'язання.** Підставимо дані задачі у формулу $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$. Маємо:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d, \\ a_{15} = a_1 + 14d; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 43 = a_1 + 6d, \\ 3 = a_1 + 14d; \end{cases}$$

$$40 = -8d, \qquad d = -5,\ a_1 = 73.$$

Оскільки $a_{10} = a_1 + 9d$, то $a_{10} = 73 + 9 \cdot (-5) = 28$.

Відповідь. 28.

Виконайте усно

866. Знайдіть різницю арифметичної прогресії:

а) 3, 5, 7, ... ; б) 12, 10, 8, ... ;

в) −2, 1, 4, ... ; г) −7, −9, −11, ...

867. Різниця арифметичної прогресії дорівнює 2. Знайдіть її перший член, якщо:

а) $a_2 = 5$; б) $a_2 = -3$; в) $a_2 = 0{,}3$; г) $a_2 = \sqrt{2}$.

868. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

а) 1, 3, 5, 8, 11, 14, ... ; б) 0, −1, −3, −5, −8, ... ?

869. Які з послідовностей можуть бути арифметичними прогресіями? Укажіть для них перший член і різницю.

а) 0; 3; 6; 9; 12; ... ; б) −2, −4, −6, −8, −10, ... ;

в) 3, 3, 3, 3, 3, 3, ... ; г) 5, 10, 20, 40, 80, ... ;

ґ) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \ldots$.

Рівень А

870. Напишіть п'ять перших членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 7,\ d = 2$; б) $a_1 = 0{,}5,\ d = -10$;

в) $a_1 = -\frac{1}{4},\ d = \frac{1}{4}$; г) $a_1 = 9,\ d = 0$.

871. Напишіть сім перших членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 2,\ d = 5$; б) $a_1 = -3,\ d = 4$;

в) $a_1 = 0,\ d = 7$; г) $a_1 = 4,\ d = -1$.

www.4book.org

872. В арифметичній прогресії:
а) $a_1 = 5$, $d = -4$. Знайдіть a_7, a_{20};
б) $a_1 = 9$, $d = 4$. Знайдіть a_{15}, a_{32}.

873. В арифметичній прогресії $a_2 = 14$, $a_3 = 25$. Знайдіть d, a_{10}, a_{20}.

874. Знайдіть різницю і десятий член арифметичної прогресії:
а) 2, 7, 12, ... ; б) 3, 1, −1, ... ; в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$.

875. Знайдіть різницю арифметичної прогресії, якщо:
а) $a_1 = 5$, $a_7 = 95$; б) $a_1 = 2{,}3$, $a_5 = 1{,}5$;
в) $a_1 = -15$, $a_{10} = -24$; г) $a_1 = -17$, $a_7 = 97$.

876. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо:
а) $a_{11} = 25$, $d = 2$; б) $a_{36} = 5$, $d = -1$;
в) $a_8 = 9$, $d = 0{,}3$; г) $a_{21} = -50$, $d = 3$.

877. В арифметичній прогресії $a_{17} = 53$, $d = 3$. Знайдіть a_1, a_5, a_{11}, a_{21}.

878. В арифметичній прогресії $a_{10} = 5$, $a_{11} = -4$. Знайдіть a_1, d, a_5, a_{21}.

879. В арифметичній прогресії $a_{25} = 5$, $a_{27} = 4$. Знайдіть a_7, a_{20}.

880. В арифметичній прогресії $a_4 = 2$, $a_6 = 3$. Знайдіть a_{40}, a_{41}.

881. Знайдіть n-й член арифметичної прогресії:
а) 2, 5, 8, ... ; б) 7, 6, 5, ... ; в) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \ldots$.

882. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії;
а) 7, 12, ... ; б) −25, −19, ... ;
в) −2,5, 0,5, ... ; г) −4,5, −3,7, ...

883. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії:
а) $a_1 = -35$, $a_{10} = 10$; б) $a_1 = 66$, $a_{10} = -6$;
в) $a_1 = -2{,}5$, $a_{10} = 2$; г) $a_1 = 20$, $a_{10} = 21{,}8$.

884. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо:
а) $a_{10} = 95$, $S_{10} = 500$; б) $a_{15} = 47$, $S_{30} = 1500$.

885. Знайдіть суму перших ста членів арифметичної прогресії:
а) 50, 49, 48, ... ; б) −50, −49, −48, ... ;
в) 2, 7, 12, 17, ... ; г) 16, 13, 10, 7, ...

www.4book.org

886. Знайдіть суму перших сорока членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 2$, $d = 3$; б) $a_1 = -18$, $d = 5$;

в) $a_1 = 3$, $d = -0{,}2$; г) $a_1 = 7$, $a_{50} = 252$.

887. В арифметичній прогресії відомі перший член a_1 і різниця d. Знайдіть суму її перших n членів S_n, якщо:

а) $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 32$; б) $a_1 = -4$, $d = 4$, $n = 25$;

в) $a_1 = 15$, $d = -2$, $n = 40$; г) $a_1 = -5$, $d = -7$, $n = 12$;

ґ) $a_1 = 0$, $d = 7$, $n = 35$; д) $a_1 = 8$, $d = 0$, $n = 50$.

888. ***Стародавня арабська задача.*** Знайдіть 20-й член і суму двадцяти членів арифметичної прогресії 3, 7, 11, 15, ...

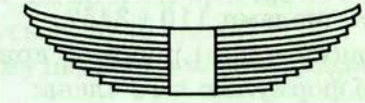
889. ***Стародавня єврейська задача.*** Знайдіть суму шістдесяти перших натуральних чисел.

890. Учитель запропонував знайти суму всіх натуральних чисел від 1 до 40; вважав, що школярі довго додаватимуть сорок чисел. А малий Карл Гаусс (згодом відомий німецький математик) завдання виконав за хвилину. Як він міркував? Спробуйте завдання виконати усно.

891. Знайдіть суму перших ста натуральних чисел.

892. Знайдіть суму перших ста непарних натуральних чисел.

893. Ресора складається з десяти сталевих смуг (мал. 136). Довжина верхньої смуги 105 см, а кожна інша на 9 см коротша від попередньої. Знайдіть суму довжин усіх смуг ресори.



Мал. 136

894. ***Стародавня задача.*** Людям, які копають криницю, обіцяно за перший метр заплатити 30 крб., а за кожний наступний — на 20 крб. більше, ніж за попередній метр. Скільки вони одержать за копання 12-метрової криниці?

Рівень Б

895. В арифметичній прогресії $a_1 = 0{,}1$, $d = 2$. Знайдіть a_9, a_n, a_{3p}.

www.4book.org

896. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — арифметична прогресія. Знайдіть a_{30}, якщо:

а) $a_3 = 3, a_4 = 4$; б) $a_5 = 9, a_7 = 13$;

в) $a_1 = 8, a_5 - a_3 = 6$; г) $a_2 = 5, a_5 - a_1 = 12$.

897. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — арифметична прогресія. Знайдіть a_1, d, a_{21}, a_{100}, якщо:

а) $a_4 = 10, a_7 = 19$; б) $a_5 = 5{,}2, a_9 = 6{,}8$;

в) $a_5 = 8{,}2, a_{10} = 4{,}7$; г) $a_8 = 11{,}2, a_{15} = 19{,}6$.

898. Чи є число 253 членом арифметичної прогресії 15, 23, 31, ...?

899. Чи є число 212 членом арифметичної прогресії:

а) 3, 14, 25, 36, ... ; б) 275, 269, 263, 257, ...?

900. Які з чисел $-23, -14, -3, 1, 3, 14, 23$ є членами арифметичної прогресії, n-й член якої:

а) $a_n = 5n - 19$; б) $b_n = 0{,}1n + 11$; в) $c_n = 97 - 2n$?

901. Скільки від'ємних членів має арифметична прогресія:

а) $-10{,}3, -8{,}6, \ldots$; б) $-37{,}5, -35{,}7, \ldots$?

902. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія:

а) 2,5; 2,3; 2,1, ... ; б) 176; 151; 126; ...?

903. Скільки від'ємних членів має арифметична прогресія:

а) $-32, -30, -28, \ldots$; б) $-8\frac{1}{2}, -8, -7\frac{1}{2}, \ldots$?

904. Скільки членів арифметичної прогресії 10, 16, 22, ... міститься між числами 110 і 345?

905. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, заданої формулою n-го члена:

а) $c_n = 5n - 3$; б) $a_n = 2n + 10$; в) $a_n = -3 - 0{,}5n$.

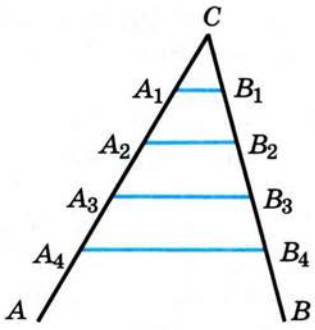
906. Чи є арифметичною прогресією послідовність, n-й член якої:

а) $a_n = 3n + 1$; б) $b_n = 5 - 4n$; в) $c_n = 2^n + 1$?

907. На стороні CA кута ACB від його вершини відкладено рівні відрізки і через їх кінці проведено паралельні прямі (мал. 137). Знайдіть довжини відрізків A_3B_3, A_7B_7, A_nB_n, якщо $A_1B_1 = 2{,}5$ см.

908. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — арифметична прогресія, c — довільне число. Доведіть, що послідовність $ca_1, ca_2, ca_3, ca_4, \ldots$ — так само арифметична прогресія.

www.4book.org



Мал. 137

909. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ і $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — арифметичні прогресії. Доведіть, що арифметичною прогресією є і послідовність $a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3, \ldots$.

910. Числа a^2, b^2, c^2 нерівні й утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що арифметичну прогресію утворюють і числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$.

911. Дано арифметичну прогресію, n-й член якої a_n. Доведіть, що: а) $a_2 + a_{23} = a_{13} + a_{12}$; б) $a_{20} - a_{16} = a_{10} - a_6$.

912. ***Задача Феофана Прокоповича.*** Якась людина має багато коней, і всім їм різна ціна. Найгірший кінь коштує 4 золотих, а найкращий — 55 золотих, і ціна від одного до другого коня весь час зростає на 3 золотих. Питаємо: скільки ж усього було коней?

913. Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 1, a_5 = 3, n = 40$; б) $a_1 = -3, a_3 = 1, n = 50$;

в) $a_2 = 5, a_4 = 6, n = 100$; г) $a_1 = a_{100}, a_3 = 3, n = 100$.

914. Знайдіть суму всіх парних натуральних чисел, менших за 200.

915. Знайдіть суму всіх непарних натуральних чисел, менших за 200.

916. Знайдіть суму натуральних чисел, менших від 1000, які кратні: а) 3; б) 5; в) 12.

917. Знайдіть суму всіх цілих чисел, що належать проміжку: а) $[-30; 70]$; б) $[-70; -30]$; в) $(-70; 70)$.

www.4book.org

918. В арифметичній прогресії 10 членів. Сума членів з непарними номерами дорівнює 10, а з парними — 25. Знайдіть її сьомий член.

919. Тринадцятий член арифметичної прогресії дорівнює 3. Знайдіть суму її перших 25 членів.

920. Сума перших п'ятнадцяти членів арифметичної прогресії дорівнює 20, а сума перших її дванадцяти членів на 6 менша. Знайдіть суму перших 27 членів.

921. Знайдіть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, заданої формулою n-го члена:

а) $a_n = 2 + 5n$; б) $a_n = 2n - 1$; в) $a_n = -3 + n$.

922. Знайдіть п'ятий член арифметичної прогресії, якщо суму n перших її членів можна знайти за формулою:

а) $S_n = n^2 - 6n$; б) $S_n = 3n^2 - n$; в) $S = 4n^2 - 2n$.

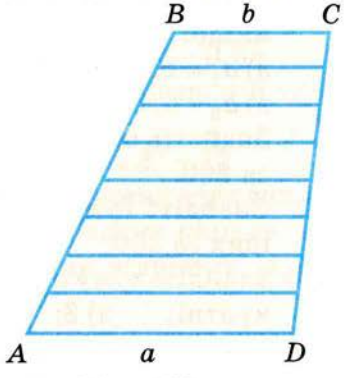
923. Сума четвертого і шостого членів арифметичної прогресії дорівнює 14. Знайдіть суму перших дев'яти членів прогресії.

924. ***Задача Франкера.*** Скільки разів проб'є годинник упродовж 12 год, якщо він відбиває щопівгодини?

925. При вільному падінні фізичне тіло проходить за першу секунду 4,9 м, а кожну наступну — на 9,8 м більше. Знайдіть: а) глибину шахти, якщо камінець досяг її дна через 8 с після початку падіння; б) скільки секунд падала б гайка з висоти 490 м.

926. Міри кутів п'ятикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що міра одного з цих кутів дорівнює 108°. Складіть подібні задачі для трикутника і семикутника.

927. Кінці відрізків, паралельних основам трапеції, лежать на її бічних сторонах і ділять кожну з них на 8 рівних частин. Знайдіть довжини цих відрізків та їх суму, якщо основи трапеції a і b (мал. 138).



Мал. 138

www.4book.org

Вправи для повторення

928. Скоротіть дріб:

а) $\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; б) $\frac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; в) $\frac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$.

929. Розв'яжіть нерівність:

а) $x^2-8x<0$; б) $x^2+7x<0$;

в) $x^2-16<0$; г) $x^2-3\le 0$.

930. Перенесіть таблицю (мал. 139) у зошит. Заповніть порожні клітинки буквами $a, b, c, k, p, t, x, y, z$ так, щоб у кожному рядку, кожному стовпці і кожному квадраті 3×3 кожна з букв траплялась тільки один раз.

		a		b			z	
k		z	a	c	x		y	
		t	p				b	
	c					z		
a	t		c	z			x	k
		p			a		c	t
b	z		x	t				y
				y		b	p	
	x	y			b		t	

Мал. 139

§22. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Геометричною прогресією **називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число. Це стале для даної послідовності число q називають *знаменником геометричної прогресії*.**

Перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії можуть бути будь-якими числами, відмінними від нуля.

Іншими словами, геометрична прогресія — це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою:

$b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$, де $n \in N$, $b \neq 0$ і $q \neq 0$ — задані числа.

Приклади геометричних прогресій:

3, 6, 12, 24, 48, 96, ... ($b_1 = 3$, $q = 2$);

www.4book.org

$1, -3, 9, -27, 81, -243, \ldots$ $(b_1 = 1, q = -3)$;

$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots \left(b_1 = -1, \ q = \frac{1}{2}\right)$;

$7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, \ldots$ $(b_1 = 7, q = 1)$.

З а у в а ж е н н я. Кожну арифметичну прогресію з різницею 0 можна вважати також геометричною прогресією зі знаменником 1.

Геометрична прогресія з першим членом b_1 і знаменником q має такі перші члени:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \ldots .$$

Її другий член $b_2 = b_1q$, третій — $b_3 = b_1q^2$, а n-й член —

$$b_n = b_1q^{n-1}.$$

Це формула n-го члена геометричної прогресії.

Приклад 1. У геометричній прогресії $b_1 = 5$, $q = 2$. Знайдіть b_{10}.

✔ Р о з в ' я з а н н я. $b_{10} = b_1q^{10-1}$, $b_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2\,560$.

В і д п о в і д ь. 2 560.

Приклад 2. Перший і сьомий члени геометричної прогресії дорівнюють відповідно 81 і $\frac{64}{9}$. Знайдіть її знаменник q.

✔ Р о з в ' я з а н н я. За формулою n-го члена геометричної прогресії:

$$b_7 = b_1q^6, \ \frac{64}{9} = 81 \cdot q^6, \ q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81}, \ q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

А якщо $q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$, то $q = \frac{2}{3}$ або $q = -\frac{2}{3}$.

В і д п о в і д ь. $\frac{2}{3}$ або $-\frac{2}{3}$.

Розглянемо властивості геометричної прогресії.

Теорема 1. Квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх його членів:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

www.4book.org

Доведення. За означенням, $b_{n-1}=\frac{b_n}{q}$, а $b_{n+1}=b_n\cdot q$.

Отже, $b_{n+1}\cdot b_{n-1}=b_n\cdot q\cdot\frac{b_n}{q}=b_n^2$.

Правильне й обернене твердження. Доведіть його самостійно.

Теорема 2. Сума n перших членів геометричної прогресії за умови, що $q\neq 1$, виражається формулою:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Доведення.

Нехай $S_n=b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-2}+b_1q^{n-1}$. Помножимо обидві частини рівності на q:

$$S_nq=b_1q+b_1q^2+b_1q^3+\ldots+b_1q^{n-1}+b_1q^n.$$

Віднімемо почленно від цієї рівності попередню, однакові доданки b_1q, b_1q^2, b_1q^3, ... , b_1q^{n-1} взаємно знищаться. В результаті матимемо:

$$S_nq-S_n=b_1q^n-b_1,\ \text{або}\ S_n(q-1)=b_1(q^n-1),$$

звідси

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Це формула суми n перших членів геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $q\neq 1$.

Якщо $q=1$, то цією формулою користуватись не можна (ділити на 0 не можна). У цьому випадку кожний член геометричної прогресії дорівнює b_1, тому $S_n=nb_1$.

Приклад 3. Знайдіть суму перших двадцяти членів геометричної прогресії 2, 6, 18, 54, ...

✔ Розв'язання. Тут $b_1=2$, $q=3$, тому

$$S_{20}=\frac{2(3^{20}-1)}{3-1}=3^{20}-1.$$

Відповідь. $3^{20}-1$.

www.4book.org

Суму членів скінченної геометричної прогресії можна також знаходити за формулою $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$.

Доведіть її самостійно.

Сума n членів геометричної прогресії зі збільшенням числа n зростає дуже швидко. Розв'яжемо одну з таких задач.

Задача з індійського фольклору. Цар дуже любив шахи і обіцяв винахіднікові гри велику нагороду. Винахідник запросив за першу клітину шахівниці одну пшеничну зернину, за другу — дві, за третю — чотири і далі за кожну клітину вдвічі більше, ніж за попередню. Цар здивувався, що винахідник так мало просить. Але обіцянку не зміг виконати. Чому?

Розв'язання. Звичайна шахівниця має 64 клітини. Тому цар мав би дати винахіднику всього зернин $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{64}$.

Спробуйте обчислити цю суму. Ми оцінимо тільки останній доданок:

$$2^5 = 32,\ 2^{10} = 32^2 = 1024 > 10^3.$$

$$2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 > 16 \cdot (10^3)^6 = 16 \cdot 10^{18} = 16\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

Якщо приймемо, що маса 400 зернин становить 1 кг, то маса 2^{64} зернин більша за

$$16 \cdot 10^{18} : (4 \cdot 10^3) = 4 \cdot 10^{15}\ (\text{кг}),\ \text{або}\ 4 \cdot 10^{12}\ \text{т}.$$

І це наближене значення тільки останнього доданка. Такої кількості зерна не зможуть зібрати усі країни світу впродовж сотень років.

Геометрична прогресія $2, 4, 8, 16, 32 \ldots$ — послідовні значення функції $y = 2^x$, визначеної на множині натуральних чисел.

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення геометричної прогресії.
2. Що таке знаменник геометричної прогресії?
3. Як виражається n-й член геометричної прогресії через її перший член і знаменник?
4. Сформулюйте властивість геометричної прогресії.
5. Чому дорівнює сума n перших членів геометричної прогресії?

www.4book.org

Виконаємо разом!

1. У геометричній прогресії $b_4 = 2$, $b_7 = -54$. Знайдіть b_1 і q.

✔ Розв'язання. За формулою n-го члена $b_4 = b_1 \cdot q^3$ і $b_7 = b_1 \cdot q^6$. Підставимо в ці рівності значення $b_4 = 2$, $b_7 = -54$ і розв'яжемо систему $\begin{cases} 2 = b_1 \cdot q^3, \\ -54 = b_1 \cdot q^6. \end{cases}$

Поділимо почленно друге рівняння на перше:

$\frac{-54}{2} = \frac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3}$. Маємо: $q^3 = -27$ і $q = -3$.

З першого рівняння системи знайдемо b_1:

$$2 = b_1 \cdot (-3)^3;\ b_1 = 2 : (-27) = -\frac{2}{27}.$$

Відповідь. $b_1 = -\frac{2}{27}$, $q = -3$.

2. Знайдіть суму п'яти членів геометричної прогресії, в якій $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$.

✔ Розв'язання. *Перший спосіб.* Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Якщо $n = 5$, то

$$S_5 = \frac{b_1 \cdot (q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-8 \cdot \frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

Другий спосіб. Випишемо 5 членів даної прогресії: 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$. Їх суму знайдемо простим додаванням: $15\frac{1}{2}$.

Відповідь. $S_5 = 15\frac{1}{2}$.

www.4book.org

Виконайте усно

931. Укажіть три наступних члени геометричної прогресії:
а) 3, 6, 12, ... ; б) 16, 8, 4, ... ;
в) −1, −2, −4, ... ; г) −2, 4, −8, ...

932. Чи є геометричною прогресією послідовність:
а) 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001;
б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$?
Якщо так, то вкажіть її знаменник.

933. Чи є геометричною прогресією послідовність:
а) 2, 4, 6, 8, ... ; б) 1, −3, 9, 27, −81, ... ;
в) 3, 6, 12, 14, ... ; г) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$?

934. Чи є геометричною прогресією послідовність 7^n, 7^{n+1}, 7^{n+2}, 7^{n+3}, де n — довільне натуральне число? А послідовність 7^n, -7^{n+1}, 7^{n+2}, -7^{n+3}?

Рівень А

935. Напишіть сім перших членів геометричної прогресії, в якій:
а) $b_1 = 1, q = 3$; б) $b_1 = 10, q = \frac{1}{2}$;
в) $b_1 = -5, q = 2$; г) $b_1 = 1, q = -2$.

936. Напишіть п'ять перших членів геометричної прогресії, в якій:
а) $b_1 = 18, q = -1$; б) $b_1 = 5, q = 2$;
в) $b_1 = -8, q = \frac{1}{2}$; г) $b_1 = \frac{5}{27}, q = 3$.

937. Знайдіть знаменник і п'ятий член геометричної прогресії:
а) −1, 3, ... ; б) 0,1, 0,01, ... ;
в) 625, 125, ... ; г) 4, −2, ...

938. У геометричній прогресії $b_1 = -3, q = 2$. Знайдіть b_4, b_7, b_n.

939. Знайдіть перший член геометричної прогресії, в якій:
а) $b_8 = 384, q = 2$; б) $b_5 = 31{,}25, q = -2{,}5$.

www.4book.org

940. $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ — геометрична прогресія. Знайдіть b_{12}, якщо:

а) $b_1 = 1, b_2 = 6$; б) $b_1 = 25, b_2 = -50$;

в) $b_3 = 1, b_4 = 0{,}5$; г) $b_2 = 2, b_4 = 4$.

941. Знайдіть сьомий член геометричної прогресії, якщо:

а) $b_3 = 3, b_4 = 6$; б) $b_3 = -1{,}5, b_5 = -6$;

в) $b_5 = 80, b_6 = -160$; г) $b_6 = 18, b_4 = 72$.

942. Напишіть формулу n-го члена геометричної прогресії:

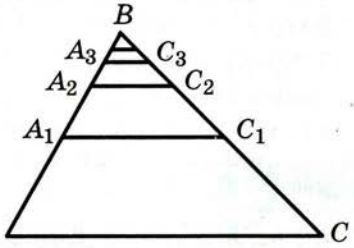
а) $2, 6, 18, \ldots$; б) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, \ldots$;

в) $1, \sqrt{2}, 2, \ldots$; г) $64, -32, 16, \ldots$.

943. Знайдіть номер n-го члена геометричної прогресії, в якій:

а) $b_1 = 4, q = 3, b_n = 324$; б) $b_1 = -8, q = 2, b_n = -256$.

944. A_1C_1 — середня лінія ΔABC, A_2C_2 — середня лінія ΔA_1BC_1, A_3C_3 — середня лінія ΔA_2BC_2 і т. д. (мал. 140). Чи правильно, що довжини відрізків $AC, A_1C_1, A_2C_2, \ldots$ утворюють геометричну прогресію?



Мал. 140

945. У геометричній прогресії перший член b_1, знаменник q. Знайдіть суму її перших членів, якщо:

а) $b_1 = -3, q = 3, n = 6$; б) $b_1 = 2{,}5, q = 0{,}4, n = 4$;

в) $b_1 = 4, q = -2, n = 10$; г) $b_1 = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}, n = 6$.

946. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії, якщо:

а) $b_1 = 1, q = 2, n = 9$; б) $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}, n = 10$;

в) $b_1 = 81, q = \frac{1}{3}, n = 8$; г) $b_1 = -2, q = 2, n = 12$.

www.4book.org

947. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії:
а) $-2, 10, \ldots$; б) $5, 10, \ldots$; в) $32, -16, \ldots$;
г) $3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$; ґ) $5, 10, 20, 40, 80, \ldots$.

948. Знайдіть суму п'ятнадцяти перших членів геометричної прогресії:
а) $1, 2, 4, 8, \ldots$; б) $1024, 512, 256, \ldots$;
в) $1, -2, 4, -8, \ldots$; г) $1024, -512, 256, \ldots$.

949. ***Старовинна задача.*** Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на два тижні на таких умовах: «За це я тобі першого дня заплачу 1 крб., другого — 2, третього — 3 і т. д., збільшуючи щоденну плату на 1 крб. Ти ж будеш подавати милостиню: першого дня 1 копійку, другого — 2, третього — 4 і т. д., збільшуючи щодня милостиню вдвічі». Багатій з радістю на це згодився, вважаючи умови вигідними. Скільки грошей одержав багатій?

950. ***Задача Ейлера.*** Чоловік, продаючи коня, запропонував покупцеві заплатити тільки за гвіздки, якими прибито до копит того коня підкови. За перший гвіздок — 1 пфеніг, за другий — 2, за третій — 4 і т. д.: за кожний удвічі більше, ніж за попередній. За скільки він продавав коня, якщо гвіздків було 32?

Рівень Б

951. $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q, якщо:
а) $b_3 = 625, b_7 = 81$; б) $b_5 = 3, b_{10} = -27\sqrt{3}$;
в) $b_4 = \frac{9}{32}, b_8 = \frac{1}{18}$; г) $b_4 = -6, b_8 = -1\frac{115}{128}$.

952. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії:
а) $3, -6, \ldots$; б) $-0{,}1, -1, \ldots$;
в) $12, 8, \ldots$; г) $\frac{2}{5}, 4, \ldots$.

953. Чи є число 384 членом геометричної прогресії:
а) $3, 6, \ldots$; б) $\frac{4}{81}, \frac{8}{27}, \ldots$?

www.4book.org

954. Яке з чисел -27, -9, 18, 20, 27 є членом послідовності, n-й член якої:

а) $b_n = 5 \cdot 2^n$; б) $x_n = (-3)^{n+1}$;

в) $y_n = -36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; г) $c_n = -12 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^n$?

955. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії, в якій:

а) $b_1 + b_3 = 10$, $b_2 + b_4 = 30$; б) $b_5 - b_1 = 15$, $b_4 - b_2 = 6$.

956. Чи є послідовність, задана формулою $c_n = (-3)^{n+2}$, геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть її перший член і знаменник.

957. Доведіть, що задана послідовність (x_n) є геометричною прогресією:

а) $x_n = 3 \cdot 7^n$; б) $x_n = 5 \cdot 2^{n+1}$; в) $x_n = 0{,}4^{1+n}$.

958. Доведіть, якщо a, b, c — геометрична прогресія, то:

$$(a^2 + b^2)c = (b^2 + c^2)a.$$

959. Дано геометричну прогресію b_1, b_2, b_3, b_4, ... Доведіть, що геометричними прогресіями є також послідовності:

а) b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, ... ;

б) $b_1 + b_2$, $b_2 + b_3$, $b_3 + b_4$, ... ;

в) $b_1 - b_2$, $b_2 - b_3$, $b_3 - b_4$, ...

960. П'ятий член геометричної прогресії дорівнює 1. Чому дорівнює добуток дев'яти її перших членів?

961. Шостий член геометричної прогресії дорівнює -2. Чому дорівнює добуток одинадцяти її перших членів?

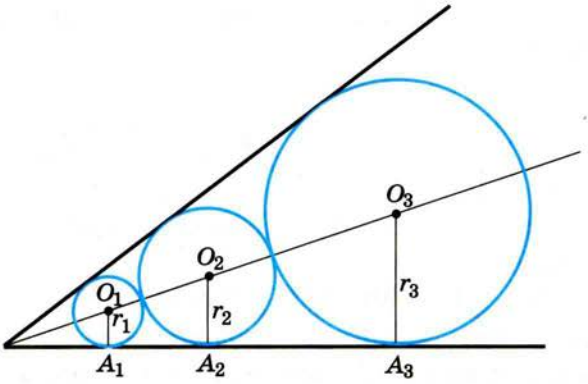
962. Знайдіть три числа, які становлять геометричну прогресію, знаючи, що їх сума дорівнює 21, а добуток — 216.

963. Числа геометричної прогресії 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 розмістіть у дев'яти клітинках квадрата так, щоб їх добутки в кожному рядку, в кожному стовпчику і в кожній діагоналі дорівнювали один одному.

964. Після кожного руху поршня розріджувального насоса з посудини забирається 5 % наявного в ній повітря. Визначте тиск повітря всередині посудини після десяти рухів поршня, якщо початковий тиск був 760 мм рт. ст.

965. Чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника утворювати геометричну прогресію?

www.4book.org



Мал. 141

966. У гострий кут вписано n кіл, які дотикаються одне до одного (мал. 141). Доведіть, що довжини їх радіусів утворюють геометричну прогресію. Від чого залежить її знаменник?

967. Напишіть кілька перших членів послідовності з такими властивостями: $b_1 = 1$, $b_n = 3b_{n-1}$. Напишіть формулу її n-го члена Знайдіть b_5 і S_{10}.

968. Між числами $40\frac{1}{2}$ і $5\frac{1}{3}$ вставте такі чотири числа, які разом з даними числами утворюють геометричну прогресію. Знайдіть її суму двома способами.

969*. Знайдіть кількість членів геометричної прогресії, в якій:

а) $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$;

б) $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$;

в) $q = -\frac{1}{3}$, $b_n = \frac{1}{3}$, $S_n = 20\frac{1}{3}$;

г) $q = \sqrt{3}$, $b_n = 18\sqrt{3}$, $S_n = 26\sqrt{3} + 24$.

970. Знайдіть чотири числа, з яких три перших є послідовними членами геометричної прогресії, а три останніх — членами арифметичної прогресії, якщо сума крайніх чисел дорівнює 21, а сума середніх — 18.

971. Знайдіть такі числа x, y, z, t, щоб послідовність x, y, -2, z, -8, t була геометричною прогресією.

www.4book.org

972. Починаючи з якого номера члена геометричної прогресії:
а) 729, 243, ... усі її члени будуть меншими за 0,01;
б) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ... усі її члени будуть більшими за 5?

973. Виведіть формулу для обчислення добутку n перших членів геометричної прогресії.

974. Було це майже сто років тому. Селянин продавав 20 овець за 200 крб. Коли один з покупців почав надто довго торгуватись, селянин запропонував: «Дай за першу вівцю 1 к., за другу — 2 к., за третю — 4 к. і далі за кожну вівцю вдвічі більше копійок, ніж за попередню». Покупець погодився. Скільки він заплатив за тих 20 овець?

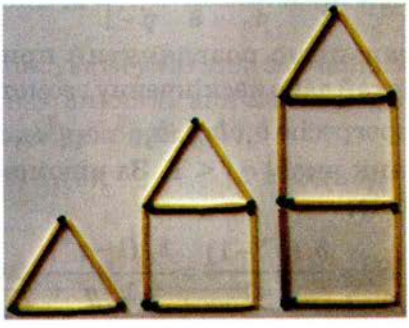
975. Бактерія, потрапивши в організм, до кінця 20-ї хвилини ділиться на дві, кожна з них до кінця 20-ї хвилини знов ділиться на дві і т. д. Скільки бактерій в організмі буде за добу?

976. Уявімо, що на початку нашої ери жінка M народила дві дочки, кожна з них до 30 років так само народила дві дочки і т. д. Чи можливо це? Скільки б за таких умов нащадків M жило в наш час?

Вправи для повторення

977. Знайдіть область значень функції $y = x^2$, заданої на проміжку:
а) $(0; 3)$; б) $(-5; -3)$; в) $[-2; 3)$; г) $[-4; 4)$.

978. На малюнку 142 зображено кілька фігур, складених із сірників.



Мал. 142

www.4book.org

Уявіть, що послідовність таких фігур продовжено. Скільки треба сірників, щоб скласти фігуру F_9?

979. Маса одного куска металу 440 г, а другого — 429 г. Знайдіть густину кожного з цих металів, якщо густина першого на 1 г/см^3 більша, а об'єм на 5 см^3 менший, ніж другого.

980. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

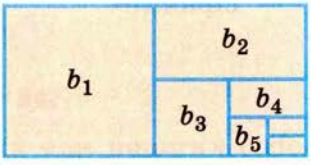
а) $\begin{cases} xy - 6 = 0, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + 6 = 0, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$

§23. ЗАДАЧІ НА ОБЧИСЛЕННЯ СУМ

Досі ми не обчислювали сум нескінченного числа доданків, однак іноді є сенс розглядати і такі суми. Чому, наприклад, дорівнює сума усіх членів нескінченної геометричної прогресії $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$?

Нехай площа зображеного на малюнку 143 квадрата b_1 дорівнює 1, а площі прямокутників b_2, b_3, b_4, ... — відповідно $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Якщо кількість цих прямокутників збільшувати до нескінченності, то сума їх площ як завгодно близько наближатиметься до числа 2. Тому вважають, що

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$



Мал. 143

Узагальнимо розглянутий приклад. Нехай дано нескінченну геометричну прогресію $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \ldots$, знаменник якої $|q| < 1$. За відомою формулою,

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ або } S_n = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1 q^n}{1 - q}.$$

www.4book.org

Тут число $\frac{b_1}{1-q}$ стале, а n — змінне. Якщо $|q|<1$, то при необмеженому збільшенні n степінь q^n прямує до 0 (пишуть: якщо $n \to \infty$, то $q^n \to 0$). При цьому і дріб $\frac{b_1 q^n}{1-q}$ прямує до 0.

Отже, якщо $n \to \infty$, то $S_n \to \frac{b_1}{1-q}$. Тому домовились сумою нескінченної геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $|q|<1$ вважати число $\frac{b_1}{1-q}$.

Іншими словами, якщо $|q|<1$ і $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots = S$, то

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Приклад 1. Знайдіть суму геометричної прогресії $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$.

✔ Розв'язання. Тут $b_1 = 4$, $q = -\frac{1}{3}$, тому шукана сума

$$S = \frac{4}{1+\frac{1}{3}} = 3.$$

Відповідь. $S = 3$.

За допомогою формули $S = \frac{b_1}{1-q}$ *нескінченні періодичні десяткові дроби* можна записувати у вигляді звичайних дробів.

Приклад 2. Запишіть у вигляді звичайного дробу нескінченний періодичний десятковий дріб:

а) 0,(2); б) 1,(6); в) 0,(23).

✔ Розв'язання.

а) $0,(2) = 0,2222\ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots = \frac{0,2}{1-0,1} = \frac{2}{9}$;

www.4book.org

б) $0,(6) = 0,6666\ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots = \frac{0,6}{1-0,1} = \frac{2}{3}$.

Отже, $1,(6) = 1 + 0,(6) = 1\frac{2}{3}$;

в) $0,(23) = 0,2323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \ldots = \frac{0,23}{1-0,01} = \frac{23}{99}$.

Відповідь. а) $\frac{2}{9}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $\frac{23}{99}$.

Нескінченний десятковий періодичний дріб, ціла частина якого дорівнює нулю, а період стоїть одразу після коми, дорівнює звичайному дробу, чисельником якого є число, що стоїть у періоді, а знаменник містить стільки дев'яток, скільки цифр у періоді.

Подумайте, як записати у вигляді звичайного дробу, наприклад, число 1,5 (6).

Досі ми знаходили суми членів найпростіших послідовностей: арифметичної та геометричної прогресій. Нерідко виникає потреба обчислювати суми членів інших послідовностей. Розглянемо приклади.

Приклад 3. Знайдіть суму S перших ста членів послідовності

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots.$$

✔ Розв'язання. Кожний член даної послідовності можна подати у вигляді різниці:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \ldots.$$

Отже,

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{100\cdot 101} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} =$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

www.4book.org

Відповідь. $S = \frac{100}{101}$.

Приклад 4. Знайдіть суму квадратів n перших натуральних чисел.

✔ Розв'язання. За формулою «куб двочлена», $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, звідси $3a^2 = (a+1)^3 - a^3 - 3a - 1$. Надаючи змінній a послідовно значення $1, 2, 3, \ldots, n$, одержимо n правильних числових рівностей:

$$3 \cdot 1^2 = 2^3 - 1^3 - 3 \cdot 1 - 1,$$
$$3 \cdot 2^2 = 3^3 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 1,$$
$$3 \cdot 3^2 = 4^3 - 3^3 - 3 \cdot 3 - 1,$$
$$3 \cdot 4^2 = 5^3 - 4^3 - 3 \cdot 4 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$3 \cdot n^2 = (n+1)^3 - n^3 - 3 \cdot n - 1.$$

Додавши почленно усі ці рівності (числа $2^3, 3^3, 4^3, \ldots, n^3$ взаємно знищаться), одержимо тотожність:

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$$
$$= (n+1)^3 - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n - 1,$$

звідси

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$$
$$= (n+1)^3 - \frac{3}{2} n \cdot (n+1) - (n+1) = \frac{n}{2} \cdot (n+1)(2n+1).$$

Отже,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6} \cdot (n+1)(2n+1).$$

Відповідь. $\frac{n}{6} \cdot (n+1)(2n+1)$.

Зверніть увагу на вираз $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$. Це сума перших членів геометричної прогресії з першим членом a^4 і знаменником $\frac{b}{a}$. За формулою суми членів геометричної прогресії,

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \frac{a^4\left(\frac{b^5}{a^5} - 1\right)}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{a^5 - b^5}{a - b}.$$

www.4book.org

Отже, $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Так само можна довести тотожності:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$
$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6).$$

І взагалі:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Формули «різниця квадратів» і «різниця кубів» — окремі випадки цієї загальної формули.

Перевірте себе

1. Як знайти суму перших n натуральних чисел?
2. Чому дорівнює сума усіх цілих чисел від -100 до 100?
3. Чи існує сума членів нескінченної геометричної прогресії, знаменник якої більший за 1?
4. Чому дорівнює сума членів нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший за 1?
5. Чому дорівнює сума нескінченної кількості доданків:

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots ?$$

Виконаємо разом!

1. Знайдіть суму $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$, доданки якої — члени геометричної прогресії.

✔ Розв'язання. Перший член прогресії — число 3, а знаменник $\frac{1}{3}$, тому шукана сума $S = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 1} = 4{,}5$.

Відповідь. 4,5.

2. Спростіть вираз:

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \ldots + \frac{1}{(4n - 1)(4n + 3)}.$$

www.4book.org

✔ **Розв'язання.** Помножимо і поділимо задану суму на 4. Одержимо:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\frac{4}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{4}{(4n-1)(4n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4n+3-3}{3\cdot(4n+3)}=\frac{n}{3\cdot(4n+3)}.$$

Відповідь. $\frac{n}{3\cdot(4n+3)}$.

Виконайте усно

981. Знайдіть суму членів послідовності:
$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

982. Знайдіть суму ста членів арифметичної прогресії, в якої $a_1 = 3$, $d = 0$.

983. Чому дорівнює сума:
а) $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10$;
б) $a-8x+2a-4x+4a-2x+8a-x$?

Рівень А

984. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$;
б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;
в) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$;
г) $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$.

985. Знайдіть суму, доданками якої є послідовні члени геометричної прогресії:

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$;
б) $2-\frac{2}{5}+\frac{2}{25}-\frac{2}{125}+\ldots$;

www.4book.org

в) $16 - 8 + 4 - 2 + \ldots$; г) $-1 - \frac{3}{4} - \frac{9}{16} \ldots$.

986. ***Задача Архімеда.*** Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots.$$

987. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$;

б) $6 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots$.

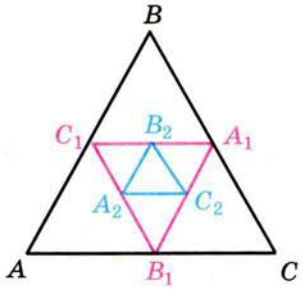
988. Подайте у вигляді звичайного дробу нескінченні періодичні десяткові дроби:

а) $0{,}3333\ldots$; б) $0{,}6666\ldots$; в) $0{,}111111\ldots$.

989. Запишіть нескінченний періодичний дріб у вигляді звичайного дробу:

а) $0{,}(4)$; б) $0{,}(5)$; в) $0{,}(12)$; г) $0{,}(25)$.

990. Дано рівносторонній трикутник зі стороною 1 см. Середини його сторін — вершини другого трикутника, середини сторін другого — вершини третього трикутника і т. д. (мал. 144). Знайдіть суму периметрів усіх цих трикутників.



Мал. 144

991. Сформулюйте і розв'яжіть задачу про квадрати, подібну до задачі **990**.

992. ***Задача Орема.*** Доведіть, що:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \ldots = \frac{7}{4}.$$

www.4book.org

Рівень Б

993. Знайдіть суму членів нескінченної геометричної прогресії:

а) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$; б) $5, \sqrt{5}, 1, \ldots$;

в) $1, \pi - 3, (\pi - 3)^2, \ldots$; г) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, \ldots$.

994. У коло радіуса r вписано правильний трикутник, у трикутник вписано друге коло, в яке знову вписано правильний трикутник, і т. д. Знайдіть суму периметрів усіх трикутників і суму довжин усіх кіл.

995. Запишіть у вигляді звичайного дробу нескінченний періодичний десятковий дріб:

а) 10,(4); б) 3,0(6); в) 0,(24); г) 1,4(7).

996. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

а) 3,(5); б) 21,(21); в) 1,1(6); г) 10,00(52).

997. Відомо, що $|a| < 1$, $|x| < 1$. Спростіть нескінченні суми:

а) $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$;

б) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$.

998. Знайдіть суму нескінченного числа доданків:

$$(8 + 4\sqrt{2}) + + (4 + 2\sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) + \ldots,$$

кожний з яких удвічі менший від попереднього.

999. Запишіть таку нескінченно спадну геометричну прогресію перший член якої дорівнює 3, а сума членів становить 4.

1000. Перший член нескінченно спадної геометричної прогресії на 8 більший, ніж другий, а її сума дорівнює 18. Знайдіть четвертий член цієї прогресії.

1001. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 1,5, а сума їх квадратів — 1,125. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

1002. Знайдіть суму ста перших доданків:

а) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + n(-1)^{n+1} + \ldots$;

б) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + n^2(-1)^{n+1} + \ldots$.

www.4book.org

1003. Знайдіть суму перших сорока членів послідовності:

а) $\frac{41}{1\cdot 2}, \frac{41}{2\cdot 3}, \frac{41}{3\cdot 4}, \frac{41}{4\cdot 5}, \dots, \frac{41}{n(n+1)}, \dots;$

б) $\frac{3}{1\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 7}, \frac{3}{7\cdot 10}, \frac{3}{10\cdot 13}, \dots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}, \dots.$

1004. Доведіть тотожність:

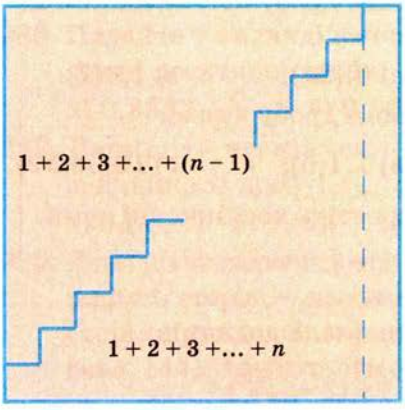
$1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1=n^2.$

З'ясуйте її геометричний зміст за малюнком 145.

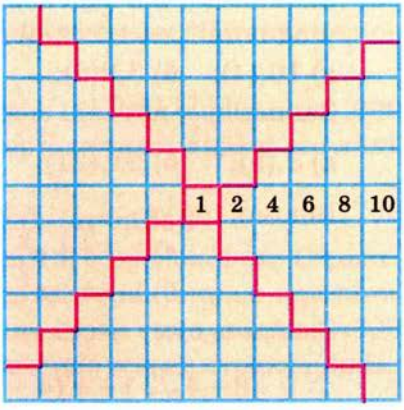
1005. Доведіть тотожність:

$8\cdot(1+2+3+4+\dots+n)+1=(2n+1)^2.$

З'ясуйте її геометричний зміст за малюнком 146.



Мал. 145



Мал. 146

Розв'яжіть рівняння, в лівій частині якого — сума членів геометричної прогресії **(1006—1007).**

1006. $\frac{1}{x}+x+x^2+\dots+x^4+\dots=\frac{7}{2}$, якщо $|x|<1$.

1007. $1+2x+x^2-x^3+x^4-x^5+\dots=\frac{13}{6}$, якщо $|x|<1$.

Доведіть тотожність **(1008—1010).**

1008. $(1+2+3+\dots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\dots+n^3.$

1009. $4(1^3+2^3+3^3+\dots+n^3)=n^2(n+1)^2.$

1010. $3(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)=n(n+1)(n+2).$

www.4book.org

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант I

1°. Послідовність 3, 7, 11, 15, ... — арифметична прогресія. Визначте її n-й, 50-й члени і суму перших п'ятдесяти членів.

2°. Послідовність 2, −6, 18, −54, ... — геометрична прогресія. Визначте її n-й член і суму перших семи членів.

3•. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її перший, другий і четвертий члени утворюють арифметичну прогресію.

Варіант II

1°. Послідовність 2, 7, 12, 17, ... — арифметична прогресія. Визначте її n-й, 40-й члени і суму перших сорока членів.

2°. Послідовність 2, −4, 8, −16, ... — геометрична прогресія. Визначте її n-й член і суму перших десяти членів.

3•. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо другий, третій і п'ятий її члени утворюють арифметичну прогресію.

Варіант III

1°. Послідовність 5, 9, 13, 17, ... — арифметична прогресія. Визначте її n-й, 50-й члени і суму перших п'ятдесяти членів.

2°. Послідовність 3, −6, 12, −24, ... — геометрична прогресія. Визначте її n-й член і суму перших десяти членів.

3•. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її третій, четвертий і шостий члени утворюють арифметичну прогресію.

Варіант IV

1°. Послідовність 4, 7, 10, 13, ... — арифметична прогресія. Визначте її n-й, 60-й члени і суму перших шістдесяти членів.

2°. Послідовність 3, −9, 27, −81, ... — геометрична прогресія. Визначте її n-й член і суму перших восьми членів.

3•. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її четвертий, п'ятий і сьомий члени утворюють арифметичну прогресію.

www.4book.org

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Числова послідовність — це функція, задана на множині усіх або перших n натуральних чисел.

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме стале для цієї прогресії число. Це число називають *різницею* даної арифметичної прогресії і позначають буквою d.

Перші послідовні члени арифметичної прогресії позначають буквами $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

Її n-й член: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сума перших n членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Геометричною прогресією називають числову послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме стале для даної прогресії число. Це число називають *знаменником* прогресії і позначають буквою q. Вважають, що $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Якщо перші члени геометричної прогресії $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, то її n-й член: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Сума n перших членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Якщо $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

Якщо модуль знаменника нескінченної геометричної прогресії менший від 1, то можна визначити суму всіх її членів за формулою:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

За допомогою останньої формули нескінченні періодичні десяткові дроби можна записувати у вигляді звичайних дробів:

$$0,(5) = 0,555\ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \ldots = \frac{0,5}{1 - 0,1} = \frac{5}{9}.$$

www.4book.org

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

У єгипетському папірусі Ахмеса (II тис. до н. е.) є така задача. «Нехай тобі сказано: поділи 10 мір ячменю між десятьма людьми так, щоб кожен дістав на $\frac{1}{8}$ міри більше, ніж сусід». Ідеться про знаходження десяти членів арифметичної прогресії a, $a+\frac{1}{8}$, $a+\frac{2}{8}$, ..., $a+\frac{9}{8}$, сума яких дорівнює 10.

Стародавні вавилоняни обчислювали, зокрема, суму членів геометричної прогресії $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^9$.

Давньогрецькі математики ще в V ст. до н. е. знали, що

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1),$$

$$1+3+5+\ldots+(2n+1)=n^2.$$

Правила для знаходження суми членів геометричної прогресії є в «Основах» Евкліда.

Архімед вивів правила для знаходження суми квадратів перших n натуральних чисел, умів він також обчислювати суми членів нескінченних спадних геометричних прогресій.

Співвідношення

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2,$$

яке дає можливість обчислювати суму кубів перших n натуральних чисел, відкрив у XI ст. багдадський математик Абу Бекрі.

Оригінальний метод знаходження сум n членів багатьох числових послідовностей, таких як

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2),$$

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

розробив український математик В. Я. Буняковський (див. с. 65).

www.4book.org

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 4

1. Знайдіть сьомий член арифметичної прогресії, якщо $a_6 + a_8 = 20$.
а) 5; б) 20; в) 10; г) 15.

2. Обчисліть перший член геометричної прогресії, якщо $b_3 = 4$, а $b_4 = 2$.
а) 2; б) 4; в) 8; г) 16.

3. Знайдіть п'ятий член послідовності, заданої формулою $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$.
а) 162; б) 54; в) 18; г) 93.

4. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

$2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \ldots$.

а) $\frac{3}{2}$; б) $1\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{2}$; г) 1.

5. Знайдіть суму всіх парних двоцифрових чисел.
а) 2408; б) 2450; в) 2440; г) 2430.

6. Знайдіть добуток членів геометричної прогресії $b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$, якщо $b_4 = 2$.
а) 4; б) 14; в) 8; г) 60.

7. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії $2, 6, \ldots$.
а) $a_n = n^2 + n$; б) $a_n = 4n - 2$; в) $a_n = 4n + 2$; г) $a_n = n - n^2$.

8. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії, якщо $b_1 = 3$, $q = 2$.
а) 197; б) 90; в) 189; г) 93.

9. Які два числа слід вставити між числами 2 і 31,25, щоб разом вони утворили геометричну прогресію?
а) 1 і 7; б) 3 і 4,5; в) 2,5 і 8; г) 3,5 і 4.

10. Під яким номером у геометричній прогресії 3, 6, ... міститься число 384?
а) 7; б) 9; в) 8; г) 10.

www.4book.org

Типові завдання до контрольної роботи № 4

1°. В арифметичній прогресії $a_1 = 4$, $a_2 = 14$.
Знайдіть: а) d; б) a_5; в) S_{10}.

2°. У геометричній прогресії $b_1 = 16$, $b_2 = 8$.
Знайдіть: а) q; б) b_6; в) S_5.

3°. Знайдіть восьмий член арифметичної прогресії, якщо $a_2 + a_{14} = 20$.

4°. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

$16, -4, 1, -\frac{1}{4}, \ldots$.

5. Подайте у вигляді звичайного дробу:
а°) 0,(2); б•) 0,(25); в••) 0,3(8).

6•. Знайдіть кількість n членів геометричної прогресії, в якій

$b_1 = \frac{3}{2}$, $b_n = 768$, $S_n = 1534{,}5$.

7•. Починаючи з якого номера члени арифметичної прогресії $-3{,}6; -3{,}3; -3, \ldots$ стануть додатними?

8•. Знайдіть суму усіх натуральних чисел, які менші за 100 і діляться на 6.

9•. У саду одна дитина зірвала один персик, друга — два, а кожна наступна – на один персик більше. Потім усі, хто рвали персики, розділили їх між собою порівну і кожен одержав по 6 персиків. Скільки дітей рвали персики?

10••. Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою $S_n = 2(5^n - 1)$.
Знайдіть: а) S_4; б) a_5.

www.4book.org

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

НЕРІВНОСТІ

Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій **(1011—1015)**.

1011. а) $5x < 15$; б) $0{,}6x \geq 3$; в) $-4x < 1$;
г) $7x + 1 < 15$; ґ) $9x - 5 \leq 13$; д) $7 - 4x > 15$.

1012. а) $3x - 5 < x + 7$; б) $x + 15 \geq 5x + 3$;
в) $0{,}3y + 1 > 3 - 0{,}2y$; г) $1{,}5z - 2 < z + 8$.

1013. а) $2x - \frac{3}{5}(x-1) > 4$; б) $5 \leq 3x - \frac{2}{3}(x-1)$;

в) $1 + \frac{2x+1}{3} < \frac{11-3x}{4}$; г) $\frac{7z-16}{5} - \frac{4z+5}{6} < 11$.

1014. а) $5 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (3x - 2) > 3x - 4 \cdot (2x - 7)$;
б) $4 \cdot (3 - 2y) - 3 \cdot (4y + 5) < 5y + 3 \cdot (y - 4)$.

1015. а) $0{,}5 - 1{,}2 \cdot (3 - x) \leq 4{,}5 \cdot (2 - 4x) - 5x$;
б) $1{,}2z - 0{,}6 \cdot (5 - 3z) \geq 2{,}3 \cdot (2 - 5z) - 4z$.

1016. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

а) $\sqrt{5x-7}$; б) $\sqrt{1-2x}$; в) $\frac{1}{x} + \sqrt{3x-1}$?

1017. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{-2x}$; б) $y = \sqrt{3-7x}$; в) $y = \sqrt{x^2+3}$;

г) $y = \sqrt{-x^2-1}$; ґ) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; д) $y = \frac{2}{x} - \sqrt{1-x}$.

Розв'яжіть систему нерівностей **(1018—1021)**.

1018. а) $\begin{cases} 5x+1 > 6x-18, \\ 3x-7 < 5x-13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7y+3 > 8y-17, \\ 3y-2 < 6y-12. \end{cases}$

1019. а) $\begin{cases} 4x+5 < 9x-5, \\ 8x-7 \geq 5x+4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5+3z \leq 9z-4, \\ 8z-6 > 7z+3. \end{cases}$

1020. а) $\begin{cases} 3(2x-1)+2{,}5x < 4, \\ 0{,}5(x-3)-4{,}5 < x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}5(2x-3)+2{,}7x < 2, \\ 3x-2{,}5(4-0{,}5x) > 0. \end{cases}$

www.4book.org

1021. а) $\begin{cases} 1+2x > \dfrac{9x-2}{4}, \\ 7+2x > 3x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2-6x}{5} \geq 3x+13, \\ 5x-8 \leq \dfrac{3x+2}{4}. \end{cases}$

1022. Розв'яжіть подвійну нерівність

а) $9 < 2x + 3 < 17$; б) $-8 < 3x - 2 < 25$;

в) $0 \leq 1 - x \leq 1$; г) $0 \leq 2 - x \leq 2$;

ґ) $-8 \leq 3 - 11z < 58$; д) $-1{,}5 < \dfrac{1}{6}(1-2y) \leq -0{,}5$.

Розв'яжіть нерівність **(1023—1025).**

1023. а) $(x + 3)(x - 5) < 0$; б) $(x + 7)(x + 4) < 0$;

в) $(y - 2)(8 - y) > 0$; г) $(z - 5)(6 - z) < 0$.

1024. а) $(x^2 + 3)(x - 5) < 0$; б) $(y + 2)(2 + y^2) > 0$;

в) $(3x - 2)(5 - 2x) > 0$; г) $4(2y - 3)(7 - 3y) < 0$.

1025. а) $\dfrac{12}{x+3} > 0$; б) $\dfrac{18}{2z+1} < 0$; в) $\dfrac{13}{2-3x} > 0$;

г) $\dfrac{x+5}{3-2x} > 0$; ґ) $\dfrac{x-7}{2-4x} < 0$; д) $\dfrac{c-3}{5-2c} < 0$.

ФУНКЦІЇ І ГРАФІКИ

1026. Знайдіть $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, якщо функцію задано формулою:

а) $f(x) = 2x^2 + 3$; б) $f(x) = 3x^3 - 2$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1027. Функцію задано формулою $y = \dfrac{6x}{1+x}$ на множині натуральних чисел першого десятка. Задайте її у вигляді таблиці.

1028. Функцію задано формулою $y = 2\sqrt{x+5}$ на області визначення $D = \{-4; -2{,}75; -1; 1{,}25; 4; 11\}$. Задайте її у вигляді таблиці і графіка.

1029. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4$, якщо $D = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. Знайдіть її область значень.

www.4book.org

1030. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 5x - 1$; б) $y = \sqrt{x+1}$; в) $y = \sqrt{4-x}$;

г) $y = \frac{1}{x^2-1}$; ґ) $y = \frac{3x}{x+3}$; д) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

1031. При яких значеннях x дана функція має найменше значення:

а) $y = x^2 - 6x + 9$; б) $y = x^2 + 4x + 7$;

в) $y = 4x^2 - 12x - 3$; г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

1032. Знайдіть найбільше значення функції:

а) $y = 3 - (x-2)^2$; б) $y = -0{,}25(x+5)^2$;

в) $y = 6x - x^2 - 10$; г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

1033. Знайдіть точки перетину графіка функції з віссю x:

а) $y = x^2 + 10x - 11$; б) $y = x^2 + 18x + 81$;

в) $y = 6x^2 - 5x - 1$; г) $y = 2x^2 + 3x - 9$;

ґ) $y = -2x^2 + 7x - 3$; д) $y = 5 - 2x - 7x^2$;

е) $y = 6x^2 - x$; є) $y = -2x(x+3)$.

1034. Способом виділення квадрата двочлена побудуйте параболу:

а) $y = x^2 + 4x + 5$; б) $y = x^2 - 6x + 5$;

в) $y = x^2 - 2x - 1$; г) $y = 1 + 4x - x^2$;

ґ) $y = 4x^2 - 4x + 5$; д) $y = 5x^2 + 10x + 4$.

Побудуйте графік функції **(1035—1037)**.

1035. а) $y = (x+2)^2 - 3$; б) $y = (x-1)^2 + 3$;

в) $y = -(x-3)^2 + 1$; г) $y = 2(x+1)^2 - 1$;

ґ) $y = 0{,}5(x-2) - 2$; д) $y = 5 - (x-0{,}5)^2$.

1036. а) $y = x(x-2)$; б) $y = x(5-x)$; в) $y = x^2 - 6x$;

г) $y = 2x - x^2$; ґ) $y = 3x^2 + 12$; д) $y = x - 2x^2$.

1037. а) $y = 3x^2 + 3x - 1$; б) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

в) $y = -3x^2 + 6x - 1$; г) $y = -x^2 + x - 3$;

ґ) $y = -2x^2 + 3x + 2$; д) $y = 5x^2 + 3x - 2$.

Розв'яжіть квадратну нерівність **(1038—1044)**.

1038. а) $x^2 + 2x > 0$; б) $x^2 - x \geq 0$;

в) $2x^2 + 5x \leq 0$; г) $3x^2 - x < 0$.

1039. а) $x^2 - 3x + 2 > 0$; б) $x^2 + 5x + 6 < 0$;

в) $x^2 - x - 2 \leq 0$; г) $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

www.4book.org

1040. а) $3x^2 - x - 4 \geq 0$; б) $5x^2 - 2x - 3 > 0$;
в) $6x^2 + 5x + 1 < 0$; г) $10x^2 - 9x + 2 \leq 0$.

1041. а) $-x^2 + 2x - 1 < 0$; б) $-x^2 - 2x - 5 > 0$;
в) $6x - 9 - x^2 \geq 0$; г) $3x - 7x^2 - 5 \leq 0$.

1042. а) $(x - 3)(x + 5) > 0$; б) $(x + 2)(x + 7) < 0$;
в) $(x + 7)(x - 1) \geq 0$; г) $(x - 3)(x - 5) \leq 0$.

1043. а) $(2x + 1)(x + 1) > 0$; б) $(3x - 2)(2x + 3) \geq 0$;
в) $(x - 7)(3x + 1) < 0$; г) $(2x - 5)(3x - 6) > 0$.

1044. а) $(x - 1)(2 - x) > 0$; б) $(3 + x)(x + 7) < 0$;
в) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$; г) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

1045. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{x+3}{x-7} > 0$; б) $\frac{x}{x+2} > 0$;

в) $\frac{2+x}{x+3} < 0$; г) $\frac{3-x}{x} < 0$.

1046. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy - 2y = 4, \\ y = x - 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ xy = 1. \end{cases}$

1047. Розв'яжіть систему рівнянь способом алгебраїчного додавання:

а) $\begin{cases} x + y - xy = -23, \\ x - y + xy = 49; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ (x - y)(x + y) = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x^2y + xy^2 = -6. \end{cases}$

1048. Розв'яжіть систему рівнянь способом заміни змінних:

а) $\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ x + y + 3xy = -35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x + y = -11, \\ x^2y + y^2x = 30; \end{cases}$

www.4book.org

в) $\begin{cases} x^2+y^2=28, \\ x+y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15. \end{cases}$

ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Створіть математичну модель (у вигляді рівняння, системи рівнянь або діаграми) для задачі **(1049—1056)**.

1049. На двох токах разом є 990 т пшениці. Скільки центнерів пшениці на кожному з них, якщо на першому на 20 % більше, ніж на другому?

1050. У магазин привезли крупи двох сортів, усього 1800 кг. Після того як продали 60 % 1-го сорту і 70 % 2-го сорту, в магазині залишилось 640 кг крупи. Скільки крупи 1-го і 2-го сорту окремо привезли в магазин?

1051. На вступному іспиті з математики 15 % абітурієнтів не розв'язали жодної задачі, 144 абітурієнти розв'язали задачі з помилками, а число тих, хто розв'язав усі задачі правильно, відноситься до числа тих, хто не розв'язав жодної, як 5 : 3. Скільки абітурієнтів складали іспит з математики?

1052. Відстань 400 км швидкий поїзд проїхав на годину швидше, ніж товарний. Яка швидкість кожного поїзда, якщо швидкість товарного на 20 км/год менша, ніж швидкого?

1053. Турист, проїхавши 1200 км, підрахував, що коли б він був у дорозі на 6 днів більше, то проїжджав би щодня на 10 км менше. Яку відстань проїжджав турист щодня?

1054. Басейн наповнюється двома трубами за 6 год. Одна труба може наповнити весь басейн на 5 год швидше, ніж друга. За який час може наповнити весь басейн кожна труба окремо?

1055. Дві ткалі, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 12 днів. За скільки днів виконала б цю саму роботу кожна ткаля окремо, коли відомо, що продуктивність однієї з них у 1,5 раза вища від продуктивності другої?

www.4book.org

1056. Поїзд за певний час мав пройти відстань 250 км. Але через 2 год після початку руху він затримався на 20 хв і, щоб прибути вчасно до місця призначення, йому довелось збільшити швидкість на 25 км/год. Якою була швидкість поїзда за розкладом?

1057. У яблуках «Антонівка» цукор становить 10,7 % маси. Скільки цукру містить 50 кг таких яблук?

1058. Банк обслужив 45 клієнтів, що становить 15 % від усіх клієнтів. Скільки клієнтів має банк?

1059. Ціну на товар знизили спочатку на 10 %, а потім ще на 5 %, і в результаті він став коштувати 34,2 грн. Якою була початкова ціна товару?

1060. У двох бочках води було порівну. Кількість води в першій бочці спочатку зменшилась на 10 %, а потім збільшилась на 10 %. Кількість води у другій бочці спочатку збільшилась на 10 %, а потім зменшилась на 10 %. В якій бочці води стало більше?

1061. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 20 %, а ширину — на 10 %?

1062. Ціну на товар було знижено на 20 %. На скільки відсотків її потрібно підвищити, щоб одержати попередню ціну?

1063. Витрати на виготовлення виробу становлять 1250 грн., а його ціна — 1750 грн. Обчисліть націнку на товар у відсотках.

1064. Торговельна організація купила два предмети за 2500 грн. і після їх продажу одержала 40 % прибутку. Скільки заплатила організація за кожний предмет, якщо перший приніс прибутку 25 %, а другий — 50 %.

1065. Шматок сплаву міді з оловом масою 12 кг містить 45 % міді. Скільки кілограмів чистого олова потрібно додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, що містить 40 % міді?

1066. З класу, в якому навчаються 22 учні, навмання вибирається один. Яка ймовірність того, що це буде хлопець, якщо у класі 10 хлопців?

1067. В ящику 7 білих і 13 чорних куль. З нього навмання беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що вона буде білого кольору?

www.4book.org

1068. У торбині a білих і b чорних куль. З неї виймають одну кульку білого кольору і відкладають убік. Після цього з ящика беруть ще одну кульку. Яка ймовірність того, що вона теж біла?

1069. З натуральних чисел від 1 до 20 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30?

1070. На семи однакових картках пишуть по одній літері, з яких можна викласти слово АЛГЕБРА. Потім їх перевертають, перемішують і навмання вибирають. Яка ймовірність того, що з вибраних карток точно можна буде скласти слово ГРАБ?

1071. Дерев'яний паралелепіпед розмірами 3×4×5 пофарбували з усіх боків, а потім розрізали на 60 рівних кубиків і кинули їх у торбину. Яка ймовірність того, що вийнятий навмання з торбини кубик матиме пофарбованих: а) 3 грані; б) 2 грані; в) 1 грань; г) 0 граней?

1072. Яка ймовірність того, що навмання вибране тризначне число виявиться: а) кратним 5; б) більшим за 100; в) меншим за 200?

1073. Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки:
а) 3, 4, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9;
б) 11, 17, 12, 13, 14, 15, 15, 16, 16, 13, 15, 11.

1074. Знайдіть центральні тенденції вибірки:
а) 1,2; 2,1; 2,4; 2,7; 2,8; 3,0; 3,0; 3,0; 3,0; 3,1; 3,1; 3,4; 3,6;
б) 0,98; 1,03; 1,06; 0,97; 0,97; 1,05; 1,01; 0,98; 0,97; 0,99; 0,96; 1,02; 0,97; 1,01; 1,03.

1075. За результатами тестування 48 студентів склали таблицю кількості допущених помилок.

3	1	2	2	0	3	3	1	3	2	4	2
2	3	0	1	5	3	1	2	4	1	3	2
0	3	2	2	4	3	0	1	3	3	2	3
4	1	0	2	2	1	2	0	1	2	3	2

Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму. Знайдіть центральні тенденції вибірки.

www.4book.org

1076. Результати вимірювання діаметра 200 деталей після шліфування занесено до таблиці.

d, см	6,67—6,69	6,69—6,71	6,71—6,73	6,73—6,75	6,75—6,77	6,77—6,79	6,79—6,81	6,81—6,83
Кількість деталей	5	17	24	54	52	23	18	7

За даними таблиці: а) побудуйте гістограму; б) визначте відносну частоту кожного значення.

1077. За результатами хімічного аналізу 3050 відливків чавуну складена таблиця вмісту в них вуглецю (у відсотках).

Вміст вуглецю, %	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
Кількість відливків	52	120	180	205	407	507	621	413	320	225

За даними таблиці: а) визначте відносну частоту кожного значення; б) знайдіть центральні тенденції вибірки.

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

1078. Напишіть п'ять перших членів послідовності, n-й член якої задається формулою:

а) $a_n = 2(n+1)$; б) $x_n = 6 : n$; в) $y_n = n^3 + 3n - (-1)^n$;

г) $b_n = 1 + n^2$; ґ) $c_n = 2n \cdot n^2$; д) $z_n = 1 + (-1)^n$.

1079. Послідовність задано формулою $a_n = 2n^2 + 3$. Знайдіть:

а) a_3; б) a_6; в) a_{15}; г) a_{100}.

1080. Знайдіть сьомий, десятий і двадцять п'ятий члени послідовності, n-й член якої задається формулою:

а) $c_n = (1-n)^2$; б) $c_n = 350 + n$; в) $c_n = 2n - (-1)^n$.

1081. Напишіть п'ять перших членів арифметичної прогресії, у якої:

а) $a_1 = 17$, $d = 2$; б) $a_1 = 0{,}5$, $d = 10$;

в) $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{4}$; г) $a_1 = 6$, $d = 0$.

www.4book.org

1082. В арифметичній прогресії перший член a_1 і різниця d. Знайдіть суму S_n її перших n членів, якщо:

а) $a_1 = 5, d = 3, n = 31$; б) $a_1 = 14{,}5, d = 0{,}7, n = 26$;

в) $a_1 = -\frac{3}{2}, d = \frac{1}{2}, n = 35$; г) $a_1 = 111, d = -\frac{2}{5}, n = 56$.

1083. Знайдіть суму перших ста членів арифметичної прогресії:

а) $a_1 = -35, d = 6$; б) $a_1 = 66, d = -8$;

в) $a_1 = -2{,}5, d = 3$; г) $a_1 = -20, d = 1{,}4$.

1084. Сума чотирьох перших членів арифметичної прогресії дорівнює 56, а сума чотирьох останніх — 112. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо перший її член дорівнює 11.

1085. Сума першого і п'ятого членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 14, добуток другого її члена на четвертий дорівнює 45. Скільки членів прогресії потрібно взяти, щоб в сумі одержати 24?

1086. Дано дві арифметичні прогресії. Перший і п'ятий члени першої прогресії дорівнюють відповідно 7 і -5. У другій прогресії перший член дорівнює 0, а останній — 3,5. Знайдіть суму членів другої прогресії, якщо відомо, що треті члени обох прогресій рівні між собою.

1087. У геометричній прогресії $b_7 = 80$, $b_8 = -160$. Знайдіть b_1, q, b_5.

1088. У геометричній прогресії $b_6 = 18$, $b_4 = 72$. Знайдіть b_1, q.

1089. Запишіть геометричну прогресію, яка складається з шести членів, якщо сума трьох перших її членів дорівнює 168, а сума трьох останніх — 21.

1090. У зростаючій геометричній прогресії сума першого і останнього членів дорівнює 66, добуток другого і передостаннього членів — 128, а сума всіх членів становить 126. Скільки членів у прогресії?

1091. ***Задача Джемшіда аль-Каші.*** У саду перший зірвав один гранат, другий — два, а кожний наступний — на один гранат більше. Потім усі, хто рвали гранати, розділили їх між собою порівну і кожний одержав по 6 гранатів. Скільки людей рвали гранати?

1092. ***Стародавня індійська задача.*** Подорожній у перший день проходить дві одиниці шляху, а кожного наступного дня на три одиниці більше, ніж у попередній. Інший

www.4book.org

подорожній проходить у перший день три одиниці шляху, а в кожний наступний — на дві одиниці більше. Коли перший наздожене другого, якщо вони вийшли одночасно з одного місця і в одному напрямку?

1093. Послідовність b_1, b_2, b_3, b_4 — геометрична прогресія. Чи буде геометричною прогресією послідовність:

а) $5b_1, 5b_2, 5b_3, 5b_4, \ldots$; б) $b_1+5, b_2+5, b_3+5, b_4+5, \ldots$;

в) $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5, \ldots$; г) $\frac{5}{b_1}, \frac{5}{b_2}, \frac{5}{b_3}, \frac{5}{b_4}, \ldots$?

1094. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $b_1=27, q=\frac{1}{3}$; б) $b_1=2, q=-\frac{1}{2}$;

в) $b_1=\frac{2}{3}, q=\frac{2}{3}$; г) $b_1=-\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{2}$.

1095. Перевірте, що знаменник q даної геометричної прогресії задовольняє умову $|q|<1$, і знайдіть суму цієї прогресії:

а) $1, \frac{2}{3}, \ldots$; б) $0{,}1, -0{,}01, \ldots$; в) $1{,}8; 0{,}36, \ldots$.

1096. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $7+\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\ldots$; б) $30-\frac{3}{10}+\frac{3}{1000}-\ldots$.

1097. ***Задача Ферма.*** Якщо S — сума нескінченної спадної геометричної прогресії (a_n), то:

$$\frac{S}{S-a_1}=\frac{a_1}{a_2}.$$

1098. Сума нескінченної геометричнбї прогресії дорівнює 4, а сума кубів її членів — 192. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.

1099. Сума нескінченної геометричної прогресії становить $\frac{8}{7}$ суми перших шести її членів. Знайдіть знаменник прогресії.

1100. Знайдіть суму, доданки якої є членами геометричної прогресії ($|b|<1$):

а) $b+b^2+b^3+\ldots$; б) $b-b^2+b^3-\ldots$;

в) $b^2+b^4+b^6+\ldots$; г) $b-b^3+b^5-\ldots$.

www.4book.org

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1101. Що більше: $\sqrt{14}+\sqrt{6}$ чи $2\sqrt{3}+\sqrt{7}$?

1102. Доведіть нерівність $4<\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}<5$.

1103. Доведіть, що при будь-яких значеннях a, b, c:

а) $2a^2+b^2+c^2\geq 2a(b+c)$;

б) $a^2+b^2+c^2\geq 2(a+2b+3c-7)$.

1104. Доведіть, що при будь-яких значеннях x, y:

а) $x^4+y^4\geq x^3y+xy^3$;

б) $2x^2+5y^2-4xy-2x-4xy+5>0$.

1105. Доведіть, що при будь-якому значенні a:

а) $a^4-2a^3-a^2+2a+1\geq 0$;

б) $a^4-3a^2-2a+5>0$.

1106. Доведіть, що при будь-яких значеннях a, b, c, d:

а) $(a^2+b^2)(c^2+a^2)\geq 4abcd$;

б) $a^2+b^2+c^2+d^2\geq (a+b)(c+d)$.

1107. Доведіть, що: а) $x^2+y^2\geq\frac{1}{2}$, якщо $x+y=1$;

б) $x^2+y^2\geq\frac{1}{5}$, якщо $x+2y=1$.

Розв'яжіть нерівність (**1108—1110**).

1108. а) $\frac{x^2+4}{x-4}<x$; б) $\frac{x^2+x+1}{3x^2+4x-4}<1$.

1109. а) $\frac{4x}{3-x}<x-1$; б) $\frac{x+4}{x+1}>2-x$.

1110. а) $(x+3)^3(x+5)(x-2)<0$;

б) $(8-x)^5(x+8)^2(x+4)\leq 0$.

1111. Покажіть, що нерівності $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-1}>1$ і $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-1}>2$ мають однакові множини розв'язків.

www.4book.org

Побудуйте графік функції (**1112—1113**).

1112. а) $y = 3 - |x|$; б) $y = \frac{1}{|x|}$; в) $y = x^2 + 2|x| - 3$.

1113. а) $y = \frac{x}{|x|}$; б) $y = x|x|$; в) $y = \frac{|x|}{|x| - 3}$.

1114. Побудуйте графік рівняння:

а) $x^2 + xy = 0$; б) $(x + 1)(y - 3) = 0$;

в) $(xy - 6)(y - 3) = 0$; г) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$.

1115. Запишіть простішою формулою функцію:

$$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2x} + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}.$$

Побудуйте її графік.

Побудуйте графік функції (**1116—1118**).

1116. а) $y = |2x - 3|$; б) $y = 2|x| - 3$.

1117. а) $y = 2|x^2 - 3|$; б) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

1118. а) $y = |2x^2 - 6|x| + 5|$; б) $y = |x^2 - 6x| + 5$.

1119. Скільки розв'язків має рівняння $|x^2 - 6x + 5| = a$, якщо a дорівнює: -2, 0, 2, 4, 6?

1120. Розв'яжіть нерівність:

а) $|x - 1| + |x - 5| \geq 6$; б) $|x - 1| + |x - 5| < 3$.

1121. ***Давньогрецька задача.*** Доведіть, що в арифметичній прогресії з парним числом членів сума членів однієї половини більша від суми решти членів на число, кратне квадрату половини числа членів.

1122. ***Стародавня задача.*** Служивому воїну дано винагороду: за першу рану 1 к., за другу — 2 к., за третю — 4 к. і т. д., а всього 655 крб. 35 к. Скільки ран мав той воїн?

1123. ***Стародавня китайська задача.*** Рисак і шкапа біжать від Чаньаня до князівства Ці, що за 3000 лі від Чаньаня. За перший день рисак пробігає 193 лі, а кожного наступного дня на 13 лі більше від попереднього. Шкапа за перший день пробігає 97 лі, а за кожний інший на половину лі менше, ніж за попередній. Рисак, добігши до Ці, повернув назад. Через скільки днів він зустрів шкапу?

www.4book.org

1124. На незнайомій вулиці ви шукаєте будинок 46, а бачите будинок 38. У який бік вам треба іти?

1125. Довжини сторін прямокутного трикутника — послідовні члени арифметичної прогресії. Знайдіть відношення катетів цього трикутника.

1126. Знайдіть числа x, y і z такі, щоб послідовність 2, x, y, z, 9 була арифметичною прогресією.

1127. Знайдіть суму натуральних чисел, менших від 1000, які:

а) діляться на 7; б) взаємно прості з числом 7;

в) діляться на 3 і не діляться на 6.

1128. a_1, a_2, a_3, ..., a_n — перші n членів геометричної прогресії зі знаменником q. Знайдіть суму:

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_n^n .$$

1129. q, q^2, q^3, q^4, ... — нескінченна геометрична прогресія. Знайдіть суму $q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots$.

1130. Знайдіть нескінченну геометричну прогресію, якщо сума її членів дорівнює 4, а сума кубів її членів становить 192.

1131. Другий, перший і третій члени арифметичної прогресії є послідовними членами геометричної прогресії. Знайдіть її знаменник.

1132. a, b, c — послідовні члени арифметичної прогресії. Доведіть, що числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ також є послідовними членами арифметичної прогресії.

1133. Підберіть формулу n-го члена для послідовності:

а) 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... ; б) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$.

1134. Знайдіть суму:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n-1)$.

www.4book.org

1135. Знайдіть натуральне число, яке дорівнює сумі всіх попередніх натуральних чисел.

1136. В якій арифметичній прогресії сума перших n членів дорівнює $2n^2 + n$?

1137. ***Задача Ньютона.*** Один комерсант щорічно збільшував на третину свій капітал, зменшений на 100 фунтів, які щороку він витрачав на сім'ю. Через три роки його капітал подвоївся. Скільки грошей він мав спочатку?

1138. Між числами 7 і 35 помістіть 6 чисел таких, щоб усі 8 чисел утворювали арифметичну прогресію.

1139. Напишіть n-й член послідовності 3, 6, 11, 18, ... , послідовні різниці між сусідніми членами якої становлять арифметичну прогресію.

1140. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\ldots+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=3,$$

в якому доданки лівої частини утворюють арифметичну прогресію.

1141. Знайдіть спільні члени арифметичних прогресій

$1, 4, 7, \ldots$ і $6, 11, 16 \ldots$.

Чи правильно, що послідовність їх спільних членів — арифметична прогресія?

1142. Доведіть, що для кожного натурального n виконується рівність:

а) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2 (n+1)^2$;

б) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$.

1143. ***Задача аль-Каші.*** Доведіть, що для будь-якого натурального значення n має місце рівність:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30} \cdot (6n^5 + 15n^4 + 10n^2 - n).$$

1144. ***Задача Ферма.*** Доведіть, що $5 \cdot (1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) =$

$$= (4n+2)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - (1^2 + 2^2 + + 3^2 + \ldots + n^2).$$

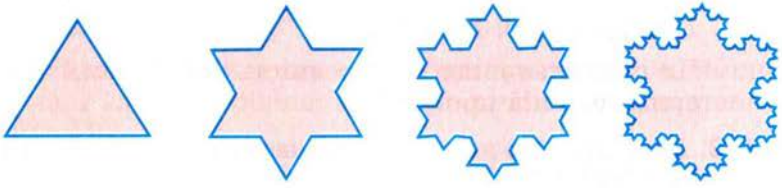
www.4book.org

1145. Знайдіть суму:

$$\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 23}+\ldots+\frac{1}{(6n-1)(6n+5)};$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

1146. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює $3a$ (мал. 147, *а*). Поділивши його сторону на три рівні відрізки, кожний середній із них замінимо ламаною, складеною з двох таких самих відрізків і кутом 60° між ними, як показано на малюнку 147, *б*. Кожну сторону утвореного зірчастого многокутника поділимо на три рівних відрізки і знову кожний середній із них замінимо подібною ламаною і т. д. Утворену в такий спосіб замкнуту лінію називають *сніжинкою Коха*. Вважаючи рівносторонній трикутник першим членом послідовності сніжинок Коха, запишіть послідовність: а) кількостей сторін сніжинок; б) довжин їх сторін; в) їх периметрів. Які з цих послідовностей є арифметичними або геометричними прогресіями?



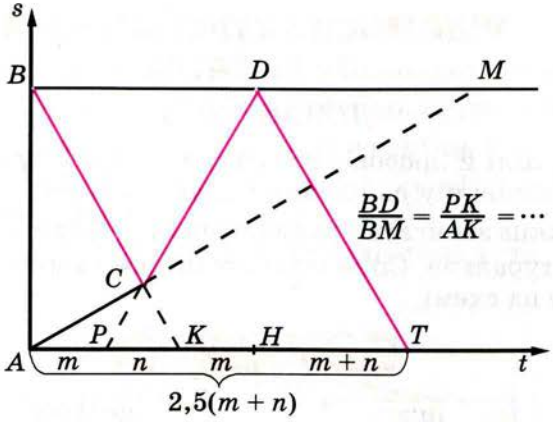
Мал. 147

1147. Знайдіть довжину сторони, периметр і площу третьої сніжинки Коха (мал. 147, *в*), утвореної з рівностороннього трикутника зі стороною 3 см. Чи існує сніжинка Коха, периметр якої удвічі (утричі) більший від правильного трикутника, з якої її утворено?

Скориставшись графічними моделями, розв'яжіть задачі **(1148—1149)**.

1148. З міста A до села B вирушив пішохід, одночасно з ним з B до A виїхав мотоцикліст. Зустрівши пішохода, мото-

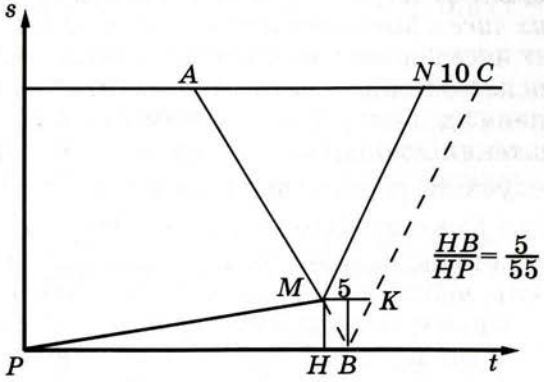
www.4book.org



Мал. 148

цикліст забрав його і повернув до B, а довізши пішохода в село, відразу поїхав до міста. У результаті мотоцикліст затратив на дорогу в 2,5 раза часу більше, ніж планував. У скільки разів менше часу затратив на дорогу до села пішохід завдяки допомозі мотоцикліста (мал. 148)?

1149. За одним бізнесменом щоранку виїжджав з офісу автомобіль, забирав його о 8 год і відвозив до офісу. А одного разу бізнесмен вийшов на 1 год раніше і вирішив піти назустріч автомобілю. Автомобіль виїхав, як і завжди, зустрів бізнесмена і привіз його до офісу на 10 хв раніше, ніж звичайно. У скільки разів швидкість автомобіля більша за швидкість бізнесмена (мал. 149)?



Мал. 149

www.4book.org

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7—8 КЛАСІВ

ДІЙСНІ ЧИСЛА

Числа цілі й дробові, додатні, від'ємні і нуль разом становлять множину *раціональних чисел*. Кожне раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — число ціле, а n — натуральне. Співвідношення між цими видами чисел показано на схемі.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. І кожний нескінченний періодичний десятковий дріб зображає деяке раціональне число.

Приклади. $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$, $-\frac{13}{11} = -1{,}181818\ldots$.

Числа, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають *ірраціональними*.

Приклади ірраціональних чисел: $\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$.

Ірраціональні числа разом з раціональними утворюють множину *дійсних чисел*. Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел позначають відповідно буквами **N**, **Z**, **Q**, **R**.

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для додавання і множення довільних дійсних чисел правильні переставний, сполучний і розподільний закони: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$, $(a + b)\,c = ac + bc$.

Розв'язуючи прикладні задачі, ірраціональні числа звичайно округлюють, відкидаючи їх нескінченні «хвости» десяткових знаків. При цьому додержуються *правила округлення*. Якщо перша з відкинутих цифр 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, що залишається, не змінюють. Якщо перша з відкинутих цифр 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишається, збільшують на 1.

www.4book.org

ВИРАЗИ

Добуток кількох рівних множників називають *степенем*. Наприклад, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ — п'ятий степінь числа 2. Він дорівнює 32, отже, $2^5 = 32$. Тут 2 — *основа степеня*, 5 — *показник степеня*, 2^5, або 32, — *степінь*. Другий і третій степені називають також *квадратом* та *кубом числа*.

$a^1 = a$. Якщо натуральне число n більше за 1, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.$$

Основна властивість степеня: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Перемножуючи степені одного й того самого числа, показники степенів додають, а основу лишають ту саму.

Інші властивості степенів:

$$(a^n)^m = a^{nm}; \ (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Числа, змінні, а також різні записи, складені з чисел чи змінних та знаків дій, разом називають *виразами*. Вирази бувають *числові* (наприклад, $3 - 0{,}5 : 6$) і *зі змінними* (наприклад, $3x$, $2ab$, $c^2 - 3$). Якщо вираз не містить ніяких інших дій, крім додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня з цілим показником і ділення, то його називають *раціональним виразом*. Раціональний вираз, який не містить дії ділення на вираз зі змінною, називають *цілим виразом*.

Приклади цілих виразів: $32{,}5$; a; $\frac{2}{5}x + y$; $0{,}3\,(x - z^2)$.

Два цілих вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають *тотожно рівними*, або *тотожними*. Два тотожно рівних вирази, сполучені знаком рівності, утворюють *тотожність*. Заміну одного виразу іншим, тотожним йому, називають *тотожним перетворенням* даного виразу.

Найпростіші вирази — числа, змінні, їх степені або добутки, їх називають *одночленами*. Приклади одночленів: $4x$, $2{,}5$, $-3x^2$, $-3\frac{1}{2}am^3$, $2ax \cdot 3ax^2$.

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і якщо кожна змінна входить тільки до одного множника, то такий одночлен називають

www.4book.org

одночленом стандартного вигляду. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають *коефіцієнтом* цього одночлена. Коефіцієнт 1 не пишуть, а замість коефіцієнта -1 пишуть тільки знак «$-$». Наприклад, коефіцієнти одночленів $7ax$, acx^2, $-xz^3$ дорівнюють відповідно 7, 1, -1.

Перемножуючи одночлени, ставлять між ними знак множення, і одержаний добуток зводять до одночлена стандартного вигляду. Щоб піднести одночлен до степеня, слід піднести до цього степеня кожний множник одночлена і знайдені степені перемножити. Наприклад,

$$2ax \cdot (-3x^2) = 2 \cdot (-3) \cdot a \cdot x \cdot x^2 = -6ax^3;$$

$$(0,3nc^3)^2 = 0,3^2 \cdot n^2 \cdot (c^3)^2 = 0,09n^2c^6.$$

Суму або різницю кількох одночленів тільки в окремих випадках можна записати у вигляді одночлена.

Суму кількох одночленів називають *многочленом.* Для зручності кожний одночлен також вважають многочленом.

Зв'язки між згадуваними виразами можна проілюструвати такою схемою.

Подібними членами многочлена називають такі, які різняться тільки коефіцієнтами або й зовсім не відрізняються один від одного. Многочлен записано в стандартному вигляді, якщо всі його члени — одночлени стандартного вигляду, і серед них немає подібних.

Додаючи многочлени, користуються правилом розкриття дужок: якщо перед дужками стоїть знак «$+$», то їх опускають. Наприклад,

$$(2a + 3) + (a^2 - 2a - 4) = 2a + 3 + a^2 - 2a - 4 = a^2 - 1.$$

Віднімаючи многочлен від многочлена, користуються таким правилом розкриття дужок: якщо перед дужками стоїть знак «$-$», то дужки можна опустити, змінивши знаки всіх доданків, які були в них, на протилежні. Наприклад,

$$4x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 5) = 4x^2 + 5 - x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 2x.$$

www.4book.org

Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на даний одночлен і результати додати. Наприклад,

$$(3a^2 + a - 8) \cdot 2ax = 3a^2 \cdot 2ax + a \cdot 2ax - 8 \cdot 2ax =$$
$$= 6a^3x + 2a^2x - 16ax.$$

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого і одержані добутки додати. Наприклад,

$$(x + 2z - 3) \cdot (4x - 7) =$$
$$= x \cdot 4x + 2z \cdot 4x - 3 \cdot 4x - x \cdot 7 - 2z \cdot 7 + 3 \cdot 7 =$$
$$= 4x^2 + 8xz - 19x - 14z + 21.$$

Формули скороченого множення

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ — квадрат двочлена,

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ — куб двочлена,

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — різниця квадратів,

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — різниця кубів,

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сума кубів.

Розкласти многочлен на множники означає замінити його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену. Найпростіші способи розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, використання формул скороченого множення.

Приклади.

$$6a^3x - 9abx = 3ax(2a^2 - 3b);$$
$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y);$$
$$9m^2 - 4 = (3m - 2)(3m + 2).$$

Частку від ділення виразу A на вираз B можна записати у вигляді *дробу* $\frac{A}{B}$. Дріб має значення тільки тоді, коли його знаменник не дорівнює нулю. *Алгебраїчним дробом* називають дріб, чисельник і знаменник якого — многочлени. При будь-яких значеннях a, b і $c \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (*основна властивість дробу*). На основі цієї властивості дроби можна скорочувати або зводити до спільного знаменника. Наприклад,

$$\frac{3a - 6x}{a^2 - 4x^2} = \frac{3(a - 2x)}{(a - 2x)(a + 2x)} = \frac{3}{a + 2x}.$$

www.4book.org

Дії над будь-якими дробами можна виконувати подібно до того, як їх виконують над звичайними дробами. Якщо знаменники не дорівнюють 0, то завжди

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\quad \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd},\quad \frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{ad}{cb}.$$

Приклади.

1) $\dfrac{a^2}{2a-4}-\dfrac{4}{2a-4}=\dfrac{a^2-4}{2(a-2)}=\dfrac{(a-2)(a+2)}{2(a-2)}=\dfrac{1}{2}(a+2);$

2) $\dfrac{a}{ab-b^2}+\dfrac{b}{ab-a^2}=\dfrac{a}{b(a-b)}-\dfrac{b}{a(a-b)}=\dfrac{a^2-b^2}{ab(a-b)}=\dfrac{a+b}{ab};$

3) $\dfrac{x^2-4}{x^2}:\dfrac{3x-6}{x}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}\cdot\dfrac{x}{3(x-2)}=\dfrac{x+2}{3x}.$

Дробовий вираз $\dfrac{1}{a^n}$ записують також у вигляді a^{-n}.

Степінь з цілим показником

$$a^n=\begin{cases}a, & \text{якщо } n=1\\ \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ разів}}, & \text{якщо } n\in N, n\geq 2,\\ 1, & \text{якщо } n=0, a=0,\\ \dfrac{1}{a^{-n}}, & \text{якщо } n<0.\end{cases}$$

Властивості степенів з цілими показниками аналогічні до властивостей степенів з натуральними показниками. Якщо числа m і n цілі, a і b відмінні від 0, то завжди:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad (ab)^n=a^n\cdot b^n;$$

$$a^m:a^n=a^{m-n};\quad (a^m)^n=a^{mn};\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a. Наприклад, з числа 16 існує два квадратних корені: 4 і -4. Невід'ємне значення квадратного кореня з числа a називають *арифметичним значенням кореня* і позначають символом $\sqrt{a}$.

www.4book.org

Властивості квадратних коренів. Якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \quad (\sqrt{a})^2 = a;$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Для будь-якого дійсного a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Приклади перетворень виразів з квадратними коренями:

$$(\sqrt{8} - 1)^2 + 4\sqrt{2} = 8 - 2\sqrt{8} + 1 + 4\sqrt{2} = 9 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 9;$$

$$\frac{x}{4 - \sqrt{15}} = \frac{x(4 + \sqrt{15})}{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = \frac{x(4 + \sqrt{15})}{4^2 - 15} = (4 + \sqrt{15})x.$$

РІВНЯННЯ

Рівняння — це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами. Числа, які задовольняють рівняння, — його *розв'язки* (або *корені*). *Розв'язати рівняння* означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними одне одному.

Основні властивості рівнянь

1. У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки, якщо вони є.

2. Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Рівняння виду $ax = b$, де a і b — довільні числа, називається *лінійним рівнянням* зі змінною x. Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають *рівнянням першого степеня* з однією змінною. Кожне рівняння першого степеня $ax = b$ має один корінь $x = \frac{b}{a}$. Лінійне рівняння може мати один корінь, безліч або не мати жодного кореня.

Наприклад, рівняння:

$12x = 6$ має один корінь,

$0x = 0$ має безліч коренів,

$0x = 5$ не має жодного кореня.

www.4book.org

Користуючись основними властивостями рівнянь, багато з них можна звести до лінійного, розв'язувати яке нескладно.

Приклад. Розв'язати рівняння $6 \cdot (0{,}5x - 2) + x = 3 - 2x$.

Розв'язання. $3x - 12 + x = 3 - 2x$,

$$6x = 15,\ x = 15 : 6,\ x = 2{,}5.$$

Відповідь. $x = 2{,}5$.

Квадратним називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$. Вираз $D = b^2 - 4ac$ — дискримінант квадратного рівняння. Якщо $D > 0$, то дане рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Якщо $D = 0$, то ці корені рівні. При $D < 0$ квадратне рівняння не має дійсних коренів.

Якщо треба, наприклад, розв'язати квадратне рівняння $2x^2 + 9x - 5 = 0$, то знаходимо його дискримінант: $D = 9^2 - 4 \times \times 2 \cdot (-5) = 121$. Тому корені рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 + 11}{4} = 0{,}5,\ x_2 = \frac{-9 - 11}{4} = -5.$$

Квадратне рівняння називають *неповним*, якщо хоч один з його коефіцієнтів, крім першого, дорівнює 0. Рівняння:

$ax^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$,

$ax^2 + bx = 0$ має два корені $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$,

$ax^2 + c = 0$ має два корені $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

при $\frac{c}{a} < 0$ і жодного при $\frac{c}{a} > 0$.

Квадратне рівняння називають *зведеним*, якщо його перший коефіцієнт дорівнює одиниці. Якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два корені, то

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2},\ x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

www.4book.org

Теорема Вієта. Якщо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два корені, то їх сума дорівнює $-p$, а добуток дорівнює q.

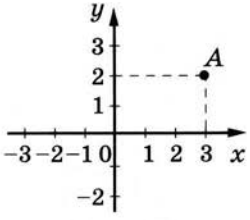
Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q, то m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Дробові рівняння можна розв'язувати, користуючись тим, що дріб дорівнює нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля. А можна спочатку помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник усіх його дробів, розв'язати утворене рівняння і виключити з його коренів ті, які перетворюють на нуль спільний знаменник.

ФУНКЦІЇ

Якщо кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y, то змінну y називають *функцією* від x. У цьому випадку змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом* функції. Наприклад, площа S квадрата — функція від довжини його сторони a.

Функцію можна задавати за допомогою формули, таблиці, графіка і т. ін. Графіки функцій найчастіше будують у *декартовій системі координат.* Така система координат складається з двох взаємно перпендикулярних координатних осей: горизонтальної осі *абсцис* — осі x і вертикальної осі *ординат* — осі y (мал. 150). Площину із системою координат називають *координатною площиною.* Кожній її точці відповідає єдина пара чисел. Наприклад, на малюнку 150 точці A відповідає пара чисел (3; 2). Записують: A (3; 2). Тут 3 — абсциса точки A, 2 — її ордината.



Мал. 150

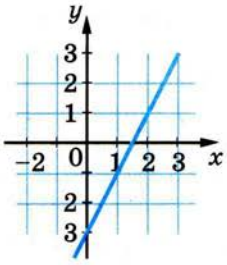
СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — дані числа, називають *лінійним рівнянням з двома змінними* x і y. Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то його називають *рівнянням першого степеня з двома змінними.*

Кожну пару чисел, яка задовольняє рівняння з двома змінними, називають *розв'язком* цього рівняння. Наприклад, пара чисел (3; −2) — розв'язок рівняння $5x + 3y = 9$. Кож-

www.4book.org

не рівняння першого степеня з двома змінними має безліч розв'язків. У декартовій системі координат кожному рівнянню першого степеня з двома змінними відповідає пряма — графік цього рівняння. На малюнку 151 зображено графік рівняння $2x - y = 3$. Координати кожної точки цього графіка задовольняють дане рівняння. Координати будь-якої іншої точки його не задовольняють.



Мал. 151

Якщо треба знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, то говорять, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь. Розв'язком системи рівнянь* називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

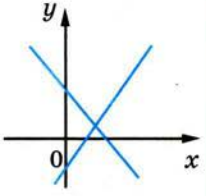
Кожній системі двох рівнянь першого степеня з двома невідомими в декартовій системі координат відповідає пара прямих. Оскільки дві прямі на площині можуть перетинатися, збігатися або бути паралельними, то й відповідна їм система рівнянь може мати один розв'язок, безліч розв'язків або не мати жодного розв'язку.

Розв'язувати системи рівнянь з двома змінними можна: способами підстановки, додавання або графічним.

Система лінійних рівнянь

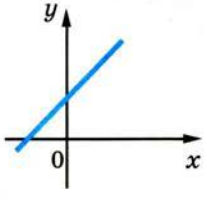
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$



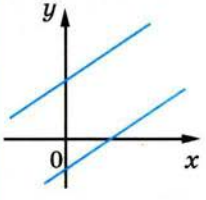
Має один розв'язок

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$



Має безліч розв'язків

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$



Не має жодного розв'язку

www.4book.org

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ

10. а) $y < x$. **19.** в) $y(-8) > y(0)$. **34.** $x = 1{,}5$. **37.** 2. **39.** а) $b > a$. **40.** а) $x > y$. **44.** б) $a = b$. **45.** а) 186,5. **46.** ґ) 10. **47.** г) 12. **49.** б) 0. **50.** ґ) 2. **51.** д) $-0{,}25$. **55.** 20 %. **71.** в) $5 + x < 6 + z$. **75.** б) $x^2 > xy$. **76.** в) $\sqrt{-x} > \sqrt{-y}$. **78.** $\frac{1}{b}, \frac{1}{d}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}$. **88.** б) $(3x + 1)(2x - 1)$.

103. а) $6 < x - y < 8$. **108.** в) $3{,}58 \cdot 10^6 < V < 3{,}66 \cdot 10^6$. **113.** г) 1. **122.** а) $-1 < x < 2$. **123.** О 12 год. **136.** в) $x \geq 5$. **137.** б) $x > 1$. **141.** б) $x \geq -2{,}6$. **143.** а) $x > 8$. **146.** а) $x < 4$. **147.** в) $x > -2$. **149.** а) 4. **153.** в) $x \geq 2$. **154.** а) $x > -2$. **155.** в) $z \geq 0{,}65$. **157.** а) $x > 5$. **158.** а) $c > 2$. **160.** г) Розв'язків немає. **161.** б) $x < 0$. **162.** [0; 4). **165.** Не більш ніж $25\frac{2}{3}$ км. **166.** а) $x < -0{,}5$; б) $x \geq -1$. **167.** в) $1 < x \leq 4$. **170.** в) $-0{,}2 \leq x \leq 0{,}6$. **171.** в) Якщо $a < 0{,}5$, то $x > 2a - 1$; якщо $a = 0{,}5$, то розв'язків немає; якщо $a > 0{,}5$, то $x < 2a - 1$. **173.** ґ) $1{,}5 \cdot 10^3$. **175.** На 50 %. **188.** а) [2; 5]; {3}. **190.** а) $a > c$. **191.** а) (3; ∞). **192.** а) (−∞; 0,2]. **198.** а) $x \leq a < y$.

201. а) $-1 \leq x \leq 1$. **203.** а) (−∞; ∞). **204.** б) $x \geq 4$. **206.** б) R; [−13; 1). **209.** д) $(-\infty; 1) \cup (4; \infty)$. **210.** а) R. **219.** б) 2 і 3. **221.** а) (−3; 1). **222.** а) Розв'язків немає. **224.** а) (6; 8). **226.** б) (10; ∞). **227.** в) −0,25. **228.** а) (2; 16]. **229.** а) {3, 4, 5, 6}. **230.** б) (−3; −1). **232.** а) (1,5; 2,5). **234.** б) (−∞; −0,4). **235.** а) [3;5]. **236.** а) $0{,}625 < x < 0{,}875$. **238.** а) (−2;7). **239.** в) (−5; ∞). **240.** а) $(-\infty; -3) \cup (7; \infty)$. **241.** г) $(-\infty; -9) \cup (-2; \infty)$. **242.** (−1; 1). **244.** а) (4; 10). **247.** а) Так; б) так. **248.** а) (−1; 3). **249.** а) (−4; 1); б) [−2,5; 4,5]. **250.** а) $(-\infty; 4{,}5) \cup (5{,}5; \infty)$. **251.** а) (2; 3). **267.** а) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0{,}5(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) = 0{,}5((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \geq 0$. **284.** 1633,4 т. **298.** а) 8.

316. (2; 2). **321.** а) (−6; 0); (0; 3). **325.** $m = 7$; так. **329.** а) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$. **332.** $p = 5$ гр. од.; $Q_S = Q_D = 4$ млн штук у рік; зменшиться на 8 %. **346.** а) R. **347.** г) [0; ∞); (−∞; 1]. **359.** в) Два. **363.** а) [−5; 4]. **370.** в) $x > -4$. **374.** а) (−∞; 0). **375.** а) (−∞; ∞). **394.** Так. **399.** а) $(-\infty; -c)$.

www.4book.org

414. а) $y=(x-2)^2+3$. **429.** а) 0,5. **430.** а) 200 кг. **442.** а) (0;4); в) (2; −4). **447.** $m=-6$, $n=14$. **450.** Ні. **452.** а) $x=3$. **464.** а) $y=3$. **469.** $b=-6$. **471.** Вказівка. Побудуйте квадрат зі стороною x і до його двух суміжних сторін добудуйте прямокутники зі сторонами x і 3. **475.** а) Два. **481.** а) (0; 4). **482.** а) $(-\infty; 3)\cup(3; \infty)$. **483.** а) [1; 2]. **484.** а) $(-\infty; 0{,}5]\cup[1; \infty)$. **485.** б) $(-\infty; 6)\cup(6; \infty)$. **486.** а) (1; 2). **487.** а) $(-\infty; -7)\cup[1; \infty)$. **490.** а) $(-\infty;-2]\cup[2; \infty)$. **491.** в) −1; 0; 1; 2. **492.** а) [1; 4]. **493.** а) (1,5; 2). **494.** а) (−2; 3). **495.** а) $(-3; \infty)$. **496.** а) $(-\infty; -7]\cup[-5; \infty)$. **497.** а) (0,5; 3). **498.** а) $[-7;1]\cup[2; \infty)$. **499.** а) [−2; 3].

500. а) $\{-1\}\cup[1; 2{,}5]$. **501.** б) $(-\infty; 0{,}25)\cup[6; \infty)$. **502.** а) (−0,2; 0,2). **504.** а) [−1; 8]. **505.** а) $b\in[-1; 1]$. **506.** а) $m\in(-4; 4)$. **507.** а) [3; 4). **508.** а) $(-\infty; -1)\cup(3; 4]\cup[7; \infty)$. **509.** а) $(-1; 0)\cup(5; 6)$. **511.** Три. **512.** 10. **525.** а) (3; 0), (0; −3). **526.** в) (2; −1), (1; −2). **527.** б) (12; 16), (4; 0). **528.** а) (13; 3). **529.** а) (−5; −4), (−4; −5), (5; 4), (4; 5). **530.** а) (2; 8), (8; 2). **531.** а) (8; 6), (−5; −7). **532.** а) (−15; 25), (8; 2). **534.** а) (2; 1), (3; 2). **535.** а) (5; 1), (8; 2). **536.** а) (4; 4), (−4; 4). **537.** а) (−0,7; 4,1), (1,2; −1,6). **538.** а) $(4+\sqrt{10}\,;\ 4-\sqrt{10}\,)$, $(4-\sqrt{10}\,;\ 4+\sqrt{10}\,)$. **539.** а) (3; 5). **540.** а) (1; −1), (1; 1). **541.** а) (0; 10), (8; 2). **542.** а) (9; 3), (−6; 18). **543.** а) (−5; −1), (5; 1). **544.** а) (−2; −2), (1; 1). **545.** а) $(0;\ 3\sqrt{10}\,)$, $(0;\ -3\sqrt{10}\,)$, (9; 3), (−9; −3); в) (2; 4), (4; 2), $(3+3\sqrt{2}\,;\ 3-3\sqrt{2}\,)$ і $(3-3\sqrt{2}\,;\ 3+3\sqrt{2}\,)$. **546.** а) (−3; 4), (4; −3). **547.** а) (6; 2), (−6; −2); в) (1; 2), (2; 1). **548.** а) (2; 4), (4; 2); б) (7; 5), (−5; −7). **549.** а) $a=\frac{2}{3}$ і $b=\frac{3}{2}$, або $a=2$ і $b=\frac{1}{2}$. **550.** $17\sqrt{2}$ лін. од. **551.** $\sqrt{2}$ лін. од. **559.** −10 і −0,9 або 0,9 і 10. **561.** а) 23 і 21. **562.** а) 12 дм і 5 дм. **563.** 6 м і 8 м. **564.** 35 см і 12 см. **565.** 8 см і $4\sqrt{2}$ см. **566.** 15 см і 10 см. **567.** 3, 5 і 8 см. **568.** 84 год і 60 год. **571.** 180 деталей. **572.** 15 днів. **573.** 49 верстатів. **574.** 32 $м^3$. **575.** 36 хв і 72 хв. **576.** 39 м, 52 м і 65 м. **577.** 300 км або 360 км. **578.** 48 км/год. **579.** 12 км/год, 18 км/год, 24 км. **580.** 18 км/год, 2 км/год. **583.** 10 км/год. **584.** 72 км/год. **585.** 60 км/год або 93 км/год. **586.** 12 хв і 19,8 хв.

www.4book.org

604. Половину. **606.** 10 років. **607.** 6 днів. **608.** 130 т і 65 т. **609.** 20 кг і 60 кг. **610.** 160 яєць. **611.** 14 пиріжків. **612.** 200 підручників. **613.** За 24 дні. **614.** Розв'язати рівняння $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$. Це спільна модель для трьох даних задач. $x=1\frac{7}{8}$ год. **615.** 12. **617.** 24. **619.** 7 осіб. **621.** 11 команд. **623.** 12 см і 25 см. **624.** 18 футів і 32 фути. **626.** 15 год і 10 год. **627.** За 10 год. **628.** 60 г і 40 г. **629.** На 60 г. **630.** На 20 %. **632.** 5 грн.; 635 млн штук за рік; попит зменшиться, а пропозиція збільшиться відповідно на 23 і 97 млн штук за рік. **633.** 163 940 грн, 109 850 грн. **635.** 2 учні. **636.** 1 учень. **637.** 24 км/год і 16 км/год. **638.** 45 км/год і 50 км/год. **639.** 40 км/год і 50 км/год. **640.** 60 км/год і 120 км/год. **641.** 60 км/год і 50 км/год. **642.** 18 км/год і 24 км/год. **643.** На 8 км. **645.** Валентин — «К», Галина — «Т», Поліна — «П». **658.** а) 0,02; в) 2,16. **659.** а) 40 %; б) 53 %. **660.** 1. а) 147 грн. **661.** б) 100. **663.** б) 16 %. **664.** 1,9 кг. **665.** 2700 т. **667.** 200 кг, 300 кг і 500 кг. **668.** 182 см. **671.** ≈95 %. **674.** На 108 %, на 8 %. **681.** 375 грн. **684.** 11. **688.** Збільшилась у 1,25 раза. **689.** 9 %-вий. **696.** 300 г і 500 г.

729. а) 37,25; б) 0,026. **730.** г) $72 \le 73 \le 74$. **731.** 1,078, 0,0003; 1,08, 0,0017; 1,1, 0,0217; 1, 0,0783. **732.** 315 г; 5 г. **734.** а) Так; б) ні. **748.** 124 км/год, 0,2 км/год. **752.** $x+y=31{,}20$; $x-y=12{,}54$; $xy=210{,}1$; $x:y=2{,}173$. **753.** а) 8,72. **763.** б) 0,25. **764.** 0,25. **766.** а) 0,064; б) 0,288; в) 0,432. **767.** а) 0,3; б) 0,2; в) 0,1. **769.** 0,8. **771.** 0,5. **772.** 0,5. **773.** 0,0061. **774.** 0,9. **775.** 0,3. **776.** 0,9. **777.** б) 0,2. **778.** а) 0,95; б) 0,05. **781.** а) 0,488; б) 0,096. **782.** 0,2. **784.** б) 0,68; в) 0,72. **785.** 35. **794.** а) 50; б) 15. **795.** 5,8. **796.** 7,5 %, 12,5 %, 10 %, 5 %, 15 %, 25 %, 15 %, 25 %, 15 %, 7,5 %, 2,5 %. **798.** $(2\cdot 10+3\cdot 20+5\cdot 20):50=3{,}6$. **799.** 50.

800. а) Мода 6, медіана 6, середнє значення 5,3; б) мода 13, медіана 13,5; середнє значення 13,9. **830.** а) 67; в) 4. **831.** На 5. **832.** У 10 раз. **833.** $b_6=64$; $b_8=256$; $b_{10}=1024$. **835.** $a_n=7n-4$. **836.** 7, 9, 11, 13, 15, ... **839.** в) 15, 10, 5, 0, −5. **841.** $a_2=-2$; $a_5=7$;

www.4book.org

$a_{10} = 22$. **842.** а) $n = 17$; б) $n = 16$. **843.** а) $16 \le n \le 51$. **844.** а) 124. **845.** 14. **847.** $k = 4$, $p = 3$. **848.** $a_n = (4 - n)^2$. **849.** а) $a_n = 3n - 1$. **859.** а) $a_3 = 4$. **860.** а) $a_5 = -10$. **863.** 1000 грн., 1500 грн. **865.** а) (5; 0), (1; 4). **870.** а) 7, 9, 11, 13, 15. **872.** а) $a_7 = -19$, $a_{20} = -71$. **873.** $d = 11$, $a_{10} = 102$, $a_{20} = 212$. **874.** $d = 5$, $a_{10} = 47$. **875.** а) $d = 15$; б) $d = -0{,}2$. **876.** а) $a_1 = 5$; б) $a_1 = 40$. **877.** $a_1 = 5$, $a_5 = 17$, $a_{11} = 35$, $a_{21} = 65$. **878.** $d = -9$, $a_1 = 86$, $a_5 = 50$, $a_{21} = -94$. **879.** $a_7 = 14$, $a_{20} = 7{,}5$. **880.** $a_{40} = 20$, $a_{41} = 20{,}5$. **883.** а) -125. **884.** а) $a_1 = -85$, $d = 20$; б) $d = 6$, $a_1 = -37$. **885.** а) 50. **886.** а) 2420. **887.** а)1088. **888.** $a_{20} = 79$; $S_{20} = 820$. **889.** 1830. **891.** 5050. **892.** 10 000. **893.** 645 см. **894.** 1680 грн. **895.** $a_9 = 16{,}1$, $a_n = 2n - 1{,}9$, $a_{3p} = 6p - 1{,}9$. **896.** в) 95. **897.** а) $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_{21} = 61$, $a_{100} = 298$; г) $a_1 = 2{,}8$, $d = 1{,}2$, $a_{21} = 26{,}8$, $a_{100} = 121{,}6$.

901. а) 7. **902.** а) 13. **903.** б) 16. **904.** 39. **905.** а) $c_1 = 2$, $d = 5$. **907.** $A_3B_3 = 7{,}5$ см, $A_nB_n = 2{,}5n$ см. **912.** 18 коней. **913.** а) 430; г) 300. **914.** 9900. **916.** а) 166 833. **917.** а) 2020. **918.** $a_7 = 8$. **919.** 75. **920.** $S_{27} = 54$. **921.** а) $S_{20} = 1090$. **922.** а) $a_5 = 3$. **923.** $S_9 = 63$. **924.** 90 разів. **925.** а) ≈ 314 м. **926.** Розгляньте прогресію $a - 2d$, $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$, сума членів якої $180(5 - 2)$. **927.** $3{,}5(a + b)$.

928. а) $\frac{3}{2x+1}$; в) $\frac{c+2}{c-1}$. **929.** а) (0; 8). **937.** б) $q = 0{,}1$, $b_5 = 0{,}00001$. **938.** $b_4 = -24$, $b_7 = -192$, $b_n = -3 \cdot 2^{n-1}$. **939.** а) $b_1 = 3$. **940.** г) $b_{12} = 64$. **941.** а) $b_7 = 48$; б) $b_7 = -24$. **942.** а) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. **943.** а) $n = 5$. **944.** Так. **945.** а) $S_6 = -1092$. **946.** а) 511. **947.** а) $S_6 = 5208\frac{1}{3}$. **948.** г) $S_{15} = 32\,767$. **950.** 4 294 967 295 або $(2^{32} - 1)$ пфенігів. **951.** а) $b_1 = 1736\frac{1}{9}$, $q = \pm\frac{3}{5}$. **954.** а) 20. **955.** а) $b_1 = 1$, $q = 3$. **960.** 1. **961.** -2048. **962.** 3, 6, 12. **964.** ≈ 455 мм рт. ст. **965.** Так. **968.** 27, 18, 12, 8. **969.** а) $n = 6$; б) $n = 10$. **970.** 3, 6, 12, 18 або 18,75, 11,25, 6,75, 4,05. **971.** $-0{,}5$, -1, -4, -16 або $-0{,}5$, 1, 4, 16. **972.** а) b_{12}. **973.** $P_n = b_1^n q^{0{,}5n(n-1)}$. **974.** Понад 10 000 крб. **975.** $\approx 2^{72}$ бактерій. **976.** 2^{65}, а це набагато більше, ніж усіх людей на Землі. **977.** а) (0; 9). **979.** 8,8 і 7,8 г/см^3. **984.** а) 3; г) $-\frac{16}{3}$.

www.4book.org

985. а) 1,5. **986.** $\frac{4}{3}$. **987.** а) $\frac{10}{3}$. **988.** б) $\frac{2}{3}$. **989.** а) $\frac{4}{9}$. **990.** 6 см. **993.** а) $2+\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{4-\pi}$. **994.** $6\sqrt{3}\,r$, $4\pi r$. **995.** в) $\frac{24}{99}$. **996.** в) $\frac{7}{6}$. **996.** б) $\frac{1}{1+x}$. **998.** $16+8\sqrt{2}$. **999.** 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$, ...

1000. $b_4=\frac{4}{9}$. **1001.** 1 і $\frac{1}{3}$. **1002.** а) −50; б) −5050. **1003.** а) 40. **1006.** а) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{3}$.

1101. Піднесіть дані вирази до квадрата. **1102.** Покажіть, що $\sqrt{9\pm4\sqrt{5}}=\sqrt{5}\pm2$. **1103.** а) $2a^2+b^2+c^2-2ab-2ac=(a-b)^2+(a-c)^2$. **1104.** а) $x^4+y^4-x^3y-xy^3=(x-y)(x^3-y^3)$, а числа $x-y$ і x^3-y^3 однакових знаків; б) $(x-1)^2+(x-2y)^2+(y-2)^2+1>0$. **1107.** $x^2+(1-x)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x-1)^2$. **1111.** Найменше значення x, при якому вираз $\sqrt{x-6}$ має значення, дорівнює 6. Множина розв'язків кожної нерівності $(6;\infty)$. **1115.** $y=|x+\sqrt{2}|+|x-\sqrt{2}|$. **1119.** 0, 2, 4, 3, 2; побудуйте графік функції $y=|x^2-6x+5|$. **1120.** а) $(-\infty;0]\cup[6;\infty)$; б) розв'язків немає. **1123.** ≈16 днів. **1124.** Ліворуч. **1125.** 3 : 4. **1126.** $x=3\frac{3}{4}$; $y=5\frac{1}{2}$; $z=7\frac{1}{4}$. **1127.** а) 71 071; б) 428 429. **1128.** $a_1^n(q^{n^2}-1):(q^n-1)$. **1129.** $q:(1-q)^2$. **1130.** 6, −3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, ... **1131.** 1 або −2. **1132.** Покажіть, що при $a+c=2b$ різниця між третім і другим тричленами дорівнює різниці між другим і першим. **1130.** а) $a^n=1{,}5+(-1)^n\cdot0{,}5$; б) $a^n=(-1)^n n$. **1134.** а) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; б) $n^2(n+1)$. **1136.** 3, 7, 11, ... **1137.** 1480 фунтів. **1138.** 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35. **1139.** $a^n=n^2+2$. **1140.** $x=7$. **1141.** Так, це арифметична прогресія 16, 31, 46, ..., $15n+1$, ... **1146.** а) 3, 12, 48 ... . **1148.** У 2 рази. **1149.** У 11 разів.

www.4book.org

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсциса точки 279
Аргумент функції 69

Вибірка 193
Вирази 273
— зі змінними 273
— раціональні 273
— цілі 274
Відсотки 163
— прості 165
— складні 165
Відсоткові гроші 165
Вісь абсцис 279
— ординат 279
Властивості нерівностей числових 16
— рівнянь 277
— степенів 276
— функцій 80

Гіпербола 71
Гістограма 193
Графік рівняння 280
— функції 69

Дискримінант 278
Доведення нерівностей 56
Дроби алгебраїчні 278

Знаки десяткові 176
— нерівності 8
Знаменник геометричної прогресії 231
Значущі цифри 176

Імовірність 186
Інвестована сума 165

Капіталізація відсотків 165
Квадрат двочлена 275
Квадратний корінь 276
Коефіцієнт 274
Компаундінг 166
Координатна площина 279
Корені квадратного рівняння 278
Куб двочлена 275

Масові явища 193
Математична статистика 193
Математичне моделювання 149
Медіана вибірки 194
Многочлен 274
Множина дійсних чисел 272
Мода вибірки 194
Модель 150
Мультиплікований множник 166

Наближені значення 175
— обчислення 175
Нерівності 7
— зі змінними 9
— з невідомими 28
— квадратні 113
— подвійні 22
— рівносильні 29
— числові 8, 16

Область визначення функції 69
— значень функції 69
Обчислення сум 242

www.4book.org

Одночлен 273
Ордината точки 279
Основна властивість дробу 275
— степеня 273
Оцінювання значень 23

Парабола 103, 106
Перетворення виразів з коренями 277
— графіків 91
Події 183
Послідовність 211
— зростаюча 213
— спадна 213
Похибка абсолютна 175
— відносна 176
Правила округлення чисел 272
— підрахунку цифр 177
Прикладні задачі 149
Проба 166
Прогресія арифметична 221
— геометрична 231
Проміжки 30, 38
Проміле 166
Пропорційність обернена 71
— пряма 70

Рівняння 277
— квадратні 278
— лінійні 277
— рівносильні 277
Різниця квадратів 275
— прогресії арифметичної 221
Розв'язок нерівності 29
— рівняння 277
— системи нерівностей 48
— системи рівнянь 122

Середнє арифметичне 57
— геометричне 57
— значення вибірки 194
Система нерівностей 48
— рівнянь 122
Стандартний вигляд числа 178
Степінь 273, 276
— з цілим показником 276
Сума нескінченної геометричної прогресії 243
— членів арифметичної прогресії 222
—— геометричної прогресії 233

Теорема Вієта 279
Тотожні вирази 273
Тотожність 273

Формула коренів квадратного рівняння 278
— складних відсотків 166
Формули скороченого множення 275
Функція 69
— зростаюча 83
— квадратична 103
— лінійна 70
— непарна 81
— парна 81
— спадна 83

Частотна таблиця 194
Числа дійсні 272
— ірраціональні 272
— раціональні 272

www.4book.org

Відомості про стан підручника

№	Прізвище та ім'я учня	Навчальний рік	Стан підручника		Оцінка
			на початку року	в кінці року	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович, БЕВЗ Валентина Григорівна

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Малюнок *В. Хайдурової*

Фото: *Ю. Бусленка, А. Віксенка, В. Соловйова*

Редактори: *О. П. Парполіто, Н. В. Демиденко*
Художній редактор *А. М. Віксенко*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Коректор *Є. С. Святицька*

Комп'ютерний набір і верстка СМП «АВЕРС»

Підписано до друку 07.07.2009. Формат 60×90 1/16.
Папір офсет. Гарнітура Шкільна. Друк офсет. Умов. друк.
арк. 18,0+0,25 форз. Обл.-вид. арк. 18,2+0,3 форз. Наклад 118 600 пр. Зам. 16/07

Видавництво «Зодіак-ЕКО»
Свідоцтво про державну реєстрацію серія ДК № 155 від 22.08.2000 р.
01004, Київ-4, вул. Басейна, 1/2

Видруковано ПП «ЮНІСОФТ»
61145, м. Харків, вул. Космічна, 21-А

www.4book.org

Нерівності

$a > b$, якщо число $a - b$ додатне,

$a < b$, якщо число $a - b$ від'ємне

Властивості числових нерівностей

Якщо $a < b$, то $b > a$

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$

Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$

Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$

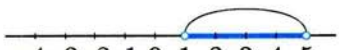
Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$

Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$

Якщо $0 < a < b$ і $0 < c < d$, то $ac < bd$

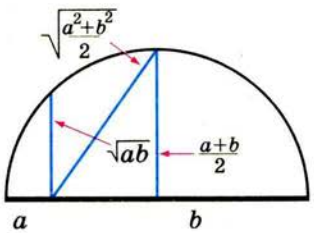
$|x| < 2$ $(-2; 2)$

$|x| > 2$ $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$|x - 3| < 2$  $(1; 5)$

Якщо $0 < a < b$,

то $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$



www.4book.org

Квадратична функція

$$y = ax^2 + bx + c$$

Квадратний тричлен

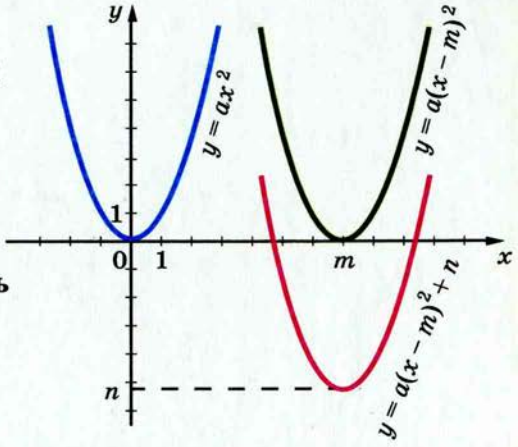
$$ax^2 + bx + c$$

Квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Квадратна нерівність

$$ax^2 + bx + c < 0$$

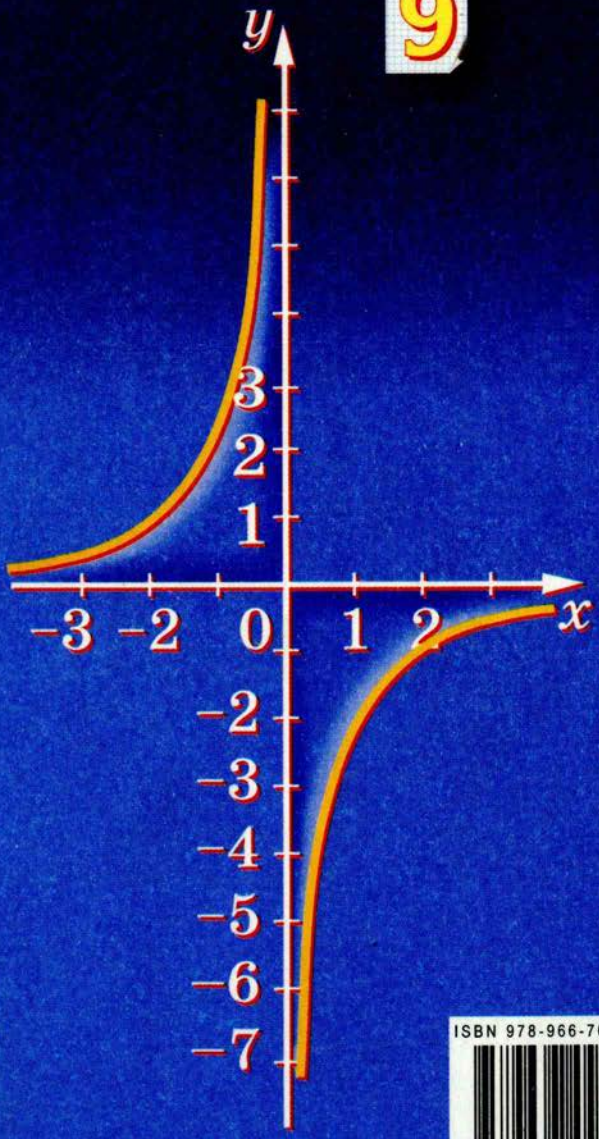


Квадрати натуральних чисел

Де-сятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

www.4book.org

Алгебра 9



ЗОДІАК ЕКО

ISBN 978-966-7090-64-7

9 789667 090647

www.4book.org